

Campos

JFGH

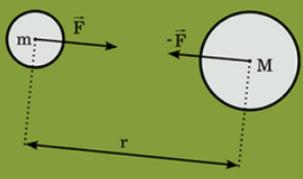
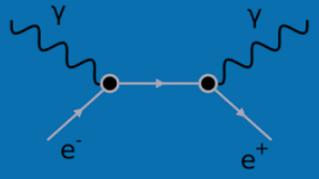
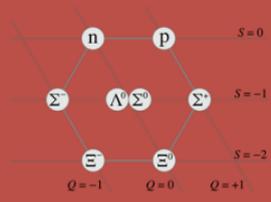
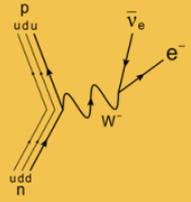
Space-time Foundation & Quantum TimeLord Virtual Academy

sursolid@gmail.com

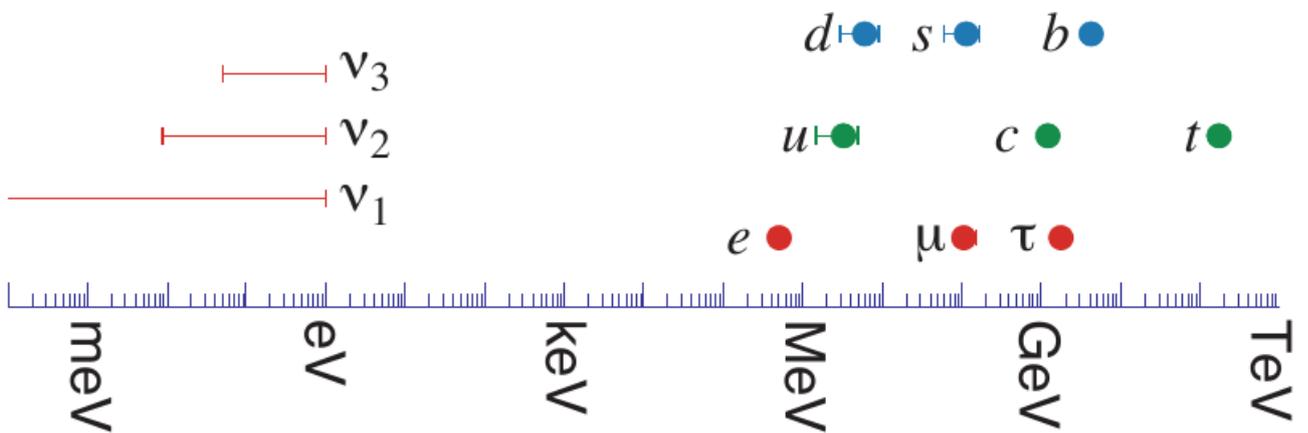
Multiverse of Madness

Resumen

Resumen con \LaTeX en español de los temas de campos, Física de 2º de Bachillerato.

$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Gravity</p>	$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Electromagnetism</p>
$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Strong</p>	$\mathcal{L} = g (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}) \gamma^\mu \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\xi^2}Z_\mu & 0 \\ 0 & \frac{\xi A_\mu}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}}Z_\mu \end{pmatrix} + \frac{1-\gamma^5}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\xi^2}Z_\mu & -\sqrt{2}W_\mu^+ \\ -\sqrt{2}W_\mu^- & \sqrt{1+\xi^2}Z_\mu \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e \end{pmatrix}$  <p style="text-align: center;">Weak</p>

masses of matter particles



Índice

1. Tipos de campos	3
2. Campo gravitacional	4
2.1. Leyes de Kepler	4
2.2. Ley de gravitación universal	5
2.3. Campo y potencial gravitacional	5
2.4. Energía orbital y energía de satelización	7
2.5. Velocidad de escape y velocidad orbital	7
2.6. Relaciones binarias en gravitación	8
2.7. Energía orbital (caso elíptico)	8
2.8. Velocidades cósmicas	9
2.9. Teorema de Gauss gravitacional	11
2.10. Expresiones de varios campos	12
2.10.1. Variación del campo de un objeto con la altura	12
2.10.2. Variación del campo de un objeto con la profundidad	12
2.10.3. Variación del campo de un objeto con la latitud	12
2.10.4. Campo gravitacional de una esfera uniforme	13
2.11. Teoría gravitacional relativista: relatividad general	14
3. Campo eléctrico	16
3.1. Ley de Coulomb	17
3.2. Potencial y energía potencial eléctricos	17
3.3. Teorema de Gauss	18
3.4. Ejemplos de campos y potenciales eléctricos	18
3.4.1. Campo eléctrico de una esfera uniforme	18
3.4.2. Campo eléctrico de un plano infinito	19
3.4.3. Campo eléctrico de un hilo infinito	19
3.4.4. Movimiento de una partícula cargada en un potencial	19
3.4.5. Energía potencial eléctrica (gravitacional) total de una esfera uniforme	19
4. Campo magnético	20
4.1. Propiedades generales	20
4.2. Fuerzas magnéticas	20
4.3. Selector de velocidades. Ciclotrón	20
4.4. Ley de Ampère. Campos de hilos infinitos, espiras y solenoides	21
5. Campos electromagnéticos e inducción EM	22
5.1. Transformadores	22
5.2. Ley de Ohm	23
5.3. Condensadores	23
6. Otros campos	23
6.1. El campo nuclear	23
6.2. El campo de Higgs	24
6.3. Inflación y Cosmología	25
6.4. Y más allá, más campos...	25
6.5. Otras mecánicas generalizadas	25

1. Tipos de campos

Un campo a nivel abstracto es una representación de la realidad en la que los objetos fundamentales son sistemas continuos que permean todo el espacio-tiempo. Los campos son simples funtores entre ciertos espacios abstractos, y asociados a números de diferente tipo. Hay campos escalares (números puros), espinoriales, twistoriales, superespinoriales, supertwistoriales, hipersupertwistoriales, campos vectoriales, campos vectoriales espinoriales, campos tensoriales, campos de alto espin y algunas otras variantes. Un campo que no depende del tiempo se le llama estacionario. Un campo de fuerzas, cuyo valor solo depende de la distancia a un punto llamado centro de fuerza, se llama campo central. Un campo que deriva de una función potencial se denomina conservativo, y las fuerzas que derivan de éste, se llaman fuerzas conservativas. Por otra parte, los campos dependen generalmente de cierta característica o propiedad para ser generados: la característica del campo gravitacional es la masa (o energía), la característica del campo eléctrico es la carga eléctrica, la característica del campo magnético las cargas móviles (o corrientes eléctricas). Los campos de las interacciones nucleares son de corto alcance, a diferencia de los casos electromagnético y gravitacional, que son de alcance infinito hipotéticamente. Los campos de la interacción nuclear débil son cuánticos y están generados por campos vectoriales gauge con masa que intercambian la carga débil o sabor de las partículas. Los campos de la interacción nuclear fuerte son cuánticos y están generados por campos vectoriales gauge sin masa que intercambian el color de las partículas (aquí color no es color físico sino una carga cuántica que cambia o transporta el campo nuclear fuerte).

Campos conservativos

Un campo vectorial \vec{v} se dice que es conservativo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\Delta V = V_0 - V_f \quad (1)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2)$$

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (3)$$

$$E_m = E_c + E_p = \text{const} \quad (4)$$

$$\vec{v} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad (5)$$

$$\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} \text{ no depende de la trayectoria } \gamma \text{ sino solamente de los puntos A (inicial) y B (final)} \quad (6)$$

$$\text{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \vec{0} \quad (7)$$

Se puede escribir en términos de fuerzas y el concepto de trabajo o energía de forma general

Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas vectorial \vec{F} se dice que es conservativo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_p(0) - E_p(f) \quad (8)$$

$$W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9)$$

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (10)$$

$$E_m = E_c + E_p = \text{const} \quad (11)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p = -\nabla E_p \quad (12)$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ no depende de la trayectoria } \gamma \text{ sino solamente de los puntos A (inicial) y B (final)} \quad (13)$$

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad (14)$$

Un campo conservativo se dice también irrotacional, sin vórtices. Un campo con divergencia nula se dice solenoidal.

2. Campo gravitacional

2.1. Leyes de Kepler

Hay tres leyes de Kepler: la ley de las órbitas, la ley de las áreas y la ley de los períodos, que gobiernan el movimiento planetario.

Ley de las órbitas

El movimiento de un “planeta” en torno al “sol”, es una elipse con la estrella en uno de los focos. Matemáticamente puede expresarse como sigue:

$$r(\varphi) = \frac{\mathcal{P}}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \quad (15)$$

y donde \mathcal{P} es el llamado semi-latus rectum de la elipse, y ε es la excentricidad de la elipse. En el periastro $\varphi = 0^\circ$, y $r_M = \mathcal{P}/1 + \varepsilon$, mientras que en el apoastro $r_m = \mathcal{P}/1 - \varepsilon$. Con el semieje mayor de la elipse es a , se tiene que es la media aritmética de periastro y apoastro, que es $a = (r_M + r_m)/2$. El semieje menor de la elipse es la media geométrica de perihelio y apoastro, i.e., $b = \sqrt{r_M r_m} = \mathcal{P}/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Finalmente, el semi-latus rectum es la media armónica de periastro y apoastro, i.e.,

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_m}} = \frac{2r_M r_m}{r_M + r_m} = \frac{b^2}{a}$$

La excentricidad es la variación entre r_M y r_m , es decir,

$$\varepsilon = \frac{r_M - r_m}{r_M + r_m}$$

El área de la elipse es $A = \pi ab$.

