Herramientas fismáticas

The Strange Doctor
Space-time Foundation & Quantum TimeLord Virtual Academy

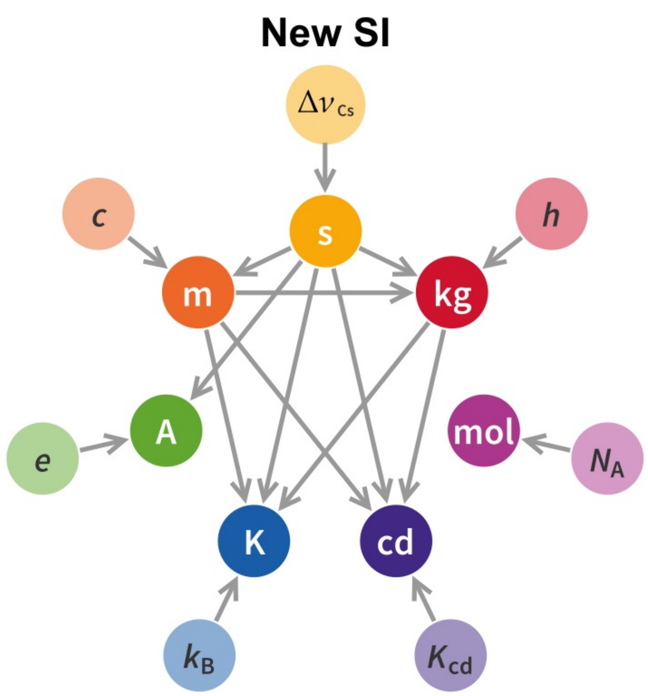
Multiverse of Madness

Resumen

Resumen con LaTeX en español de los temas de herramientas de la Fismática, Física de 2º de Bachillerato.

Defining constant	*Symbol*	*Numerical value*	*Unit*
hyperfine transition frequency of caesium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
Planck constant	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	lm W^{-1}

Table 1: The seven defining constants of the SI, and the seven corresponding symbols, numerical values, and units



Índice

Vector calculus in $\mathbb{R}^3$		Forms in $\mathbb{R}^3$
functions	$=$	0-forms
$\downarrow \nabla$		$\downarrow d$
vector fields	$\xrightarrow{\text{work } \omega}$	1-forms
$\downarrow$ curl		$\downarrow d$
vector fields	$\xrightarrow{\text{flux } \Phi}$	2-forms
$\downarrow$ div		$\downarrow d$
functions	$\xrightarrow{\text{density } \varrho}$	3-forms

$$\boxed{ab = a \cdot b + a \wedge b}$$

$$\boxed{X = X^A E_A}$$

1. Magnitudes y dimensiones

1.1. Magnitudes y números

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ...Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \rightarrow Y$, con $y = \phi(X)$.

1.2. El nuevo S.I. (circa 2020)

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs-133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs-133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiaciónde 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

1.3. Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770} s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta \nu(Cs-133)}} \tag{1}$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458 m/s$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs-133)$ como sigue:

$$\boxed{1m = \frac{c}{299792458} s = \frac{9192631770}{299792458} \frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \approx 30{,}663319 \frac{c}{\Delta f(Cs-133)}} \tag{2}$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg \cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1kg = \frac{h}{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}} \frac{s}{m^2} = \frac{299792458^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{c^2} = 1{,}4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2}} \tag{3}$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1{,}602176634 \times 10^{-19} C(A \cdot s)$ como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1A = \frac{e}{1{,}602176634 \times 10^{-19}} s^{-1} = \frac{e\Delta f(Cs-133)}{(1{,}602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6{,}789687 \cdot 10^{8} e\Delta f_{Cs}} \tag{4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2{,}2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}} \tag{6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I_v ó $\mathcal{J}$. La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entree vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683} \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2{,}61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2} \tag{7}$$

1.4. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, 1Å=$10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec=3,26años-luz (lyr)=$3{,}086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1{,}496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M, $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}kg$.
- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA,...)
- Temperatura absoluta Θ, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_v: candela.
- Cantidad de sustancia o materia n: el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales ºC, gradianes (grados centesimalese). $2\pi rad = 360° = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω: estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa M/L.
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondo o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1Nm$.

