La aguja de Buffon

March 15, 2016

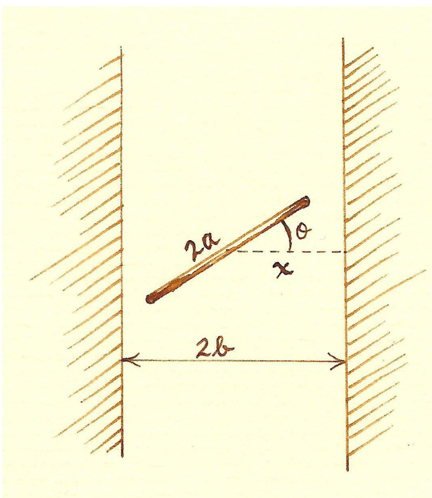
1 Una historia singular

Estas notas sobre el método de Buffon tienen su origen en mis propios conocimientos, a través del libro [1], y de diferentes notas manuscritas, mías y de un nexo colaborador. Yo puse mi conocimiento de LaTeXy LaTeX 2$_\varepsilon$para la edición del presente manuscrito.

En algún momento y en algún lugar, a alguien se le ocurrió este ejemplo que ingenio rebosa y que yo aquí sólo reproduzco y simplifico. El problema es sencillo de plantear:

"¿Cómo se puede estimar el número π a partir de una aguja y una mesa o superficie con rayas pintadas?"

La solución se encuentra realizando el experimento de lanzar sucesivamente la aguja sobre la mesa y observando su posición. Sean las variables X y Θ las representadas en el dibujo siguiente



Con $b > a$ $(2b > 2a)$ se tiene que
$2a$: longitud de la aguja
$2b$: separación de las líneas
X: distancia del centro de la aguja a la línea más próxima
Θ: ángulo de la aguja con la perpendicular a las líneas
X, Θ son además variables aleatorias, independientes y uniformes, con la forma

$$X \in [0, b] \to f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{si} \quad X \in [0, b] \\ 0 & \text{si} \quad X \notin [0, b] \end{cases}$$

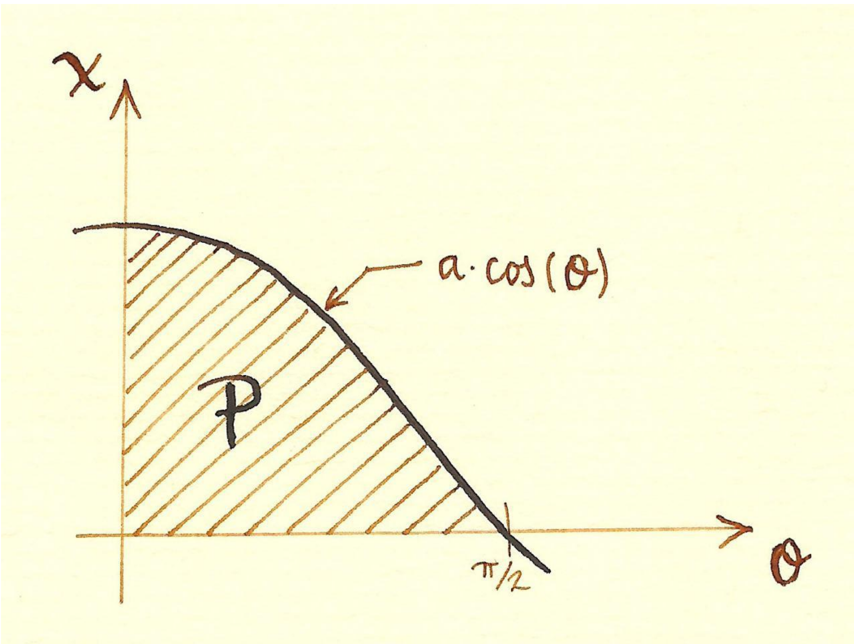
$$\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to f(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & \text{si} \quad \Theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{si} \quad \Theta \notin [0, \pi/2] \end{cases}$$

También definimos la distribución conjunta

$$f(X, \Theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi b} & \text{si} \quad \Theta \in [0, b] \wedge \Theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Consideremos el suceso S, consistente en que la que aguja cae sobre las líneas con $X \leq a \cos \Theta$. La probabilidad de que esto ocurra es

$$P = \iint f(X, \Theta) dX d\Theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \Theta} \frac{2}{\pi b} dX d\Theta = \frac{2a}{\pi b}$$



La probabilidad de que la aguja caiga sobre una línea es igual a

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{N_1}{N}$$

Igualando las dos probabilidades, se tiene que

$$\frac{2a}{\pi b} = \frac{N_1}{N}$$

de donde se obtiene la fórmula para estimar π siguiente

$$\boxed{\pi = \frac{2Na}{N_1 b}}$$

De esta forma, lanzando un número suficientemente grande de veces podemos estimar el valor del número π. ¿Sorprendente? Aún hay más. Podemos hacer el mismo lanzamiento pero con otro tipo de objetos uniformes extensos (no agujas) pero filamentosos. Y, por supuesto, usando una simulación (véase, [2],[3]), y un ordenador, se resolvería el problema de la aguja de Buffon, pero sin aguja y de forma numérica y virtual.

