CINEMÁTICA:
SÍNTESIS DEL TEMA

Juan Francisco González Hernández

Resumen

Se resumen los contenidos y conceptos del tema estudiados en clase.

Índice

1. Introducción

La **Cinemática** es la parte de la Física que se encarga de *estudiar y describir* el movimiento sin atender a las causas que lo producen u originan.

En todo este tema, como el resto del curso, se trabajará en el Sistema Internacional de unidades y se usará preferentemente la notación científica en los resultados, a no ser que se especifique lo contrario.

Magnitud, en Física, *es* todo aquello que se puede *medir* de alguna forma. Si algo no lo podemos medir, es que no es magnitud, y, por consiguiente, no podemos aplicar el método científico a su observación y explicación.

¿Qué tipo de magnitudes hay desde un punto de vista matemático? En este nivel y curso, vamos a estudiar dos tipos fundamentales de magnitudes físicas[1]:

1. **Magnitudes escalares**. Tienen sólo un valor numérico que las caracteriza. Ejemplos: el tiempo, el espacio recorrido en una trayectoria por un móvil, la masa, la temperatura, la energía, la potencia, el área o superficie de un objeto, el volumen, la densidad,...

2. **Magnitudes vectoriales**. Aparte de un valor numérico, vienen especificadas también por dirección, sentido y, en casos particulares, por un punto de aplicación. Una magnitud vectorial es, intuitivamente hablando, un segmento o flecha orientado en el espacio o plano, cuya longitud se llama módulo, la recta donde se encuentra se llama dirección y la punta hacia donde se dirige la flecha es su sentido. Ejemplos de este tipo de magnitudes son: la

[1]Existen a nivel avanzado otro tipo de magnitudes más complicadas, como son las magnitudes espinoriales (y sus generalizaciones twistoriales), pseudoescalares, pseudovectoriales, tensoriales y pseudotensoriales,... Todas ellas pueden describirse en un marco matemático de manera unificada más avanzado que se sale del nivel del presente curso y etapa.

posición, velocidad, y aceleración de un móvil, la fuerza aplicada sobre un objeto,...

Desde el punto de vista de la escala o sistema de unidades, las magnitudes pueden ser **fundamentales**, si *no pueden* expresarse en términos de otras magnitudes, y **derivadas**, si *pueden* expresarse en términos de las magnitudes fundamentales de mi sistema de unidades elegido. En el Sistema Internacional de unidades hay siete magnitudes fundamentales (el resto de magnitudes son derivadas a partir de ellas):

1. **Espacio** recorrido(o longitud L). Su unidad es el **metro**, y se representa por la letra *m*. Todas las demás unidades de longitud pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

2. **Tiempo** (T). Su unidad es el **segundo**, y se representa por la letra *s*. Todas las demás unidades de tiempo pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

3. **Masa**(M). Su unidad es el **kilogramo**, y se representa por *kg*. Todas las demás unidades de masa pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

4. **Temperatura termodinámica o absoluta**(t). Su unidad es el **grado kelvin**, y se representa por *K*. Todas las demás unidades de temperatura pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

5. **Cantidad de sustancia**(n). Su unidad es el **mol**, y se representa por *mol*. Todas las demás unidades de cantidad de sustancia pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

6. **Intensidad de corriente eléctrica**(I). Su unidad es el **amperio**, y se representa por *A*. Todas las demás unidades de intensidad de corriente (y de carga eléctrica, que es una magnitud derivada en este sistema) pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

7. **Intensidad luminosa**(l). Su unidad es la **candela**, y se representa por *cd*. Todas las demás unidades de intensidad luminosa pueden expresarse como múltiplos o submúltiplos de ésta.

En el Sistema Internacional de unidades, el resto de magnitudes que no son estas siete puede ponerse en función de ellas y se consideran derivadas.

2. Variables cinemáticas

Para describir el movimiento, *se us*a un <u>sistema de referencia</u> formado por un origen **O**, donde se colacan unos ejes cartesianos (perpendiculares) de coordenadas X e Y en el plano[2], con un <u>punto de origen **O**</u>, y una base de vectores unitarios (tienen longitud la unidad) y ortogonales (perpendiculares) , también llamada ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

En este curso nos vamos a ocupar solamente de la descripción de movimientos en el plano, dejando el análisis del movimiento general en el espacio para años posteriores a aquellas personas que les interese.