- Trabajo o energía: $W = Fd$, ML^2T^{-2}.$1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7 ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2.
- Momento angular ML^2T^{-1}.
- Potencia ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=$1J/s$. 1 C.V.=$735,4W$.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.
- Tensión superficial M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad η, $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise$\approx 0,1Pa \cdot s$.
- Número de onda k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D. $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm. ϕ_L. Dimensiones ϕ_L.
- Luminancia B: $\phi_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=$10^4 cd/m^2$.
- Iluminación E: ϕ_L/L^2. lux. Otras: $1phot = 10^4 lux$.
- Módulo del campo gravitacional g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1}, en K^{-1}.
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2}.
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ε: $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m.
- Carga eléctrica: culombio C. $Q = IT$. $1e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F.
- Módulo de la densidad de corriente j: IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω.
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.

- Permeabilidad magnética μ. $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.

- Módulo del campo magnético o inducción magnética B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss=$10^{-4}T$.

- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber=$1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell=$10^8 Wb$.

- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.

- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.

- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted= $10^3/4\pi$ A/m.

- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.

- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio= 1 Ci$\approx 3{,}7 \cdot 10^{10} desintegraciones/s$, o también $1Ci = 6{,}14 \cdot 10^{-14} mol/s$.

1.5. Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.

- Constante universal de los gases $R = 8{,}314 J/Kmol$=$0.082 atmL/Kmol$.

- Permitividad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.

- Masa del electrón $m_e = 0{,}511 keV/c^2 \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$.

- Masa del protón $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.

- Masa del neutrón $m_n \approx m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.

- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad $g_0(\oplus) = g_\oplus = 9,81 m/s^2$.

- Radio terrestre $R_\oplus = 6400 km$.

- Densidad del agua a 4ºC, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.

- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.

- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.

- Masa molar del aire: $2{,}89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3kg/L.

- Constante de Stefan-Boltzmann: $5{,}67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} = \sigma_{SB}$.

- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2{,}88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.

- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96485 C/mol$.

2. Vectores

Un vector es una magnitud orientada con ciertas propiedades abstractas. Se puede escribir un vector en 2d, 3d,... En componentes cartesianas:

Vector 3d

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{8}$$

Suma y resta de vectores

Sean $\vec{a}, \vec{b}$ dos vectores en componentes cartesianas:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} \pm (a_y + b_y)\vec{j} \pm (a_z + b_z)\vec{k} \tag{9}$$

Multiplicación de vector y escalar

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\vec{v}$ es un vector, entonces

$$\vec{V} = \lambda\vec{v} = \lambda v_x\vec{i} + \lambda v_y\vec{j} + \lambda v_z\vec{k} \tag{10}$$

Se pueden definir varias operaciones entre vectores 3d. Las dos más importantes son el productos escalar y el producto vectorial. En otras dimensiones, con otros objetos geométricos disponibles, hay varios tipos de productos adicionales naturales.

Producto escalar

La definición en componentes cartesianas del producto escalar $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es como sigue

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{11}$$

La definición geométrica usa la definición de módulos o magnitud/longitud del vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi \tag{12}$$

donde $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ es el módulo o norma del vector $\vec{a}$, y similarmente con $\vec{b}$.

