APUNTES
DE
Hª DE LAS MATEMÁTICAS

Juan Francisco González Hernández *,**

Índice

*: jfgh.teorfizikisto@gmail.com ; jfghlynx@hotmail.com
** : 655 246 827

Las presentes notas de clase, realizadas a sugerencia del Prof. Javier Peralta, las realizo con $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX 2_ε no sólo con intenciones de mi evaluación, sino con la idea permanente de su utilidad, como una contribución más al desarrollo y evolución de la asignatura. Es mi intención que también puedan servir a estudiantes de la asignatura si resultan interesantes e incluso también como un complemento a las propias notas y herramientas docentes de los profesores de esta divertida asignatura.

Finalmente, agradecer a al instructor de la asignatura y a mis compañeros el espíritu constructivo y ambiente de la clase, incluso cuando el autor que esto escribe se prodigó en preguntas y comentarios,

Juan Francisco González Hernández
Móstoles, 22 de Enero de 2008.

1. Importancia didáctica de la Historia de las Matemáticas

La importancia de las Mateméticas y su Historia se observa claramente en el contexto de la resolución de problemas de índole práctica. Un ejemplo destacado y sencillo lo proporciona el Teorema de Tales, que surgió originalmente en el problema práctico de la creación y construcción de pirámides. La idea que subyace a este importante resultado, que ya era conocido en tiempo de los egipcios, es cómo se puede determinar la altura de la pirámide con ayuda del Sol y su sombra. Sin embargo, los libros modernos, en general, se olvidan de la importancia de este origen y tienen tienden a una formulación muy abstracta del teorema. Véase la siguiente exposición del Teorema de Tales por parte de un libro de Matemáticas relativamente reciente, y que no es especialmente buena, a priori, para alumnos de E.S.O. y Bachillerato:

Teorema de Tales. *Sean* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *dos puntos distintos y* $\boldsymbol{M}$ *un punto cualquiera de una recta* $\boldsymbol{r}$*. Sean* $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{M}'$ *las imágenes respectivas de esos puntos mediante proyección ortogonal de* $\boldsymbol{r}$ *sobre otra recta* $\mathbf{r}'$*. Entonces* $\mathbf{M}'$ *tiene la misma abscisa en la referencia* $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ *que el punto* $\mathbf{M}$ *en la referencia* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$*.*

La moraleja que podemos extraer es la siguiente: en Matemáticas, aunque el método convencional de enseñanza es el planteamiento de una serie de definiciones, teoremas o axiomas, para luego proporcionar ejemplos aplicados y preparados de estos objetos teóricos, suele ser necesario y bueno hacerlo al revés, esto es, partir de una serie de ejemplos concretos para llegar a una primera definición concreta que se refuerce posteriormente con la definición formal y abstracta. De esta forma, se potencia la *intuición* e *imaginación* de los estudiantes. En esencia, es el contraste del enfoque o aproximación pedagógica,"*approach*", **up-down** (arriba-abajo) frente al **bottom-up** (abajo-arriba).

Además, la Historia de las Matemáticas proporciona una serie de principios didácticos que es conveniente recordar:

1. **Las reflexiones sobre las partículas y lo general.** Un caso interesante surgió de la transición de números a letras. Con esta generalización se produjo el comienzo del Álgebra. Fue necesario para pasar de las partículas o números particulares a lo general, i.e., de lo concreto a lo abstracto. Así, en el s. XVI aparece la notación literal.

2. **La Historia de las Matemáticas y la humanización de la enseñanza de las Matemáticas.** Es importante en la Ciencia, y las Matemáticas no son ajenas a ella, la necesidad de encontrar una utilidad a la disciplina de las Matemáticas. Conocer, por lo tanto, la Historia de las Matemáticas hace más fácil no sólo su comprensión sino también su enseñanza.

3. **Historia de las Matemáticas y el sentido de lo que se enseña.** La Historia ayuda a encontrar sentido a las cosas y sus objetivos.

4. **Historia de las Matemáticas y los errores.** El conocimiento de la Historia permite subsanar y entender los errores de los alumnos o establecer nuevas conexiones. Por ejemplo, podemos relacionar Aritmética y

Geometría o cómo cambia y evoluciona un concepto en el tiempo:

Antes	**Ahora**
Recta	Segmento
Línea	Recta

5. **Historia de las Matemáticas y el método heurístico.**El método heurístico no es otra cosa que el procedimiento de aprendizaje por descubrimiento de forma original para potenciar la creatividad de un alumno. Es algo así como el celebérrimo "cuento de la vieja" para la obtención de resultados. Se enfatiza el llegar de manera propia al resultado correcto aun siendo poco formal o matemático el proceso seguido. Resuélvase el siguiente

   ★ **Ejercicio.** *Resolver el problema de la suma de* **n** *términos de una serie finita por medio de Geometría.*

   Esta relevancia del método heurístico para la resolución de problemas viene de muy lejos. Ya era practicada por los griegos. Pensemos por un momento el siguiente teorema, debido a Arquímedes:

   Teorema (Arquímedes)**.** *Todo segmento de parábola es equivalente a* $\frac{4}{3}$ *del área del triángulo que tiene la misma base y altura.*

   ★ **Ejercicio.** *Demostrar el teorema de Arquímedes.*

6. **Finalidad cultural.** Especialmente notable es la relación existente entre Arte, Estética y Matemáticas. Por importancia, uno de los casos que más atención suscitan es el número áureo y su aparición ubicua en diferentes lugares de la Naturaleza. El número áureo es igual a

$$\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

   Este número tiene muchas apariciones geométricas. Una de las más conocidas es en el *rectángulo áureo.* Un rectángulo es áureo si verifica que la razón entre el lado mayor, **a**, y el menor, **b**, es el número áureo ϕ. Es decir, si un rectángulo es áureo se cumple que

$$\boxed{\frac{a}{b} = \phi}$$

   Un método sencillo para construir el rectángulo áureo en tres pasos es el siguiente: primero dibujamos un cuadrado de longitud arbitraria (que podemos tomar como nuestra unidad, 1); seguidamente desde el punto medio de un lado trazamos un arco centrado en ese punto medio con un radio X igual a la distancia de este punto medio a un vértice del lado opuesto donde estamos centrados; finalmente, bajamos el arco y trazamos el rectángulo por prolongación de los lados y el arco trazado. El rectángulo así construido cumple que

$$X = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y además tiene la curiosa propiedad de que su base es precisamente el número áureo, es decir, verifica la relación estética y curiosa siguiente

$$\boxed{\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}}$$

Otros lugares donde hace su aparición este número son:

- La espiral de Durero, que aparece en moluscos como el Nautilus. Se forma trazando arcos en la construcción de sucesivos rectángulos áureos dentro del propio rectángulo áureo. A título de curiosidad, esta espiral, también llamada espiral logarítmica, la hizo inscribir en su lápida Jacques Bernouilli.
- La fachada del Partenón. Una de sus medidas es precisamente el número áureo.
- La fachada de la catedral de Notre Damme es un rectángulo áureo.
- Los documentos oficiales como el D.N.I., tarjetas de crédito, pasaportes,... Todos estos documentos tienen forma de rectángulo áureo.
- El edificio de la O.N.U. en EE.UU. es también otro rectángulo áureo.
- La fachada de la Universidad de Salamanca es otro rectángulo áureo también.

El número áureo surge también en un problema que era conocido por la escuela de Pitágoras. La razón de una diagonal de un pentágono regular con su lado es también el número áureo. Dada la naturaleza irracional de este número, los pitagóricos consideraban un secreto máximo la enseñanza del mismo a los que no entraban a formar parte de su escuela de pensamiento.
También podemos obtener el número áureo, como bien sabemos, como el límite de la razón entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

★ **Ejercicio.** *Demostrar que la contrucción recursiva de rectángulos trazando cuadrados dentro de un rectángulo áureo produce nuevos rectángulos áureos.*

7. **El *decálogo* de Pedro Puig Adam.**Enunciado por él mismo en 1955, consta de los siguientes puntos:

    a) No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.

    b) No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.

    c) Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.

    d) Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.

    e) Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

    f) Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

    g) Promover en todo lo posible la autocorrección.

    h) Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

    i) Cuidar que la expresión del alumno sea traduccción fiel de su pensamiento.

    j) Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

Por otra parte, la importancia que se daban en el Mundo Clásico a ciertas ramas de las Matemáticas quedan bien claras en la frase que había escrita a las puertas de la Academia de Platón:

"Quien no sepa Geometría, que no entre aquí."

Las siete ramas del saber Humanístico que se consideraban clásicamente las Artes Liberales se clasificaban en dos grandes grupos:

1. **Trivium.** Lo formaban la *Gramática*, la *Retórica* y la *Lógica* (o *Dialéctica*).

2. **Quadrivium.** Lo integraban las cuatro ramas más puras del saber de entonces: la *Aritmética* (o estudio de los números en reposo), la *Geometría* (o estudio de las magnitudes en movimiento), la *Música* (o estudio de los números en movimiento) y la *Astronomía* (o estudio de las magnitudes en movimiento).

Las necesidades prácticas del desarrollo de ciertas ramas de las Matemáticas ha sido diversa y mucha. Podemos destacar alguna de ellas

- Los sistemas de numeración y las operaciones aritméticas. Es evidente que esta necesidad surge de la demanda por parte de vendedores, intercambios mercantiles, etcétera.

- La Geometría plana. Nace en Egipto como consecuencia del descubrimiento de los ríos que eliminaban los límites de la tierra próxima a éstos. Cuando el río bajaba había que volver a marcar los límites de la tierra.

- La Geometría del espacio. Su finalidad original eran los usos en Arquitectura.

- Combinatoria y cálculo de probabilidades. Aparece en la aristocracia y nobleza como consecuencia del ocio y el juego.
- Estadística. De forma natural con los problemas del recuento de impuestos por parte del Estado. De ahí derivó la palabra Estadística, así como que a ciertos políticos se les llame también "estadistas", cuando se quiere ensalzar su labor como "hombre de Estado".
- Programación lineal y Teoría de Juegos. Sufren un gran impulso en la Segunda Guerra Mundial, puesto que una de sus finalidades es precisamente el aprovechamiento de los recursos militares.
- Geometría proyectiva y descriptiva. En Arte, especialmente en la Pintura, hay una necesidad idel de lograr pintar en 2D lo que es 3D.
- Cálculo diferencial. Origen de la Física, su pretensión era inicialmente lograr una definición precisa de la noción de velocidad y calcularla en distintos casos y para diferentes leyes de fuerza.
- Cálculo integral. Aparece por la necesidad del cálculo de volúmenes y áreas.

La conexión o nexo que existe entre la Historia de las Matemáticas y la resolución de problemas puede observarse en distintos ejemplos a lo largo del tiempo.El griego Tales encontró su teorema a partir de la obtención de la altura de la pirámide de Keops. En última instancia, esto está vinculado también al axioma de las paralelas de la Geometría de Euclidos (su famoso quinto postulado). La obtención de nuevas geometrías es algo que llevó mucho tiempo, y no fue hasta el s.XIX cuando Gauss, Lobachevski y Riemann encontraran formas de elaborar geometrías no euclidianas.
En el s.XVI se desarrolla el Álgebra, y eso llevó más tarde a elaborar la conjetura, vuelta teorema ya en el s.XX, de Fermat, en lo que se conoce hoy día como Último Teorema de Fermat, demostrado por Andrew Wiles en un documento de más de 100 páginas. También, el problema de la catenaria dió problemas hasta que Bernouilli logró solventarla. Y no olvidemos citar que el matemático David Hilbert, a comienzos del s.XX, propuso una famosa lista de 23 problemas, alguno de los cuales está aún sin resolver, que han fomentado la investigación matemática. Hoy el testigo lo tomó la Fundación Clay, que expuso a principios del s.XXI una lista de 7 problemas, de los que ha sido recientemente resuelto uno por el matemático ruso Grigory Perelman: la conjetura (ahora teorema) de Poincarè.