El movimiento, además, *es relativo*: su descripción *depende* del sistema de referencia elegido (es decir, *depende* de la elección de coordenadas y del punto de origen). Para facilitar la comprensión de la descripción cinemática del movimiento, y coger cierta soltura, siempre que sea posible, colocaremos un sistema de refencia con un origen situado en el suelo [3].

[2]En el espacio se tendrían tres ejes perpendiculares, con una base $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

[3]Aquellos que estén acostumbrados a ponerlo en el punto de lanzamiento pueden hacerlo, siempre y cuando hagan los cálculos de manera oportuna y correcta. En ese caso, se deben *extremar* las precauciones con los signos de las posiciones, velocidades y aceleraciones.

2.1. Posición

Si tenemos un punto de origen **O**, y colocamos en ese punto nuestro sistema de ejes cartesianos perpendiculares, podemos determinar vectorialmente la posición de la partícula dando sus coordendas respecto a él, o, lo que es lo mismo, haciendo la descomposición cartesiana en componentes del **vector de posición**:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}$$

También, quien prefiera evitar la notación vectorial, puede escribir la anterior expresión sin vectores, pero dando las denominadas ecuaciones paramétricas de las coordenadas respecto del tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Hemos de notar que cuando un cuerpo se mueve, su vector de posición cambia en nuestro sistema de referencia. Por eso, en la anterior expresión hemos expresado que el vector de posición y sus componentes cambian como función del tiempo, al escribir $\vec{r}(t), x(t), y(t)$.

Entonces, podemos definir **movimiento** como sigue:

Movimiento

Es cambio del *vector de posición* en un instante de tiempo respecto de un sistema de referencia.

El conjunto formado por todas las posiciones de un móvil en los sucesivos instantes del tiempo forma una curva en el espacio que se denomina trayectoria. La trayectoria puede ser *rectilínea* o *curvilínea*.

Si el vector de posición se encuentra fijo o inmóvil respecto del tiempo, por tanto, el cuerpo *no* se mueve y se dirá que se encuentra *en* *reposo*. Si, por el contrario, el cuerpo se mueve desde un punto inicial **O**, con vector de posición $\vec{r}_o$ respecto de nuestro sistema de referencia, hasta otro punto final **P**, con vector de posición final $\vec{r}_f$, se define el vector **desplazamiento**, simbolizado por $\Delta\vec{r}$, como la diferencia de los vectores de posición en el punto final y el inicial. Matemáticamente:

Desplazamiento

Es la diferencia entre dos vectores de posición en un instante de tiempo respecto de un sistema de referencia.

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o}$$

En términos de componentes dicha diferencia es igual a:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} = (x_f - x_o)\,\vec{i} + (y_f - y_o)\,\vec{j}$$

o bien, para aquellos que prefieran prescindir de la notación vectorial

$$\Delta\vec{r} = \begin{cases} \Delta x = x_f - x_o \\ \Delta y = y_f - y_o \end{cases}$$

Por lo tanto, el desplazamiento es, como la posición, una *magnitud vectorial*. Los módulos de la posición y el desplazamiento vienen dados, usando el teorema de Pitágoras en la descomposición de componentes, por las siguientes expresiones:

$$\boxed{r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Observación importante: el módulo del desplazamiento coincide con el desplazamiento neto o espacio recorrido sólo en el caso de un movimiento haya seguido una trayectoria rectilínea.

2.2. Velocidad

Se define el vector velocidad media, $\vec{v}_m$ o simplemente $\vec{v}$ como sigue:

Velocidad media

Es el ritmo de cambio del vector de posición en cada instante del tiempo respecto de un sistema de referencia.

Es decir, intuitivamente, el vector velocidad media es el cociente entre el vector desplazamiento entre dos puntos cualesquiera y la variación de tiempo en la que se ha producido la variación de posición. Matemáticamente se tiene que su definición es:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}}$$

Las unidades de velocidad en el S.I. es el ms^{-1} ó $\frac{m}{s}$. Además, en el intervalo de tiempo en que se calcula la velocidad, $\Delta t = t_f - t_o$, normalmente se elige que $t_o = 0$ s, que quiere decir que empezamos a contar el tiempo en el instante que "encendemos" nuestro "reloj" o "empezamos" nuestro "problema". Normalmente, en la vida cotidiana se usan unidades diferentes, tales como el kmh^{-1}. Además, al igual que el vector posición o desplazamiento, es en general una función del tiempo:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}}$$

de donde indentificando con la fórmula anterior, podemos hallar las ecuaciones paramétricas de la velocidad, y eliminar la notación vectorial como hicimos en el caso del desplazamiento, dando las dos componentes de la velocidad:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = v_x(t) \\ v_y = v_y(t) \end{cases}$$