El producto escalar define ortogonalidad y permite también calcular proyecciones:

Proyección de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\mathrm{proy}(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos\varphi \tag{13}$$

También permite calcular vectores unitarios a uno dado. Por ejemplo:

$$\vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{r}{|\vec{r}|} \tag{14}$$

Producto vectorial 3d

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{15}$$

El producto vectorial no es conmutativo ni asociativo en general. Permite definir paralelismo, y, además, satisface la relación

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{16}$$

y la identidad

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = a^2b^2 \tag{17}$$

3. Fórmulas útiles

Usando el binomio de Newton, se tiene una aproximación cuando un sumando es pequeño:

Aproximación de Newton

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+O(x^2), \quad x << 1 \tag{18}$$

Volumen y área de la esfera, área del círculo y longitud de circunferencia:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{19}$$

$$S_E = 4\pi R^2 = \frac{dV}{dR} \tag{20}$$

$$A_C = \pi R^2 \tag{21}$$

$$L_C = 2\pi R = \frac{dA_C}{dR} \tag{22}$$

El teorema fundamental de la trigonometría señala que

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi = 1$$

La densidad es un concepto genérico interesante. Se pueden definir la densidad de masa, carga, número, energía,... por unidad de longitud, superficie, volumen, hipervolumen, ...

4. Operadores vectoriales diferenciales

Gradiente

Sea una función escalar $\varphi(x,y,z)$. El vector gradiente se escribe de la forma siguiente:

$$\vec{V} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \tag{23}$$

Divergencia

Sea una función vectorial $\vec{A}(x,y,z)$. El escalar divergencia se escribe de la forma siguiente:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{24}$$

Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ es otro vector $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \mathrm{rot}\vec{v} = \mathrm{curl}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\partial_y v_z-\partial_z v_y\right)\vec{i}-(\partial_x v_z-\partial_z v_x)\vec{j}+\left(\partial_x v_y-\partial_y v_x\right)\vec{k} \tag{25}$$

Propiedades para funciones suficientemente suaves o regulares:

- $\nabla \times \nabla f = \text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$.
- $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \text{div}(\text{rot}\vec{v}) = 0$.
- Operador laplaciano vectorial: $\nabla(\nabla\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) = \nabla^2\vec{A} + \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \Delta\vec{A} + \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$.
- Operador laplaciano escalar: $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \text{div}(\text{grad}\phi) = \nabla^2\phi$.

5. Cinemática

Para una partícula puntual, el vector de posición y desplazamiento se define como

Vector posición y desplazamiento

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{26}$$

$$\Delta\vec{r} = r_2 - r_1 = r(t) - r_0 = r(t) - r(0) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \tag{27}$$

Se definen la velocidad y aceleración medias como las variaciones temporales

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v_x^m\vec{i} + v_y^m\vec{j} + v_z^m\vec{k} \tag{28}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = a_x^m\vec{i} + a_y^m\vec{j} + a_z^m\vec{k} \tag{29}$$

Los límites de la velocidad media y la aceleración media, en un instante muy pequeño, son la velocidad y aceleración instantáneas:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}} \tag{30}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}} \tag{31}$$

Cuando el movimiento es circular, el espacio angular es relacionado con el lineal mediante $s = \varphi R$, $v = \omega R$, $a_t = \alpha R$. También se puede definir la velocidad angular como $\omega = d\varphi/dt$, la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$, y sus versiones medias e instantáneas. Además, $a^2 = a_t^2 + a_c^2$, en donde $a_c = \omega^2 R = v^2 R$ es la aceleración centrípeta. La operación inversa de la derivación es la integración. Y tiene unas reglas sencillas para algunas funciones (como potencias, trigonométricas, productos, cocientes, logaritmos o exponenciales). Si tenemos la aceleración, podemos recuperar la velocidad integrando:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t)dt \tag{32}$$

Si tenemos la velocidad, podemos recuperare la posición integrando:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt \tag{33}$$

Esto también ocurre en los movimientos circulares análogos:

$$\omega = \omega_0 + \int \alpha dt \tag{34}$$

y

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega(t)dt \tag{35}$$

Integrar la posición, produce una variable dinámica llamada en inglés absement (absition):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \int x(t)dt \tag{36}$$

o más generalment en forma vectorial

$$\vec{\mathcal{A}}(t) = \vec{\mathcal{A}}(t) + \int \vec{r}(t)dt \tag{37}$$

Así, el espacio o vector de posición en general es la derivada del absemnt:

$$\vec{r}(t) = \frac{d\vec{\mathcal{A}}(t)}{dt} \tag{38}$$

Derivar la aceleración, produce una variable llamada jerk en inglés:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} \tag{39}$$

Existen variantes de derivación o integreación de orden superior del jerk y del absement, y en dimensiones físicas superiores o inferiores.

