

SERIES MISTERIOSAS Y SUMAS DELIRANTES

Sea la suma $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$

Uno pensaría en sumarla a cero así:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

O incluso sumarla para obtener 1 así: $S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$

Sin embargo los matemáticos (y algunos físicos teóricos) tienen formas más siniestras de sumar esta suma “divergente”. ¿Qué hacen estos locos y locas de los físicos y matemáticos? Os cuento. Sacando factor común:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S; \quad S = 1 - S \rightarrow 2S = 1 \rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Esto parece mágico y delirante, porque que una suma infinita de números enteros alternados dé un número fraccionario es realmente de otra dimensión o universo paralelo. Pero bajo ciertas condiciones puede hacerse...Y peor aún, sirve para “probar” resultados aún más perturbadores. La siguiente suma:

$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k}$ se puede sumar usando la anterior suma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1/2$, porque si:

$$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$2A = 2 + 2 + 2 + 2 + \dots$$

$$A - 2A = -A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

y por tanto, como habíamos calculado siniestramente que $S = 1/2$, tenemos el resultado alucinante:

$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$ ¡Tela! Pero hay aún más...Vamos a calcular ahora una suma que pensaríamos da infinito:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Para ello, vamos a hacer otro truco maquiavélico de prestidigitación matemática:

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$4B = 4 + 8 + \dots$$

$$-3B = B - 4B = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n = C$$

Calculemos ahora, usando resultados anteriores:

$$C = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$$

Nuestra primera suma, elevada al cuadrado, se puede escribir como sigue: $S^2 = (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)^2$

o bien $S^2 = S \cdot S$

$$(-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

$$\times (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots =$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = C$$

Por tanto: $S^2 = C$. Como $S = 1/2$, entonces $S^2 = C = (1/2)^2 = 1/4$. Por ende, $B = -C/3 = -1/12$. Es decir (para flipar aún más), hemos demostrado que

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$