El módulo de la velocidad se llama *celeridad*, aunque no es un nombre muy usado en la literatura científica castellana, que prefiere usar simplemente el nombre velocidad o módulo de la velocidad[4]. Su valor será, usando el teorema de Pitágoras

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}}$$

Una propiedad ***muy importante*** es que el vector velocidad, en cada punto de la trayectoria, es tangente a la trayectoria considerada en ese punto.

2.3. Aceleración

Se define el vector aceleración media, $\vec{a}_m$ o simplemente $\vec{a}$ como sigue:

Aceleración media

Es el ritmo de cambio del vector velocidad en cada instante del tiempo respecto de un sistema de referencia.

Es decir, intuitivamente, el vector aceleración media es el cociente entre el vector velocidad entre dos puntos cualesquiera y la variación de tiempo en la que se ha producido la variación de velocidad. Matemáticamente se tiene que su definición es:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j}}$$

[4]En inglés, se diferencian bien estos dos casos porque a la velocidad se la denomina *velocity*, y a su módulo *speed*.

Las unidades de velocidad en el S.I. es el ms^{-2} ó $\frac{m}{s^2}$. Además, en el intervalo de tiempo en que se calcula la velocidad, $\Delta t = t_f - t_o$, normalmente se elige que $t_o = 0$ s, que quiere decir que empezamos a contar el tiempo en el instante que "encendemos" nuestro "reloj" o "empezamos" nuestro "problema". Además, al igual que el vector posición o desplazamiento, y la velocidad, es en general una función del tiempo:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}}$$

de donde indentificando con la fórmula anterior, podemos hallar las ecuaciones paramétricas de la velocidad, y eliminar la notación vectorial como hicimos en el caso del desplazamiento, dando las dos componentes de la velocidad:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \end{cases}$$

El módulo de la aceleración resulta ser

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

o bien

$$\boxed{a = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2}}$$

3. Clasificación general de los movimientos

Los movimientos pueden ser clasificados según exista o no aceleración en dos tipos:

- **Acelerados**. Si existe una aceleración no nula, $\vec{a} \neq 0$. En particular, si la aceleración es *constante*(en módulo, dirección y sentido), el movimiento es *uniformemente acelerado*. Si *no* es constante, el movimiento es, sólo, acelerado o variado.

- **No acelerados**. Si la aceleración es nula, $\vec{a} = 0$. En particular, el movimiento puede ser uniforme o no haber movimiento y estar el cuerpo en reposo.

También, los movimientos pueden clasificarse según el tipo de trayectoria que describen en:

- **Rectilíneos**. Si el móvil sigue una trayectoria lineal o recta.

- **Curvilíneos**. Si la trayectoria es una curva. Un caso particular importante lo constituyen los movimientos con trayectoria circular, denominados circulares por esta razón.

Finalmente, en el plano o el espacio, se puede establecer una clasificación adicional de movimientos:

- **Simples**. Cuando no pueden descomponerse en otros movimientos más sencillos.

- **Compuestos**. Cuando resultan de la composición de dos o más movimientos simples, o se pueden expresar en términos de estos.

Además, en clase, se enumeró una cantidad importante de movimientos más amplia, que, en algunos casos, están incluidos en las clasificaciones anteriores: el movimiento armónico simple, el movimiento ondulatorio, el movimiento de un fluido, el tiro parabólico, la caída libre, el tiro horizontal, el tiro vertical, el movimiento rectilíneo uniforme,...

4. Movimientos rectilíneos simples

A continuación, como repaso de cursos anteriores, o,en su caso, a modo de resumen sencillo, presentamos las ecuaciones de los movimientos más simples que hay en una dimensión (y los analizamos *sin* vectores al estar considerando solamente el movimiento en una sola dirección).

