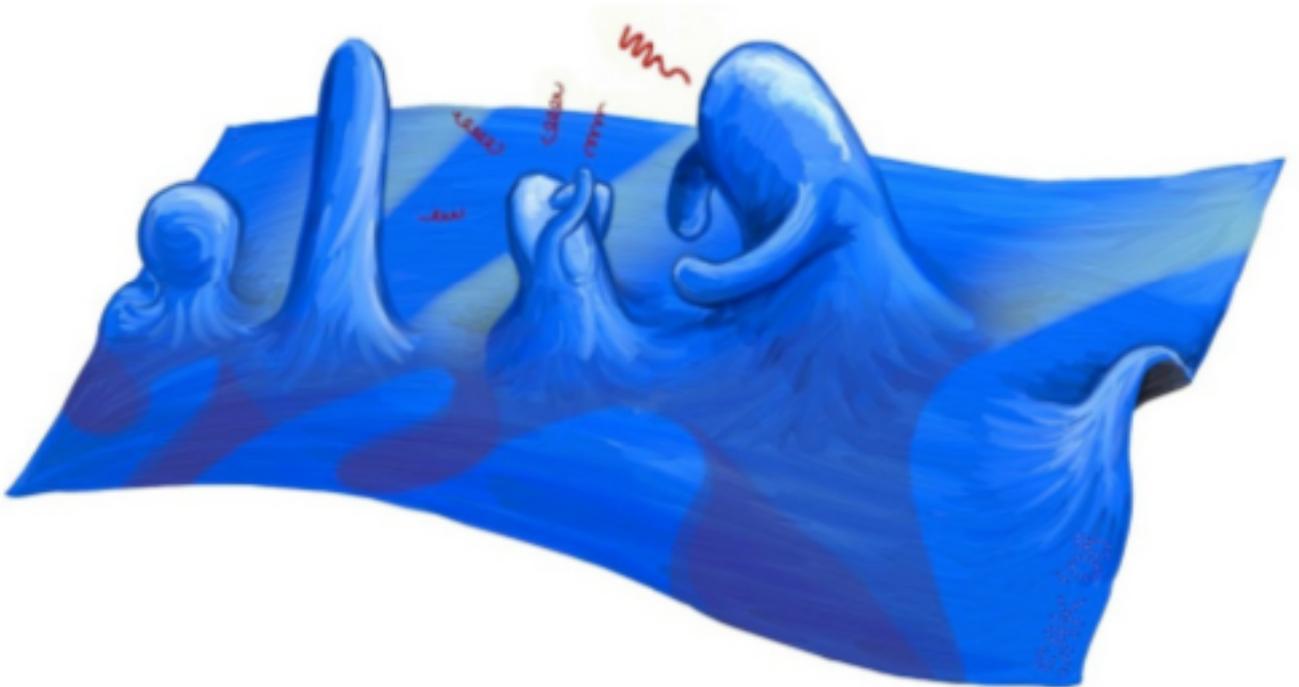


Curso de Física de partículas y Cosmología: un breve resumen y algunas aplicaciones para el aula

Juan Francisco González Hernández

11 de enero de 2015



Índice

1. Resumen breve del curso	4
2. ¿Cuestión 1A: El LHC, los klingons y la relatividad especial.	12
3. ¿Cuestión 2A: LOS GUARDIANES DE LA GALAXIA Y LA RELATIVIDAD ESPECIAL	13
4. ¿Cuestión 3A: El lado oscuro del Universo y los límites extremos de la densidad	14
5. ¿Cuestión 1B: la densidad de Planck y la densidad de microobjetos en el hiperespacio	15
6. ¿Cuestión 2B: El protón fundido y el plasma de quarks y gluones	16
7. ¿Cuestión 3B: El Modelo Estándar	17
8. ¿Cuestión 1C: El planeta X, Thelistos, Tyche,... Y la sonda New Horizons	18
9. ¿Cuestión 2C: La tercera ley de Kepler, satélites y materia oscura	19
10. ¿Cuestión 3C: La tercera ley de Kepler y los Universos paralelos multidimensionales	20
11. ¿Cuestión 1D: La masa y energía del Universo	21
12. ¿Cuestión 2D: La radiación de Hawking	22
13. ¿Cuestión 3D: La ley de Hubble y la expansión cósmica	23

Document written by The Other, Amarashiki, *τήλιστος*. Theoretical physicist, Master Sc. in Theoretical Physics. A man who keeps running. Never looking back because he dare not, out of shame. A physmatician and chaosmic mind, puzzled with $\zeta(s) = 0$ and $\hat{U} = 0$. A wolf Seine, Wolf as Iene, Mummu, Wolf ae sine, Stormageddon, The Dark Lord of All, The Dark One, The Oncoming Storm, John Smith, riemannium, feynmanium, JFGH, tetragrammaton, ... Also known as:

$$\Theta^3 \Sigma x^2$$

or

Juan Francisco González Hernández (un profesor y eterno estudiante de Física y Química, muy, muy, pero que muy friqui-o eso dice cierta leyenda urbana... Fisquimático...)

El presente texto tiene licencia Creative Commons, y el autor permite su divulgación, copia y uso para propósitos no comerciales, siempre que se cite su origen.

El presente trabajo es original y propio, y dista mucho de ser completo y perfecto (posiblemente habrá algunos errores tipográficos o hasta conceptuales, que agradecería me comentasen si los encontraran).

Este documento está dividido en dos partes: la primera es un breve resumen del curso, a partir de breves notas más en un cuaderno, y la segunda una colección de problemas que pueden ser adaptados o propuestos para estudiantes avanzados de Física y Química.

En los problemas, hay tres itinerarios posibles o colecciones de problemas “friquis”:

1) Itinerario versión “friqui relativista” y fan “del lado oscuro” (o Sith), que implica hacer los ejercicios de la opción A. Se valorará la entrega de los mismos, pero también los cálculos o explicaciones que podáis aportar.

2) Para los que deseen PENSAR más por sí mismos en dimensiones múltiples, en vez de ser recolectores de información, animo a realizar el itinerario “BEYOND Sheldon Cooper”, que implica hacer los ejercicios del itinerario B. Para ir valientemente donde ningún estudiante ha llegado jamás (o sí...).

3) Para los traumatizados con la Física y las Matemáticas, tenemos los problemas del repertorio C. Algo más “suaves”, pero al mismo tiempo, motivantes (recomiendo leer Planilandia: Un romance de muchas dimensiones/Flatland: A romance of many dimensions, un libro curioso de 1884 escrito por Edwin Abbott Abbott).

4) El itinerario cósmico. Para aquellos que piensan sólo en cuestiones de “la energía cósmica” en los “agujeros negros” del tejido espacio-tiempo.

Планета есть колыбель разума, но нельзя вечно жить в колыбели.

$$(X\Phi\Gamma\Theta)\Psi(\alpha\Omega)^\infty$$

1. Resumen breve del curso

Sesión 1: El Universo consta de materia y energía. A finales del siglo XIX y principios del siglo XX había esencialmente dos teorías y dos fuerzas en la Física. A saber: la fuerza de la Gravitación Universal newtoniana y el electromagnetismo de Maxwell y Faraday, con sus respectivas leyes. Además, la Mecánica Clásica se podía estudiar con la Termodinámica a nivel macroscópico y emergía entonces el campo de la Mecánica Estadística, para explicar el origen de la Termodinámica a partir de sistemas microscópicos con muchos grados de libertad. Una serie de experimentos, en particular el experimento de Rutherford-Geiger-Marsden supondría el final de la visión de los entonces llamados átomos como entidades sin estructura, y supusieron el inicio de lo que hoy llamamos Física de Altas Energías. La existencia de los átomos, fue demostrada espectacularmente mediante la explicación del movimiento browniano de A. Einstein. El experimento de Rutherford-Geiger-Marsden permitió descubrir la existencia del núcleo atómico, y estimar su tamaño. El núcleo tenía aproximadamente un radio de unas decenas de femtómetros (o fermis, fm). Chadwick y otros, más adelante en 1932, demostraron la existencia del neutrón (el protón ya había sido propuesto por Rutherford en su modelo nuclear).