2. Aritmética y Teoría de Números

La conjetura $3X + 1$ señala que dado un número entero positivo arbitrario, si ese número es par, lo dividimos por 2 y si es impar lo multiplicamos por 3 y le sumamos una unidad, no importa qué número inicial tomemos, al final llegamos a la sucesión $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...$, y está aún sin demostrar a pesar de nuestro desarrollo computacional. Considérese el problema de sumar **n** cubos. ¿Existe alguna fórmula para resolver el problema tipo siguiente?:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3$$

Veamos unas pocas sumas sencillas:

$$1^3 = 1$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 \qquad (1 + 2) = 3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 \qquad (1 + 2 + 3) = 6$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^2 = 100 = 10^2 \qquad (1 + 2 + 3 + 4) = 10$$

Por inducción podemos observar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^2 + \ldots = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots)^2$$

fórmula que constituye la llamada **Identidad de Nicómaco**, y que en forma compacta puede escribirse como sigue

Identidad de Nicómaco

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} a_i^3 = \left[\frac{(a_1 + a_N)\,N}{2}\right]}$$

★ **Ejercicio.** *Mostrar y justificar cómo puede obtenerse la fecha de nacimiento a partir del siguiente algoritmo: multiplicar por 20 el día de nacimiento, sumar 73, multiplicar por 5 y añadir el mes de nacimiento.*

★ **Ejercicio.** *Sea X una número de tres cifras. Obténgase el número de seis cifras mediante la repetición de las cifras en el mismo orden XX. Por ejemplo: de 123 se tiene 123123. Dividir el resultado sucesivamente por 7,11 y 13. ¿Por qué se obtiene el número de partida?¿Existe alguna generalización para números de 2 cifras?¿Y de cuatro?*

A continuación, vamos a centrarnos en la rama más relevante de la Aritmética en la Historia de la Teoría de Números.

2.1. Época prehelénica

Comprende aproximadamente desde el 3000 a.C. hasta el s.VI a.C.
Comprende, esencialmente, 2 grandes civilizaciones, Egipto y Mesopotamia (fundamentalmente los babilónicos), y tal vez China y la civilización Maya.
Los babilónicos destacaban especialmente en Aritmética, ya que su sistema posicional de base 60 ha llegado incluso a nuestros días en alguna forma. Conocían los números perfectos y los números amigos. Y, además, sabían formar ternas pitagóricas.
La civilización egipcia, por contra, destacaba especialmente en Geometría. Una prueba son sus obras arquitectónicas. Conocemos sus resultados gracias a documentos como el papiro de Rhind. Tenían un método muy particular de multiplicar que hoy día conocemos como *multiplicación egipcia.* Usaban fracciones de denominador unidad y conocían algunas propiedades notables de sucesiones aritméticas y geométricas.

2.2. Época griega

Comprende aproximadamente desde el s.VI a.C. hasta el s.I a.C.
La Matemática en esta época es considerada una Ciencia. Surge el método hipotético-deductivo, basado en el planteamiento de hipótesis y su demostración. Es aquí cuando comienzan a producirse las primeras demostraciones formales e incluso gráficas. No sólo se busca el cómo sino también el porqué.
Pitágoras fundó una escuela propia basada en la filosofía de que "todo es un número". Es decir, de acuerdo a los pitagóricos, el $\alpha\rho\chi\acute{\epsilon}$ o principio de todas las cosas es el concepto o idea de número. También estudió lo que hoy denominamos números perfectos y amigos, la obtención de ternas pitagóricas e investigó el algoritmo de Euclides.
Euclides publicó su famosa obra de *Los Elementos*, donde no sólo desarrolló los postulados de la Geometría sino también se interesó por la Teoría de Números. También recogió información matemática de las civilizaciones babilónica y egipcia, propuso un método para hallar números perfectos y produjo la primera demostración que puede considerarse moderna, al usar la técnica de la reducción al absurdo para demostrar la existencia de un número infinito de números primos.
Hay también otros autores importantes, como el propio Platón o Eratóstenes, que realizaron otras contribuciones al desarrollo matemático de la época.

2.3. Período grecorromano

Comprende aproximadamente desde el s.I a.C. hasta el s.V d.C., hacia el 473 d.C., que es la fecha de la caída del Imperio Romano.
Se produce un cierto decaimiento de la Matemática como Ciencia. Se estudiaban fundamentalmente las Matemáticas griegas. Los dos principales autores de este período son:

- Nicómaco (s.I-s.II d.C.).
- Diofanto (s.III). Fue un buen geómetra y algebrista en términos modernos. Logró probar numerosos teoremas aritméticos.

  ★ **Ejercicio.** *Probar la siguiente identidad:*

  $$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2\,(ad+bc)^2$$

  o bien

  $$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2\,(ad-bc)^2$$

2.4. Edad Media

Comprende aproximadamente desde el s.V d.C (473 d.C) hasta mediados del s.XV, en concreto, hasta la caída de Constantinopla bajo dominio turco.
Supone un estancamiento general científico en Europa. Se produce un desplazamiento de los matemáticos a China, países árabes, India,...
En la India, Argabhata en el s.V y Baskhana en el s. XIII introducen la notación indoarábica para la numeración que ha llegado hasta nuestros días.
En los países árabes, en el s.IX d.C,

- Tabit Garana propone un método para determinar números amigos.

- Al-Khuwarizmi contribuye a la difusión del sistema decimal indoarábigo. Como curiosidad, precisamente de su nombre se origina el vocablo "Álgebra". Propone un método de resolución de la ecuación de segundo grado.

2.5. Renacimiento

Comprende aproximadamente desde mediados del s.XV hasta el s.XVI inclusive.
En Pintura, Giotto constituye el arranque de la pintura renacentista. En Literatura, Dante.
En Matemáticas, surge con fuerza Toledo como centro de atención en Europa. El fin invasión de los árabes y la traducción de libros al latín supone un avance respecto a una época bastante oscura como fue la anterior.
Aparece una escuela italiana, centro del movimiento renacentista, en Matemáticas. Destaca sin duda entre todos ellos Fibonacci, el mejor sin duda, sirve como exponente del fin de la Edad Media y el inicio del Renacimiento. Entre otras cosas, nos ha llegado la sucesión que hoy lleva su nombre:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

También en el Renacimiento es cuando se crean los logaritmos, en un intento por simplificar las operaciones aritméticas con muchos factores y grandes números. Bombelli crea los números complejos, $\mathbb{C}$.

★ **Ejercicio.** *Explicar cómo y por qué razón funciona el método egipcio de multiplicación de dos números a y b. Por ejemplo: en la multiplicación de 53 por 24, se va dividiendo el primer factor sucesivas veces por la mitad hasta llegar a uno (se toma la parte entera caso de dividir un impar) mientras adyacente a él se coloca el segundo factor, respectivamente multiplicado por 2 sucesivas veces. De la lista se eliminan los números que a la izquierda acaban en cifra par y se suman los términos que quedan a la derecha. Para nuestro ejemplo, se produce la tabla siguiente:*

53	*24*
26	*48*
13	*96*
6	*192*
3	*384*
1	*768*

$$53 \times 24 = 24 + 96 + 384 + 768 = 1272$$

También existen otros métodos derivados similares a la multiplicación egipcia (que llegó a conocerse y variarse un poco en la antigua Rusia de los zares), como la *multiplicación por celdas* sumamente interesantes.

2.6. Siglo XVII

Destacó especialmente *Pierre de Fermat.* Hizo numerosas contribuciones, pero probablemente es más conocido por la conjetura que hoy está resuelta y es conocida por todos como Último teorema de Fermat, llamado así por ser el último en probarse y que dió quebraderos de cabeza a matemáticos de distintas épocas por el siguiente comentario de Fermat en el margen de uno de sus cuadernos:

> “(...)He descubierto una demostración maravillosa de esto, pero no me cabe en esta página(...)”

Teorema (Último teorema de Fermat)**.** *La ecuación*

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene ninguna solución (x, y, z) *en los enteros positivos si* $n \geq 3$*.*

Otras personalidades relevantes son Descartes, Leibniz y Wallis. Otros resultados de este siglo son por ejemplo el teorema de los cuatro cuadrados, probado por Lagrange más adelante. También existe teorema más complicado de los 8 cuadrados, probado por Hurwitz en 1898.

Teorema (De los cuatro (u ocho) cuadrados)**.** *Todo número entero positivo puede expresarse como suma de 4 (u 8) cuadrados.*

Por ejemplo, vemos que

$$26 = 3^2 + 4^2 + 1^2$$

o bien

$$71 = 6^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 = 2^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2$$

2.7. Siglo XVIII

Es el siglo de Euler, el padre de todos los matemáticos. También destacan el antes mencionado Lagrange (en teoría algebraica de números y uno de los fundadores de la Mecánica Analítica) y Legendre (en Teoría de Números).

2.8. Siglos XIX y XX

En el siglo XIX destacarían, por este orden, Gauss, Riemann y Kummer. En el siglo XX dos figuras muy especiales son Hardy y Ramanujan, este último matemático autodidacta que emigró gracias a Hardy al Reino Unido. Puebra de sus dotes matemáticas con los números es la inmediata descomposición, estando enfermo, del número 1729 como sigue: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. 1729 es de hecho el *número más pequeño* que puede descomponerse como *suma de dos cubos de dos formas distintas.*
Para finalizar esta sección, un interesante algoritmo que nos genera ternas pitagóricas a nuestra disposición que puede ser un útil recurso didáctico.

Teorema (Generador de ternas pitagóricas)**.** *La solución general del Teorema de Pitágoras* $x^2 + y^2 = z^2$ *tiene la forma general, donde (t,m,n)*$\in \mathbb{Z}$*, es*

$$\left(2tmn, t\left(m^2 - n^2\right), t\left(m^2 + n^2\right)\right)$$

o bien, si tomamos $t = n = 1$

$$\left(2m, \left(m^2 - 1\right), \left(m^2 + 1\right)\right)$$

Ejemplos: $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$, $(10, 24, 26)$
Curiosamente, la ecuación siguiente tiene infinitas soluciones enteras:

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

lo cual sorprendió a gente como Platón, atónito y sorprendido en particular por el resultado $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

2.9. Miscelánea numérica

En esta sección, vamos a ver distintos problemas numéricos célebres y curiosidades aritméticas de distinto tipo. Para empezar, antes de meternos en problemas más profundos, un suceso divertido. Para aquellas personas que les gusta ver la conocida serie animada *Los Simpsons*, es interesante resaltar que en un capítulo, donde Hommer viaja el mundo humano, y a un mundo virtual tridimensional, aparece la siguiente expresión numérica:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

Evidentemente, para los que conocen el teorema de Fermat, esta expresión es *falsa*, pero es interesante que la diferencia entre el primer y el segundo miembro sólo puede verse con un instrumento poderoso de cálculo (hardware o matemático), ya que el resultado es del orden 10^{39}, y la diferencia ocurre en una cifra significativa bastante *a la derecha*. Dejamos comprobar este fenómeno al lector o lectora interesado, esto es, que se calcule la diferencia entre ambos miembros con un utensilio matemático apropiado.