4.1. MRU: Movimiento rectilíneo y uniforme

Se trata de un movimiento con *trayectoria lineal* o recta y *velocidad constante*(en módulo, dirección y sentido). Si la velocidad es constante, entonces la aceleración es cero porque velocidad final e inicial coinciden. Por tanto, las ecuaciones que rigen el MRU, suponiendo que nos movemos, por ejemplo, en el eje X, serán:

$$\boxed{\text{MRU}=\begin{cases} a=0 \\ v=constante \leftrightarrow \Delta v=0 \\ \Delta x=v\Delta t \leftrightarrow x=vt \ \text{ si } x_0=0m,\ t_o=0s \end{cases}}$$

4.2. MRUA: Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Se trata de un movimiento con *aceleración constante*(en módulo, dirección y sentido) y *trayectoria lineal* o recta. Las ecuaciones de este movimiento son las siguientes:

$$\boxed{\text{MRUA}=\begin{cases} a=constante \\ v=v_o+a\Delta t \leftrightarrow \Delta v=a\Delta t \\ x=x_o+v_o\Delta t+\dfrac{1}{2}a\left(\Delta t\right)^2 \leftrightarrow \Delta x=v_o\Delta t+\dfrac{1}{2}a\left(\Delta t\right)^2 \end{cases}}$$

o bien, si escogemos que $t_o=0$s:

$$\boxed{\text{MRUA}(\text{t}_o=0s)=\begin{cases} a=constante \\ v=v_o+at \leftrightarrow \Delta v=at \\ x=x_o+v_ot+\dfrac{1}{2}at^2 \leftrightarrow \Delta x=v_ot+\dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}}$$

Además, en un MRUA existe una ecuación que liga el cuadrado de las velocidades, con la aceleración y el espacio recorrido, sin aparecer el tiempo (se despeja de la ecuación velocidad-tiempo, y al sustituir ese tiempo en la ecuación espacio-tiempo se general la ecuación siguiente):

$$v^2-v_o^2=2a\left(\Delta s\right)=2a\left(x-x_o\right)$$

4.3. Análisis de un MRUA sencillo(I): Tiro vertical

Un tiro vertical, en el eje Y tal y como colocamos generalmente los sistemas de coordenadas cartesianos, es un MRUA donde, colocando el origen en el suelo, se lanza un objeto con una velocidad inicial dada $v_o \frac{m}{s}$, mientras que actúa la aceleración de la gravedad, que es negativa,porque va hacia abajo y frena a nuestro objeto, con un valor de $a_y = -g = -9{,}8ms^{-2}$. Las ecuaciones correspondientes serán entonces, tomando $t_o = 0$ s:

$$MRUA(t_o = 0s) = \begin{cases} a_y = constante = -g \\ v = v_o - gt \leftrightarrow \Delta v = -gt \\ y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \ m \leftrightarrow \Delta x = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

El tiempo que tarda en frenarse el objeto (*la mitad* del *tiempo* que tardará en *caer*) se obtien anulando la velocidad final, $v = 0$, y despejando sale que

$$\boxed{t_{hmax} = \frac{v_o}{g}}$$

$$\boxed{t_{caer} = \frac{2v_o}{g} = 2t_{hmax}}$$

La altura máxima que alcanzará el objeto se obtiene evaluando este tiempo que acabamos de calcular en la ecuación para el espacio, y como escogemos el origen en el suelo, $y_o = 0$ m, con lo que dicha altura máxima es:

$$\boxed{y_{max} = y(t_{hmax}) = \frac{v_o^2}{2g}}$$

Además, la ecuación que relaciona cuadrado de velocidades con aceleración y altura será:

$$v^2 - v_o^2 = -2g\,(\Delta y) = -2g\,(y - y_o)$$

4.4. Análisis de un MRUA sencillo(II): Caída libre

Corresponde a un MRUA, que, situando el origen en el suelo[5], tiene por aceleración $a_y = -g = -9{,}8ms^{-2}$, y la altura inicial desde la que cae el objeto es y_o. Además, la velocidad inicial, al ser caída libre, será cero: $v_o = 0\frac{m}{s}$. Tomamos también que el tiempo inicial se anula por comodidad en nuestros cálculos, es decir, $t_o = 0$ s. Por tanto, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son:

$$MRUA(t_o = 0s) = \begin{cases} a_y = constante = -g \\ v = -gt \\ y = y_o - \dfrac{1}{2}gt^2 \leftrightarrow \Delta y = -\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