La radiación del cuerpo negro también permanecía inexplicada hasta que Max Planck propuso la hipótesis de los quanta (o hipótesis cuántica) en 1900. Clásicamente

$$I(\nu) \approx \nu^2 \langle E \rangle$$

Planck, soluciona la catástrofe ultravioleta “en un acto de desesperación”:

$$I(\nu) = \frac{\nu^2 h \nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Unos años después, A. Einstein usa la hipótesis de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico. La ecuación de Einstein es:

$$E_c(max) = h\nu - W_{ext}$$

La Mecánica Cuántica, tarda aún unas décadas en surgir. Uno de los principios más extraordinarios de esta teoría es el denominado Principio de Indeterminación (PI) o Incertidumbre de Heisenberg, que dice que no se puede conocer simultáneamente y con precisión algunas parejas de magnitudes. En particular,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

El experimento de Stern-Gerlach muestra de peculiar forma experimental la naturaleza cuántica Y relativista del electrón, al descubrirse el espín (que es, más generalmente, una propiedad de cualquier partícula). La Mecánica Cuántica permite dar por fin una explicación cuantitativa del enlace químico y de muchas de las propiedades de los sólidos (como conjunto de átomos y moléculas).

Por otra parte, A. Einstein también enuncia en 1905 los principios de la relatividad especial, explicando de forma consistente el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley del siglo anterior, pero también describiendo nuevas consecuencias de “la nueva relatividad” a altas velocidades que superaba con mucho el sentido común y la más sencilla relatividad galileana. En particular, deriva las transformaciones de Lorentz, enuncia la relatividad de la simultaneidad, la equivalencia masa-energía. Posteriormente, queda claro que la relatividad especial requiere una nueva estructura matemática, el espacio-tiempo, y una generalización y perfeccionamiento de ciertos métodos matemáticos. Estos instrumentos se probarán útiles a la hora de formular una teoría relativista de la gravitación, llamada Relatividad General, en 1915 (en 2015 se celebra su centenario).

Uno de los aspectos más espectaculares de la síntesis y fusión posterior de la Física Relativista y la Física Cuántica lo proporciona la llamada ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$$

Para la dinámica relativista, en general

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Para una partícula espinorial, como un electrón, tenemos que

$$E = \pm(\alpha \cdot p) + \beta m$$

En el primer caso,

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

lleva a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

En el segundo, la relación de dispersión lleva a la ecuación de Dirac, y al descubrimiento de las antipartículas.

Después de la Segunda Guerra Mundial, se empezaron a estudiar teorías que solucionaran la patología de la teoría efectiva de la interacción débil, responsable entre otras cosas de la desintegración del neutrón. Hacia 1960, se empezó a construir la teoría electrodébil, que explica la teoría de las interacciones débiles y electromagnéticas en un mismo marco común. Esta teoría incluye partículas bosónicas masivas, llamadas Z (neutra) y W (positiva y negativa), además del fotón (sin masa) como las responsables microscópicas de las interacciones débiles y de la teoría efectiva de Fermi (que no es válida a energías de unos decenas y cientos de GeV).

En la física nuclear, la interacción fuerte se describe mediante la teoría o modelo de Yukawa, dado por un potencial apantallado de tipo

$$V(r) = -g^2 \frac{e^{-mr}}{r}$$

A escalas del orden del fm (unos 140MeV) y unos $10^{-23}s$, se encuentran los piones, cuyo intercambio explica a nivel efectivo por qué los protones y neutrones están unidos en el núcleo. El gravitón, y la teoría cuántica de la gravedad, permanecen aún en nuestros días, como un objetivo a lograr. La gravedad cuántica es la hipotética teoría que describiría objetos muy masivos y muy pequeños. Nótese la similaridad de las leyes de Coulomb y de la Gravitación Universal

$$F_N = -G_N \frac{Mm}{R^2}$$

$$F_C = K_C \frac{Qq}{R^2}$$

La combinación de la Relatividad Especial y la Gravitación Clásica da lugar a una teoría llamada Relatividad General (que tal vez debería llamarse mejor Teoría de la gravedad relativista especial). Las ecuaciones de la Relatividad General son especialmente bonitas y compactas

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

J.A. Wheeler solía decir que estas ecuaciones dicen: “(...)Spacetime tells matter how to move, matter-energy tells spacetime how to curve(...)”, o bien “(...)El espaciotiempo dice a la materia cómo moverse, la materia y energía le dicen al espaciotiempo cómo curvarse(...)”.

Sesión 2: La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es la síntesis de la Mecánica Cuántica (MC) y la Relatividad Especial (RE). Ejemplos de teorías cuánticas de campos son QED (Quantum Electrodynamics), QCD (Quantum Chromodynamics) y el Modelo Estándar (Standard Model, SM) de la Física de Altas Energías. El dominio de la TCC son objetos pequeños y muy rápidos ($v \sim c$). Cuando hablamos de pequeñez, hablamos de acción (en unidades de \hbar). Otra manera de verlo, es mediante escalas de longitud y energía. Hay que tener en cuenta que para fotones y partículas valen

$$E = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

A nivel perturbativo, la TCC se puede ver diagramáticamente mediante la ayuda de los denominados diagramas de Feynman. Todo proceso perturbativo equivale a una expansión de la amplitud de scattering en función del acoplo, por ejemplo:

$$A = A_0 + A_2g^2 + A_4g^4 + \dots$$

Sin embargo, originalmente, la TCC se encuentra con problemas en los cálculos. La energía de autointeracción del electrón es, en principio, divergente. El origen de las divergencias se halla en los diagramas de Feynman que poseen lazos o “loops”. Una cantidad interesante en QED es la llamada constante de estructura fina (que realmente no es “constante”)

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi} = K_c \frac{e^2}{\hbar c}$$

A nivel macroscópico, en general, $\alpha \approx 1/137$, por lo que la expansión perturbativa puede, finalmente, tener sentido una vez hemos tratado con cuidado el asunto de las divergencias mediante un método conocido como renormalización. Tras la renormalización, una teoría como QED o el SM es “finita”, aunque puede desarrollar un polo de Landau que no es preocupante dado que antes de ello, como teoría efectiva, perderá su sentido y habrá de ser sustituida por una teoría aún más fundamental (justo como se hizo con la teoría de Fermi de la interacción débil). QCD requiere un método de renormalización no perturbativa más sutil, denominado transmutación dimensional. Uno de los grandes misterios que encierra aún QCD es el misterio de la invarianza CP de la teoría. Aunque como teorías cuánticas de campos locales QCD e incluso QED son CPT invariantes, la naturaleza no es CP invariante, ni si quiera es C, P, o bien T invariante a nivel de simetrías discretas (el problema de la asimetría materia-antimateria es uno de los grandes enigmas sin resolver del SM). Toda TCC está basada en el principio de invarianza gauge local (o global), que hace que objetos del tipo

$$\Psi = \rho e^{i\theta}$$

$$|\Psi|^2 = \bar{\Psi}\Psi = \rho^2$$

se transformen de determinada forma o permanezcan invariantes, respectivamente. En QCD, o bien en la Física de Altas Energías, se hace esencialmente lo mismo que hacía Rutherford o hacen los neutrinos con nosotros todos los días. Esencialmente, sondeamos partículas chocando unas con otras y viendo qué resulta, o bien, analizamos los resultados de los productos de cierta interacción. A nivel de hadrones, si los protones hacen de “oro” y los electrones de partículas alfa, podemos estudiar la estructura interna de los protones. Esto, inicialmente da lugar a un modelo de partones (J.Bjorken, Feynman), y posteriormente origina el modelo de quarks (Gell-Mann, Neeman, Zweig-aces). Greenberg también propone un modelo del protón llamado paraestadística, que hoy día se estudia para otros propósitos distintos. La QCD es la TCC que describe las interacciones fuertes de los quarks y gluones, mediante intercambio de la fuerza de color. Los estados observables son “incolores”, pero el modelo tiene un buen número de predicciones testables, tales como la existencia de nuevos hadrones que son progresivamente descubiertos en diferentes aceleradores de partículas. El confinamiento de los quarks dentro de los hadrones es una de las dos propiedades “mágicas” y esencias de QCD. La otra es la denominada libertad asintótica. Esta última propiedad indica que las interacciones fuertes son más fuertes a distancias grandes, y son más débiles, menos intensas, a distancias cortas. Algo que sorprende inicialmente, pues es algo fuera de la experiencia usual de los sentidos. El electromagnetismo, por ejemplo, se comporta al revés: las interacciones son más fuertes a distancias más cortas (algo que comparte con la gravedad). Finalmente, es importante decir que la QCD es una teoría gauge invariante local en un espacio de 3D (color, RGB). A nivel efectivo, sin embargo, la fuerza de Yukawa y los piones sirven como teoría de juguete para explicar la mayoría de propiedades. Viene a ser, la fuerza de Yukawa de los piones, una fuerza residual cuyo origen fundamental está en la teoría de quarks y gluones, justo a como las fuerzas de Van der Waals son remanentes de las interacciones electromagnéticas de las diferentes distribuciones de carga en los átomos y moléculas.