Ley de las áreas

El radiovector que une una estrella y su planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, la velocidad areolar es constante. Matemáticamente:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega \quad (16)$$

Puede deducirse esta ley de la conservación del momento angular \vec{L} . Además, integrando para un período, si el área de la elipse es $A = \pi ab$, tenemos que el movimiento medio $n = 2\pi/T$ proporciona:

$$n = \frac{r^2}{ab} \frac{d\varphi}{dt}$$

Ley de los períodos

El cuadrado de los períodos de los planetas es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. Llamada por Kepler ley de las armonías (ley 1-2-3), puede derivarse para órbitas circulares como sigue. Igualamos fuerza centrípeta y gravitacional. Matemáticamente:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = G_N \frac{Mm}{r^2} \quad (17)$$

de donde se tiene que

$$T^2 = kr^3 = \frac{4\pi^2}{G_N M} r^3 \leftrightarrow G_N M T^2 = 4\pi^2 r^3 \quad (18)$$

Para órbitas elípticas, que orbitan el centro de masas de los dos cuerpos, se puede deducir la misma relación formal pero con $r = a$ el semieje mayor de la elipse, y $M = M_\star + M_p$, la suma de la masa del planeta y la estrella.

2.2. Ley de gravitación universal

Ley de gravitación universal de Newton

Dos masas puntuales M, m , separadas una distancia r , se atraen con una fuerza

$$\vec{F} = -G_N \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = -G_N \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (19)$$

donde $G_N = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$.

2.3. Campo y potencial gravitacional

Campo gravitacional newtoniano

Se define campo gravitacional como la fuerza por unidad de masa de prueba:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{e}_r = -G_N \frac{M}{r^3} \vec{r} \quad (20)$$

con unidades de $[g] = \text{m}/\text{s}^2 = \text{LT}^{-2}$. El peso es la fuerza con la que un cuerpo de masa m es atraído por otro cuerpo de masa M y campo \vec{g} , $\vec{P} = m\vec{g}$.

Como el campo gravitacional es conservativo, tiene potencial y energía potencial:

Potencial gravitacional

Se llama potencial gravitacional a la función

$$V = -G_N \frac{M}{r} = \frac{E_p(g)}{m} \quad (21)$$

que tiene unidades de J/kg y no es más que la energía potencial gravitacional por unidad de masa. La energía potencial gravitacional es

$$E_p(g) = -\frac{G_N M m}{r} \quad (22)$$

en unidades de julios (J). Potencial y energía potencial están relacionados por $E_p(g) = mV_g$. El trabajo del campo necesario para transportar una masa desde un punto inicial A hasta otro final B es igual a la variación negativa de energía potencial:

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = G_N M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_p(A) - E_p(B) \quad (23)$$

Así, el potencial en un punto puede ser también definido como el trabajo necesario para transportar una masa dada desde el infinito hasta ese punto. Una línea o superficie equipotencial son lugares geométricos donde el potencial gravitacional es constante. Por tanto, no se realiza trabajo para mover una partícula a lo largo de una línea o superficie equipotencial. Las líneas de fuerza del campo gravitacional son siempre entrantes porque la gravitación es una fuerza atractiva siempre, hasta donde se entiende.

Para alturas pequeñas la energía potencial puede aproximarse por $E_p(g) = -mgh$, ya que

$$E_p(g) = -G_N M m / r = -G_N M m \frac{R_p}{R_p^2(1 + h/R_p)} \approx +G_N M m h / R_p^2 = mgh$$

usando la aproximación binomial de Newton.

Principio de superposición

Para un conjunto de masas puntuales m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, el campo gravitacional total y el potencial gravitacional total están dados por la suma de los campos gravitacionales y los potenciales gravitaciones de cada masa separadamente. Matemáticamente:

$$V_t = \sum_i V_i = \sum_{i=1}^N V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_N \quad (24)$$

$$\vec{g}_t = \sum_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_N \quad (25)$$

2.4. Energía orbital y energía de satelización

Energía orbital

En una órbita circular, la energía mecánica es constante porque la fuerza gravitacional es conservativa. Para una órbita circular de radio $R = R_p + h$ se tiene en general que

$$E_m(orb) = E_c + E_p = -\frac{G_N M m}{2R} = -\frac{1}{2}E_c(orb) = \frac{1}{2}E_p(orb) \quad (26)$$

donde R es el radio orbital. Para una órbita elíptica general, con excentricidad e , se tiene

$$E_m(orb) = E_c + E_p = \frac{G_N M m}{2a}(e^2 - 1) \quad (27)$$

y donde ahora a es el semieje mayor de la elipse.

Energía de satelización

La energía necesaria para que desde una altura inicial h_0 y radio $r_0 = R_p + h_0$ se ponga en órbita (circular) un satélite de masa m_s se calcula mediante la conservación de la energía mecánica

$$E_p(h_0) + E_s = E_m(orb) \quad (28)$$

Si $r = R_p + h$ es el radio orbital (nótese que $h \neq h_0$, y que en la mayoría de ejercicios o situaciones tendremos $h_0 = 0$), entonces:

$$E_s = E_m(orb) - E_p(h_0) = G_N M m_s \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r} \right) \quad (29)$$

y donde ahora a es el semieje mayor de la elipse.

2.5. Velocidad de escape y velocidad orbital

Velocidad de escape

Se llama velocidad de escape v_e a la velocidad necesaria para que un cuerpo de masa m abandone la influencia gravitacional de un objeto de masa M . Matemáticamente:

$$E_m = 0 = E_c(v_e) + E_p(g) = \frac{1}{2}mv_e^2 - G_N \frac{Mm}{r} \quad (30)$$

de donde se tiene que

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{r}} \quad (31)$$

Velocidad orbital

La velocidad de un cuerpo de masa m , en órbita circular alrededor de un cuerpo de masa M , por fuerza gravitacional, se obtiene igualando fuerza centrípeta y gravitacional. Matemáticamente:

$$F_c = F_g \rightarrow m \frac{v^2}{r} = G_N \frac{Mm}{r^2} \quad (32)$$

de donde se tiene que, con un radio orbital $r = R_p + h$,

$$v(\text{orb}) = \sqrt{\frac{G_N M}{r}} \quad (33)$$

Entonces la energía cinética orbital es igual a

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (34)$$

2.6. Relaciones binarias en gravitación

La siguiente tabla, representa las relaciones binarias entre magnitudes en movimiento circular y kepleriano:

$\mathcal{Y}(X)$	R	T	v	ω	f	A_c
R	1	$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$	$R = \frac{GM}{v^2}$	$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$	$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi f^2}}$	$\sqrt{\frac{GM}{A_c}}$
T	$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$	1	$T = \frac{2\pi GM}{v^3}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$T = \frac{1}{f}$	$T = 2\pi \sqrt[4]{\frac{GM}{A_c^3}}$
v	$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$	$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$	1	$v = \sqrt[3]{GM\omega}$	$v = \sqrt[3]{2\pi GM f}$	$v = \sqrt[4]{GMA_c}$
ω	$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{v^3}{GM}$	1	$\omega = 2\pi f$	$\omega = \sqrt[4]{\frac{A_c^3}{GM}}$
f	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{v^3}{2\pi GM}$	$f = \frac{\omega}{2\pi}$	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{A_c^3}{GM}}$
A_c	$A_c = \frac{GM}{R^2}$	$A_c = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{16\pi^4 GM}{T^4}} \\ 2\pi \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T^4}} \end{cases}$	$A_c = \frac{v^4}{GM}$	$A_c = \sqrt[3]{GM\omega^4}$	$A_c = \begin{cases} \sqrt[3]{16\pi^4 GM f^4} \\ 2\pi \sqrt[3]{2\pi GM f^4} \end{cases}$	1

(35)

2.7. Energía orbital (caso elíptico)

Definamos el potencial gravitacional:

$$U_g = -\frac{D}{r} \quad (36)$$

y el radio orbital

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{L^2 / DM}{1 + e \cos \theta} \quad (37)$$

donde $D = G_N M M_0$. Entonces

$$\frac{1}{r} = \frac{DM(1 + e \cos \theta)}{L^2} \quad (38)$$

y

$$U_g = \frac{D^2 M}{L^2} (-1 - e \cos \theta) = U(\cos \theta) \quad (39)$$

La energía cinética orbital es

$$T = E_k = E_c = K.E. = \frac{1}{2}mv^2 \quad (40)$$

y definiendo el vector

$$\vec{v} \times \vec{L} = D(\hat{r} + \hat{e}) \quad (41)$$

tenemos que

$$(\vec{v} \times \vec{L})^2 = v^2 L^2 = D^2(\hat{r} + \hat{e})^2 \quad (42)$$

y

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(r + e) \cdot (r + e) \quad (43)$$

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(\vec{r} \cdot \vec{r} + 2\hat{r} \cdot \hat{e} + e^e) = \frac{D^2}{L^2}(1 + 2\hat{r} \cdot \hat{e} + e^e) \quad (44)$$

Por tanto:

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(1 + 2e \cos \theta + e^2) \quad (45)$$

y la energía mecánica total orbital será

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{1}{2}\frac{D^2M}{L^2}(1 + e \cos \theta) \quad (46)$$

Como

$$E_k = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{1}{2}e^2\right) = E_k(\cos \theta) \quad (47)$$

se deduce que para órbitas elípticas en gravitación newtoniana

$$E = -\frac{MD^2}{2L^2}(1 - e^2) = \frac{MD^2}{2L^2}(e^2 - 1) \quad (48)$$

y que reproduce la energía de órbitas circulares para $e = 0$. Si $e > 1$ es de hecho una trayectoria hiperbólica y si $0 < e < 1$ será un movimiento elíptico. Para $e = 1$ el movimiento será parabólico (con velocidad de escape esencialmente). En resumen:

Energía de movimiento gravitacional elíptico y general

$$E_k = T = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{e^2}{2}\right) \quad (49)$$

$$U_g = E_p = \frac{MD^2}{L^2}(-1 - e \cos \theta) \quad (50)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{MD^2}{2L^2}(e^2 - 1) = \frac{GMm}{2r_p}(e - 1) = -\frac{GMm}{2a} \quad (51)$$

2.8. Velocidades cósmicas

El momento angular orbital es

$$L = mvR = m\omega R^2 \quad (52)$$

para una órbita circular de radio R y velocidad v . De aquí:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \rightarrow L_{orb} = m\sqrt{GMR} \quad (53)$$

y la velocidad areolar es $V_A = L/2m$, o bien

$$V_A = \frac{\sqrt{GMR}}{2} \quad (54)$$

La velocidad de escape o la velocidad orbital de distintos cuerpos reciben el nombre de velocidad cósmica. Sabemos que generalmente $v_e = \sqrt{2}v_{orb}$, y de la misma forma que sabemos el valor del radio de Schwarzschild o de la energía potencial gravitacional de una esfera de radio R , definimos las siguientes velocidades cósmicas:

Primera velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto orbite con el radio orbital igual a al radio terrestre o planetario. Por supuesto es un radio orbital ideal ya que generalmente el planeta es sólido y tiene obstáculos:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \quad (55)$$

Segunda velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto escape de la atracción gravitacional de un objeto:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} \quad (56)$$

Tercera velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto abandone la órbita del sistema solar donde está:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_\star}{R_{\star p}}} \quad (57)$$

Cuarta velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto orbite una galaxia pueda escapar de su influencia gravitacional:

$$v_4 = \sqrt{\frac{2GM_{gal}}{R_{gal}}} \quad (58)$$

Finalmente, si uno cree en el Multiverso, uno se podría preguntar si podríamos definir la quinta velocidad cósmica: la velocidad de escape necesaria para abandonar este Universo local, y pasar su horizonte observable...

Quinta velocidad cósmica

$$v_5 = \sqrt{\frac{2G_N M_U}{R_U}} \quad (59)$$

Usando los datos conocidos para la masa y radio del universo, sale aproximadamente $v_5 = 2 \cdot 10^8 m/s = 2c/3$. Para la Tierra: $v_1 = 7,9 km/s$, $v_2 = 11,2 km/s$, $v_3 = 42,1 km/s$, $v_4 = 518 km/s$. Sin embargo, las velocidades orbitales ayudan a disminuir las velocidades cósmicas aprovechando la vectorialidad de la velocidad. Así,

$v_3(real) = 16,7km/s$ si lanzamos en la dirección del movimiento orbital solar, y $v_4 = 230km/s$. Además, hay una relación interesantes entre las velocidades cósmicas y la orbital:

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 v_{orb}^2} \quad (60)$$

Esta ecuación es para movimiento circular, pero puede generalizarse para movimiento elíptico, lo que da la tercera velocidad cósmica en el perihelio y el afelio:

$$v_3(p) = \sqrt{v_2^2 + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1+e})^2}{1-e} v_{orb}^2} \quad (61)$$

$$v_3(a) = \sqrt{v_2^2 + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1-e})^2}{1+e} v_{orb}^2} \quad (62)$$

En el caso de movimiento orbital:

$$v_p(orb) = v_{orb} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (63)$$

$$v_a(orb) = v_{orb} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (64)$$

La velocidad parabólica produce, si la curvatura y el vértice están relacionados por $\rho = b^2/a = a(1 - e^2)$,

$$v_p(par) = v_{orb} \sqrt{\frac{2}{1-e}} \quad (65)$$

$$v_a(par) = v_{orb} \sqrt{\frac{2}{1+e}} \quad (66)$$

La tercera velocidad cósmica generalizada es

$$v_3(\varphi) = \sqrt{v_2^2 + (3 - 2\sqrt{2} \cos \theta) v_0^2} \quad (67)$$

La velocidad parabólica respecto de la Tierra es $v_P = v_p - V_{orb} = (\sqrt{2} - 1)V_{orb}$.

2.9. Teorema de Gauss gravitacional

Teorema de Gauss gravitacional

El flujo del campo gravitacional a través de una superficie cerrada Σ es igual a $-4\pi G_N$ veces la masa atrapada por la superficie. Matemáticamente:

$$\phi_g = \oint g = \oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G_N M_i(\Sigma) \quad (68)$$

El teorema de Gauss permite calcular el campo gravitacional para cargas puntuales y también para distribuciones de carga con simetrías más complicados.

Para una esfera de densidad homogénea, ρ , el campo gravitacional en el interior es $g(r) = GMr/R^3$, mientras que en el exterior será $g(r) = GM/r^2$. El potencial gravitacional será en el interior

$$V_g(r) = \frac{GM}{2R} \left[\frac{r^2}{R^2} - 3 \right] \quad (69)$$

2.10. Expresiones de varios campos

2.10.1. Variación del campo de un objeto con la altura

Variación del campo gravitacional con la altura

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_N M}{(R_p + h)^2} \vec{e}_r \quad (70)$$

El campo gravitacional en la superficie planetaria es igual a

$$g_s = g(r = R_p) = g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2} = \kappa \quad (71)$$

2.10.2. Variación del campo de un objeto con la profundidad

Variación del campo gravitacional con la profundidad

Aplicando el teorema de Gauss, se puede probar que el campo gravitacional varía con la profundidad de la forma siguiente:

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_N M}{R_p^2} \left(1 - \frac{d}{R_p}\right) \vec{e}_r \quad (72)$$

2.10.3. Variación del campo de un objeto con la latitud

Variación del campo gravitacional con la latitud

En un planeta, con $r = R_p \cos \varphi$, si $PB = PO + PA$, $PB^2 = PO^2 + PA^2 + 2PO \cdot PA \cos(\pi - \varphi)$, permite derivar la relación siguiente mediante el teorema de Pitágoras y que el peso efectivo en la latitud es el peso más el peso centrífugo:

$$g_\varphi = g_0 \left(1 - \frac{2\omega^2 R_p \cos^2 \varphi}{g_0} + \frac{\omega^4 R_p^2 \cos^2 \varphi}{g_0^2}\right)^{1/2} \quad (73)$$

$$PB^2 = PO^2 + PA^2 + 2POPA \cos(180 - \varphi)$$

$$(mg')^2 = (mg)^2 + (m\omega^2 R \cos \varphi)^2 + 2mg m\omega^2 R \cos \varphi (-\cos \varphi)$$

$$m^2 g'^2 = m^2 g^2 + m^2 \omega^4 R^2 \cos^2 \varphi - 2m^2 g \omega^2 R \cos^2 \varphi$$

$$g'^2 = g^2 \left(1 + \frac{\omega^4 R^2 \cos^2 \varphi}{g^2} - \frac{2 \omega^2 R \cos^2 \varphi}{g}\right)$$

Gravitational field variations

1st. With height: $r = R_p + h$

$$\vec{g} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r = -G_N \frac{M}{(R_p + h)^2} \vec{u}_r$$

2nd. With depth:

$$\vec{g} = -G_N \frac{M}{R_p^2} \left(1 - \frac{d}{R_p}\right) \vec{u}_r$$

$r = R_p - d$

3rd. With latitude: $r = R \cos \varphi$

$\vec{PB} = \vec{PO} + \vec{PA}$
 (weight) (centrifugal term)

$$PB^2 = PO^2 + PA^2 + 2PO \cdot PA \cos \varphi$$

$$\div m \Rightarrow g_\varphi^2 = g_0^2 + (\omega^2 R \cos \varphi)^2 - 2g_0 \omega^2 R \cos \varphi$$

$$g_\varphi = g_0 \left(1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \varphi}{g_0} + \frac{\omega^2 R^2 \cos^4 \varphi}{g_0} \right)^{1/2}$$

2.10.4. Campo gravitacional de una esfera uniforme

Para una esfera maciza de radio R , con densidad de masa constante $\rho = M/V$, se tiene que, por aplicación del teorema de Gauss:

- Para puntos $r > R$.

$$g = g_r = \frac{G_N M}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G_N \rho \frac{R^3}{r^2} \quad (74)$$

- Para puntos con $r < R$.

$$g = g_r = \frac{G_N M r}{R^3} = \frac{4}{3} \pi G_N \rho r \quad (75)$$

2.11. Teoría gravitacional relativista: relatividad general

La teoría newtoniana de la gravitación no es coherente con la teoría de la relatividad especial. Einstein la modificó para que lo fuera. Además, usó el principio de equivalencia de Galileo (igualdad de las masas inerciales con las masas o cargas gravitacionales), para deducir propiedades relativistas de la gravitación. Dedujo que la gravitación era debida a la curvatura del espacio-tiempo mismo, y propuso las ecuaciones de campo siguientes:

Ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (76)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, G_N la constante gravitacional newtoniana y Λ es la constante cosmológica. $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, y los tensores de Ricci, de Einstein o el escalar de curvatura dependen de la métrica y sus derivadas hasta segundo orden en el espacio-tiempo. $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento-esfuerzo. La curvatura dice a la materia y energía cómo moverse, la materia-energía dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

La teoría de la relatividad tiene una serie de predicciones clásicas testadas:

- Fuerzas de marea: $F_M = \frac{2GMm\Delta r}{r^3}$ implicada en la curvatura espacio-temporal, como fuente de la gravitación.
- Dilatación del tiempo gravitacional. Comprobada en múltiples ocasiones, es importante en los sistemas GPS:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}}} \quad (77)$$

y donde $R_S = 2G_N M/c^2$ es el radio de Schwarzschild. Una manera más sencilla de ver el efecto de la métrica (potencial gravitacional) es mediante la expresión:

$$\Delta t = \frac{gh}{c^2} t \quad (78)$$

Δt es el tiempo que mide el reloj en lo alto, a una altura h respecto del observador que mide t . La deducción de este resultado puede hacerse mediante el siguiente argumento. Un reloj es un oscilador con frecuencia ν . En dos puntos diferentes, tendrá energía

$$h\nu_1 \left(1 + \frac{U_1}{c^2}\right) = h\nu_2 \left(1 + \frac{U_2}{c^2}\right)$$

lo que da, ya que frecuencia y período son inversamente proporcionales

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1 + \frac{U_2}{c^2}}{1 + \frac{U_1}{c^2}} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \quad (79)$$

Si $\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \Delta t$, y $\Delta t_1 = t$, se recupera la primera expresión $\Delta t = gh/c^2$ si suponemos que el potencial gravitacional es 0 en h_1 y gh en h_2 . Para el caso de que la altura no es despreciable frente al radio, la corrección GR del tiempo por dilatación gravitacional viene dada por

$$\delta_{GPS/GR} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{U(r_s) - U(r_\oplus)}{c^2} \quad (80)$$

Esto debe compararse a la corrección de la relatividad especial cinemática

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \delta_{SR} \quad (81)$$

Ejercicio: hacer los cálculos para $r_s = 26561km$, y $r_{\oplus} = 6370km$. El efecto neto es que el reloj orbital marcha más deprisa por una cantidad $1 + \delta_R$, donde $\delta_T = \delta_{GR} - \delta_{SR}$. Se puede ver cuál es el reloj dominante, la GR. Estimar cuántas veces es más potente ese efecto que el de SR. Una deducción más cuidadosa, teniendo en cuenta la elipticidad orbital, y los parámetros orbitales produce la expresión:

$$\Delta t_r(GPS) = -2 \frac{\sqrt{GM_{\odot}a}}{c^2} e \sin E = -2 \frac{\sqrt{GM_{\odot}a}}{c^2} (E - M) \quad (82)$$

y donde $G, M_{\odot}, a, e, c, E, M$ son la constante gravitacional universal, la masa de la Tierra, el semieje mayor de la elipse, la excentricidad, la velocidad de la luz, la anomalía excéntrica y la anomalía media.

- Precesión del perihelio de Mercurio y de objetos orbitantes en general. Antes de la teoría einsteniana, había una discrepancia no observada que hasta llevó a inventar un planeta ficticio, Vulcano, para explicarlo. No existe Vulcano, sino un efecto no trivial de la curvatura gravitacional.

$$\Delta\phi = \frac{6\pi G_N M}{c^2 R(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 R^2}{c^2 T^2(1-e^2)} \quad (83)$$

En el caso de la presencia de una constante cosmológica como en un universo de tipo de Sitter (dS), hay un efecto de precesión adicional dado por la fórmula

$$\Delta\phi_{\Lambda} = \frac{\pi c^2 \Lambda a^3}{GM} \sqrt{1-e^2} \quad (84)$$

En el caso de la aproximación cuasicircular $e \ll 1$ puede demostrarse no trivialmente que

$$\Delta\phi_{\Lambda} \approx \frac{\pi c^2 \Lambda a^3}{GM} (1-e^2)^3 \quad (85)$$

- Efecto lente gravitacional (comprobado de forma espectacular en la expedición de A. Eddington en 1919).

$$\Theta_L = \frac{4G_N M}{c^2 r} = \frac{2R_S}{r} = \frac{D_S}{r} \quad (86)$$

- Predicción de ondas gravitacionales y radiación gravitacional de partículas sin masa (gravitones) que se propagan con velocidad $v_g = c$. Todo cuerpo además, perderá energía mediante radiación gravitacional. Se observó tal pérdida primeramente en un púlsar binario en el siglo XX(Nobel 1993). El ritmo relativo de cambio de período de un pulsar binario como consecuencia de la emisión de ondas gravitacionales en Relatividad General es igual a

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{96}{6c^5} G^{5/3} \mu M^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{-8/3} F_{GR}(e) \quad (87)$$

con

$$F_{GR}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)$$

La detección de ondas gravitacionales se produjo por LIGO en 2016 por primera vez. Sin fuentes, la ecuación de onda que satisface una onda gravitacional puede escribirse como sigue.

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (88)$$

- Efecto gravitomagnético (testado por GRAVITY probe B), también llamado efecto Lense-Thirring. Hay dos fórmulas principales para el efecto Lense-Thirring. La primera es:

$$\dot{\Omega} = \frac{R_S a c}{r^3 + a^2 r + R_S a^2} \left(\frac{360}{2\pi}\right), \quad R_S = \frac{2G_N M}{c^2}, \quad a = \frac{2R_{\star}^2}{5c} \left(\frac{2\pi}{T}\right) \quad (89)$$

y la segunda es

$$\dot{\Omega} = \frac{2GJ}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{360}{2\pi}\right) = \frac{2G^2 M^2 \chi}{c^3 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{360}{2\pi}\right) \quad (90)$$

- Existencia de “agujeros negros”, objetos tan densos que ni la luz puede escapar. Una definición más precisa es como soluciones a las ecuaciones de campo de la relatividad general.
- Posibilidad de la existencia de la energía del vacío, vía Λ , lo que define una densidad de energía del vacío

$$\rho_{\Lambda} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N} \quad (91)$$

- Expansión cósmica universal, y teoría del Big Bang, como derivaciones a gran escala de las ecuaciones de campo. A nivel simplificado, considerado el Universo como un espacio-tiempo en el que se satisface el principio cosmológico, las ecuaciones de campo de Einstein se simplifican en términos de las ecuaciones de Friedmann, en el caso de un Universo espacialmente homogéneo e isótropo en el espacio. La conservación de la energía cósmica y su conservación conlleva la ecuación cósmica

$$\sum_i \Omega_i = \Omega_{\Lambda} + \Omega_M + \Omega_K = 1$$

Observaciones cosmológicas y astrofísicas/astronómicas, circa 2020, establecen que

$$\Omega_{\Lambda} = 0,69$$

$$\Omega_M = 0,31 = \Omega_{DM} + \Omega_B + \Omega_r = 0,26 + 0,05 + 0,00$$

siendo $\Omega_i = \rho_i/\rho_0$ la densidad de energía de la especie i -ésima, y $\rho_0 = \rho_c = 3H_0^2 c^2 / 8\pi G_N$ es la densidad de energía crítica del Universo.

- Otros efectos de GR: efecto de Sitter o geodésico, efecto Schiff, igualdad de masas inercial y gravitacional (principio de equivalencia), retraso de Shapiro (Shapiro time dilation), teorema de la ausencia de pelo (en Kerr se simplifica enormemente),... El retraso de Shapiro es conocido como cuarto test clásico y adquiere la forma siguiente alrededor de un cuerpo masivo

$$\Delta t_S = -\frac{2GM}{c^3} \ln(1 - \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \quad (92)$$

- Posibilidad de la existencia de máquinas del tiempo, agujeros de gusano, warp-drives y TARDIS-like space-times. Otras soluciones son posibles también, como cuerdas cósmicas, defectos y black p-branes en extensiones de la GR.
- Posibilidad de teorías multimétricas, de altas derivadas (Lanczos-Lovelock, Finsler,...), no métricas, y de teorías con torsión o teleparalelismo (extensiones no triviales).

Sin embargo, la gravitación a nivel cuántico no se entiende todavía bien. Además, la teoría de la gravitación relativista, relatividad general, tiene un grupo de simetrías no entendido y conduce finalmente a la existencia de singularidades espacio-temporales que nadie sabe cómo tratar o eliminar. Las teorías cuánticas gravitacionales más exitosas son: la teoría de (super)cuerdas/Teoría M(F,S,...), la teoría de la gravitación de lazos cuántos (loop quantum gravity), la teoría de (super)twistores y otras extensiones.

3. Campo eléctrico

El campo eléctrico es generado por cargas eléctricas. En la naturaleza hay dos clases de cargas eléctricas, denominadas positivas y negativas. Cargas de diferente tipo se atraen, y cargas del mismo tipo se repelen. La carga eléctrica es una cantidad que está cuantizada en la Naturaleza, i.e., $Q = Ne$. Para cargas puntuales, la fuerza eléctrica viene dada por la ley de Coulomb:

3.1. Ley de Coulomb

Ley de Coulomb para cargas puntuales

Dos cargas puntuales Q, q , separadas una distancia r , se atraen o repelen con una fuerza

$$\vec{F} = K_C \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r = K_C \frac{Qq}{r^3} \vec{r} \quad (93)$$

donde $K_C = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$, o bien $K_C = 1/4\pi\epsilon_0$, con $\epsilon_0 = 1/4\pi K_C = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$.

Por analogía con el campo gravitacional, el campo eléctrico es la fuerza coulombiana por unidad de carga, matemáticamente

Campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{K_C Q}{r^2} \vec{e}_r \quad (94)$$

donde E se mide en N/C .