2.9.1. Números primos

Números primos son, por definición, aquellos números enteros que sólo son divisibles entre sí mismos y el uno, siendo todos los demás números producto de potencias de tales números. En cierta forma, los números primos son los *átomos* de los números enteros. El primer ser humano que construyó una tabla de números primos fue Eratóstenes, en el siglo III a. d. C. De hecho, creó un método que ha llegado a nuestros días para discernir la primalidad de un número entero, denominado **Criba de Eratóstenes**. El método es muy simple, y consiste meramente en escribir en una lista los números enteros e ir tachando los que son divisibles por los anteriores. Evidentemente, para números grandes, es un proceso bastante tedioso. Nosotros veremos una bella modificación del mismo en unos momentos, pero antes, un teorema conocido por todos:

Teorema (Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo número entero puede descomponerse en un producto de potencias de números primos. Matemáticamente*

$$Si \quad x \in \mathbb{Z} =: x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$$

Y ahora, vamos a ver la preciosa variante de la criba de Eratóstenes que habíamos mencionado. En primer lugar, se han de disponer una lista de números, empezando por el número dos, en disposición de seis columnas. Nosotros proporcionaremos una lista bastante grande, a continuación:

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121

Y ahora observamos una serie de interesantísimas propiedades. A saber:

1. Las primeras dos columnas, salvo el 2 y el 3, se tachan, ya que son números compuestos cuyos términos generales respectivos son:

$$a_n = 2 + 6(n-1)$$

$$b_n = 3 + 6(n-1)$$

2. Ahora nos fijamos en los múltiplos de 5 y 7. Se sitúan en rectas de igual pendiente. En general, además, se obtiene que:

$$\dot{5} \longrightarrow m = 1, \quad \alpha = 45^{\text{o}}$$

$$\dot{7} \longrightarrow m = -1, \quad \alpha = 315^{\text{o}}$$

$$\dot{11} \longrightarrow m = 2, \quad \alpha = \arctan(2)$$

$$\dot{13} \longrightarrow m = -2, \quad \alpha = \arctan(-2)$$

$$\vdots$$

Iterando el proceso, y trazando las rectas anteriores (idealmente con colores o fosforescentes), los números que van quedando sueltos al trazar las rectas correspondientes son *primos*, mientras que los que tachan las rectas son compuestos. Finalmente, para acabar de adornar esta tabla, se recurre al truco de hacerla en tamaño tan grande como se quiera, y se enrolla en forma de cilindro. Lo que se observa es que los números primos se distribuyen en forma de hélice, de forma análoga a una especie de ADN, pero para números en lugar de bases de aminoácidos. Este cilindro puede llamarse **cilindro de Eratóstenes**.

★ **Ejercicio.** *Dada la sucesión de números enteros, ¿existe una serie de números donde haya l-compuestos seguidos?Ayuda: Usar la operación factorial*

★ **Ejercicio.** *Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular la sucesión general de forma bruta entre dichos l-compuestos consecutivos. Comparad con un método más pedestre y menos complicado para hallar una sucesión donde haya al menos 9 compuestos seguidos. Indicación: Resulta útil haber hecho el cilindro de Eratóstenes. El resultado implícito de este ejercicio es que hay* ***gaps*** *entre primos arbitrariamente grandes.*

Es también un resultado conocido, debido a Euclides, que existen infinitos números primos. De hecho, es la primera demostración conocida realizada por reducción al absurdo. Una prueba analítica más avanzada, descansa en la naturaleza divergente de la serie armónica:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

Por tanto, también tenemos que hay más números primos que cuadrados, dado que la suma de los recíprocos de los cuadrados converge, y se debe a Euler que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$$

Más avanzado es el resultado siguiente. El número de primos menores que x siguen una distribución del tipo

$$\frac{x}{logx}$$

en donde el logaritmo es en base natural de Napier, esto es, es el logaritmo neperiano.

★ **Ejercicio.** *Estimar el número de primos que hay en los intervalos siguientes:*

$$[2,20]\,[2,100]\,[102,120]$$

Se denominan números primos gemelos a aquellos número primos que se diferencian en dos unidades. Por ejemplo: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13. Parece ser que el número de primos gemelos es infinitos, pero no está aún demostrado. A este hecho se le conoce por el nombre de **conjetura de los números primos gemelos**. Y, ¿hay algoritmos o procedimientos para la generación de números primos? Estudiemos, en primer lugar, el siguiente problema: determinar si los números 5, 17 y 257 son primos. Nótese que:

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1 = 2^{2^1} + 1$$

$$17 = 16 + 1 = 2^4 + 1 = 2^{2^2} + 1$$

$$257 = 256 + 1 = 2^8 + 1 = 2^{2^3} + 1$$

Se denomina k-ésimo número de Fermat a un número de la forma

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

Fermat pensaba que todos los números que seguían la anterior expresión eran primos. No es así. Aunque para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ eran primos, Euler probó que para $k = 5$ no era primo. De hecho, en la actualidad se sabe que todos los números de Fermat para $k > 4$ son compuestos, pero tampoco nadie ha probado aún que todos los números de Fermat salvo los cinco anteriores sean compuestos, pero parece bastante probable que es así. En particular, el propio Euler demostró que $F_6, F_7, \ldots, F_{21}$ eran todos compuestos. Hoy día se usan los números de Fermat para calcular el record con el número primo más grande.

Pensemos ahora en el siguiente polinomio:

$$p(x) = x^2 + x + 17$$

Y examinemos algunos de sus valores numéricos:

$$p(0) = 17$$

$$p(1) = 19$$

$$p(2) = 23$$

$$p(3) = 29$$

$$\vdots$$

$$p(15) = 257$$

$$p(16) = 289$$

$$p(17) = 17^2 + 17 + 17 = 17(17 + 1 + 1) = 17 \times 19$$

es decir, llega un momento en que el polinomio no produce números primos. Ocurre igual con el polinomio siguiente

$$q(x) = x^2 - x + 41$$

Este polinomio produce números primos para todo número positivo $x < 41$. Para $x = 41$ se tiene que no es primo, puesto que

$$q(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$$

Goldbach probó que cualquier polinomio no constante es incapaz de generar infinitos números primos. Y, además, hoy día sabemos que en los intervalos

$$(n, 2n) \left(n^2, (n+1)^2\right)$$

existe, al menos, un número primo.

Dada la siguiente lista de números, tratarde expresarlos como suma de dos cuadrados:

$$5, 7, 13, 19, 31, 37, 47, 53, 67, 89$$

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$7 = \text{Imposible}$$

$$13 = 3^2 + 2^2$$

$$19 = \text{Imposible}$$

$$31 = \text{Imposible}$$

$$37 = 6^2 + 1^2$$

$$47 = \text{Imposible}$$
$$53 = 7^2 + 2^2$$
$$67 = \text{Imposible}$$
$$89 = 5^2 + 8^2$$

Descubrimos también una serie de interesantes propiedades de cada uno de estos números. Por ejemplo, $5, 13, 37, 53, 89$ son todos números congruentes con 1 módulo 4, esto es, dan resto 1 al dividirlos por 4. La serie $7, 19, 31, 47, 67$ son todos congruentes con 3 módulo 4 (al dividirlos por 4, dan todos resto 3). De hecho, el que haya infinitos números que pueden expresarse como suma de cuadrados, y su forma explícita, fue probado por Euler.

Otra conjetura que hoy sigue sin demostración es la llamada **conjetura de Goldbach**: todo número entero positivo puede descomponerse en una suma de dos números primos. Unos ejemplos bastan para intuir la conjetura: $8 = 3 + 5$, $14 = 7 + 7$, $50 = 19 + 31$,... Otra serie de números curiosos son los llamados números perfectos y los números amigos. Se dice que un número es **perfecto** cuando es igual a la suma de todos sus divisores, excluido él mismo. Un número se llama **deficiente** si la suma de sus divisores es menor que él mismo y **abundante** si la suma es mayor que él mismo. Ejemplos:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$8 > 7 = 1 + 2 + 4$$
$$18 < 21 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9$$

El número 6 es perfecto. El número 8 es deficiente. El número 18 es abundante. Los pitagóricos, como curiosidad, tenían fijación por el número 6, dado que el mundo fue creado en seis días, hecho que la Biblia asumió en el cristianismo. Otro ejemplo de número perfecto: $28 = 1+2+4+7+14$. ¿Cuántos números perfectos hay?No se sabe, probablemente infinitos. Los primeros son $6, 28, 496, 8128$.

Se dice que dos números son **amigos** cuando la suma de sus divisores da el otro y recíprocamente. Ejemplo: Sean los número 220 y 284.

$$220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$
$$284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

Fermat encontró otro par de números amigos: 17296 y 18416. Fabit Qurra encontró el siguiente método para encontrar números amigos: si n¿1, entonces definimos

$$a = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$
$$b = 3 \cdot 2^n - 1$$
$$c = 3 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

Se verifica que si a, b, c son primos, entonces los números siguientes son amigos:

$$A = 2^n ab$$

$$B = 2^n c$$

Paganini, no el músico, sino un chico de 18 años sorprendió al mundo matemático en su momento demostrando que los números $1184, 1210$ eran también números amigos.

2.9.2. Cuadrados mágicos y cuadrados latinos

Un cuadrado mágico es una disposición de números en forma de matriz cuadrada de manera que la suma de los elementos de las filas es igual al resultado de las filas de los elementos de las columnas e igual a la suma de las diagonales. Como ejemplo primero, tomemos el siguiente cuadrado mágico de orden tres:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

En este cuadrado mágico, la suma de filas y columnas es igual a 15. De hecho tiene más propiedades mágicas. Si sumamos los números de tres dígitos de cada columna y fila, obtenemos:

$$492 + 357 + 816 = 1665$$

$$438 + 951 + 276 = 1665$$

$$294 + 753 + 618 = 1665$$

$$834 + 159 + 672 = 1665$$

Y, además, se observa que también se tiene la igualdad entre suma de cuadrados siguiente

$$492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2 = 1035369$$

$$438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2 = 1172421$$

Otro ejemplo, un cuadrado mágico de orden 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En esta ocasión la suma de filas y columnas vale 34. Hay también una relación de la suma de los cuadrados en filas y columnas. La suma de los cuadrados de filas y columnas vale 378. Además, se pueden formar con cada uno de sus elementos las cifras del número π. El siguiente ejemplo, es un cuadrado mágico de orden 9 debido a Fermat, con suma igual a 369:

2	11	12	13	77	78	79	81	16
6	18	27	26	61	62	65	28	76
7	59	30	35	51	53	36	23	75
8	58	32	38	45	40	50	24	74
73	57	49	43	41	39	33	25	9
72	22	48	42	37	44	34	60	10
68	19	46	47	31	29	52	63	14
67	54	55	56	21	20	17	64	15
66	71	70	69	5	4	3	1	80

Tiene como propiedad adicional curiosa que todo subcuadrado de orden 8, 7, 6, 5, 4 y 3 respecto del elemento central 41 es también mágico. El siguiente cuadrado no es mágico, sino latino, lo cual significa que ahora no se pide que la suma de los elementos de las diagonales sumen lo mismo pero sí filas y columnas

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

El siguiente es otro cuadrado mágico con suma 369, en el cual se pueden formar subcuadrados mágicos de orden 3 con diferentes sumas y también algunos cuadrados latinos:

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

De los valores de las sumas de los 9 cuadrados mágicos principales se pueden extraer unos números que forman el siguiente cuadrado mágico también con suma 369

42	231	96
177	123	69
150	15	204

¿Existen algoritmos para crear cuadrados mágicos?Sí, los hay. Uno muy sencillo consiste en el método siguiente, ejemplificado para orden 5.

1. Al elegir orden 5, añadimos a nuestra matriz una fila y columna extra *fantasmas*, teniendo entonces una matriz tanto seis por seis, como cinco por cinco. En la esquina fantasma situamos una cruz auxiliar, $a_{66} = x$.

2. Fijamos un elemento de nuestro cuadrado mágico, por ejemplo, $a_{53} = 7$, y se pone el número consecutivo (en nuestro caso 8), en un lugar a la derecha y uno por debajo de donde situemos éste con unas excepciones dadas por las reglas de los siguientes apartados.

3. Los números que caigan en la fila fantasma, suben a la posición más alta, salvo el lugar a_{55}.

4. Si un número llega a una casilla ocupada por otro, pasa a estar por ncima del número del que proviene, igual que en la casilla $a_{66} = x$.