Un efecto interesante de todas las TCC, aún por comprobarse experimentalmente, es el denominado efecto Schwinger: en un campo intenso, es posible la creación de pares de partículas-antipartículas. Este es un efecto no perturbativo difícil de medir.

Volviendo a QCD, el antiapantallamiento de carga de color se debe al carácter no abeliano de la teoría de Yang-Mills subyacente. El gluón (equivalente al fotón), tiene 8 posibles estados de polarización-color (hay 8 diferentes gluones). Como los gluones pueden interactuar entre ellos, a diferencia de los fotones, que no pueden más que acoplarse a partículas de materia, hay diagramas de Feynman en QCD que no aparecen en QED. En QCD, en el modelo de la

cuerda de gluones, la fuerza de 100000N tiene como resultado una tensión superficial del orden de $0.16 GeV^2$. Este modelo de cuerdas efectivo explica los dos diferentes regímenes de QCD: el de baja energía (grandes distancias), donde domina el confinamiento y los procesos no perturbativos que dan lugar a la hadronización y las diferentes partículas (y donde no vale la expansión perturbativa en diagramas de Feynman), y el de alta energía (cortas distancias) donde vale la teoría de perturbaciones. Para el problema de la descripción de QCD, y su dinámica, existe un método llamado Lattice QCD (Teorías Cuánticas de Campos en el Retículo). La constante de acoplamiento fuerte es, a diferencia de la electromagnética, de orden 1 en la mayoría de casos. Lattice QCD fue desarrollada por Wilson en 1974 y hoy día se usa en supercomputadores para explicar la dinámica hadrónica y el espectro de bariones/mesones. La interacción fuerte es realmente la responsable del origen de la masa (entendida como masa visible) del protón. La masa del electrón es unos 511keV, 0.511MeV, la masa de un protón o neutrón es de unos 940MeV. Como la masa de los quarks es esencialmente (para el quark u ó d que forman neutrones o protones) de unos 2 y 5 MeV, eso significa que la mayor parte de la energía-masa del protón se debe a las interacciones (más del 99 por ciento de hecho, en términos aproximados, proviene de la energía de los gluones y sus interacciones con los quarks y los propios gluones, y no por el mecanismo de Higgs). ¿Cuál es la frontera del conocimiento en la interacción fuerte? La frontera se encuentra en las transiciones de fase de la teoría a diferentes energías. Justo como hay estado sólido, líquido o gas (o plasma), la teoría de QCD predice la existencia de un plasma de quarks y gluones deconfinados a alta temperatura (que por ejemplo debió existir en el Universo temprano). El diagrama de fases del plasma de quarks y gluones es más complejo y complicado que lo que se creía inicialmente. Aparte de la fase de hadronización y de la de plasma de quark y gluones, hay una fase de superconductividad de color y se especula con la existencia de un glasma previo a la formación del plasma de quarks y gluones. La temperatura a la que el protón deja libre sus constituyentes es de unos $2 \cdot 10^{12} K$. Este plasma ha sido estudiado en el RHIC y en el LHC (ALICE). En el RHIC se colisionaban átomos de oro (Rutherford 2.0), en el LHC se colisionan núcleos de plomo y plomo contra protones (Rutherford 3.0, para pobres). El plasma de quarks y gluones se comporta como un fluido casi perfecto, desde el punto de vista de fluidos y de la relatividad: sin viscosidad (algo sorprendente e inesperado). Los constituyentes del plasma de QCD interaccionan fuertemente. Finalmente, recordemos y no olvidemos, que el que la masa del fotón y el gluón sean cero es consecuencia de la invariancia gauge local de la teoría Yang-Mills en la que están fundamentadas estas TCC (QED y QCD). La interacción electrodébil, y la teoría de Fermi, necesitan algo más para explicar su consistencia y existencia. La teoría de Fermi no vale en torno a los 100GeV y necesita una nueva teoría y un mecanismo complementario que dé masa a los bosones Z y W: el mecanismo de Higgs (o mecanismo de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, o como dice Y. Nambu, el mecanismo de simetría oculta).

Sesión 3: La frontera del Universo de las distancias cortas en la física subatómica, $10^{-18}m$, y en las distancias grandes $10^{26}m$, marcan los límites de la Física experimental conocida. A la pregunta de por qué hay tantas cosas, hace tiempo que los Químicos responden con la Tabla Periódica, y los Físicos responden, de momento, con el Modelo Estándar. El siglo XX llevó consigo el estudio detallado de la estructura atómica y subatómica, llevándonos al mundo de los protones, neutrones y electrones, pero al no más desconcertante mundo de las partículas subatómicas como los leptones (electrones, muones, tauones y sus neutrinos asociados) y quarks (u,d,c,s,t,b). Las partículas portadoras de fuerzas son bosones (fotones, gluones, Z's, W's, Higgses y los hipotéticos gravitones). ¿Por qué existen estas partículas? ¿Por qué hay 3 generaciones en el SM? ¿Por qué la masa del protón es $m_p \approx 1837m_e \approx 6\pi^5 m_e$. El SM puede explicar por qué razón protones y neutrones son parecidos, pero no explica el por qué de los valores de las masas de las partículas. El SM, basado en la idea de simetría, es una teoría basada en un lagrangiano:

$$L_{SM} = L_{\psi} + L_{gauge} + L_Y + L_{Higgs}$$

$$L_{\psi} = i\bar{\Psi}\not{D}\Psi + h.c.$$

$$L_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$L_Y = Y_{ij}\phi\bar{\Psi}_i\Psi_j + h.c.$$

$$L_{Higgs} = |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi)$$

donde

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4$$

y

$$\phi = v + h$$

es la expansión del campo de Higgs en torno a su mínimo v.e.v. El descubrimiento del muón en los rayos cósmicos (1937), de los piones (1940's), y de las partículas con extrañeza y encanto Λ, Δ, Σ (1950's) reveló una estructura mucho más compleja en la dinámica subatómica de lo que se había esperado. El modelo de quarks reduce los constituyentes fundamentales a 6 quarks y 8 gluones. Pero el SM no tiene aún una respuesta a la existencia de 3 generaciones de leptones y quarks. La tercera familia o generación se completó en 1995 con el descubrimiento del quark top. Masa del top quark es unos 173 GeV, casi como un átomo de oro. La del electrón es, recordemos, unos 511 keV. Las interacciones en el SM son 4 (más las interacciones de los campos conocidos con el campo de Higgs, aún por estudiar en el LHC y futuros colisionadores o experimentos). La gravedad es entre 38 y 40 órdenes de magnitud más débil a nivel subatómico que las interacciones electromagnéticas, electrodébiles y fuertes, por lo que se desprecia (además de que aún no tenemos una teoría cuántica de la gravedad, ni unificada con el resto de interacciones). Las partículas se clasifican según la masa, el espín o la masa y la helicidad, según el tipo de partícula. El elemento o ingrediente fundamental del SM es la simetría. Lo importante no son los objetos sino las leyes de transformación o invariancia de los mismos (algo que se debe al programa de Klein de la geometrización de la Física). Vía el teorema de Noether, la invarianza bajo traslación temporal implica la conservación de la energía:

$$\ddot{z} = -g$$

con $dt = dt', t \rightarrow t + c,$

$$E = mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = 0$$

Similarmente, análogamente a la conservación de la energía por traslación temporal, la conservación del momento se debe a la invarianza de traslación espacial y la conservación del momento angular a la invarianza rotacional. La invarianza bajo transformaciones de Lorentz lleva al concepto de masa invariante y de espín, números conservados en la relatividad especial, debido a la teoría de la representación del grupo de Poincaré.