3.2. Potencial y energía potencial eléctricos

Potencial y energía potencial eléctrica

Se llama potencial eléctrica a la función

$$V = K_C \frac{Q}{r} = \frac{E_p(el)}{q} \quad (95)$$

que tiene unidades de voltios, $1\text{V} = 1\text{J/C}$ y no es más que la energía potencial eléctrica por unidad de carga. La energía potencial eléctrica es

$$E_p(el) = \frac{K_C Qq}{r} \quad (96)$$

en unidades de julios (J). Potencial y energía potencial están relacionados por $E_p(el) = qV$. El trabajo del campo necesario para transportar una carga desde un punto inicial A hasta otro final B es igual a la variación negativa de energía potencial:

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = K_C Qq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_p(A) - E_p(B) \quad (97)$$

Así, el potencial en un punto puede ser también definido como el trabajo necesario para transportar una carga dada desde el infinito hasta ese punto. Una línea o superficie equipotencial son lugares geométricos donde el potencial eléctrico es constante. Por tanto, no se realiza trabajo para mover una partícula a lo largo de una línea o superficie equipotencial. Las líneas de campo eléctrico son radiales y entran o salen dependiendo del signo de la carga. Las líneas de campo salen de las cargas positivas y entran en las cargas negativas.

Principio de superposición

Para un conjunto de cargas puntuales q_i , $i = 1, 2, \dots, N$, el campo eléctrico total y el potencial eléctrico total están dados por la suma de los campos gravitacionales y los potenciales gravitacionales de cada masa separadamente. Matemáticamente:

$$V_t = \sum_i V_i = \sum_{i=1}^N V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_N \quad (98)$$

$$\vec{E}_t = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N \quad (99)$$

Dos sistemas de cargas, que se conecten, evolucionarán hasta el equilibrio, momento en el que se igualan los potenciales en dichos sistemas.

3.3. Teorema de Gauss

Teorema de Gauss del campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada Σ es igual a $4\pi K_C = 1/\epsilon_0$ veces la carga atrapada por la superficie. Matemáticamente:

$$\phi_e = \oint E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi K_C Q(\Sigma) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} \quad (100)$$

El teorema de Gauss permite calcular el campo gravitacional para cargas puntuales y también para distribuciones de carga con simetrías más complicadas.

3.4. Ejemplos de campos y potenciales eléctricos

3.4.1. Campo eléctrico de una esfera uniforme

Para una esfera maciza de radio R , con densidad de carga constante $\rho = Q/V$, se tiene que, por aplicación del teorema de Gauss:

- Para puntos $r > R$,

$$E = E_r = \frac{K_C Q}{r^2} = \frac{4}{3}\pi K_C \rho \frac{R^3}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \quad (101)$$

- Para puntos con $r < R$,

$$E = E_r = \frac{K_C Q r}{R^3} = \frac{4}{3}\pi K_C \rho r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (102)$$

Para el caso de una esfera metálica hueca, se tiene que $E_i = 0$ si $r < R$ y $E = K_C Q/r^2$ si $r > R$. El potencial para la esfera es similar al de la partícula puntual para puntos alejados de la esfera y mayor que el radio de la misma. Para el caso de una esfera con densidad uniforme se tiene que

- Para puntos con $r > R$,

$$V(r) = \frac{K_C Q}{r} \quad (103)$$

- Para puntos con $r > R$,

$$V(r) = K_C Q \left[\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right] = \frac{K_C Q r^2}{2R} \left[3 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (104)$$

mientras que para la esfera hueca se tiene que $V = KQ/r$ si $r > R$, y $V = KQ/R$ si $r < R$.

3.4.2. Campo eléctrico de un plano infinito

El campo eléctrico generado por un plano infinito de carga es perpendicular al mismo y constante, proporcional a la densidad superficial de carga en el plano.

$$E = E_{\perp} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (105)$$

El campo entre las placas de un condensador, con diferencial de potencial ΔV , se relaciona con este campo de la forma siguiente $\Delta V = E\Delta x = Ed$, donde d es la separación entre las placas.

3.4.3. Campo eléctrico de un hilo infinito

El campo eléctrico de un hilo infinito de densidad lineal λ se perpendicular al hilo, y su intensidad se calcula mediante la expresión

$$E = E_{\perp} = E_r = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \quad (106)$$

El potencial de un hilo es una función de tipo logarítmico, dada por $V = V_0 + \frac{\lambda \ln(r/r_0)}{2\pi\epsilon_0}$.

3.4.4. Movimiento de una partícula cargada en un potencial

Una partícula de masa m y carga q se verá acelerada mediante la acción de un campo electrostático \vec{E} , de forma que

$$m\vec{a} = -q\nabla V \approx -q \frac{\Delta V}{\Delta x} \vec{e}_x \quad (107)$$

Una partícula positiva, se movera espontáneamente de los puntos de mayor a menor potencial.

3.4.5. Energía potencial eléctrica (gravitacional) total de una esfera uniforme

Supongamos una esfera cargada eléctricamente de forma uniforme con densidad ρ . La densidad eléctrica proporciona $\rho = dQ/dV$, y $dQ = \rho dV$. O bien, $Q(r) = \rho V(r)$. Para el volumen de una esfera de capas de radio r , $V = 4\pi r^3/3$, y sumamos capas hasta el radio $r = R$. Entonces, si cada capa tiene $dV = 4\pi r^2 dr$, la energía potencial eléctrica total sería calculable mediante la integral

$$E_p(r) = \int_0^R V(r) dq(r) = \int_0^R \frac{K_C q(r)}{r} \rho \cdot 4\pi r^2 dr \quad (108)$$

de donde sustituyendo

$$E_p(r) = \int_0^R \frac{K_C \rho}{r} \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{16\pi^2 K_C \rho}{3} \int_0^R r^4 dr \quad (109)$$

luego

$$E_p(r) = \frac{16\pi^2 K_C \rho^2 R^5}{15} = \frac{4\pi^2 \rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3K_C Q^2}{5R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad (110)$$

Además, de aquí mediante el cambio $K_C \rightarrow -G_N$, $Q \rightarrow M$, se deduce el equivalente gravitacional

$$E_p(r) = -\frac{16\pi^2 G_N \rho^2 R^5}{15} = -\frac{3G_N M^2}{5R} \quad (111)$$

4. Campo magnético

4.1. Propiedades generales

La existencia de objetos magnéticos se conoce desde tiempos antiguos. Experimentalmente, se observa que hay dos tipos de polos magnéticos, llamados polo norte (N) y polo sur (S) magnéticos. Las líneas de campo magnético salen del polo N, y entran en el polo S. Son líneas cerradas, a diferencia del campo eléctrico o gravitacional, donde son abiertas. La existencia del magnetismo se atribuy a cargas móviles. La fuerza magnética se define para una carga puntual q de la forma siguiente

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (112)$$

4.2. Fuerzas magnéticas

Infinitesimalmente, la fuerza magnética de un hilo de corriente es

$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B} \leftrightarrow \vec{F}_m = \oint_C Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (113)$$

La ley de Biot-Savart para cargas es, con $K_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7}NA^{-2}(Tm/A)$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (114)$$

mientras que para corrientes es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (115)$$

La fuerza magnética entre dos cargas puntuales que se mueven con velocidades \vec{v}_1, \vec{v}_2 es igual a

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1q_2 (\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{e}_r))}{r_{12}^2} \quad (116)$$

Para corrientes I_1, I_2 , la fuerza magnética resulta ser

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12})}{r_{12}^2} \quad (117)$$

En todos los casos anteriores, $\vec{r}_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$.

4.3. Selector de velocidades. Ciclotrón

El campo eléctrico necesario para que una partícula cargada no sea desviado por una fuerza magnética en dirección y sentido es el principio del selectro de velocidades. Igualando fuerza eléctrica y magnética se obtiene

Selector de velocidades

Igualando $qE=qvB$, se tiene que

$$E = vB \quad (118)$$

Análogamente, una partícula cargada que entra en una región donde hay un campo magnético se curva, y realiza un MCU (aunque en general sería un movimiento helicoidal). Es el principio de funcionamiento del ciclotrón:

Principio del ciclotrón

Igualando fuerza centrípeta y magnética, $F_c = F_m$, se obtiene el radio de giro de la partícula cuando se le aplica un campo magnético:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (119)$$

La frecuencia de ciclotrón $\omega_c = 2\pi R/T$, se obtiene si $v = 2\pi R/T = \omega R$:

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (120)$$

4.4. Ley de Ampère. Campos de hilos infinitos, espiras y solenoides

Hay una relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos, que permite ir más allá de cargas puntuales mediante la noción de circulación del campo magnético.

Ley de Ampère

La circulación a lo largo de un camino cerrado del campo magnético es μ_0 veces la intensidad de corriente que lo atraviesa. Matemáticamente

$$\Gamma_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I(C) \quad (121)$$

Como aplicación, permite deducir la expresión del campo magnético de un hilo infinito de forma muy rápida.

$$B = B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (122)$$

donde B_φ es en la dirección azimutal de \vec{e}_φ , que define la regla de la mano derecha. Para una espira circular en su centro, se puede deducir también que

$$\vec{B} = B_\perp \vec{e}_\perp = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_\perp \quad (123)$$

Para un solenoide recto, de $n = N/L$ vueltas por unidad de longitud, se puede probar que el campo de esta bobina en su interior es paralelo al eje del solenoide o bobina con

$$B = B_\parallel \vec{e}_\parallel = \mu_0 n I \vec{e}_\parallel \quad (124)$$

Antiguamente, la definición de amperio usaba la fuerza entre hilos paralelos de corriente:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d_{12}} \quad (125)$$

5. Campos electromagnéticos e inducción EM

Faraday descubrió la ley general de inducción electromagnética, y el sentido de la corriente lo da la ley de Lenz, de forma que la ley de Faraday-Lenz da la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en un circuito:

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = \Delta V = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (126)$$

El signo menos de la ley de Faraday se debe a Lenz. El sentido de la corriente inducida en un circuito (o del campo magnético inducido sobre un circuito) es aquel que se opone al aumento o disminución del flujo magnético.