6. Dinámica

Las 3 leyes de Newton son las leyes fundamentales de la Dinámica de partículas y sistema de partículas a bajas energías y grandes objetos.

Ley fundamental de la Dinámica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \tag{40}$$

La resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación del momento $\vec{p} = m\vec{v}$. Las unidades de las fuerzas son los newton (N), o las dinas. $1N = 10^5 dinas$. También existe el kilopondio (kp). $1kp = 9,8N$.

Supongamos un sistema de puntos materiales formado por n masas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Se define el centro de masa como el punto con vector de posición:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} \tag{41}$$

La velocidad del centro de masas se define derivando:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \tag{42}$$

y la aceleración similarmente:

$$\vec{a}_G = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{f}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M} \tag{43}$$

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{R} = M\vec{a}_G$. Para un punto material, también se definen el momento angular y momento de una fuerza(torque), respectivamente, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{44}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \tag{45}$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i\vec{v}_i \tag{46}$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*) \tag{47}$$

donde $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i^* = m_i \vec{v}_i^*$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \tag{48}$$

$$\vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \tag{49}$$

El trabajo o energía se define como la cantidad

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_\gamma dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{50}$$

La energía de una partícula libre está relacionada con su momento. Es la llamada energía cinética (no relativista o relativista). Una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante satisface

$$\vec{p} = m\vec{v} \leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{51}$$

Multiplicando

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right) = 0 \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} = E_c \tag{52}$$

La energía cinética fue introducidad originalmente por Descartes bajo el nombre de *vis viva*. La energía cinética de un sistema de partículas se puede relacionar también con la energía del centro de masas y la energía de las partículas alrededor de éste, o simplemente la suma de las energías de cada partícula, ya que es una cantidad aditiva ($E_c(tot) = \sum_i E_c(i)$).

Se llama potencia a la energía por unidad de tiempo:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{53}$$

La potencia se mide en vatios (W). $1W = 1J/s$. $1kWh = 3{,}6MJ$ es unidad de energía. Si $W = 0$, la energía cinética del punto permanece constante. En un sistema de partículas, si el trabajo total(fuerzas interiores y exteriores) es nulo, la energía cinética del sistema se mantiene constante. En choques o colisiones de partículas, estas ideas son muy importantes. Si el choque es elástico, se conservarán el momento lineal y la energía cinética de las partículas. En un choque inelástico, el momento lineal se conservará, pero no se conservará la energía cinética de las partículas.

Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes. En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos externos son cero. Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$. Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \frac{3}{10}MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$.

- Caja paralelepípedo: $I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$.

El momento de inercia permite simplificar la Dinámica de rotación. Así, el análogo de $\vec{F} = m\vec{a}$ es $\vec{\tau} = I\alpha$, donde $L = I\omega$. Además, podemos definir la energía cinética de rotación como $E_c(rot) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$. El trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el sólido ha girado un ángulo se puede determinar mediante la integral del momento de fuerzas o torque sobre el ángulo:

$$W = \int_i^f Md\varphi = \int_i^f \tau d\varphi \tag{54}$$

7. Fluidos

7.1. Estática o hidrostática

Ecuación general para la variación de presión $p = F/S$ de un fluido:

$$p_1 - p_2 = \int_1^2 \rho g dh \tag{55}$$

El principio de Arquímides señala que el empuje es igual al peso del fluido desplazado o desalojado:

$$E = \rho_f V g = m_f g \tag{56}$$

El peso aparente el igual al peso menos el empuje: $P_a = P - E$. En equilibrio, $P_a = 0$, y el objeto flota con $P = E$. Si $E > P$, el objeto asciende, y si $E < P$, el objeto se hunde en el fluido. La presión hidrostática es $P_h = \rho_f g\Delta h$. El principio de Pascal señala que $F_1/S_1 = F_2/S_2$, porque la presión se transmite de forma instantánea a todos los puntos de un fluido. Se llama tensión superficial a la cantidad $\sigma = \frac{F}{2L}$. La presión capilar se define como

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \tag{57}$$

y la capilaridad en un tubo de radio r pequeño, y altura h, se calcula con la ecuación

$$h = \frac{2\sigma \cos\alpha}{rg\rho} \tag{58}$$

7.2. Dinámica de fluidos

Ecuación de continuidad

En un tubo, para un fluido incompresible, se cumple $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Teorema de Bernouilli

En un fluido, se mantiene constante la siguiente cantidad:

$$p_i + \rho g h_i + \frac{1}{2}\rho v_i^2 = p_f + \rho g h_f + \frac{1}{2}\rho v_f^2 \tag{59}$$

i.e.

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}} \tag{60}$$

La velocidad de un fluido por los orificios de un depósito se puede estimar como $V = \sqrt{2gh}$.
La fuerza de viscosidad de un fluido sigue la ecuación

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta r} \tag{61}$$

y donde η es el coeficiente de viscosidad.

Ley de Poiseuille

El volumen V de líquido que atraviesa un tubo cuando la viscosidad no es despreciable en regimen laminar se calcula mediante la expresión

$$V = \frac{p - p'}{8\eta L}\pi r^2 t \tag{62}$$

El número de Reynolds es la cantidad adimensional

$$R = \frac{\rho}{\eta} r v \tag{63}$$

La fuerza de resistencia F_R que un fluido ofrece al movimiento de un objeto es:

- Esfera pequeña y fluido en regimen laminar. Aplica la ley de Stokes:

  $$F_R = 6\pi\eta r v$$

- Objeto cualquiera en cualquier regimen:

  $$F_R = kS\frac{\rho v^2}{2}$$

  donde k es un factor de forma dependiente de la forma y geometría del objeto.

7.3. Deformaciones y elasticidad

El alargamiento longitudinal está relacionado con el módulo de Young y el “strain”:

$$\boxed{\mathcal{Y}\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S}}$$

La contracción transversal Δd por tracción longitudinal es

$$\boxed{\sigma\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta d}{d}}$$

y donde σ es el coeficiente o módulo de Poisson. La variación de volumen por tracción longitudinal es igual a

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\sigma)$$

La deformación Ξ por esfuerzo tangencial es

$$\Xi = \frac{1}{G}\frac{F}{S}$$

donde G es el módulo de rigidez. La comprensión o variación de volumen debida a las fuerzas de presión sobre toda la superficie del cupero (sólido, líquido, gas):

$$K\frac{\Delta V}{V} = -\Delta p$$

donde K es el módulo de elasticidad de volumen. Los módulos anteriores están relacionados entre sí, mediante la expresión:

$$K = \frac{\mathcal{Y}}{3(1 - 2\sigma)}$$

A. Greek alphabet

Anc.		Class.		Name	Corresp.	
Α		Α	α	alpha	a	1
Β		Β	β	beta	b	2
Γ		Γ	γ	gamma	g, n[1]	3
Δ		Δ	δ	delta	d	4
Ε		Ε	ε	epsilon	e	5
Ϝ	ϝ, ϛ			digamma, stigma[2]	w	6
Ζ		Ζ	ζ	zeta	z	7
Η		Η	η	eta	e	8
Θ		Θ	θ	theta	th	9
Ι		Ι	ι	iota	i, j	10
Κ		Κ	κ	kappa	k	20
Λ		Λ	λ	lambda	l	30
Μ		Μ	μ	mu	m	40
Ν		Ν	ν	nu	n	50
Ξ		Ξ	ξ	xi	x	60
Ο		Ο	ο	omicron	o	70
Π		Π	π	pi	p	80
Ϙ	ϙ, ϟ			qoppa[3]	q	90
Ρ		Ρ	ρ	rho	r, rh	100
Σ		Σ	σ, ς	sigma[4]	s	200
Τ		Τ	τ	tau	t	300
		Υ	υ	upsilon	y, u[5]	400
		Φ	φ	phi	ph, f	500
		Χ	χ	chi	ch	600
		Ψ	ψ	psi	ps	700
		Ω	ω	omega	o	800
Ͳ	ϡ			sampi[6]	s	900

The regional archaic letters yot, sha and san are not included in the table. The letter san was the ancestor of sampi.

1. Only if before velars, i.e., before kappa, gamma, xi and chi.
2. 'Digamma' is the name used for the F-shaped form. It was mainly used as a letter (but also sometimes, in its lower-case form, as a number), whereas the shape and name 'stigma' is used only for the number. Both names were derived from the respective shapes; in fact, the stigma is a medieval, uncial version of the digamma. The name 'stigma' is derived from the fact that the letter looks like a sigma with a tau attached under it – though unfortunately not in all modern fonts. The original letter name, also giving its pronunciation, was 'waw'.
3. The version of qoppa that looks like a reversed and rotated z is still in occasional use in modern Greek. Unicode calls this version 'koppa'.
4. The second variant of sigma is used only at the end of words.
5. Uspilon corresponds to 'u' only as the second letter in diphthongs.
6. In older times, the letter sampi was positioned between pi and qoppa.


THE GREEK ALPHABET
Ελληνικό αλφάβητο
The Greek alphabet has been used to write the Greek language since the 8th century BC. It was derived from the earlier Phoenician alphabet, and was the first alphabetic script to have distinct letters for vowels as well as consonants. It is the ancestor of the Latin and Cyrillic scripts. Apart from its use in writing the Greek language, in both its ancient and its modern forms, the Greek alphabet today also serves as a source of technical symbols and labels in mathematics, science and other fields.
Type: Alphabet
Languages: Greek
Time period: c. 800 BCE – present
Derivation systems: Egyptian hieroglyphs · Proto-Sinaitic alphabet · Phoenician alphabet · Greek alphabet
Child systems: Gothic • Glagolitic • Cyrillic • Coptic• Armenian • Old Italic • Latin
Αα Alpha al-fah
Ββ Beta bay-tah
Γγ Gamma gam-mah
Δδ Delta del-tah
Εε Epsilon ep-si-lon
Ζζ Zeta zay-tah
Ηη Eta ay-tah
Θθ Theta thay-tah
Ιι Iota eye-o-tah
Κκ Kappa cap-ah
Λλ Lambda lamb-dah
Μμ Mu mew
Νν Nu new
Ξξ Xi zz-eye
Οο Omicron om-e-cron
Ππ Pi pie
Ρρ Rho roe
Σσς Sigma sig-mah
Ττ Tau taw
Υυ Upsilon oop-si-lon
Φφ Phi fie
Χχ Chi k-eye
Ψψ Psi sigh
Ωω Omega o-may-gah

Ελληνικό αλφάβητο Lingographics.com

Αα	Ιι	Ρρ
Ββ	Κκ	Σσς
Γγ	Λλ	Ττ
Δδ	Μμ	Υυ
Εε	Νν	Φφ
Ζζ	Ξξ	Χχ
Ηη	Οο	Ψψ
Θθ	Ππ	Ωω

Licencia copy-left. La única condición es que se indique su origen para poder usarse. Documento escrito por

Doctor Who?

ϱΔΞΘΣШЖЮ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\varheartsuit\varheartsuit\rangle\right) \qquad \oint_{\partial\Sigma}\Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$