En TCC todas las partículas (funciones de onda) son excitaciones de un campo fundamental. Así, el fotón es una excitación del campo A_μ , el electrón es una excitación del campo espinorial Ψ , etcétera. Un bonito ejercicio es calcular cuántos protones hay en un gramo de arena. Por el teorema de Noether, también tenemos simetrías locales, válidas en cualquier punto del espacio-tiempo, y que resultan en la conservación de la carga de color, la carga débil, o la carga de color. Una transformación gauge puede escribirse como:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

O bien

$$A \rightarrow A + q$$

$$B \rightarrow B - q$$

Si la transformación gauge es global, el parámetro NO depende del punto del espacio-tiempo. Si es local sí. Una de las consecuencias más importantes de las teorías gauge locales es que implican la existencia de interacciones. En particular, el electromagnetismo implica, como teoría gauge, la existencia de interacciones entre los fermiones y el fotón. Yang y Mills generalizan esto para una teoría gauge no abeliana como la teoría electrodébil, QCD o el SM en 1954. Toda ecuación puede escribirse de forma que se tiene

$$F(\Psi, A_\mu, \dots) = 0$$

Para las interacciones fuertes, entre quarks y gluones (1970's), la teoría resulta en 8 gluones y en sus interacciones mutuas y con los campos de materia. Su dinámica explica la existencia del protón de masa en torno al GeV (aunque no ha sido probado rigurosamente este punto, el del mass-gap, en la teoría de YM correspondiente), y como vimos en la sesión anterior, dado que $m(u)=0.002\text{GeV}$ y $m(d)=0.005\text{GeV}$, cualquier combinación uud (udd) da a lo más un 1% de la masa del protón. La masa del protón se debe a QCD y no al mecanismo de Higgs. Si la masa del electrón

fuera cero, los electrones saldrían despedidos de los átomos a la velocidad de la luz, pero los protones quedarían aún con masa. De hecho, la masa se lleva mal con cualquier TCC. Este hecho fue la razón de inventar el mecanismo de generación de masas electrodébil, también llamado ruptura espontánea de simetría o simetría oculta por otros autores. La clave es que el vacío de las teorías está permeado por otro campo, escalar, llamado campo de Higgs. El bosón de Higgs son las excitaciones u ondas (agitaciones) del campo que llena el vacío, algo así como ondas en un fluido viscoso. Una explicación algo más avanzada consiste en lo siguiente. Heurísticamente, la simetría gauge $\Psi \rightarrow q\Psi$ no se lleva bien con la masa porque

$$m\Psi^2 \rightarrow q^2 m\Psi^2$$

Si introducimos un nuevo campo, de forma que $m = H\Psi^2$ y que se transforma bajo gauge como

$$H \rightarrow \frac{H}{q^2}$$

logramos solucionar el problema de la no invarianza y tener de nuevo invariancia. Ahora, expandimos el campo $H = H_0 + h$, donde h es el bosón de Higgs. Entonces

$$H\Psi^2 = H_0\Psi^2 + h\Psi^2$$

y el primer término nos da precisamente la masa. La simetría gauge global no rota tiene la presencia de bosones sin masa llamados bosones de Goldstone, cuando se rompe la simetría de gauge de forma espontánea, algunos de esos bosones de Goldstone se vuelven masivos. Eso es un campo de Higgs. En el SM, tras ruptura espontánea de simetría (SSB) quedan $2W$'s, el Z masivos, y un fotón sin masa. Pero queda un grado de libertad masivo: el campo de Higgs. Una cosa interesante, es que, en el SM, aparentemente, las interacciones de Yukawa no vienen a priori de ninguna simetría, vienen impuestas por la estructura de la teoría. ¿Por qué insistir también en cuantizar la gravedad? Tomándonos las ecuaciones de Einstein de la GR (Relatividad General) en serio, como la curvatura debe estar dictada por materia cuántica es natural que el propio espaciotiempo deba estar constituido por ingredientes cuánticos. La naturaleza última de estos ingredientes es desconocida.

Curiosidad: Un fotón, aunque tarda en llegar a la Tierra 8 minutos, tarda en salir del Sol entre 500000 y un millón de años.

Problema relacionado con el campo de Higgs: su masa. No la predice el modelo estándar, y de hecho es demasiado baja. No está protegida por ninguna simetría y debería o podría en principio recibir contribuciones de muy alta energía. El hecho es que NO lo hace y tenemos un Higgs (descubierto en 2012) de unos 126GeV, masa mucho menor que la masa de Planck. Este ajuste fino y diferencia de jerarquía tan grande resulta desconcertante. Es el problema de la jerarquía (o la diferencia de magnitud tan grande entre la escala electrodébil-Higgs y la escala de Planck).

Sesión 4: La cantidad fundamental en Física Experimental de Altas Energías (FEA) es la sección eficaz σ , una suerte de área de interacción. Cuando colisionan dos objetos, según las leyes cuánticas relativistas, se conserva momento, energía y ciertos números cuánticos asociados a las simetrías correspondientes. Si entendemos también la energía o momento como números cuánticos, entonces la sección eficaz es cierta función complicada de estos números. La cinemática depende de los detalles de la colisión, generalmente de dos objetos, y la dinámica de la teoría subyacente, que puede entenderse perturbativamente en general vía diagramas de Feynman. Esencialmente, las secciones eficaces diferenciales son función de las amplitudes cuánticas dadas por los procesos descritos mediante los diagramas de Feynman, que interfieren cuánticamente al ser números complejos en general. La sección eficaz define el número de colisiones por unidad de tiempo de forma que

$$N = \sigma L$$

donde L es la luminosidad. En el LHC, la sección eficaz es de unos $10^{-40}m^2$, unos picobarns, o incluso $10^{-43}m^2$, fb, en el futuro. Cualquier proceso es una señal más background o fondo (ruido). Cada tipo de partícula requiere un detector. Hay detectores de trazas, detectores de centelleo, calorímetros y otros varios. En cuanto a los aceleradores, LEP llegó a energías de 100GeV, el Tevatron a 2TeV y el LHC hasta 8-14TeV. La sección eficaz es realmente a nivel experimental algo más completo debido a los efectos de errores:

$$\sigma(exp) = \sigma_{th} A \epsilon_{HLT} \epsilon_{ID} \epsilon_{REC} \epsilon_{SEL}$$

El canal o modo de desintegración/detección del Higgs preferido (“dorado”) en CMS es:

$$H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$$

$$\sigma(4l) \approx 10^{-12} \sigma(SM)$$

Por tanto, la selección de sucesos y el triggering es esencial en el LHC. Recientemente, CMS y ATLAS han abierto bases de datos de sus resultados para el análisis público de los mismos. Zooniverse y el CERN ofrecen la posibilidad de hacer estudios sobre sus datos.