2 Algo de historia

En 1777, el famoso naturalista George Buffon (1707-1788) publicón un trabajo que provocó una nueva ola de discusiones sobre la naturaleza del número π. Buffon propuso, como hemos ya comentado antes, calcular el número irracional lanzando una aguja sobre una superficie en la que se ha hecho un dibujo especial. Supongamos que en ese plano se han dibujado rectas paralelas tales que su separación es $2a$. Si la aguja tiene longitud $2l$, la probabilidad de que la aguja corte a una recta es $p = 2l/a\pi$. Por cuanto la probabilidad p es el valor cerca del cual oscila la frecuencia del suceso investigado en series suficientemente largas de experimentos, entonces dicha probabilidad se puede estimar experimentalmente. Si en n lanzamientos, la aguja corta m veces alguna recta, rentonces tomamos $p \approx \dfrac{m}{n}$. De aquí se deduce, igualando que $\pi \approx (2l/a) \cdot (n/m)$. Este resultado, condujo a una cantidad importante de experimentos que determinaron π experimentalmente. De ellos destacan Wolf (1850), Smith (1855), Fox (1884), y el de Lazzarini (1901), este último bastante increíble, dado que su resultado, que de 3408 lanzamientos lograra π con precisión del orden 10^{-7} es ciertamente imposible (y seguramente fue un apaño).

3 Generalizaciones y variaciones

Generalización: el problema de Buffon admite una interesante generalización. Resulta que el número π también se puede determinar si sobre el plano con rectas paralelas lanzamos un cuadrado, un triángulo o incluso cualquier otra figura. Si la distancia máxima entre dos puntos de una figura convexa cerrada no supera la distancia $2a$ de dos rectas paralelas, y el perímetro de la figura es igual a $2l$, entonces al lanzarla aleatoriamente sobre el plano la probabilidad de que corte alguna de las rectas paralelas es igual a $p = l/2a$. Para un triángulo equilátero de lado $2a$, esta probabilidad es igual a $3/\pi$, para un cuadrado de diagonal $2a$ es $2\sqrt{2}/\pi$. Cualquiera de estos valores se puede usar para estimar experimentalmente el número π.

Variación: Es posible renunciar a las rectas paralelas. Si intentamos lanzar piedras u objetos pequeños de manera que queden distribuidas uniformemente en un cuadrado, también puede determinarse el valor de π. Supongamos que de n piedras lanzadas a un cuadrado de lado a, m cayeron dentro de un círculo inscrito dentro del cuadrado. Entonces, es evidente que

$$\frac{m}{n} \approx \frac{S_C}{S_{cua}} = \frac{\pi(a/2)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

es decir

$$\pi \approx 4\frac{m}{n}$$

A Las fórmulas para pi: resumen

Por el primer método de Buffon explicado en este documento, obtenemos π mediante:

$$\boxed{\pi = \frac{2Na}{N_1 b}}$$

Por la generalización de Buffon, para un triángulo de perímetro $2a$, tendremos la fórmula:

$$\boxed{\pi = \frac{6a}{l}}$$

mientras que para un cuadrado de diagonal $2a$ tendremos que

$$\boxed{\pi = \frac{4\sqrt{2}a}{l}}$$

En el caso del cálculo mediante el círculo inscrito en un cuadrado de lado a, tendremos que

$$\boxed{\pi \approx 4\frac{m}{n}}$$

y donde m es el número de objetos (piedras,...) que caen dentro del círculo, y n es el número de lanzamientos.

B Ficha: cálculo experimental de π

- **Primer método**. El primer método de Buffon explicado en este documento, obtenemos π mediante:

$$\boxed{\pi = \frac{2 \cdot (\text{Longitud de la aguja o palillo}) \cdot (\text{Número total de palillos})}{(\text{Número de palillos intersectantes}) \cdot (\text{Espaciamiento entre líneas})}}$$

Resultado:

$$\pi = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = \frac{\quad}{\quad} =$$

- **Segundo método**. En este método se calcula el π mediante la fórmula:

$$\boxed{\pi \approx 4 \frac{\text{“Piedras” caídas dentro del círculo}}{\text{Número de lanzamientos}}}$$

Resultado:

$$\pi = 4 \cdot \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{\quad}{\quad} =$$

$$\pi = 4 \cdot \frac{\quad}{\quad} =$$

References

[1] *El omnipresente número* π. A. V. Zhukov. URSS ed. Serie de divulgación científica matemática. 2005.

[2] http://www.metablake.com/pi.swf

[3] http://mste.illinois.edu/activity/buffon/