Problemas de carriles conductores

Sea un circuito formado por dos carriles largos conductores paralelos, la separación entre carriles es b . Una barra se sitúa de forma transversal cerrando el circuito, también metálica y conductora. Supongamos la velocidad inicial es v_0 hacia la derecha, i.e., $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, y el campo entra en el circuito $\vec{B} = -B\vec{k}$. Inicialmente la barra está con posición x_0 respecto del origen y extremo. La aceleración es $\vec{a} = a\vec{i}m/s^2$. El circuito está en el plano XY. El flujo será

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos 180^\circ = -BS \quad (127)$$

La superficie es $S = bx = b \left[x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \right]$. Entonces, la f.e.m. inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = +B\frac{dS}{dt} = Bbv_0 + Bbat = Bb(v_0 + at) \text{ V} \quad (128)$$

La corriente inducida, supuesto el conductor óhmico de resistencia R , será:

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bb}{R}(v_0 + at) \text{ A} \quad (129)$$

y su sentido vendrá dado por la ley de Lenz.

Las relaciones de influencia mutua entre dos circuitos, por los que atraviesan flujos ϕ_1, ϕ_2 magnéticos, viene dada por las relaciones

$$\phi_1 = L_1I_1 + M_{12}I_2 \quad (130)$$

$$\phi_2 = M_{21}I_1 + L_2I_2 \quad (131)$$

donde $M_{12} = M_{21} = M$ es el coeficiente de inducción mutua, y L_1, L_2 son los coeficientes de autoinducción. Para una bobina larga, $L = \mu n^2 S$, y L se mide en henrios (H). $1H = 1Vs/A$.

Se llama momento magnético a la cantidad $\vec{m} = I\vec{S}$, que induce un torque en general $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

5.1. Transformadores

Los transformadores son dispositivos que permiten aumentar o disminuir el potencial o corriente eléctrica, mediante campos magnéticos y arrollamientos. Matemáticamente:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_1}{V_2} \quad (132)$$

5.2. Ley de Ohm

La ley de Ohm relaciona corriente y potencial para un dispositivo de resistencia R :

$$V = IR \quad (133)$$

donde $R = \rho L/A = L/\sigma A$, con ρ siendo aquí la resistividad. La corriente eléctrica es $I = dQ/dt$. Los conductores óhmicos satisfacen $\vec{J} = \sigma \vec{E} = nq^2 \vec{E}/m_e = qN\vec{v}$, con $\sigma = 1/\rho$. La ley de Ohm generalizada a un generador se escribe como sigue:

$$V = I(R + r) \quad (134)$$

Las resistencias en serie se suman, las resistencias en paralelo se suman armónicamente:

$$R_t(\text{ser}) = R_1 + R_2, \quad R_t = \sum_i R_i \quad (135)$$

$$R_t(\text{par}) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \frac{1}{R_t} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (136)$$

El efecto Joule es la producción de energía térmica por el paso de una corriente por un conductor. Matemáticamente:

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (137)$$

donde V es la diferencia de potencial (d.d.p.) entre los extremos del conductor.

5.3. Condensadores

La relación entre carga y potencial viene dada por una magnitud llamada capacidad.

$$Q = CV \leftrightarrow \Delta Q = C\Delta V \quad (138)$$

La capacidad se mide en faradios (F). Para un condensador plano-paralelo, $C = \epsilon_0 S/d$, para un condensador cilíndrico $C = 2\pi\epsilon_0 h / \ln(R_2/R_1)$. Para un condensador esférico $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$. La asociación en paralelo de condensadores suma capacidades, la asociación en serie de condensadores los suma de forma armónica:

$$C(\text{par})_t = C_1 + C_2, \quad C_t(\text{par}) = \sum_i C_i \quad (139)$$

$$C(\text{ser})_t = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_t(\text{ser})^{-1} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (140)$$

Un condensador almacena una energía proporcional a la carga y diferencia de potencial, es decir,

$$E(C) = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta Q^2}{C} \quad (141)$$

6. Otros campos

6.1. El campo nuclear

Los campos nucleares (fuerte y débil) son complicados. La fuente del campo nuclear fuerte es la denominada carga de color (hay tres cargas de color, llamadas roja, verde y azul, R, G, B). La fuente del campo nuclear débil es la denominada carga de sabor. Hay 6 sabores de quarks y 6 sabores de leptones. Los cuantos del campo electromagnético son como sabemos bosones sin masa llamados fotones. En el caso del campo nuclear, a nivel fundamental son mediados por bosones sin masa llamados gluones (hay 8 gluones diferentes), y por los bosones masivos W (W^+ , W^-) y Z . Sin embargo, Hideki Yukawa encontró un potencial relativamente simple para aproximar el comportamiento peculiar de las interacciones débiles (a grandes distancias, y a nivel efectivo, la interacción fuerte está descrita por intercambio de piones, bosones masivos hechos de 1 quark y un antiquark). Matemáticamente, el potencial de los piones viene dado por un potencial a corto alcance de Yukawa:

Potencial de Yukawa

$$V_Y = -g^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r} \quad (142)$$

La fuerza de Yukawa se obtiene como sigue

$$F_Y = -\frac{dV_Y}{dr} = -g^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r^2} - \alpha mg^2 \frac{e^{-\alpha mr}}{r} = -\frac{g^2 e^{-\alpha mr}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha m \right) \quad (143)$$

6.2. El campo de Higgs

Los campos gauge masivos vectoriales de la interacción débil plantean otro problema ya existente en las teorías originales de Newton o Einstein. ¿Qué es la masa? ¿Por qué la masa del protón es unos $6\pi^5 \approx 1836$ veces la masa del electrón? ¿Por qué las masas de las partículas, en particular la de los bosones W y Z, es la que observamos? En Física o Química elemental uno define materia y volumen y no se pregunta habitualmente qué es la masa o qué es el espacio. Eso cambia en las teorías más fundamentales. Hoy día, se piensa que el origen de la masa tiene 2 fuentes: el campo de Higgs, encargado de dar masa a las partículas que hoy pensamos son elementales, y la ruptura de simetría quiral de la QCD (Quantum Chromodynamics, cromodinámica cuántica). Una partícula como un W, Z o un electrón adquiere masa por interacción con un campo adicional que permea el Universo, llamado campo de Higgs. El protón y otras partículas compuestas de la interacción nuclear adquieren masa por un mecanismo cinético más complicado de transmutación dimensional relacionado con la ruptura de cierta simetría de forma dinámica (y bastante complicada).

Una forma sencilla de entender el campo de Higgs, es suponer que deriva de un potencial que es una función cuadrática de un “campo escalar” $H(x)$, via

$$V(H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 = \lambda H^4 - 2\lambda v^2 H^2 + \lambda v^4 \quad (144)$$

Este potencial tiene un valor mínimo en $\pm v = \partial H / \partial H|_v = 0$. Este valor mínimo del potencial define el “vacío” del Universo. Una perturbación ligera del campo de Higgs via $H = h + v$ provoca el proceso de ruptura espontánea de simetría del campo, lo que dota de masa al propio campo de Higgs y unas autointeracciones:

$$V(h) = \lambda \left[(h + v)^2 - v^2 \right]^2 = \lambda h^4 + 4\lambda v h^3 + 4\lambda v^2 h^2 \quad (145)$$

El último término es un término de masa si identificamos $4\lambda v^2 = M_H^2/2$, luego $M_H = 8\lambda v^2$. Los valores de v, M_H no los predice la teoría electrodébil ni de la ruptura espontánea de simetría. Para el valor medido de la denominada constante de Fermi G_F , se obtiene que $v = 246 \text{ GeV}$, y con $M_H = 126 \text{ GeV}$, se obtiene que $\lambda = 0,13$. $V(H)$ puede interpretarse como una densidad de energía del vacío del campo de Higgs. Un método similar aplica para obtener la masa del W y del Z, mientras que el fotón electromagnético y los gluones no se acoplan al Higgs, y permanecen sin masa, de forma que

$$M_W = \frac{g v}{2} \quad (146)$$

y

$$M_Z = \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \quad (147)$$

y $m_\gamma = m_g = 0$ (masa del fotón y de los gluones nula, porque el campo de Higgs es transparente para ellos). Los fermiones de partículas elementales (no los fermiones compuestos o incluso los bosones compuestos de la interacción fuerte) adquieren masa mediante el campo de Higgs via

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}} = \mathcal{Y}_{fv} = \frac{g_f \sqrt{2} M_W \sin \theta_W}{e} \quad (148)$$

6.3. Inflación y Cosmología

Como la energía potencial no es lo relevante, sino las diferencias de energía, se tiene que $\lambda v^4 \simeq 4,8 \cdot 10^8 GeV^4$, que es bastante más grande que el valor medido cosmológico de la densidad de energía del vacío (del orden de meV^4). Esto se conoce como el problema de la constante cosmológica o de la energía del vacío. Se piensa, además, que al principio del Universo, hubo un campo escalar similar al Higgs que produjo una expansión exponencial del Universo. El Universo experimentó una transición de fase mediante un potencial “escalar” desconocido. Una transición de segundo orden en la inflación implica un campo inflatón a los 10^{-11} s tras el origen cósmico:

$$V(T, H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 + b^2 T^2 H^2 \quad (149)$$