En el momento de llegar al suelo la altura se anula, $y = 0$, con lo que el tiempo que tarda en caer es simplemente despejando de la ecuación espacio-tiempo:

$$\boxed{t_{caer} = \sqrt{\frac{2y_o}{g}}}$$

La velocidad en ese instante, sustituyendo este tiempo en la ecuación de la velocidad, o bien de la ecuación de los cuadrados de la velocidad, sale:

$$\boxed{v_{suelo} = -\sqrt{2y_o g}}$$

5. Movimientos circulares simples

En el caso particular importante de un movimiento curvilíneo circular, es posible definir el análogo de las magnitudes lineales de posición,

[5]Si situamos el origen en el punto de lanzamiento, y medimos alturas positivas hacia abajo, la aceleración de la gravedad **es** *positiva*, así como los desplazamientos. Además, la *altura inicial* en este sistema de referencia sería *cero*. Quien lo haga así que tenga cuidado con los signos y la medida de espacios. La velocidad, por este motivo, se mide positiva hacia abajo también.

velocidad y aceleración. Estas nuevas magnitudes se llaman oportunamente espacio angular(o ángulo φ), velocidad angular (también llamada frecuencia angular o pulsación ω) y aceleración angular (α). Matemáticamente la velocidad angular y la aceleración angular se definen, respectivamente, como sigue:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

y miden intuitivamente el ritmo de cambio del ángulo(en radianes) y la velocidad angular(en $rads^{-1}$) en cada instante del tiempo. Las unidades de α son los $rads^{-2}$. Además, las magnitudes angulares se pueden relacionar en cualquier momento con las variable lineales como sigue:

$$\Delta s = R\Delta\varphi \leftrightarrow s = R\varphi$$
$$\Delta v = R\Delta\omega \leftrightarrow v = R\omega$$
$$a = R\alpha \longleftrightarrow \text{Aceleración tangencial}$$

La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes es, como ya se sabe

$$2\pi\ rad = 360^{\circ}$$

Otras variables en los movimientos circulares y curvilíneos relevantes e importantes son:

- **Período,T**. Es el tiempo que tarda un móvil en dar una vuelta completa, o pasar por el mismo punto, en su movimiento circular (también podría ser curvilíneo, oscilatorio u ondulatorio). Sus unidades serán los segundos. Matemáticamente su fórmula viene definida por la expresión

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- **Frecuencia,f**. Se define como el número de oscilaciones o vueltas que da en un segundo. Se mide en herzios (**Hz** o s^{-1}). En algunos libros antiguos, y por algunos profesores, se usa la letra griega ν. NO es recomendable esta práctica, ya obsoleta en las notaciones internacionales aceptadas. Su fórmula es

$$\boxed{f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}}\longleftrightarrow \omega=2\pi f$$

- **Número de vueltas,N**. Es el el cociente entre el ángulo total recorrido por el móvil giratorio, entre el espacio angular de una vuelta circular. Matemáticamente tiene la siguiente expresión sencilla:

$$\boxed{N=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

5.1. MCU: Movimiento circular y uniforme

Es un movimiento con trayectoria circular y aceleración angular nula. Las ecuaciones de este movimiento, por analogía o semejanza con las del MRU serán:

$$\text{MCU=}\begin{cases}\alpha=0\\ \omega=constante\leftrightarrow\Delta\omega=0\\ \Delta\varphi=\omega\Delta t\leftrightarrow\varphi=\omega t\ \text{ si } \varphi_0=0rad,\ t_o=0s\end{cases}$$

MUY IMPORTANTE: En cada punto de una partícular que gira con MCU la velocidad lineal, aun siendo constante en módulo, cambia de dirección. Eso significa que en un MCU existe, a pesar de todo, una aceleración intrínseca diferente a la que hasta ahora hemos considerado.