Sesión 5: El misterio de la materia oscura y las misteriosas curvas de rotación galácticas data de 1933 y los trabajos de Zwicky. Las galaxias giran demasiado deprisa para el contenido de materia visible que tienen, por lo que debe existir materia no luminosa en la misma. Incluso en esta misma habitación. El 26 % de la materia-energía es materia que no está descrita en el SM, y por tanto, el 80 % de la materia (luminosa y oscura) es materia oscura. Nadie sabe lo que es con certeza. Localmente, la Vía Láctea se tragó a una galaxia de Sagitario hace tiempo. El grupo Local es parte del supercúmulo de Virgo, unas 2000 galaxias que se extienden hasta unos 60 millones de años-luz). Las galaxias a gran escala presentan estructura filamentaria. El Universe se expande acelerada y positivamente. En término medio todas las galaxias se alejan, aunque localmente algunas se acercan entre sí (Andrómeda chocará con nosotros en unos miles de millones de años). El principio cosmológico, esto es, la idea de que el Universo es homogéneo e isótropo a gran escala es una idea establecida ya en el marco del Modelo Cosmológico Estándar, llamado hoy día *ΛCDM*. La ley de Hubble permite el estudio de la expansión:

$$V = H_0 d$$

Las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \partial^2 g_{\mu\nu}) = kT_{\mu\nu}$$

representan la descripción global del Universo. La constante cosmológica, una de las opciones para describir la energía oscura, es un término de presión tetradimensional en la acción de Einstein-Hilbert

$$S_\Lambda = \int_M d^4x \sqrt{-g} \Lambda$$

La edad estimada del Universo, es de unos 13800 millones de años, o 13.8Gyr. El Universo primigenio estaba muy caliente, y la materia se encontraba disociada en partículas elementales. Según se fue enfriando, el Universo sufrió sucesivas transiciones de fase, desde temperaturas como la de Planck $T \sim 10^{32}K$ hasta la temperatura del plasma de quarks y gluones $T \sim 10^{12}K$, hasta llegar a su temperatura actual, de unos 3K. La nucleosíntesis primordial que generó los elementos químicos más simples (H y He) para dar los núcleos de los elementos tuvo lugar en los primeros 100 segundos del Universo. Los electrones estaban aún en un plasma muy caliente y no se ligaban a los núcleos, pero cuando el Universo alcanzó una temperatura de unos 3000°C, tuvo lugar la recombinación de los electrones con los núcleos, y entonces, cuando el Universo tenía 380000 años de edad, éstos enlazaron con los núcleos y quedaron ligados, emitiéndose entonces el fondo cósmico de microondas, que es cuando el Universo se hizo transparente a los fotones. Debido a la expansión cósmica, los fotones nos llegan a 3K y no a 3273K. Para estudiar la radiación de microondas, se hace esencialmente análisis de Fourier en la esfera, mediante el uso de funciones matemáticas llamadas armónicos esféricos. El primer armónico nos dice que el Universo, hasta donde sabemos, es plano. El resto de armónicos, están relacionados con el contenido de materia y energía del Universo. Para explicar la planitud, se requiere en el modelo cosmológico estándar un periodo de inflación, o expansión acelerada exponencial (a mayor velocidad que la luz), y con geometría casi-de Sitter. El hecho de que hoy día tengamos expansión acelerada, es un gran misterio relacionado con la energía oscura (una de cuyas encarnaciones es la constante cosmológica de Einstein). Sobre la materia oscura, sabemos mucho más en principio: se extiende en un halo hasta, posiblemente, 100kpc o más. Es la mayor parte de la masa de las galaxias. No emite o absorbe radiación, o lo hace muy rara vez. Debe ser estable, al menos con una vida media de 13.8 Gyr porque sigue aquí (aunque parece ser que la energía oscura la está “devorando”). Debe ser no relativista (fría, no puede ser algo como los neutrinos o partículas relativistas fermiónicas del SM), y neutra (o al menos neutra bajo el grupo gauge del SM). Los MACHOs ya han sido también descartados como materia oscura. Algunas teorías, como la supersimetría, tienen un candidato natural a la materia oscura. También las teorías con dimensiones extra o las teorías preónicas. La LSP, el modo más bajo KK o los preones que dan nuevas partículas, predicen un candidato natural de materia oscura, como mínimo. También está el axión, el favorito de Wilczek. ¿Habrà una o más clases de partículas y campos de materia oscura? No lo sabemos. Solamente podemos teorizar, observar y comprobar. Para detectar materia oscura hay métodos directos e indirectos. Se puede intentar buscar la producción de partículas de materia oscura

(DM) en el LHC y colisionadores de alta o baja energía. La detección directa basada en observar el movimiento leve de átomos (recoil) y su retroceso bajo la acción de interacciones de materia oscura con ellos es interesante también.

Sesión 6: En Cosmología experimental, es importante medir las distancias. La distancia-luminosidad es

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

La distancia angular

$$D_A = \frac{R}{\theta}$$

Luego puede usarse relaciones como la de Tully-Fisher en galaxias espirales, $L = kV_r v^4$, o la de Faber-Jackson en galaxias elípticas, $L = K\sigma(v)^4$, para calibrar las medidas de distancia. Otras candelas estándar son las supernovas de tipo I, en particular las de tipo Ia, SNIa. Finalmente, el efecto de las oscilaciones acústicas de bariones, BAO, o el ensanchamiento térmico ayudan también al delicado problema de determinar las distancias cósmicas. Recordemos que el Universo es homogéneo a escalas de 100Mpc o más. No se han visto defectos topológicos, como cuerdas cósmicas, en las estructuras a gran escala del Universo conocido. El Universo se enfría como dice la Teoría del Big Bang o el modelo Λ CDM. La radiación cósmica de microondas pudo haberse descubierto mucho antes, pero finalmente fueron Penzias y Wilson quienes la encontraron. COBE, WMAP y PLANCK han sido los satélites que han mapeado el fondo cósmico de microondas y estudiado su estructura, especialmente, sus anisotropías y propiedades globales (relacionadas con la curvatura y contenido de materia-energía, topología, ...). Antes del tiempo de Planck, no tenemos una teoría física establecida para esas escalas de densidad, temperatura y energía (o tiempos tan pequeños).

Curiosidad(I): El problema de la constante cosmológica está íntimamente relacionado con el potencial de Higgs. El valor medido de la constante cosmológica es unos 55 órdenes de magnitud diferente al predicho por el potencial de Higgs para una energía del vacío. Sea el potencial de Higgs

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4 + V_0$$

Con $\langle 0|\psi|0\rangle = V_0 = v = 246\text{GeV}$, minimizando el potencial se obtiene que

$$V_{min} = V_0 - \frac{\mu^4}{4\lambda} = \rho(vac, SSB) \sim 4.8 \cdot 10^8 \text{GeV}^4$$

$$\phi_{min}^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

al compararlo con el valor medido en Cosmología $\rho^\Lambda = 3.1 \cdot 10^{-47} \text{GeV}^4$, se tiene que

$$\frac{\rho^{Higgs}}{\rho^\Lambda} \approx 1.5 \cdot 10^{55}$$

Curiosidad(II): teorías que van más allá del modelo cosmológico estándar son la propuesta de no-frontera de S.W. Hawking, la creación de la nada de A.Vilenkin, el Universo ekpirótico (de teorías de cuerdas y branas), o la máquina del Tiempo de Gott.

2. Cuestión 1A: El LHC, los klingons y la relatividad especial.

Es el ejercicio extra de relatividad del examen. En particular, este ejercicio contará exclusivamente para la nota parcial del tercer trimestre.

El Gran Colisionador de Hadrones LHC (Large Hadron Collider) del CERN tiene una longitud total de 26659 metros y choca protones contra protones a muy alta energía. Los protones son partículas que en reposo tienen una energía de 938 MeV. A los científicos y físicos de partículas nos mola chocar protones a muy alta energía, que está limitada por factores técnicos en cada nuevo supercolisionador de partículas (Sheldon y Leonard adoran el LHC). Calcula:

a) Si $\gamma = 3730$, halla la velocidad de los protones, y la longitud que tiene el LHC que observan “los protones que colisionaran” con dicha γ en el LHC. Halla la energía total relativista con la que chocan los protones con esta γ .

b) Repite el cálculo de a) para el máximo valor de γ para el que se diseñó originariamente el LHC, $\gamma = 7461$. (Actualmente se está preparando para que pueda soportar este factor gamma relativista y se está estudiando cómo podría ampliarse dicho número en el futuro VLHC, Very Large Hadron Collider, en una aún más futura remodelación del LHC que soporte protones de un más energía).

c) En clase, hemos estudiado sólo cómo se transforman las velocidades colineales o paralelas al observador en reposo. Usando el formalismo vectorial cuidadosamente, puede deducirse la ley más general de composición de velocidades, cuando el objeto móvil se mueve con velocidad $\vec{U} = (u_x, u_y, u_z)$ en su sistema de referencia relativo a un origen O y un observador en reposo con en dicho origen, éste observa una velocidad $\vec{U}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, respecto al cual el objeto móvil tiene una velocidad relativa $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$. Las leyes de transformación más generales de la velocidad en relatividad especial en 3D+1 son

$$\vec{U}' = \frac{\frac{\vec{U}}{\gamma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{U})\vec{\beta}}{\beta^2} - \vec{\beta}c}{1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{U}}{c}}$$

y donde el punto indica producto escalar tridimensional ordinario de los vectores correspondientes.