★ **Ejercicio.** *Usar este algoritmo para producir un cuadrado mágico de orden 3 y otro de orden 4.*

Los cuadrados mágicos pueden verse como matrices. Para los cuadrados mágicos de orden 3, por ejemplo, se tendrá que serán un subconjunto del espacio de matrices cuadradas de orden 3, que tiene dimensión 9. De hecho, si tengo dos cuadrados mágicos A y B, con sumas a y b, entonces la matriz producto $C = AB$ será un cuadrado mágico con suma $S = a + b = TrC$. Además, como bien sabemos, el invariantes del cuadrado mágico no será más que la traza de la matriz correspondiente. Y más aún, la condición necesaria y suficiente para que un cuadrado mágico tenga un cuadrado mágico invertible es que la matriz inversa del cuadrado mágico sea también mágico y con suma $\frac{1}{s} = \frac{1}{a+b}$.

Se denomina cuadrado *antimágico* a todo cuadrado cuya suma de filas, columnas y diagonales produce valores diferentes.

★ **Ejercicio.** *Construir un cuadrado antimágico de orden 3. Ayuda: Pensar en cierta pieza del ajedrez.*

★ **Ejercicio.** *Averiguar si el número 999991 es primo.*

★ **Ejercicio.** *Tomar un número de tres cifras cualesquiera pero diferentes entre sí, abc. Formar un nuevo número efectuando la diferencia entre el mayor y el menor de los números posibles de esas 3 cifras plausibles. Iterar el proceso. ¿Qué se observa?*

★ **Ejercicio.** *Calcular la suma de la serie siguiente* $1, 4, 12, 32, ..., n2^{n-1}$. *Ayuda: Hay dos formas, usando el valor de la sucesión doble y usando el valor de la serie funcional derivada.*

2.9.3. Números poligonales

Los siguientes números están asociados a problemas geométricos. Los más simples, son los números triangulares:

$$T_n = 1, 3, 6, 10, ...$$

Los siguientes, son los conocidos como números cuadrados:

$$C_n = 1, 4, 9, 16, ...$$

Luego vienen los números pentagonales:

$$P_n = 1, 5, 12, 22, ...$$

¿Cómo se pueden hallar los términos generales de los números poligonales?Muy sencillo. De igual manera que la sucesión de los números naturales es una sucesión de primer orden, dado que el polinomio que genera el término enésimo de la misma es un polinomio de primer grado (pasa igual con los números impares o pares o sucesiones aritméticas de primer orden), los números poligonales son en general sucesiones cuyo término general es un polinomio de segundo grado. Por eso también se les llama a los números poligonales **sucesiones aritméticas de segundo orden**. En particular, la sucesión formada a partir de una poligonal con diferencias de términos consecutivos sería una serie aritmética de primer orden. En particular, para las tres sucesiones poligonales arriba escritas se tiene que sus términos generales valen

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$C_n = n^2 = \frac{(1+2n-1)n}{2}$$
$$P_n = \frac{(1+3n-2)n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}$$

Y, generalizando, se pueden estudiar sucesiones aritméticas de orden superior, vinculadas a sucesiones visualmente poliédricas y politopales.

★ **Ejercicio.** *Calcular el término general de las sucesiones* $4, 9, 18, 31, 48, ...$ *y* $3, 8, 15, 24, ...$

Para finalizar este capítulo sobre Aritmética y números. Algunas curiosidades adicionales. Se llama **isosefia** a la asignación de números a letras. Los judíos lo hacen con la cábala, también conocida por Gematría. Los árabes lo llamaban **aljumal**. Otro ejemplo es el número de la bestia 666, que aparece en la Biblia, también asociado a Nerón, Diocleciano y el Imperio Romano. Diocleciano en latín se escribe *DIOCLES AVGVSTVS*. Tomando todas la letras que en números romanos tienen asignado número sale 666. Otra curiosidad, se dice que las personas cuyo nombre tiene 13 letras tienen la suerte del diablo[1].

★ **Ejercicio.** *Escribir un número entero formado por tres cifras distintas. Restar el mayor menos el menor de todos los posibles números formables, para dar un número C. Formar el número invertido obtenido de la resta anterior, para dar un número D. Sumar C con D para obtener E. A ese número restarle la suma de los dígitos de E. ¿Qué se observa?*

3. Álgebra

La introducción del lenguaje formal o simbólico originado mediante la sustitución de los números por letras, constituye el paso de la Aritmética al Álgebra. El Álgebra puede considerarse como una continuación o extensión de la Aritmética que implica un cambio metodológico. Al pasar del cálculo numérico, de índole experimental en origen, al cálculo literal, formal y abstracto o simbólico, supone un avance cualitativo y cuantitativo sobre todo en lo que se refiere a generalizar y abstraer propiedades matemáticas de la realidad que observamos.

El lenguaje de la Ciencia, desde que lo descubriera Galileo, es la Matemática: "Egli è scritta in lingua matematica". El lenguaje de las Matemáticases el Álgebra y la Aritmética. La principal aplicación del Álgebra reside en la resolución de ecuaciones. En particular, sabemos de la existencia de ecuaciones algebraicas y de ecuaciones no algebraicas, que hoy en día se denominarían ecuaciones funcionales. No obstante, es importante no caer en los excesos de los formalismos, porque se puede caer en errores como el siguiente. Sea la ecuación:

$$(\pi - 4)(x - 1)$$

[1]Curiosamente, el autor de estas notas, Juan Francisco, tiene un nombre de 13 letras. No obstante, él mismo no es un acérrimo seguidor de numerología supersticiosa, ni de cuestiones religiosas y menos con connotaciones demoníacas.

La mitad de la clase de un primero de Bachilleraro concluyó que $\pi = 4$ y $x = 1$. Como se ve, un abuso de los automatismos, sin la comprensión de las reglas básicas del cálculo literal y numérico, produce este tipo de errores en nuestro jóvenes.

En cuanto a la notación, es muy interesante distinguir las tres diferentes etapas que pueden observarse en el Álgebra:

- Notación *retórica.* A falta de símbolos, los cálculos se exponen mediante palabras. Se puede afirmar que esta es la notación empleada hasta el siglo XV, aproximadamente.
- Notación *sincopada.* Se intercalan abreviaturas para hacer más ágil y breve el razonamiento. Fue introducido por Luca Pacioli en el siglo XVI.
- Notación *simbólica.* Emplea signos especiales para datos de problemas, incógnitas y operaciones. Fue introducido por Vieta en el siglo XVII.

En cuanto a la incógnita o indeterminada, se la ha llamado de distintas formas a lo largo del tiempo. Los egipcios la nombraban *aha* o "montón". En particular, un ejercicio típico egipcio podría leerse como sigue: "Calcular el valor del montón si el montón y el séptimo del montón es igual a 19". La influencia árabe sobre los algebristas del renacimiento es innegable. Los árabes llamaban *schai* a la incógnita, que puede traducirse como "res" o "cosa". Por esta razón, los algebristas son también llamados "cosistas" y el Álgebra la "regla de la cosa" durante el Renacimiento. Algunos algebristas del siglo XVI, denominaron a la incógnita "*tantum*", o "*quantitas*" si había varias. Además, cuando quería destacarse el aspecto geométrico de la incógnita, se la llamaba "*latus*" o "*línea*".

Durante el siglo XVI, con la notación sincopada, las letras p y m se usan para la adición y sustración, mientras que la cosa se representaría por la letra R, de res, traducción del árabe, como hemos mencionado anteriormente. Si había más incógnitas, se usaban letras mayúsculas latinas, es decir, $A, B, \ldots$

Desde finales del siglo XV, empiezan a usarse los signos $+, -$ y, también, el signo $=$. Incluso aparece el signo $\surd$,como deformación de la letra r, del latín *radix*, "raíz (cuadrada)". Fue Vieta, sin duda el más importante de los algebristas renacentistas, el iniciador del cálculo simbólico. Además, usaba los antedichos símbolos para la suma, la resta y la igualación. No tenía signo para la multiplicación, pero usaba las llaves para nuestro paréntesis y las mayúsculas en las ecuaciones (vocales para incógnitas, consonantes para coeficientes). Un discípulo suyo, llamado Anderson, recopiló y publicó sus obras y hallazgos e investigaciones, que también fueron reeditadas a la muerte de ambos.

3.1. Época prehelénica

- Los babilonios resuelven ciertas ecuaciones de primer y segundo grado.
- Los egipcios resuelven ecuaciones de primer grado.

3.2. Época griega

- No fueron buenos algebristas.

3.3. Período grecorromano

Destacó Diofanto, que tenía una inmensa habilidad para la resolución de ecuaciones y sistemas. Entre todos los problemas y ecuaciones de Diofanto, el más interesante y famoso probablemente sea el que está grabado en su epitafio:

> ¡Caminante!Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh, maravilla!, la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba y se casó. A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó además un quinquenio, y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Éste entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena, habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.

★ **Ejercicio.** *Resolver el problema de la tumba de Diofanto.*

3.4. Edad Media

Hay tres focos principales del Álgebra en esta época:

1. India: Aryabhata (en el s. V) y Bhaskhara (en el s. XII). Además, resulta especialmente bonito el lenguaje usado para expresar las ecuaciones, como por ejemplo en la metáfora Lilavati.

2. Los países árabes. Resolución geométrica de algunas ecuaciones de segundo grado. Al-Khuwaritmi, en el siglo IX d.C., publica *Sobre el cálculo mediante la reducción y la restauración*. En árabe "aljabr" significa "recomponer, restaurar, reducir". Como curiosidad, es de destacar que en *El Quijote*, en su segunda parte, Sansón Carrasco es molido a palos y se lo llevan a un algebrista a que le recompongan los huesos. Además, es este personaje, Al-Khuwaritmi el origen del propio término de Álgebra.

3. China. Destaca Wang-Shao-Tung.

★ **Ejercicio.** *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} X(Y+Z) &= a \\ Y(Z+X) &= b \\ Z(X+Y) &= c \end{aligned}$$

★ **Ejercicio.** *Resolver, suponiendo* $abc \neq 0$

$$\begin{aligned} X^2+XY+XZ+YZ &= a \\ Y^2+XY+XZ+YZ &= b \\ Z^2+XY+XZ+YZ &= c \end{aligned}$$

3.5. Renacimiento

Luca Pacioli resuelve los siguientes tipos de ecuaciones cuadráticas:

$$X^2 + aX = b$$
$$X^2 + b = aX$$
$$X^2 = aX + b$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, y por eso se entiende que son ecuaciones distintas en el Renacimiento (los números negativos no eran considerados números entonces), al ser considerados casos distintos. Por tanto, se puede considerar que resuelve la ecuación general de segundo grado y empieza a estudiar las ecuaciones de tercer grado, que no logra resolver:

$$X^3 + aX^2 = b$$
$$X^3 + aX = b$$

En la ecuación

$$X^3 + aX = b$$

Pacioli llama cubo al primer término del miembro izquierdo y la *cosa* al segundo término. Así, la ecuación anterior se leería como: un cubo más la cosa igual a un número.

Las ecuaciones de tercer grado fueron resueltas en general, según se cree hoy día, por Scipio del Ferro. Sin embargo, esto no ha sido del todo probado de forma concluyente, pero hay motivos para sospechar que así es. Un discípulo de del Ferro, llamado popularmente Niccolo Tartaglia (por su tartamudez) entró en competición con el italiano Fior Florido, que dudaba de su capacidad de resolver *cualquier* ecuación cúbica. Florido le propuso 30 problemas, de los cuales Tartaglia no dejó uno sin resolver correctamente, mientras que Fior no pudo con algunos de los problemas que le planteó Tartaglia, quedando probado empírica y públicamente que *sabía* pues el método de resolución de la ecuación de tercer grado. Y en esto, Gerolamo Cardano quiso conocer los secretos de Tartaglia, y éste finalmente accedió tras jurar por los Santos Evangelios que no lo publicaría hasta que Tartaglia publicara dichos conocimientos. Como Tartaglia se demoró mucho tiempo, finalmente Cardano no cumplió la palabra dada y publicó la solución en la obra conocida como *Ars Magna.* Desde entonces, y bastante injustamente, la fórmula de resolución de la cúbica se denomina fórmula de Cardano. Sería mejor llamarla fórmula de Del Ferro-Tartaglia-Cardano. Para la ecuación cúbica $X^3 + aX = b$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}$$

★ **Ejercicio.** *Resolver, usando esta fórmula, la ecuación cúbica siguiente:*

$$X^3 + X = 2$$

Indicación: comprobar el resultado mediante prueba y error, así como usando el método de Ruffini.