Componentes intrínsecas de la aceleración: Si a toda partícula móvil le añadimos un sistema de referencia móvil con la partícula, llamado sistema intrínseco, en ese sistema la aceleración se puede descomponer como sigue

$$\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

en donde $\vec{\tau}, \vec{n}$ son dos vectores unitarios tangencial y normal a la trayectoria en cada punto del sistema de referencia ¡móvil! y ¡no fijo!. La aceleración tangencial, a_t, ya la hemos visto antes y es el cambio del módulo de la velocidad respecto del tiempo:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = R\alpha$$

Pero la nueva componente intrínseca, a_n, y que existe incluso en el caso de que el movimiento sea un MCU, vale:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

y se llama **aceleración normal** o **centrípeta**. Mide el **cambio** de la *dirección de la velocidad*, respecto del tiempo. Además, se verifica que en componentes intrínsecas, hay la siguiente relación pitagórica entre los módulos de las diferentes velocidades (total, tangencial y centrípeta):

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

5.2. MCUA: Movimiento circular uniformemente acelerado

Se trata de un movimiento con *aceleración angular constante* y *trayectoria circular*. Las ecuaciones de este movimiento son las siguientes:

$$\boxed{\text{MCUA=}\begin{cases}\alpha = constante\\ \omega = \omega_o + \alpha\Delta t \leftrightarrow \Delta\omega = \alpha\Delta t\\ \varphi = \varphi_o + \omega_o\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\left(\Delta t\right)^2 \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega_o\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\left(\Delta t\right)^2\end{cases}}$$

o bien, si escogemos que $t_o = 0$s:

$$\text{MCUA}(\text{t}_o = 0s) = \begin{cases} \alpha = constante \\ \omega = \omega_o + \alpha t \leftrightarrow \Delta\omega = \alpha t \\ \varphi = \varphi_o + \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

Además, en un MCUA existe una ecuación que liga el cuadrado de las velocidades angulares, con la aceleración angular y el espacio angular recorrido, sin aparecer el tiempo (se despeja de la ecuación velocidad angular-tiempo, y al sustituir ese tiempo en la ecuación espacio angular-tiempo se general la ecuación siguiente):

$$\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\Delta\varphi\right) = 2\alpha\left(\varphi - \varphi_o\right)$$

6. Movimientos compuestos

Un movimiento compuesto es aquel que se forma o puede obtenerse componiendo o juntando dos (o más) movimientos simples. Eso equivale a hacer un análisis vectorial del movimiento, porque si estudiamos cada componente por separado y las unimos, generamos el movimiento completo compuesto resultante.

El Principio de independencia del movimiento de Galileo señala que, en cualquier movimiento, es independiente o equivalente que analicemos las componentes de un movimiento separadamente que conjuntamente, puesto que su efecto físico es el mismo[6]. Matemáticamente, este principio simplemente me dice que en vez de analizar el vector de posición como un todo desde el principio, pueden analizarse las componentes de los vectores de posición, en cada eje, de forma separada, aplicando la ecuación cinemática correspondiente en cada uno de estos ejes.

La metodología general para resolver un problema de composicición de movimientos es la siguiente:

[6] Galileo comprobó este hecho mediante diversos artilugios y experimentos.

1. Dibujar un sistema de referencia, con el origen **O** preferentemente situado en el suelo[7].

2. Analizar si tenemos aceleración en cada eje, señalando el tipo de movimiento, y por tanto, de ecuaciones, que aplicaremos para la cinemática de los mismos.

3. Escribir las ecuaciones de movimiento de nuestro objeto en cada eje.

4. (*Opcional*) Escribir los vectores de posición, velocidad y aceleración para la partícula completos.

5. Resolver las preguntas que nos planteen usando las ecuaciones del movimiento.

6.1. Tipo (I): Tiro horizontal

Se trata de la composición de un MRU(Eje X) y un MRUA(Eje Y) de caída libre. El movimiento resultante resulta en una trayectoria de tipo *parabólico*. Las ecuaciones para cada eje son las siguientes:

- EJE X(MRU):

$$\boxed{\text{MRU}=\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = constante \leftrightarrow \Delta v_x = 0 \\ \Delta x = v\Delta t \leftrightarrow x = v_x t \;\text{ si } x_0 = 0m,\; t_o = 0s \end{cases}}$$

- EJE Y(MRUA, altura inicial y_o, velocidad inicial en el eje Y, $v_{oy} = 0$):

[7] De nuevo, mucho cuidado a los que uséis otros puntos de origen.