Ahora viene lo divertido. Supongamos que en la serie Star Trek, una nave Klingon que se acerca con velocidad relativa $0.9c$ a la nave estelar U.S.S. Enterprise NCC1701 (que suponemos en reposo, esperando a unos aliados de la Flota Estelar), lanza un torpedo de fotón (que viaja a la velocidad de la luz) hacia delante suyo, para alcanzar al Enterprise, situado en la línea del eje X, en la visual de los sensores de la nave klingon. Demuestra, explícitamente, que el fotón no se mueve a velocidad mayor que la luz (es decir, prueba que la Relatividad Especial implica que $c^{“+”}0.9c$ NO es $1.9c$, como podría esperarse clásicamente).

Tras el primer disparo, el capitán klingon decide usar otro arma, porque el torpedo de fotón es repelido por los escudos deflectores del Enterprise, y los klingon deciden disparar un misil convencional con velocidad $0.5c$, en la dirección del eje X y también en el sentido de acercamiento al Enterprise. ¿A qué velocidad ve acercarse el misil convencional un observador situado en la nave espacial Enterprise? El capitán klingon decide suspender el ataque, mediante el lanzamiento de un proyectil convencional y luminoso, pero dirigido EN EL SENTIDO DEL EJE Y positivo, perpendicular a la línea de visión de las dos naves (los klingon son una raza orgullosa, no se rinden y les importa el honor incluso en la derrota). ¿Con qué velocidad miden este proyectil desde el Enterprise tanto Mr. Spock como Mr. Chekov en su sistema de referencia?

3. **⚡Cuestión 2A: LOS GUARDIANES DE LA GALAXIA Y LA RELATIVIDAD ESPECIAL**

Star-Lord y Rocket Raccoon (Mapache Cohete) se dirigen en dos naves diferentes, desde diferentes puntos de origen, a la nueva base lunar de los Guardianes de la Galaxia en el lado oscuro de la Luna de la Tierra, donde les esperan Groot, Gamora y Drax El Destructor (que consideraremos en reposo respecto a Star-Lord y Rocket).

a) Si Ship (The Milano en la película) mide 40 m de longitud propia en el sistema en el que Star-Lord está en reposo, encuentra la longitud de The Milano cuando se acerca a la Luna con velocidad $v_S = 0.8c$, donde c es la velocidad de la luz, encuentra la longitud de The Milano (Ship) para los observadores en reposo en la Luna (Groot, Gamora y Drax).

b) ¿Cuál será la longitud de la nave espacial de Rocket que observan el resto de los Guardianes, en la Luna, si la longitud propia de la nave de Rocket es de 10 m y se dirige hacia ella con velocidad $v_R = 0.6c$?

c) Encuentra la velocidad relativa con la que se mueven las naves de Star-Lord y Rocket en los siguientes casos: 1) se mueven en la misma dirección y sentido, 2) se mueven en la misma dirección pero en sentidos opuestos. (En ambos casos se mueven hacia la Luna).

EXTRA BONUS (1) : Star-Lord pone una cassette en su walk-man y envía una señal electromagnética a la Luna en ese momento que es monitoreada por sus amigos en la luna. En su sistema de referencia (según un reloj en la nave) dura 121 minutos la reproducción completa de la cassette, que es el tiempo que tarda en llegar a la Luna ($v_S = 0.8c$). ¿Cuánto dura la reproducción de esa cassette observada desde la Luna? ¿A qué distancia se encontraba de la Luna Star-Lord? Explica las medidas de espacio y tiempo desde los dos sistemas de referencia.

EXTRA BONUS (2): Rocket se pone a fabricar uno de sus artilugios mientras llega a la Luna. Envía una señal electromagnética que es monitoreada por sus amigos en la luna. En su sistema de referencia (según un reloj en la nave), tarda 180 minutos en acabar su nuevo bazooka láser y en llegar a la Luna ($v_R = 0.6c$). ¿Cuánto dura el proceso de fabricación del bazooka láser según los Guardianes en la Luna? ¿A qué distancia se encontraba Rocket de la Luna? Explica las medidas de espacio y tiempo desde los dos sistemas de referencia.

4. Cuestión 3A: El lado oscuro del Universo y los límites extremos de la densidad

A) La denominada energía oscura tiene una densidad equivalente de materia de $6.91 \cdot 10^{-27} \text{kg/m}^3$, lo que la convierte en la sustancia con menor densidad conocida. Constituye un 70 % del Universo, aproximadamente. Calcula cuánto de grande debería ser una bola o esfera de energía oscura para que tuviera la misma masa que 10kL de agua pura. Compara el radio obtenido con el radio de la Tierra (6370km).

B) La denominada materia oscura, que no sabemos lo que es, tiene una densidad media en el universo de 0.3GeV/cm^3 . Expresa esta densidad en unidades de kg/m^3 . Calcula cuánto de grande debería ser una bola o esfera de materia oscura para que tuviera la misma masa que 10kL de agua pura. Compara el radio obtenido con el radio de la Tierra (6370km). Dato: $1 \text{eV}(\text{electrón-voltio}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}$ ($1 \text{J} = 1 \text{julio}$)

C) En el lado opuesto, densidades altas, tenemos que la densidad media de un núcleo es habitualmente $2.0 \cdot 10^{17} \text{kg/m}^3$. Si una estrella como el Sol tuviera dicha densidad, típica de objetos llamados estrellas de neutrones; cuál sería su radio en km? Compara ese valor con el radio de la Tierra y el radio ecuatorial del Sol, 696000km. Dato: la masa solar es $1.99 \cdot 10^{30} \text{kg}$.

D) El caso de densidad más extremo y más alto, en cuyas cercanías se encuentre la frontera de la aplicabilidad de las leyes de la Física y Química, se llama densidad de Planck. Corresponde a la densidad que tendría un objeto con masa de Planck dividido (en el caso de objetos de 3 dimensiones) entre el cubo de la longitud más pequeña concebible, denominada longitud de Planck. La masa de Planck M_P y la longitud de Planck L_P vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

$$L_P = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}}$$

donde $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, $\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ y $c = 299792458 \text{m/s}$. Calcula el valor numérico de las cantidades anteriores, así como la densidad de Planck (cociente de la masa de Planck y el cubo de la longitud de Planck) en unidades del S.I. (kg/m^3). Expresa esta densidad como densidad de energía $d_E = E/V$, usando la relación $E = mc^2$, y escribiendo el resultado en unidades GeV/cm^3 .

Curiosidad: se piensa que, si la teoría de (super)cuerdas y (super)p-branas es cierta (o también la gravitación cuántica de bucles, Loop Quantum Gravity), las dimensiones de estos objetos (o de los loops del espaciotiempo en LQG) son muy pequeñas, del orden de la longitud de Planck, incluso algunas dimensiones podrían ser “grandes”, aunque no mayores que unos pocas décimas de milímetros o micrómetros, pero no se han observado dichas dimensiones; o hasta se especula qué pasa a esas escalas de longitudes, masas y densidades con hipótesis actualmente difícilmente verificables aún más fantásticas. Por eso la teoría de cuerdas (o teoría M en su versión más moderna, que incluye membranas de 2 y 5 dimensiones espaciales en un espaciotiempo de 11 dimensiones) tiene sus críticos, como en otra época se criticaba la teoría del calórico o el éter luminífero. Realmente, no sabemos mucho ahí, dado que la distancia más pequeña explorada por un acelerador de partículas es de 0.1 zm, que es aún mucho mayor que la longitud de Planck (si has hecho el ejercicio, sabrás cuánto mayor es).