★ **Ejercicio.** *Probar que si a, b son números positivos, entonces la ecuación cúbica $X^3 + aX = b$ tiene exactamente una solución. Ayuda: pensar gráficamente.*

La ecuación cúbica, sin embargo, tenía aún para los renacentistas un halo de misterio cuando se estudiaba el denominado caso *irreducibilis*, asociado a la presencia de un par de raíces complejas conjugadas y una sola solución real. Un ejemplo está dado por la ecuación cúbica siguiente:

★ **Ejercicio.** *Resolver la ecuación cúbica: $X^3 = 15X + 4$ mediante el uso de la fórmula de Cardano. ¿Qué se observa?Resolverla sin aplicar la fórmula de Cardano. Indicación: usar prueba y error para localizar una solución real. Aplicar el método de Ruffini y/o la fórmula de la ecuación de segundo grado.*

★ **Ejercicio.** *Interpretar geométricamente la ecuación $X^2+10X = 39$. Ayuda: Pensar en términos de cuadrados y rectángulos.*

3.6. Siglo XVII

A pesar de que nación en el siglo XVI, fue en el siglo posterior donde alcanzó importancia su trabajo el siguiente personaje:

- **François Viète**, también llamado *Vieta* en español.

Sin duda, el personaje más relevante de la matemática del siglo XVI. Desarrolló un método similar a las tangentes de Newton para la determinación de raíces de polinomios. Y además, descubrió y generalizó la descomposición de polinomios en factores lineales, extrayendo relaciones entre los coeficientes de los monomios y las raíces. En Matemáticas, más específicamente, las fórmulas de Vieta, como vinieron en llamarse después, se definen para el polinomio general

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

de grado n, con coeficientes complejos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ y donde $a_n \neq 0$, y por el teorema fundamental del Álgebra tiene n raíces, no necesariamente distintas, que llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las fórmulas de Vieta se definen para dicho polinomio como sigue:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

O bien, usando notación más compacta

$$\sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$\prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

En otras palabras, la suma de todos los posibles productos de k raíces del polinomio $P(X)$, con los índices en cada producto en orden creciente para que no haya repeticiones es igual a $(-1)^k a_{n-k}/a_n$, y, entonces,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

De hecho, las fórmulas de Vieta son válidas para polinomios en cualquier anillo conmutativo, mientras que ese polinomio de grado n tenga raíces en el propio anillo.

Como ejemplo, veremos el caso del polinomio de segundo grado. Para todo polinomio cuadrático se tiene que:

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Las fórmulas de Vieta señalan para este polinomio que las soluciones x_1, x_2 de la ecuación $P(X) = 0$ verificarán

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

La primera de estas ecuaciones puede usarse para encontrar el mínimo o máximo del polinomio de segundo grado. Es trivial obtener las fórmulas de Vieta para el polinomio o ecuación cúbica. Por otra parte, las fórmulas de Vieta pueden ser demostradas escribiendo la igualdad:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$$

que es cierta porque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de este polinomio, y multiplicando los factores en el miembro derecho, operando términos semejantes e identificando los coeficientes de cada una de las potencias de X.

Como curiosidad, las aportaciones de Vieta no pararon ahí, sino que en 1593, partiendo de consideraciones geométricas y por medio de trigonometría, descubre el primer producto matemático infinito de la historia de las matemáticas, que daba una expresión del número pi

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots$$

Esta fórmula proporcionó 10 decimales exactos de π recurriendo al método de Arquímedes que, ayudándose de un polígono de 393216 lados, $6 \cdot 2^{16}$, es *claramente* más sencillo que múltiples extracciones de raíces de raíces.

★ **Ejercicio.** *Resolver la ecuación cuadrática*

$$X^2 + pX + q = 0$$

donde p, q son números estrictamente positivos, usando algún procedimiento geométrico. Y, además, probar que tiene dos soluciones para cualquier valor (en *general complejo) de los p, q. Ayuda: pensar en el discriminante de la ecuación cuadrática.*

★ **Ejercicio.** *La suma de los números de habitantes de tres poblaciones está comprendida entre 10000 y 11000. Sabiendo que el número de habitantes de la primera población es $\frac{35}{143}$ del total, y que el número de habitantes de la segunda es el $\frac{23}{165}$ del total, hallar el número de habitantes de cada ciudad.*

★ **Ejercicio.** *Una cuadrilla de segadores debe segar dos campos. Uno de los campos tiene el doble de superficie que el otro. Durante medio día, trabajó todo el personal enel prado grande, y después de la comida, la mitad de los segadores en el grande y la otra mitad en el pequeño. Al finalizar la tarde se acabó de segar los dos prados a excepción de un sector del prado pequeño cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo trabajador. Hallar el número total de trabajadores de la plantilla de segadores. Ayuda: todos los segadores trabajan el mismo. Las mañanas duran lo mismo que las tardes. Usar gráficos y dibujos.*

3.7. Siglo XVIII, XIX y XX

- En 1799, Gauss resuelve y prueba por primera vez el teorema fundamental del Álgebra.
- En 1824, Abel prueba la insolubilidad por radicales de la ecuación de quinto grado. Más adelante, Felix Klein y otros logran resolverla mediante funciones modulares elípticas, dejando patente las limitaciones de las ecuaciones algebraicas, pero abriendo un nuevo campo.
- En 1832, a los 20 años, y antes de morir en un duelo, deja impresos en unos manuscritos que tardarán en ser entendidos para llegar a conocer lo que hoy viene en llamarse la teoría de Galois.
- Desarrollo de estructuras algebraicas alternaticas, en particular las álgebras de Grassmann, las álgebras de Clifford, los cuaternios de Hamilton y las octavas de Graves (u octoniones, también números de Cayley).

4. Geometría

4.1. Esquema general

- Geometría prehelénica(3000 a. de C., VI a.C.).
  - Babilonios: conocimientos geométricos elementales, teorema de Pitágoras.
  - Egipcios: buenos geómetras e iniciadores de la Geometría por necesidades básicas.
- Geometría griega(VI a.C, I a.C.).
  - Características: concepción sistemática y abstracta; uso de las demostraciones; inicio del método axiomático; predilección de la belleza, simplicidad y armonía.

- Etapas:
  - s.VI y V a.C: Tales, Pitágoras,...
  - s.IV a.C.: Platón y Eudoxo.
  - s.III a.C.-I a.C.: Euclides, Arquímedes y Apolonio.

- Período grecorromano(I a.C, s.V.d.C.). Destacan Pappus, Tolomeo, Menelao y Herón.

- Edad Media(s.VI,mediados del s.XV).

- Renacimiento(Mediados del s.XV,s.XVI). Nuevas creaciones, especialmente inspiradas por el Arte. Se inicia la perspectiva, que se había abandonado desde la época helénica. Ejemplos: Leonardo da Vinci, Durero,...

- Siglo XVII.
  - Geometría analítica: Descartes y Fermat.
  - Inicio de la Geometría proyectiva: Desargues y Pascal.

- Siglo XVIII.
  - Geometría descriptiva: Monge.
  - Geometría proyectiva: Pongelet.
  - Geometría, inicio de la Topología,...(¿todo?): Euler.

- Siglo XIX y XX. Tiene dos características fundamentales: crítica de los fundamentos previos, y la creación de nuevas ramas.
  - Geometría proyectiva (máximo esplendor): Steiner, Staudt, Chasles, Möbius.
  - Geometrías no euclídeas: Gauss, Bolyai, Lobachesvki, Riemann,...
  - Geometría diferencial: Gauss, Riemann, Lie, Christoffel, Ricci, Levi-Civita,Finsler, Cartan,...
  - Geometría analítica: Plücker, Riemann, Darboux.
  - Geometría algebraica: Veronesse, Enriques, Zariski, Grothendieck, Connes, ...
  - Nuevas concepciones de la Geometría: Hilbert, Klein, Lie.
  - Nuevas ramas e interacción con la Física-Matemática: geometría diferencial no conmutativa; clasificación de los grupos finitos simples y semisimples,...; Topología algebraica; fibrados; grupos cuánticos; superálgebras; geometría simpléctica; teoría de nudos algebraico-geométrica;...

Antes de entrar a desarrollar algo más detalladamente alguna de las épocas más relevantes en la Geometría, nos gustaría destacar algunos puntos importantes en lo referente a la didáctica de la Geometría:

- El conocimiento del espacio empieza por el reconocimiento del propio cuerpo, que ocurre ya en la edad más temprana de la niñez, a eso de los dos años.

- En la Educación Primaria, se recomienda que dada la evolución lenta, en general, de los conceptos geométricos, se ponga especial énfasis en el avance pausado y progresivo de la materia. Se recomienda: usar elementos cercanos al niño, impulsar juegos en relación a la Geometría, buscar actividades relacionadas con otras áreas buscando conexiones, establecer discusiones y usar como fuente de formas y modelos el entorno cotidiano, dado que existe un interés innato en la manipulación de formas en esta etapa. Finalmente, se incluye la idea de ir abriendo paso a la idea de introducir demostraciones formales, muy poco a poco, para verificar los resultados que se obtengan.

- En la Educación Secundaria, ha opiniones diversas sobre lo que constituye la enseñanza de la Geometría en esta etapa. Grandes maestros como Dieudonné, Kirch o Freudenthal han argumentado distintas visiones sobre lo que constituye dicho aprendizaje que conviene conocer, profundizar y criticar. Se pueden, de esta forma, extraer una síntesis de lo que debería constituir la Geometría aquí

    - Debe trabajarse descubriendo propiedades y usando figuras del mundo real. Se deben estudiar formas, clasificar figuras y mostrar relaciones.
    - Eludir el enfoque axiomático tipo *Elementos* de Euclides, *Fundamentos* de Hilbert, o similares, incluyendo aquí el enfoque vía espacios vectoriales.
    - Aprovechar los conocimientos intuitivos de las Matemáticas que poseen los alumnos, para no empezar de nuevo. No se debe dar definiciones rigurosas, sino ensalzar la imagen intuitiva que poseen los alumnos.
    - Transmitir que la Geometría puede resolver problemas no evidentes, y evitar una resolución o demostración de forma intuitiva por parte de los alumnos.
    - Aunque en términos curriculares ha desaparecido prácticamente la Geometría espacial, debe trabajarse en lograr una visión del espacio, y su desarrollo paulatino. Es importante reconocer el hecho empírico observable de que, aparentemente, vivimos en un mundo tridimensional.
    - Destacar la conexión de la Geometría con el resto de ramas de las Matemáticas.

Algunos elementos que pueden ser interesante usar para la Geometría son: el tangram, figuras clásicas de área y volumen (polígonos y poliedros), la papiroflexia, nudos, bandas de Möbius, etcétera.