$$\text{MRUA}(\mathrm{t}_o = 0s) = \begin{cases} a_y = constante = -g \\ v_y = v_{oy} + at \longleftrightarrow v_y = -gt \\ y = y_o + v_{oy} + \dfrac{1}{2}at^2 \leftrightarrow y = y_o - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo se calcula igualando a cero la altura del eje Y:

$$t_{suelo} = \sqrt{\frac{2y_o}{g}}$$

La velocidad en el suelo se calcula evaluando las componentes de la velocidad en el tiempo anterior.
El alcance máximo se obtiene evaluando el tiempo que tarda en llegar al suelo en la ecuación para la variable horizontal X:

$$X_{max} = v_x t_{suelo}$$

6.2. Tipo (II): Tiro oblícuo o parabólico

Se trata de la composición de un MRU y un MRUA(lanzamiento vertical), de forma que hay un ángulo de elevación φ con respecto a la horizontal. Para tratar el problema debemos descomponer la velocidad inicial en dos componentes usando trigonometría. Usando un origen situado en el suelo, y suponiendo que lancemos desde una altura inicial nula, las ecuaciones de nuestro tiro parabólico son las siguientes:

- EJE X(MRU):

$$\text{MRU}=\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = constante = v_o \cos\varphi \leftrightarrow \Delta v_x = 0 \\ \Delta x = v_x \Delta t \leftrightarrow x = (v_o \cos\varphi)\, t \;\text{ si } x_0 = 0m,\ t_o = 0s \end{cases}$$

- EJE Y(MRUA, altura inicial $y_o = 0$, velocidad inicial en el eje Y, $v_{oy} = v_o \sin\varphi$):

$$\boxed{\text{MRUA}(\mathrm{t}_o = 0s) = \begin{cases} a_y = constante = -g \\ v_y = v_{oy} + at \longleftrightarrow v_y = v_o \sin\varphi - gt \\ y = y_o + v_{oy} + \frac{1}{2}at^2 \leftrightarrow y = (v_o \sin\varphi)\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$$

El tiempo que tarda en caer al suelo es el doble del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.
La altura máxima se obtiene que sacando primero el tiempo para el cual se anula la componente Y de la velocidad:

$$t_{hmax} = \frac{v_o \sin\varphi}{g}$$

Entonces

$$t_{xmax} = 2t_{hmax} = \frac{2v_o \sin\varphi}{g}$$

Y la altura máxima y el alcance máximo, al sustituir estos dos tiempos en las respectivas ecuaciones para el espacio vertical y horizontal salen:

$$Y_{max} = y(t = t_{hmax}) = \frac{v_o^2 \sin^2\varphi}{2g}$$

$$X_{max} = x(t = t_{xmax}) = \frac{2v_o^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_o^2 \sin(2\varphi)}{g}$$

El valor máximo del alcance para una velocidad *prefijada* se produce cuando $2\varphi = 90$, esto es, cuando $\varphi = 45^{o}$.

6.3. Tipo (III): Movimiento de arrastre en una corriente (2 MRU)

Se trata de una composición de dos MRU, con aceleraciones nulas en los dos ejes, pero velocidades constantes en los mismos, en una corriente que tiene una anchura **d** dada. Nos ponemos en un origen situado en una de las orillas del "río". Las ecuaciones de los movimientos serán:

- Eje X(MRU, velocidad constante v_x).

$$\text{MRU}=\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = constante \leftrightarrow \Delta v_x = 0 \\ \Delta x = v_x \Delta t \leftrightarrow x = v_x t \;\; \text{si } x_0 = 0m,\; t_o = 0s \end{cases}$$

- Eje Y(MRU, velocidad constante v_y).

$$\text{MRU}=\begin{cases} a_y = 0 \\ v_x = constante \leftrightarrow \Delta v_y = 0 \\ \Delta y = v_x \Delta t \leftrightarrow x = v_y t \;\; \text{si } y_0 = 0m,\; t_o = 0s \end{cases}$$

El tiempo que tarda en llegar a la orilla se calcula igualando la anchura al desplazamiento vertical, eje Y:

$$t_{orilla} = \frac{d}{v_y}$$

El valor del punto X sobre la otra orilla a donde llega se obtiene sustituyendo este valor en la ecuación del desplazamiento horizontal,eje X:

$$X_{orilla} = v_x t_{orilla} = \frac{v_x d}{v_y}$$

Los valores de la velocidad y la posición en cualquier instante del tiempo se obtienen evaluando dicho tiempo en las ecuaciones de la velocidad y posición.