Aquí, la temperatura crítica es $T_c = \sqrt{2\lambda v^2/b}$. Así, una corrección de primer orden a la energía del campo inflatón (Higgs-like) da una transición de fase de segundo orden en la energía potencial escalar. Una transición de fase de primer orden es también posible, lo que implicaría un potencial más complicado mediante una corrección extra

$$V(T, H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 + bT^2 H^2 + aTH^3 \quad (150)$$

El tipo de transición de fase puede parecer complicado, pero tiene consecuencias cosmológicas. La transición de segundo orden está permanentemente en equilibrio y el sistema pierde memoria de estados previos. En tal escenario no se esperan remanentes o reliquias de la fase no rota a temperaturas por debajo de la temperatura crítica de la transición. En cambio, una transición de primer orden es más rica fenomenológicamente. Podría producir remanentes o reliquias detectables en Astrofísica o Cosmología observacionales. La transición de fase de primer orden es más atractiva también por otro motivo: permite explicar la asimetría bariónica en la naturaleza. Esto es, el desequilibrio de materia-antimateria observado en el Universo, y gracias al que éste existe hoy día como lo observamos. Determinar la naturaleza de la transición de fase inflacionaria es un problema no resultado transdisciplinar. Y uno requiere también de los llamados métodos no perturbativos. Nueva Física será necesaria para entender la Naturaleza y la identidad concreta de la transición de fase inflacionaria o electrodébil que vino después. No se explica o entiende bien del todo en el marco del Modelo Estándar.

6.4. Y más allá, más campos...

Las leyes de fuerza, y el teorema de Gauss o la ley de Ampère, pueden ser generalizados a partículas de puntuales en espacios de cualquier dimensión. Además, el modelo de la partícula puntual puede extenderse a objetos extensos, mediante el álgebra de Grassmann de formas diferenciales o mediante el cálculo geométrico de Clifford en un álgebra de espacio-tiempo. Además, sabemos ya que existe otro campo, llamado campo de Higgs, que es responsable de la masa de las partículas elementales, mientras que la masa de objetos hadrónicos se debe a un efecto complicado no lineal mecanocuántico de la cromodinámica cuántica (QCD). Hay razones para pensar que la energía oscura, la materia oscura o incluso el campo escalar de la inflación en el Universo temprano requieren nuevos campos para la comprensión del Universo primigenio y su futuro. Aunque una pregunta aún persiste: ¿cuántos campos realmente hay? Quizás, todos los campos son realmente expresiones de un único campo y fuerza fundamental a muy alta energía. Esa es la idea de las Teorías de Gran Unificación, las Teorías del Todo y, en el fondo, la idea de la Teoría del Campo Unificado que fue el problema sin resolver que dejó A. Einstein en el siglo XX para las generaciones futuras de científicos.

6.5. Otras mecánicas generalizadas

Además, de la Mecánica de Newton, hay otras versiones de la Mecánica basadas en objetos llamados lagrangianos y hamiltonianos. Reproducen los resultados newtonianos y son más generales. De la Mecánica de Hamilton, Yoichiro Nambu dio una generalización misteriosa que no se entiende. Estas mecánicas son útiles en sistemas de partículas y continuos (campos). Además, ofrecen una conexión natural entre simetrías y leyes de conservación. Por otra parte, la generalización del cálculo diferencial clásico a más variables, o también a lo que hoy día se llama cálculo fraccional o diferentegral es otro tema moderno de investigación.

Particle	Mass	Spin
t	173 GeV	1/2
b	4 GeV	1/2
c	2 GeV	1/2
s	100 MeV	1/2
d	5 MeV	1/2
u	2 MeV	1/2
τ	1777 MeV	1/2
μ	106 MeV	1/2
e	511 keV	1/2
ν_τ	< 0.6 eV	1/2
ν_μ	< 0.6 eV	1/2
ν_e	< 0.6 eV	1/2
W^\pm	80 GeV	1
Z	91 GeV	1
γ	0	1
g	0	1
H	125 GeV	0

Table 1.1: Summary of the mass and spin of the Standard Model particles

La nueva Tabla Periódica es el Modelo (o teoría) Estándar:

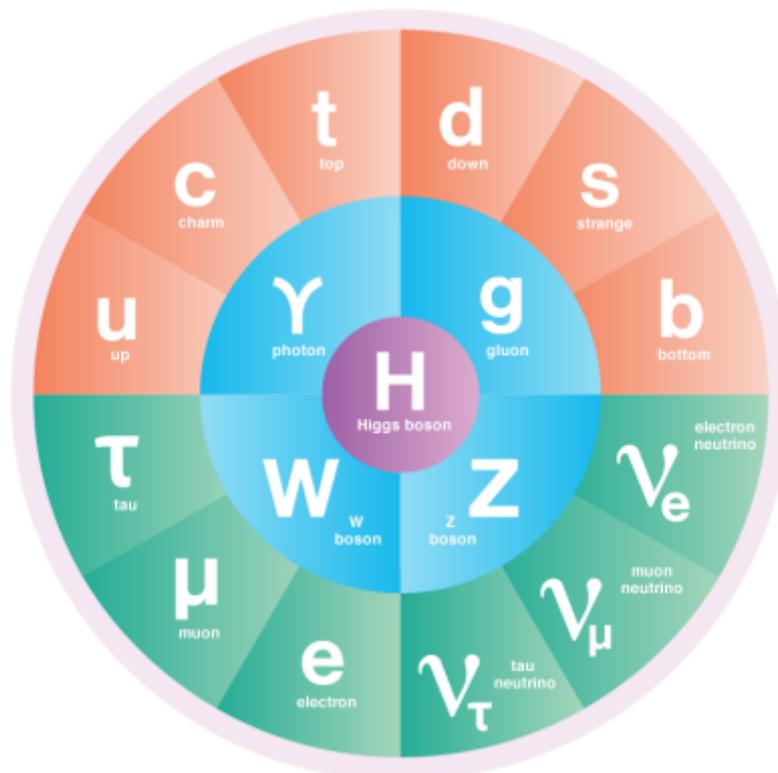


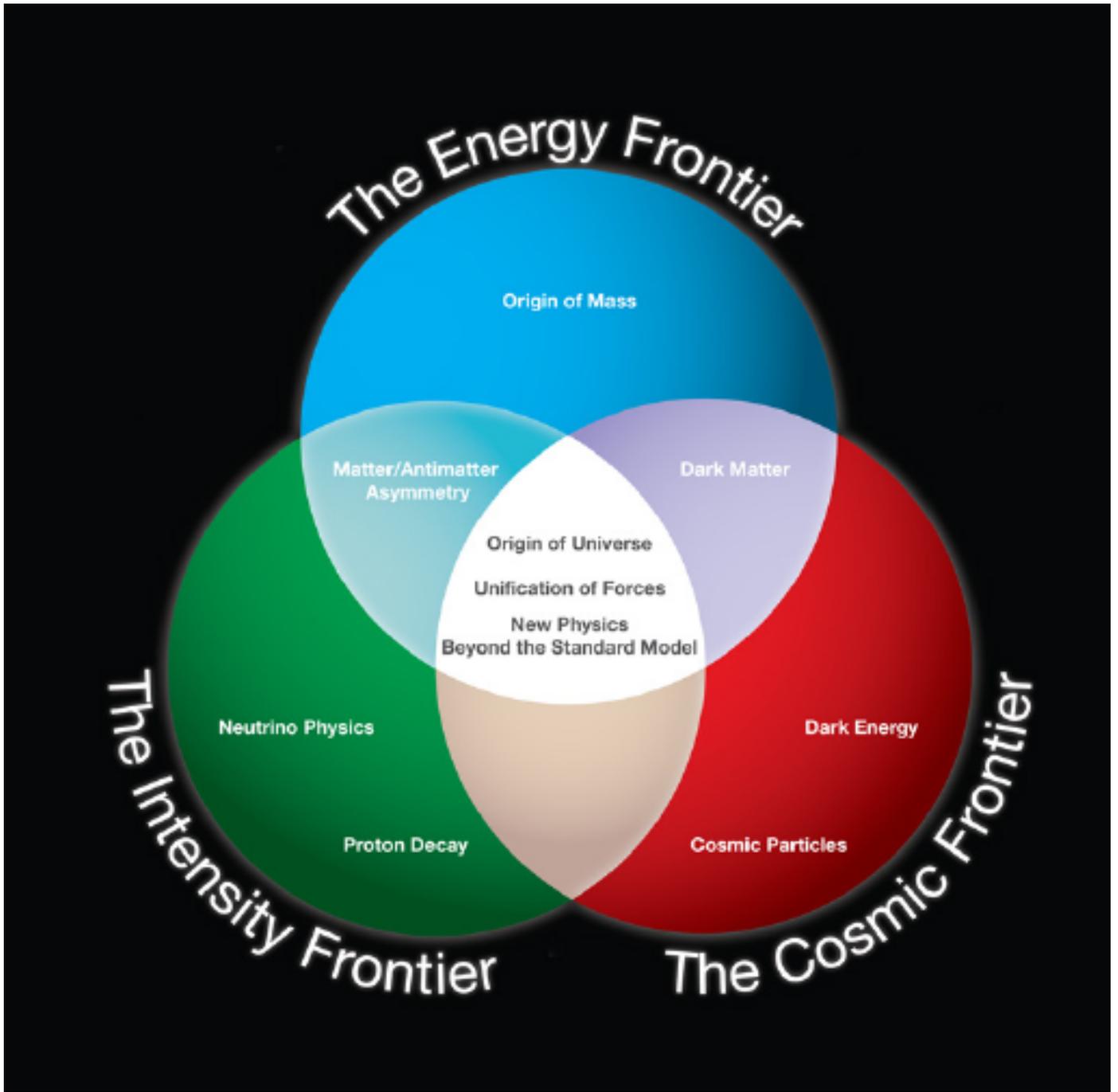
Figure 1.1: Schematic diagram of the Standard Model of particle physics