4.2. Geometría prehelénica

Los babilonios tenían ya conocimiento de ternas pitagóricas, y es de suponer que, sin llamarlo así, conocieran antes que los griegos el hoy llamado teorema de Pitágoras, mil años antes de su redescubrimiento helenístico. La construcción de pirámides, obligó al desarrollo práctico de la Geometría por parte de los egipcios, y otras necesidades prácticas. Los desbordamientos del río Nilo borraba los límites de las tierras de cada propietario, lo que llevó a inventar un método para medir la tierra. ¿Qué sabían hacer los egipcios?Destacan una serie de resultados:

- Bisectar un ángulo entre la salida y puesta de Sol durante los equinoccios. La pirámide de Gizeth se encuentra orientada de forma que sus caras dan a los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este y Oeste.
- Sabían cómo trazar con precisión un ángulo recto. Esto se infiere del error máximo que hay en los vértices de la gran pirámide de Gizeth. Sabían hacerlo de tres formas distintas:
  - Hallando la mediatriz de un segumento.
  - Mediante un triángulo rectángulo cuyos lados guardaban la relación $5 : 4 : 3$.
  - Mediante un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia, ya que era conocido para ellos que un triángulo rectángulo cualquiera inscrito en una circunferencia tiene una cuerda igual a su diámetro, o equivalentemente, abarca un ángulo de ciento ochenta grados.
- Conocían cómo calcular las áreas y volúmenes de figuras piramidales, y del tronco piramidal, de base cuadrada.
- Reglas empíricas para el cálculo de longitudes y áreas de circunferencias y círculos, respectivamente. Así, obtuvieron una mejor aproximación al número π . En particular, obtuvieron las siguientes reglas para el cálculo del área de una circunferencia, dada su longitud L y su diámetro $d = 2r$, entonces

  $$A = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{256r^2}{81}$$

  $$L = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4d = \frac{2 \cdot 256r}{81}$$

  de donde se obtiene por identificación que

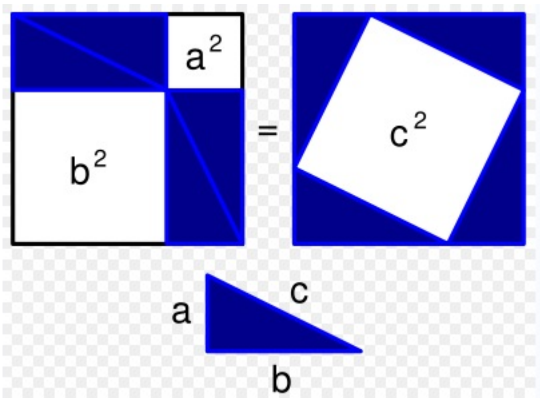
  $$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1604938$$

  valor muchísimo mejor que los conocidos anteriormente por los babilónicos.

★ **Ejercicio.** *De entre todos los posibles triángulos rectángulo de hipotenusa constante, hallar el que tiene máxima superficie sin usar el cálculo diferencial. Indicación: usar una circunferencia auxiliar.*

4.3. La Geometría griega

Los griegos agotaron la totalidad de posibilidades de lo que podría llamarse Geometría elemental. Tales de Mileto, en el siglo sexto antes de nuestra era, como gran viajero y uno de los Siete grandes sabios de la Grecia antigua, usó sus visitas a los egipcios para importar los conocimientos geométricos que tenían e incorporarlos a la floreciente sociedad griega de las polis. Los griegos ampliaron, extendieron y profundizaron en tales conocimientos. Se produjo un cambio de mentalidad en contraposición al pensamiento geométrico de los egipcios. Los griegos desarrollaron el método abstracto y sistemático. Con ellos se incorporaron los procesos hoy conocidos como abstracción, generalización, análisis, síntesis y, en cierta forma, de la demostración como elemento matemático. Las demostraciones griegas eran totalmente diferentes a las distintas recetas, procedimientos heurísticos y casuística analizada por egipcios y babilónicos. En la primera época, los referentes son Tales, Pitágoras, Zenón e Hipócrates, que fueron sucedidos, ya en la segunda etapa, por Platón y Aristóteles, respectivamente cada uno con La Academia y El Liceo. En particular, del Teorema de Pitágoras se conocen cientos de demostraciones, incluso una debida a Napoleón y una usando plegados en papel. Una muy interesante y pedagógica consiste en el método de substracción de áreas:



De este dibujo puede verse la igualdad entre las áreas de los cuadrados en blanco, que viene a dar el teorema pitagórico

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La culminación de todo el proyecto geométrico desarrollado por los griegos vendría de manos de Euclides, Arquímedes y Apolonio. Resulta curioso que de la vida de Euclides se sabe relativamente poco, a pesar de que su monumental obra, Los Elementos, pasaría a la Historia como la obra más leída tras la Biblia. De Platón se puede destacar algunas contribuciones no filosóficas en el campo de las Matemáticas y la Geometría. Platón clasificó los llamados poliedros regulares, hoy llamados sólidos platónicos en su honor, pero que él denominaba cuerpos cósmicos. A saber: tetraedro o símplex, cubo o hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

En cuanto a los *Elementos* de Euclides, son 13 libros que se caracterizan fundamentalmente por tres características:

- Son una enciclopedia de los conocimientos más importantes hasta la fecha de su publicación.
- Método proposicional con aplicaciones.
- El método axiomático. Es la propiedad fundamental de la obra. Se pueden distinguir:
    - Definiciones. Hay 118 definiciones.
    - Axiomas. Se pueden dividir entre lo que llamaríamos nociones comunes, que constan de un número variable según los autores. Y, además, los célebres 5 postulados de Euclides.

  Unos ejemplos simplos del profundo conocimiento de los griegos acerca de los conceptos abstracto lo dan las siguientes definiciones intuitivas:

    - *Punto* es lo que no tienen partes.
    - *Línea* es una longitud sin anchura.
    - *Superficie* es lo que tiene longitud y anchura.

Los cinco postulados originales de Euclides son:

- Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.
- Toda recta se puede prolongar indefinidamente.
- Con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.
- Todos los ángulos rectos son iguales.
- Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

No obstante, el quinto postulado de Euclides suele enunciarse más sucintamente como sigue:

“Por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una recta paralela a ella”.

El propio Euclides se percató de la complejidad de su quinto axioma, y trataba de evitar usarlo en sus demostraciones. Muchos matemáticos en siglos venideros, trataron de intentar probar el quinto postulado como consecuencia de los otros cuatro, sin éxito. Finalmente, se demostraría la existencia de sistemas geométricos consistentes basados en la negación del quinto postulado. Lo lograron Gauss, Bolyai, Lobachevski, Riemann y otros. Entonces, el quinto postulado resultó ser indecidible. Dado que otra formulación equivalente del quinto postulado de Euclides es que la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es igual a ciento ochenta grados, se contruyeron la Geometría hiperbólica (donde los ángulos interiores suman menos de ciento ochenta grados) y la Geometría esférica (donde suman más de ciento ochenta grados).

4.4. De los siglos I al XVIII

Durante la Edad Media, la Pintura es fundamentalmente bidimensional, como la de los antiguos egipcios. Poco a poco se van introduciendo los elementos de perspectiva y profundidad tridimensional, que habían sido abandonados tras el esplendor helenístico. Esto ocurrió durante los siglos catorce y quince de nuestra Era. Precisamente del Arte surgió la Geometría Proyectiva, mostrando una vez más la interacción e interés de los matemáticos por una estructura proviniente de una determinada percepción de la realidad. Fue Desargues el principal exponente e iniciador de la Geometría proyectiva.

A. Filosofía matemática de Puig Adam

Puig Adam (1900-1960), pensaba que las Matemáticas eran una representación idealizada de la realidad mediante símbolos abstractos. Además, dió importancia a la intuición en el trabajo de los matemáticos. El decálogo sobre las Enseñanzas Medias que vimos durante el curso sirve como una de sus contribuciones más importantes al campo de la didáctica de las Matemáticas, también aplicable al Bachillerato LOGSE. Finalmente, otra de las técnicas que le hicieron famoso era la utilización de anécdotas para enganchar a la audiencia, antes de introducir un tema complicado o abstracto, como método de captar la atención de sus espectadores. Este método de introducir el tema principal de la charla tras una introducción llana, puede observarse hoy, entre otros, en los speakers de muchas charlas y conferencias, tanto técnicas, como no tanto.
Una cita célebre de Puig Adam: “Los únicos conocimientos inútiles son los que no se tienen”.

¿Cuál es la imagen o esquema filosófico que tenía Puig Adam para las Matemáticas, en el sentido de su relación con la realidad natural y física de los fenómenos? Muy sencillo. Según Puig Adam, partiendo de la realidad física, o experiencia sensible, mediante abstracción, el matemático infiere una serie de regularidades o patrones, y éstos, con el uso de un procedimiento lógico y matemático, se crean conceptos matemáticos que constituyen una *representación* de la realidad. Tras un análisis riguroso se transforman en proposiciones, teoremas e incluso axiomas y conjeturas, que, mediante una *proyección* y desconceptualización permiten obtener resultados aplicables al mundo real, del que sirven como descripciones o modelos.

B. La Música y las Matemáticas

Desde el descubrimiento de la octava por parte de los griegos, específicamente por los pitagóricos, ha sido manifiesta la relación entre estas dos ramas del saber. Este gran descubrimiento muestra que, de alguna forma, la Música está presente en las Matemáticas. Ahora es una rama artística independiente pero conviene recordar su origen histórico.

Un ejemplo muy claro de cómo se produce esta relación es el siguiente problema: ¿cómo puede afinarse una guitarra española usando Matemáticas? Sabemos que las notas son Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do. Una guitarra clásica tiene 12 trastes y seis clavijas. Entre dos notas, hay un tono excepto entre Mi y Fa, Si y Do, en las cuales hay un semitono de diferencia. La longitud de la guitarra debe ser tal que posea el traste número 12 en la mitad de esta longitud (clavijero). Se puede probar que el cociente entre cada dos distancias es constante e igual a:

$$\sqrt[12]{2} \approx 1,05946$$

Así, la razón geométrica de la progresión geométrica hecha con los trastes de la guitarra es

$$r = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Y todas la notas forman una progresión geométrica de razón igual a la de los trastes, i.e.,

$$\sqrt[12]{2}$$

Como un tono no es exactamente dos semitonos, había antiguamente lugares donde los intervalos eran más grandes o más pequeños que en otros sitios. Esto daba problemas para afinar instrumentos con intervalos fijos como el piano o la guitarra. Es para esto que se creó la escala temperada. La cantidad de notas que tiene es la misma, pero la forma de afinación es diferente. En la escala temperada, la razón entre la frecuencia de una nota y la anterior es siempre constante, que es lo que acabamos de describir. Si llamamos r a esta razón, se cumplirá que las frecuencias formaran una progresión geométrica del tipo:

$$f, fr, fr^2, ..., fr^{12} = 2f$$

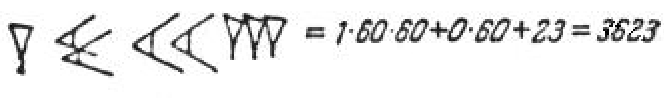
de lo que se deduce que $r^{12} = 2$, de donde $r = 1,059...$

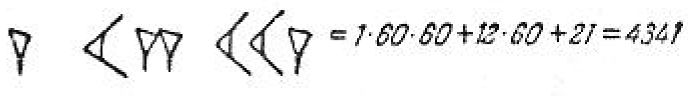
Esta escala resuelve los problemas de afinación, pero no podemos olvidar que las notas más armoniosas eran las que se había encontrado mediante el método geométrico, es decir las de la escala cromática. Instrumentos sin intervalos fijos como violines, contrabajos, etc., pueden utilizar la afinación de la escala cromática. Esto requiere una teoría más elaborada que no desarrollaremos aquí.