6.4. Tipo (IV): Encuentro entre dos objetos móviles(2 objetos diferentes)

Supongamos que tenemos dos objetos móviles, A y B, y queremos ver si se encuentran en determinado punto e instante del tiempo. Para verlo, tenemos que plantear sus ecuaciones de movimiento *en el mismo sistema de referencia* y para un mismo valor del tiempo.Entonces se mira si sus posiciones son las mismas[8]. En el caso sencillo de dos MRUA, hecho en clase, es suficiente con ver si para algún tiempo las alturas coinciden, es decir:

$$y_A(t) = y_B(t)$$

En el caso general de la "intercepción" de dos objetos(un problema habitual en balística militar), se debe cumplir la condición más general de que los vectores de posición de las partículas coincidan en un mismo instante del tiempo:

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t)$$

o bien, en términos de componentes,

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) \longleftrightarrow \begin{cases} x_A(t) = x_B(t) \\ y_A(t) = y_B(t) \end{cases}$$

[8]Recordar el problema del lanzamiento de móviles de un chico en el suelo a una chica en el balcón.

A. FORMULARIO BÁSICO

A.1. Magnitudes vectoriales generales

Vector de posición☺

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Vector desplazamiento☺

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o = \Delta x(t)\vec{i} + \Delta y(t)\vec{j}$$

Vector velocidad media☺

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Vector aceleración media☺

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

Módulos de la aceleración, velocidad y posición☺

$$\boxed{a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad \boxed{v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad \boxed{r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

A.2. Magnitudes angulares y diversas relaciones útiles

Velocidad angular☺

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Aceleración angular☺

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Período☺

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Relaciones entre magnitudes lineales y angulares☺

$$\Delta s = R\Delta\varphi \leftrightarrow s = R\varphi$$

$$\Delta v = R\Delta\omega \leftrightarrow v = R\omega$$

$$a = R\alpha \longleftrightarrow \text{Aceleración tangencial}$$

Equivalencia radianes-grados sexagesimales☺

$$2\pi\ rad = 360^{\text{o}}$$

Frecuencia y número de vueltas☺

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \longleftrightarrow \omega = 2\pi f$$

$$\boxed{N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

A.3. Componentes intrínsecas de la aceleración

Componentes intrínsecas☺

$$\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

Aceleración tangencial☺

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = R\alpha \longleftrightarrow \text{Aceleración tangencial}$$

Aceleración normal☺

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \longleftrightarrow \text{Aceleración normal o centrípeta}$$

Relación pitagórica de aceleración total-tangencial-normal☺

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

A.4. MRU

$$\text{MRU}=\begin{cases} a=0 \\ v=constante \leftrightarrow \Delta v=0 \\ \Delta x=v\Delta t \leftrightarrow x=vt \ \text{ si } x_0=0m,\ t_o=0s \end{cases}$$

A.5. MRUA

$$\text{MRUA}=\begin{cases} a=constante \\ v=v_o+a\Delta t \leftrightarrow \Delta v=a\Delta t \\ x=x_o+v_o\Delta t+\dfrac{1}{2}a\left(\Delta t\right)^2 \leftrightarrow \Delta x=v_o\Delta t+\dfrac{1}{2}a\left(\Delta t\right)^2 \end{cases}$$

o bien, si escogemos que $t_o = 0$s:

$$\text{MRUA}(\text{t}_o=0s)=\begin{cases} a=constante \\ v=v_o+at \leftrightarrow \Delta v=at \\ x=x_o+v_ot+\dfrac{1}{2}at^2 \leftrightarrow \Delta x=v_ot+\dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

$$v^2-v_o^2=2a\left(\Delta s\right)=2a\left(x-x_o\right)$$

A.6. MCU

$$\text{MCU}=\begin{cases} \alpha=0 \\ \omega=constante \leftrightarrow \Delta\omega=0 \\ \Delta\varphi=\omega\Delta t \leftrightarrow \varphi=\omega t \ \text{ si } \varphi_0=0rad,\ t_o=0s \end{cases}$$

Nota importante: En un MCU siempre es $a_t = 0$ pero siempre $a_n = \dfrac{v^2}{R} \neq 0$.

A.7. MCUA

$$\text{MCUA}(\mathrm{t}_o = 0s) = \begin{cases} \alpha = constante \\ \omega = \omega_o + \alpha t \leftrightarrow \Delta\omega = \alpha t \\ \varphi = \varphi_o + \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega_o t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

$$\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\Delta\varphi\right) = 2\alpha\left(\varphi - \varphi_o\right)$$