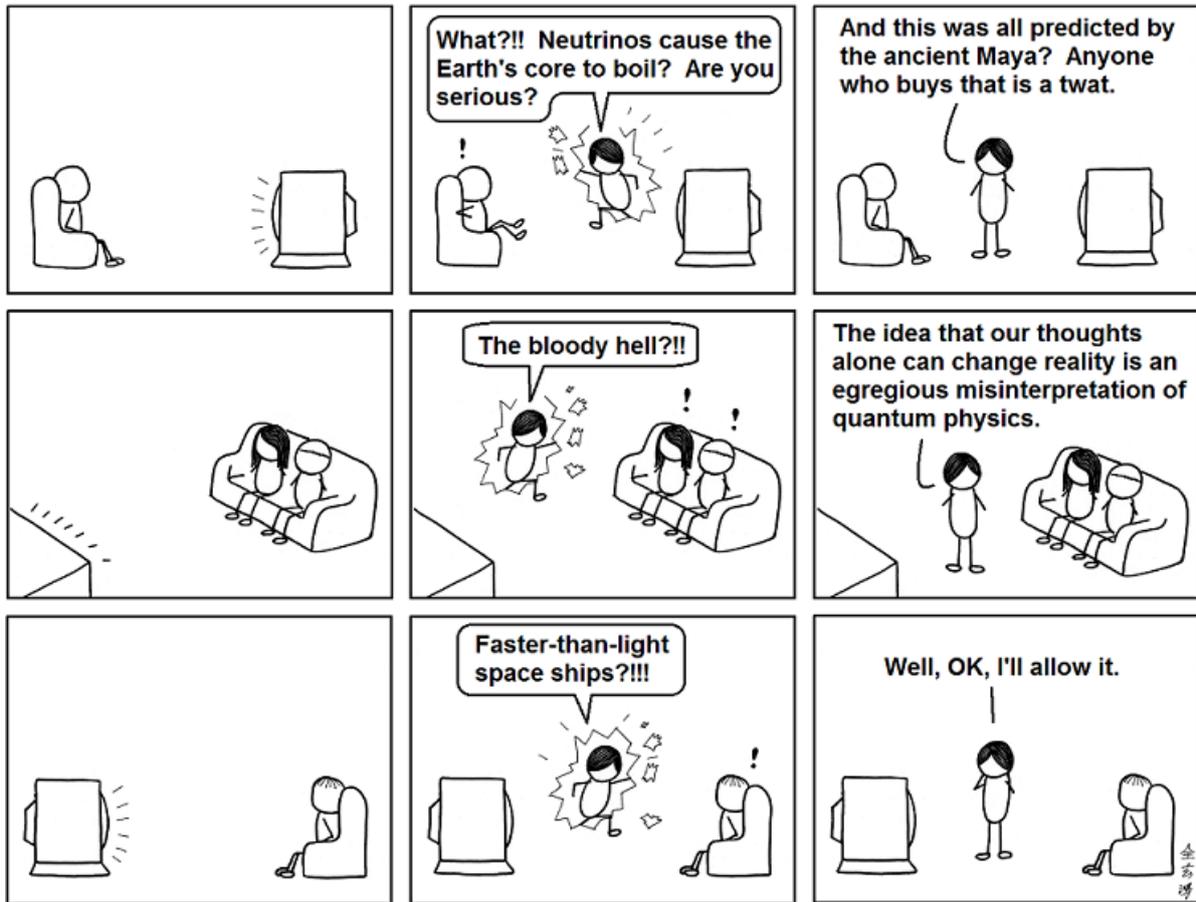
Las nuevas fronteras son aún enormes...

Landmark Inventions in Mathematical Physics

- ☆ **Geometry** (-230 Euclid) the foundation for measurement
- ☆ **Analytic Geometry** (1637 Descartes)
first integration of algebra and geometry
- ☆ **Differential and Integral Calculus** (~ 1670 Newton & Leibniz)
 - Newtonian Mechanics 1687
 - Perfected ~1780+ by Euler, Lagrange, Laplace
- ☆ **Complex variable theory** (~1820+ Gauss, Cauchy, Riemann)
 - Celestial mechanics and chaos theory (1887 Poincaré)
 - Quantum mechanics (1926 Schrödinger)
- ☆ **Vector calculus** (1881 Gibbs)
 - Electrodynamics (1884 Heaviside)
- ☆ **Tensor calculus** (1890 Ricci)
 - General Relativity (1955 Einstein)
- ☆ **Matrix algebra** (1854+ Cayley)
 - Quantum mechanics (1925 Heisenberg, Born & Jordan)
- ☆ **Group Theory** (~1880 Klein, Lie)
 - Quantum mechanics (1939 Weyl, Wigner)
 - Particle physics (1964 Gell-Mann, etc.)

19th
Century





NEW RULE:
All science fiction DVDs
must now include audio
commentary by Brian Cox.

all known physics

$$\Psi = \int e^{i\int \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F^2 + \bar{\psi}i\not{D}\psi - \lambda H\bar{\psi}\psi + |DH|^2 - V(H) \right)} \int e^{i\int \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F^2 + \bar{\psi}i\not{D}\psi - \lambda H\bar{\psi}\psi + |DH|^2 - V(H) \right)}$$

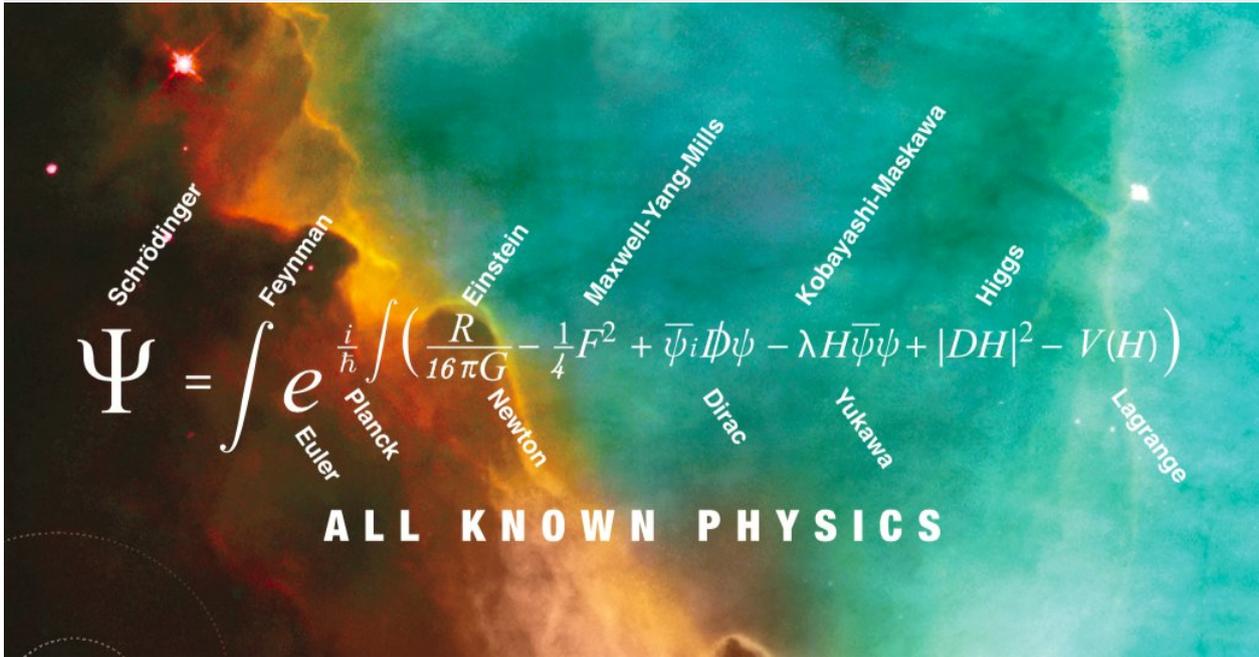
Labels around the equation: Schrödinger, Feynman, Einstein, Maxwell-Yang-Mills, Kobayashi-Maskawa, Lagrange, Dirac, Yukawa, Higgs, Euler, Planck, Newton.

plus neutrino masses and mixing and dark matter

$$W = \int_{k < \Lambda} [Dg][DA][D\psi][D\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + (\bar{\psi}_L^i V_{ij} \Phi \psi_R^j + \text{h.c.}) - |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \right] \right\}$$

quantum mechanics
spacetime
gravity

other forces
matter
Higgs



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$6\text{CO}_2 + 6\text{H}_2\text{O} + n\gamma \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6\text{O}_2$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$$

$$v = \frac{d[P]}{dt} = \frac{V_{\max}[S]}{K_m + [S]}$$



$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dG = d(H - TS)$$

$$dS^t = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0$$



$$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = f(t)$$

$$\mathbf{F} = - \iint_S p \hat{n} dS$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$



Doctor Who?

ϱΔΞΘΣΨΧΚΙΟ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\spadesuit\spadesuit\rangle) \quad \oint_{\partial\Sigma} \Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$