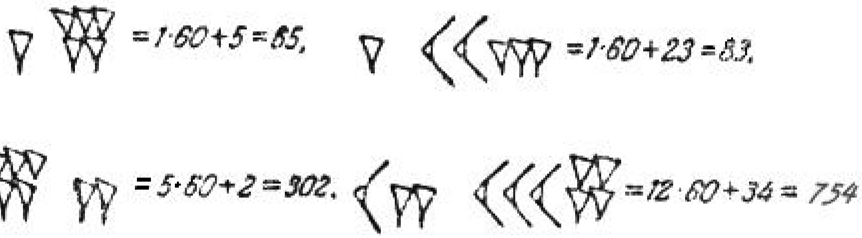
C. Imágenes y documentos gráficos

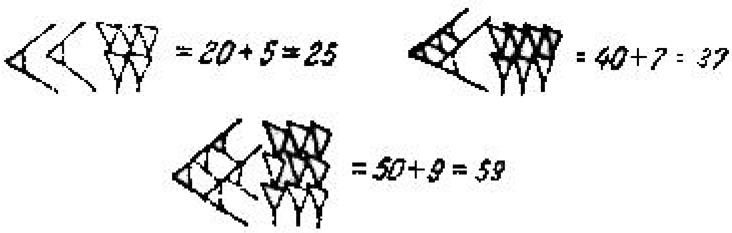
C.1. Notaciones numéricas

- La numeración babilónica tenía este aspecto:

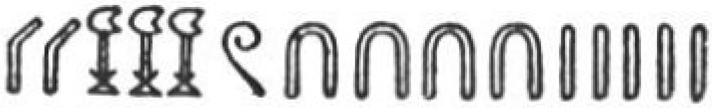


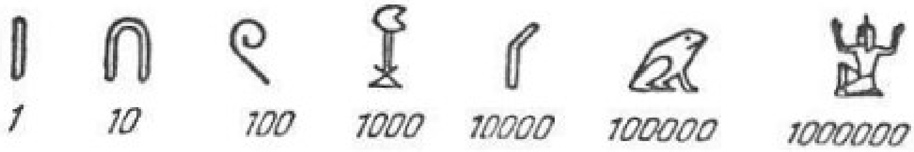




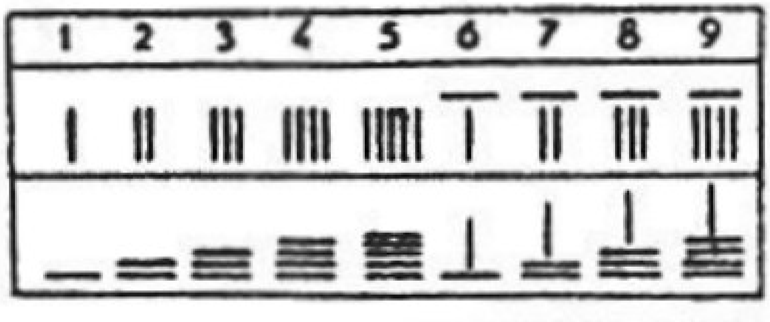


- La numeración egipcia usaba estas notaciones

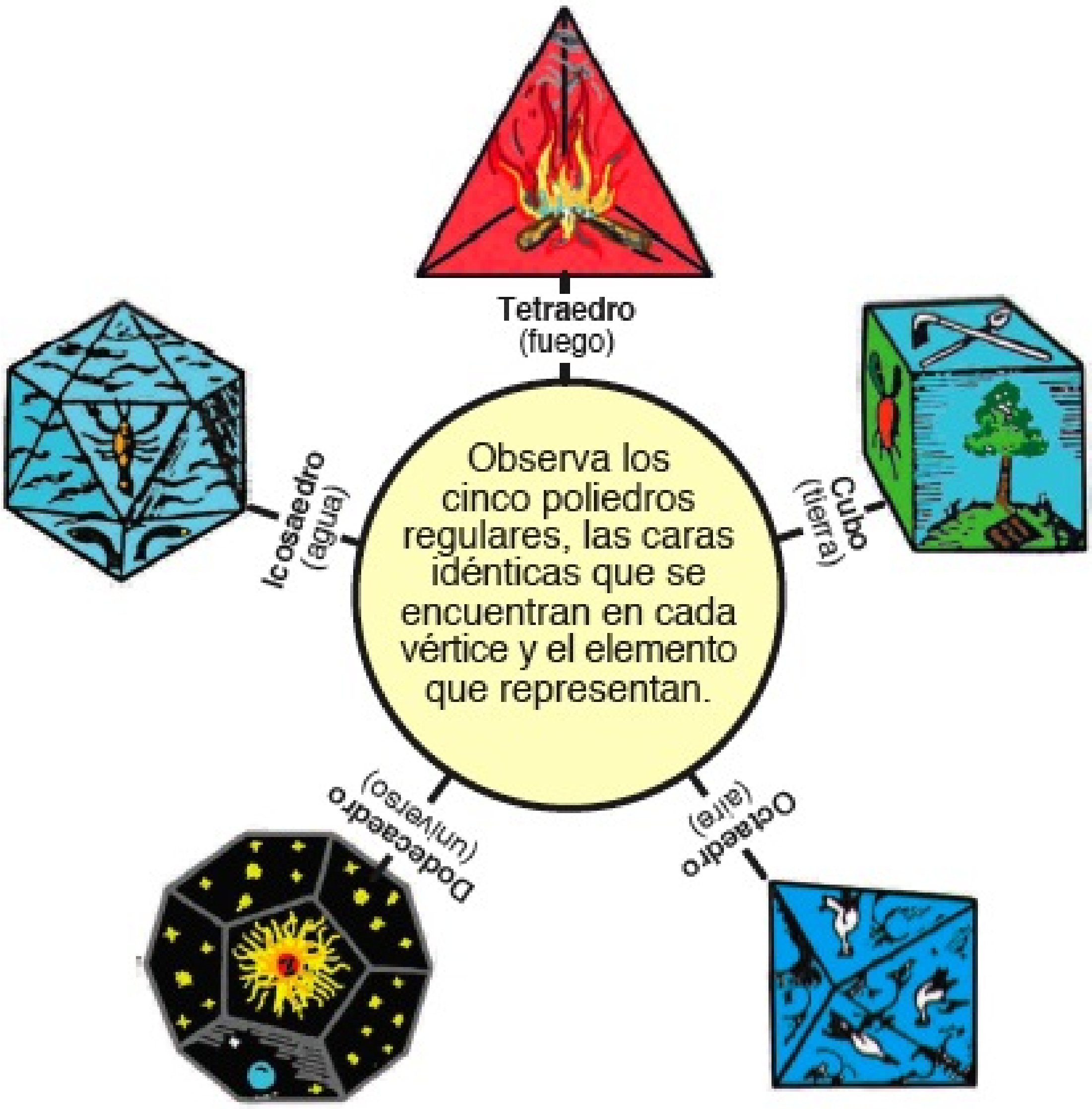




- Los chinos usaron también unos curiosos numerales barrados

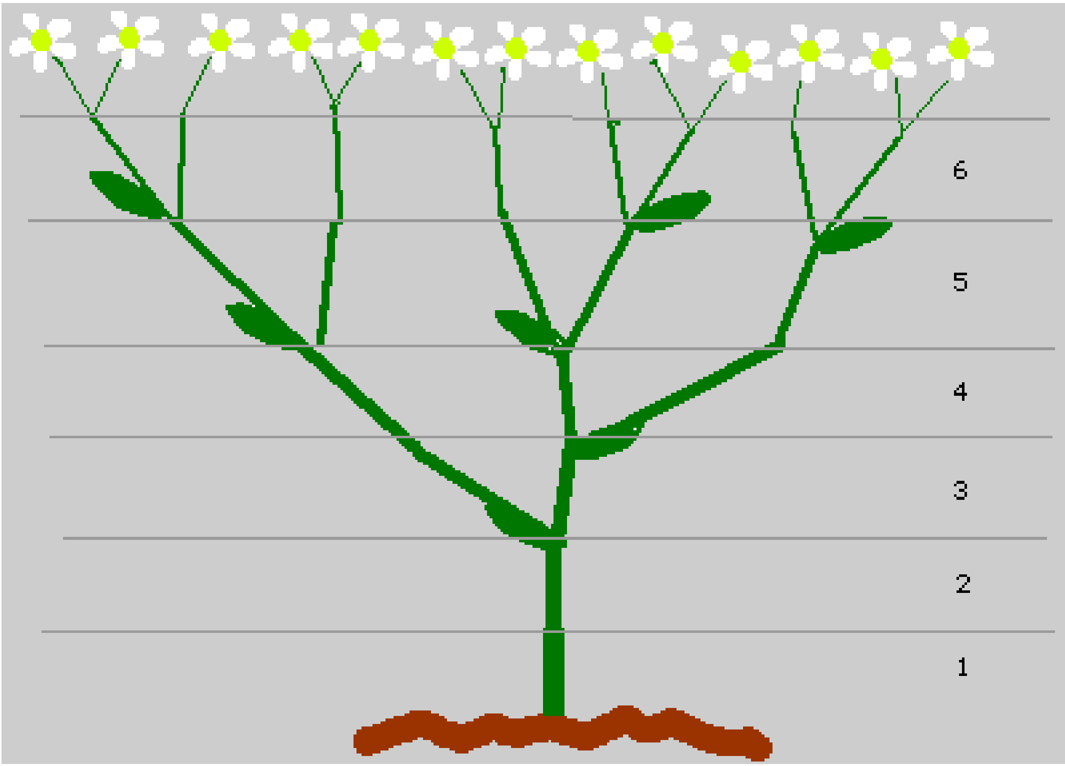


C.2. Los sólidos platónicos

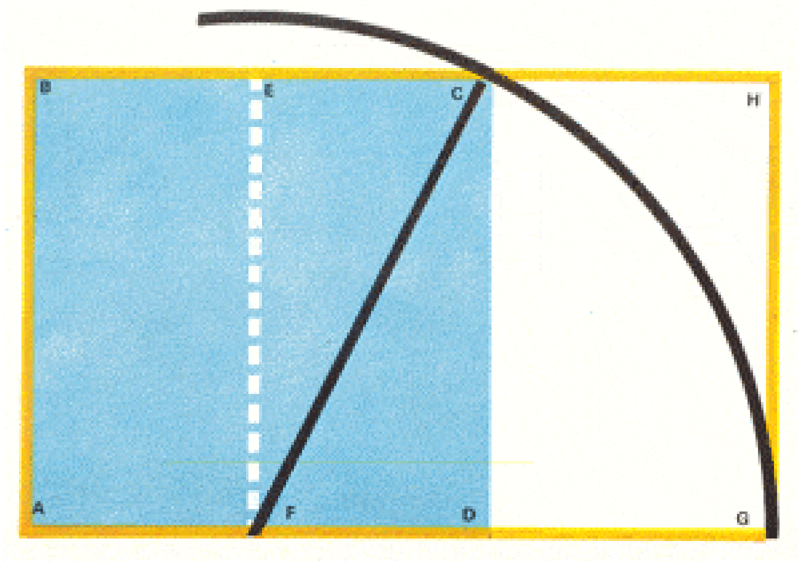


C.3. Fibonacci en la Naturaleza

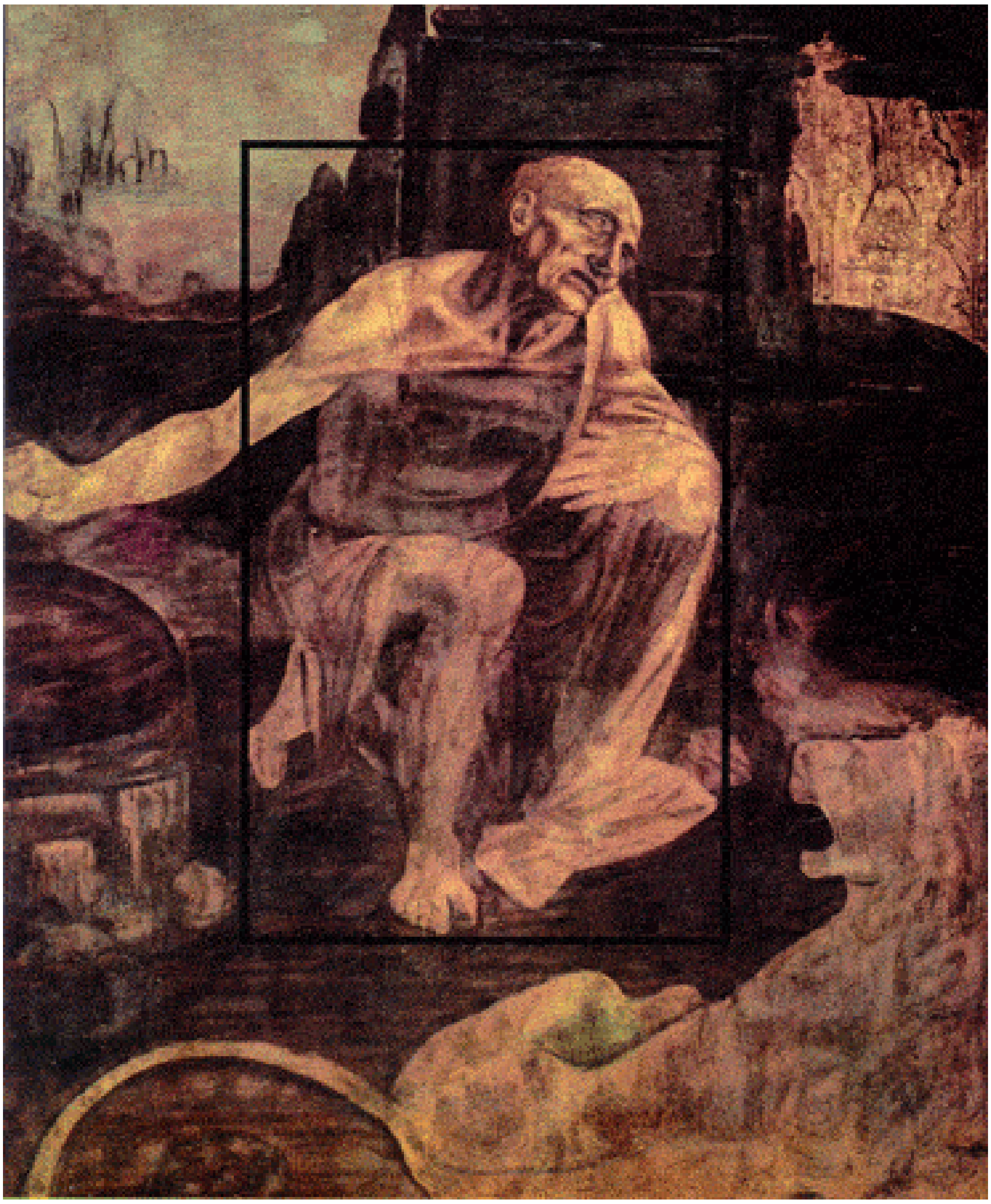
- Un ejemplo simple de cómo aparece la sucesión de Fibonacci en las bifurcaciones de un árbol o planta, y en el nautilus



- El rectángulo áureo



- Rectángulos áureos en el Arte



C.4. Más sobre cuadrados mágicos

- Algo más sobre cuadrados mágicos

Algunas curiosidades de los cuadrados mágicos

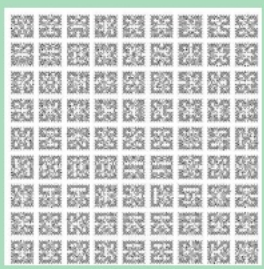
Cuadrado mágico de orden 6 cuyas filas y columnas suman 111, número que utiliza la creencia china para ahuyentar los malos espíritus.

16	115	43	4	11
44	1	12	39	93
35	17	94	41	2
91	42	25	13	18
3	14	15	92	65

En éste cuadrado mágico de orden 5, en la última fila se leen los primeros decimales del número π.

- Cuadrado mágico en la Sagrada Familia

INTERESANTE



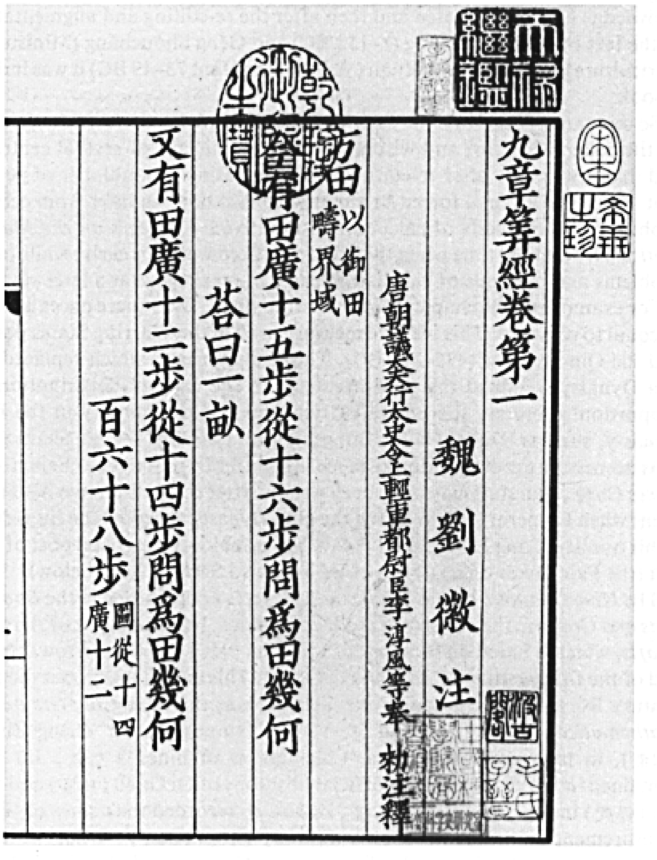
Históricamente los cuadrados mágicos han estado muy ligados al pensamiento místico.

El gran matemático Euler relacionó los **cuadrados mágicos** con los **cuadrados latinos**, y hoy en día se definen sobre ellos lo que se denomina **líneas mágicas**, las cuales producen bellos diseños geométricos empleados en el arte.

Cuadrado mágico de orden 4 que está en la catedral de la Sagrada Familia en Barcelona, España. Sus filas, columnas y diagonales suman 33 (edad de la muerte de Cristo).

C.5. Álgebra

- Un ejemplo del álgebra en china, el libro de *Los nueve capítulos sobre el arte de las Matemáticas*:



九章筭經卷第一

魏 劉 徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋

方田 以御田疇界域

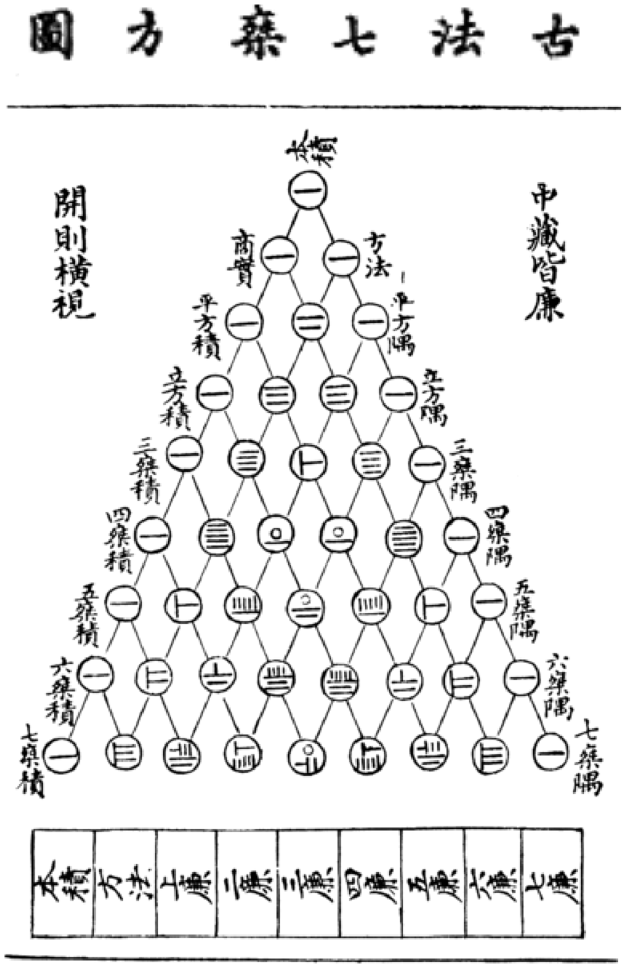
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

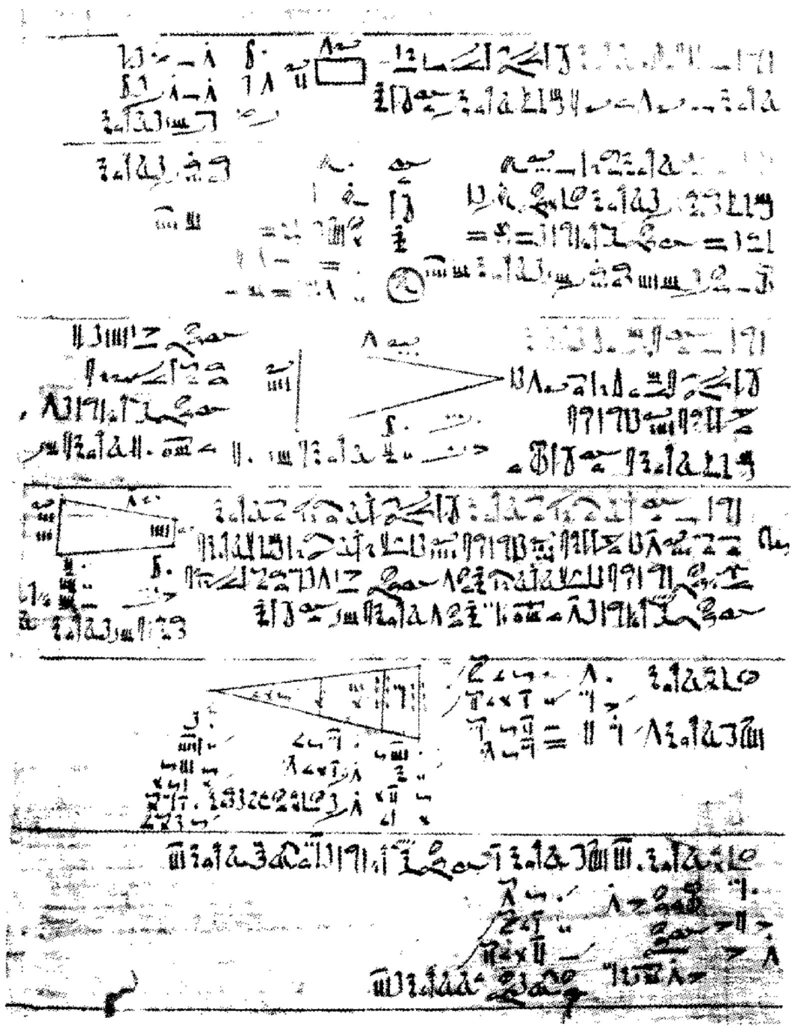
百六十八步 圖從十四廣十二

- El teorema de Pascal era conocido por los chinos mucho antes que éste:



- Un ejemplo de las habilidades de los babilonios es la tabla 322, o tabla de Plimpton, donde se encuentran ternas pitagóricas:

- Un detalle del papiro de Rhind:



- La portada de uno de los libros de los trabajos de Diofanto:

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

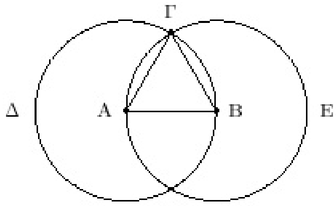
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

- La prueba de Euclides del teorema de Pitágoras:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ: πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

- Euclides dando lecciones de Geometría (detalle de un famoso cuadro):

- Una muestra de un libro árabe sobre Álgebra antes del Renacimiento, durante la Edad Media:

Referencias

[1] Javier Peralta, *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las Matemáticas*, ed. Huerga-Fierro.

[2] http://divulgamat.ehu.es/

[3] Ribnikov, K.: Historia de las Matemáticas. Mir, Moscú, 1991.

[4] A.D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A.Laurentiev y otros: *La Matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Universidad, Vols. I-II-III, números 68, 69, 70; 1982 (sexta edición).

[5] C. B. Boyer, *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, AUT/94, 1986.

[6] J. Rey Pastor y J. Babini, "Historia de la Matemática". Espasa-Calpe. S. A.

[7] http://www.librosmaravillosos.com/

[8] http://thales.cica.es/rd/

[9] http://es.wikipedia.org/wiki/Historia__de__la__matemática