5. Cuestión 1B: la densidad de Planck y la densidad de microobjetos en el hiperespacio

El caso de densidad más extremo y más alto de densidad, en cuyas cercanías se encuentre la frontera de la aplicabilidad de las leyes de la Física y Química conocidas, se llama densidad de Planck. Corresponde a la densidad que tendría un objeto con masa de Planck dividido (en el caso de objetos de 3 dimensiones) entre el cubo de la longitud más pequeña concebible, denominada longitud de Planck. La masa de Planck M_P y la longitud de Planck L_P vienen definidas por las siguientes fórmulas:

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad L_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

donde $G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, $\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34} Js$ y $c = 299792458 m/s$.

A) Calcula el valor numérico de las cantidades anteriores, así como la densidad de Planck (cociente de la masa de Planck y el cubo de la longitud de Planck) en unidades del S.I. (kg/m^3). Expresa esta densidad como densidad de energía $d_E = E/V$, usando la relación $E = mc^2$, y escribiendo el resultado en unidades GeV/cm^3 .

B) Calcula el volumen de una cubo 3D con arista igual a la longitud de Planck con 3 cifras significativas. Calcula el valor de la densidad de Planck en 12D, 13D, 15D, 16D, y 91D, dividiendo la masa de Planck entre la doceava, treceava, quinceava, dieciseisava y 91-ava potencia de la longitud Planck (cuidado con las unidades y las operaciones; los hipercubos tienen volumen $V = L^D$).

C) La masa del Sol es aproximadamente $2 \cdot 10^{30} kg$. ¿Qué tamaño (radio) debería tener el Sol, considerado una esfera perfecta, para que tuviera una densidad igual a la densidad de Planck? Compara ese valor con el radio del Sol, 695000 km, indicando cuántas veces más grande o pequeño es en notación científica.

D) En el límite de lo muy pequeño, están las partículas subatómicas. Si todas las partículas subatómicas fueran en realidad vibraciones de una membrana (hiper)esférica (llamadas p-branas) de, por ejemplo, 12, 13, 15, 16 ó 91 dimensiones, con un radio dado, podemos calcular el radio correspondiente usando $d = m/V(D)$, y el valor de la densidad de Planck. Supongamos que el volumen de las hiperesferas de radio R en espacios de 12, 13, 15, 16 y 91 dimensiones, valen exacta y respectivamente:

$$V(12) = \frac{\pi^6 R^{12}}{720} \quad V(13) = \frac{128\pi^6 R^{13}}{135135} \quad V(15) = \frac{256\pi^7 R^{15}}{2027025} \quad V(16) = \frac{\pi^8 R^{16}}{40320}$$

$$V(91) = \frac{70368744177664\pi^{45} R^{91}}{32122956998390482494366629620388019345854961856039062186274778466796875} \approx 5.15595 \cdot 10^{-35} R^{91}$$

donde π es el número pi y supongamos que un electrón, de masa $9.11 \cdot 10^{-31} kg$, fuera un objeto tipo p-brana con densidad de Planck (la has calculado en la parte A, en estas dimensiones), calcula el radio que tendría la hipotética entidad hiperesférica responsable de la masa del electrón en dimensiones (12, 13, 15, 16 y 91). ¿Qué opinas del resultado? XD...

Curiosidad: la hiperesfera en 4096 dimensiones tiene un volumen igual aproximadamente a

$$V(4096) = 8.70008138919055 \cdot 10^{-4877} R^{4096}$$

y la fracción que da el número delante de R^{4096} no cabe en esta hoja...

6. Cuestión 2B: El protón fundido y el plasma de quarks y gluones

A) El Universo ha sufrido a lo largo de su historia un enfriamiento cósmico. Cuando era muy joven había un plasma muy caliente cuya temperatura se puede calcular. Ese plasma estaba formado por los constituyentes de los protones, que aparecen cuando éstos tienen una energía cinética media por partícula de 938MeV . Usando la ecuación de Boltzmann, halla la temperatura del Universo (sale un número grande...). Datos: constante de Boltzmann $1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$. Compara el valor obtenido con la temperatura en la superficie del Sol (6000K) y en su interior (unos 2 millones de grados kelvin). Dato: $1 \text{eV}(\text{electrón-voltio})=1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}$ ($1\text{J}=1 \text{julio}$)

B) Calcula lo mismo que el apartado anterior, pero si la ecuación de Boltzmann es $E_c = \frac{3}{2}k_B T$

C) Si la masa de un protón es de $1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ y la energía cinética fuera $\frac{1}{2}mv^2$, calcula la velocidad de los constituyentes del protón a la temperatura calculada en A) ó B). Compara ese valor con la velocidad de la luz, 299792458m/s . ¿Qué observas en el resultado?

D) Realmente, según la teoría de la relatividad especial, no se puede usar la energía cinética que has usado sino la expresión aproximada siguiente para el caso de nuestro “protón fundido”:

$$E_c(\text{rel}) = \frac{938 \text{MeV}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz. Para la temperatura dada, calcula la velocidad de los subconstituyentes del protón fundido.

Curiosidad. :) Estudiar este estado de la materia es importante para comprender el Universo hace miles de millones de años, la estructura de algunos tipos de estrellas (algunas aún por descubrir) e incluso no se comprende NADA la mayoría de las propiedades que tiene con las mejores teorías que tenemos para explicarlo. El plasma de quark y gluones se ha estudiado en el RHIC y en el LHC.

7. Cuestión 3B: El Modelo Estándar

Este ejercicio intenta relacionar el contenido de partículas del Modelo Estándar y los diagramas de Feynman con su estructura abstracta, definida por el siguiente lagrangiano:

$$\begin{aligned}
L_{SM} = & -\frac{1}{2}\partial_\nu g_\mu^a \partial_\nu g_\mu^a - g_s f^{abc} \partial_\mu g_\nu^a g_\mu^b g_\nu^c - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g_\mu^b g_\nu^c g_\mu^d g_\nu^e + \frac{1}{2}ig_s^2 (\bar{q}_i^\sigma \gamma^\mu q_j^\sigma) g_\mu^a + \bar{G}^a \partial^2 G^a + \\
& g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{G}^a G^b g_\mu^c - \partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2}\partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \\
& \frac{1}{2}m_h^2 H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2 \phi^+ \phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \frac{1}{2c_w^2} M \phi^0 \phi^0 - \beta_h \left[\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g} H + \frac{1}{2}(H^2 + \phi^0 \phi^0 + 2\phi^+ \phi^-) \right] + \\
& \frac{2M^4}{g^2} \alpha_h - igc_w [\partial_\nu Z_\mu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - Z_\nu^0 (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + Z_\mu^0 (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - \\
& ig_s w [\partial_\nu A_\mu (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - A_\nu (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + A_\mu (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - \\
& \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- W_\nu^+ W_\nu^- + \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\mu^- W_\nu^+ + g^2 c_w^2 (Z_\mu^0 W_\mu^+ Z_\nu^0 W_\nu^- - Z_\mu^0 Z_\nu^0 W_\mu^+ W_\nu^-) + g^2 s_w^2 (A_\mu W_\mu^+ A_\nu W_\nu^- - \\
& A_\mu A_\nu W_\mu^+ W_\nu^-) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z_\nu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - 2A_\mu Z_\mu^0 W_\nu^+ W_\nu^-] - g\alpha [H^3 + H\phi^0 \phi^0 + 2H\phi^+ \phi^-] - \\
& \frac{1}{8}g^2 \alpha_h [H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+ \phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2 \phi^+ \phi^- + 4H^2 \phi^+ \phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2] - gM W_\mu^+ W_\mu^- H - \frac{1}{2}g \frac{M}{c_w^2} Z_\mu^0 Z_\mu^0 H - \\
& \frac{1}{2}ig [W_\mu^+ (\phi^0 \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^0) - W_\mu^- (\phi^0 \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^0)] + \frac{1}{2}g [W_\mu^+ (H \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu H) - W_\mu^- (H \partial_\mu \phi^+ - \\
& \phi^+ \partial_\mu H)] + \frac{1}{2}g \frac{1}{c_w} (Z_\mu^0 (H \partial_\mu \phi^0 - \phi^0 \partial_\mu H) - ig \frac{s_w^2}{c_w} M Z_\mu^0 (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + ig_s w M A_\mu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - \\
& ig \frac{1-2c_w^2}{2c_w} Z_\mu^0 (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + ig_s w A_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \frac{1}{4}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- [H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+ \phi^-] - \\
& \frac{1}{4}g^2 \frac{1}{c_w^2} Z_\mu^0 Z_\mu^0 [H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2 \phi^+ \phi^-] - \frac{1}{2}g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + W_\mu^- \phi^+) - \frac{1}{2}ig^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 H (W_\mu^+ \phi^- - \\
& W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - g^2 \frac{s_w}{c_w} (2c_w^2 - \\
& 1) Z_\mu^0 A_\mu \phi^+ \phi^- - g^1 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+ \phi^- - \bar{e}^\lambda (\gamma \partial + m_e^\lambda) e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda \gamma \partial \nu^\lambda - \bar{u}_j^\lambda (\gamma \partial + m_u^\lambda) u_j^\lambda - \bar{d}_j^\lambda (\gamma \partial + m_d^\lambda) d_j^\lambda + \\
& ig_s w A_\mu [- (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu e^\lambda) + \frac{2}{3}(\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu u_j^\lambda) - \frac{1}{3}(\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu d_j^\lambda)] + \frac{ig}{4c_w} Z_\mu^0 [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (4s_w^2 - 1 - \gamma^5) e^\lambda) + \\
& (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (\frac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5) u_j^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu (1 - \frac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5) d_j^\lambda)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) e^\lambda) + (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (1 + \\
& \gamma^5) C_{\lambda\kappa} d_j^\kappa)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^- [(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{d}_j^\kappa C_{\lambda\kappa}^\dagger \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u_j^\lambda)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \frac{m_e^\lambda}{M} [-\phi^+ (\bar{\nu}^\lambda (1 - \gamma^5) e^\lambda) + \\
& \phi^- (\bar{e}^\lambda (1 + \gamma^5) \nu^\lambda)] - \frac{g}{2} \frac{m_e^\lambda}{M} [H (\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0 (\bar{e}^\lambda \gamma^5 e^\lambda)] + \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ [-m_d^\kappa (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) d_j^\kappa) + m_u^\lambda (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda\kappa} (1 + \\
& \gamma^5) d_j^\kappa) + \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- [m_d^\lambda (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda\kappa}^\dagger (1 + \gamma^5) u_j^\kappa) - m_u^\kappa (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda\kappa}^\dagger (1 - \gamma^5) u_j^\kappa) - \frac{g}{2} \frac{m_u^\lambda}{M} H (\bar{u}_j^\lambda u_j^\lambda) - \frac{g}{2} \frac{m_d^\lambda}{M} H (\bar{d}_j^\lambda d_j^\lambda) + \\
& \frac{ig}{2} \frac{m_u^\lambda}{M} \phi^0 (\bar{u}_j^\lambda \gamma^5 u_j^\lambda) - \frac{ig}{2} \frac{m_d^\lambda}{M} \phi^0 (\bar{d}_j^\lambda \gamma^5 d_j^\lambda) + \bar{X}^+ (\partial^2 - M^2) X^+ + \bar{X}^- (\partial^2 - M^2) X^- + \bar{X}^0 (\partial^2 - \frac{M^2}{c_w^2}) X^0 + \\
& \bar{Y} \partial^2 Y + igc_w W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{X}^0 X^- - \partial_\mu \bar{X}^+ X^0) + ig_s w W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{Y} X^- - \partial_\mu \bar{X}^+ Y) + igc_w W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- X^0 - \\
& \partial_\mu \bar{X}^0 X^+) + ig_s w W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- Y - \partial_\mu \bar{Y} X^+) + igc_w Z_\mu^0 (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu \bar{X}^- X^-) + ig_s w A_\mu (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \\
& \partial_\mu \bar{X}^- X^-) - \frac{1}{2}gM [\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \frac{1}{c_w^2} \bar{X}^0 X^0 H] + \frac{1-2c_w^2}{2c_w} igM [\bar{X}^+ X^0 \phi^+ - \bar{X}^- X^0 \phi^-] + \\
& \frac{1}{2c_w} igM [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + igM s_w [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + \frac{1}{2}igM [\bar{X}^+ X^+ \phi^0 - \bar{X}^- X^- \phi^0]
\end{aligned}$$

a) Interpretar el significado de cada sumando del lagrangiano con un término de interacción, uno dinámico o un diagrama de Feynman.

b) Explicar las diferencias de este lagrangiano con el simplificado, versión camiseta-friqui, que se ve en ocasiones:

$$L_{SM} = L_\psi + L_{gauge} + L_Y + L_{Higgs}$$

con $L_\psi = i\bar{\Psi} \not{D} \Psi + h.c.$, $L_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $L_Y = Y_{ij} \phi \bar{\Psi}_i \Psi_j + h.c.$ y $L_{Higgs} = |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$ donde $V(\phi) = -\mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$.

8. Cuestión 1C: El planeta X, Thelistos, Tyche, . . . Y la sonda New Horizons

Es el ejercicio del planeta X, repartido en clase:

a) Recientemente, se anunció que el cuerpo denominado VP113 es un nuevo planeta enano del sistema solar. Si su período es de 4300 años, calcula, usando la tercera ley de Kepler, su distancia media al Sol (semieje mayor de la elipse). Halla su velocidad orbital. Si su perihelio está en un punto situado a 80 AU y su afelio a 449 AU (AU=astronomical units), halla la relación entre las velocidades de VP113 en el perihelio y en el afelio.

b) La existencia de VP113, la naturaleza de su órbita, y la del objeto transneptuniano llamado Sedna ha vuelto a poner en el candelero la teoría del planeta X (PX, Tyche, Thelistos), un recóndito y masivo planeta que estaría oculto en la lejana nube de Oort, en los confines del Sistema Solar conocido. Calcular, la fuerza con la que el PX perturbaría la órbita de Neptuno en los siguientes casos (suponiendo órbitas circulares) y compararla con la fuerza que sobre Neptuno ejerce el Sol en su órbita:

1) $M(\text{PX})=5M(\text{J})$ (masa del planeta X, 5 veces la masa de Júpiter), a 60000 AU del Sol.

2) $M(\text{PX})=10M(\text{T})$ (masa del planeta X, 10 veces la masa de la Tierra), a 6000 AU del Sol.

Datos: $M(\text{J}) = 1.898 \cdot 10^{27}\text{kg}$, $M(\text{T}) = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $M(\text{Neptune}) = 1.024 \cdot 10^{26}\text{kg}$, $d(\text{Neptune} - \text{Sol}) = 4.503 \cdot 10^9\text{km}$, $1\text{AU}=149597871\text{km}$. $M(\text{sun}) = 1.99 \cdot 10^{30}\text{kg}$.

c) La sonda New Horizons llegará al planeta enano Plutón en 2015. La sonda tiene una masa de 478 kg. Calcula la velocidad orbital en torno a Plutón cuando $r = 10R_{\text{Pluto}}$. Calcula la fuerza de la gravedad entre la New Horizons y la Tierra, comparando dicha fuerza con la fuerza ejercida por Plutón sobre la misma sonda. Datos: Masa de Plutón $M_{\text{Pluto}} = 1.31 \cdot 10^{22}\text{kg}$, Radio de Plutón $R_{\text{Pluto}} = 1184\text{km}$.

9. **¿Cuestión 2C: La tercera ley de Kepler, satélites y materia oscura**

La tercera Ley de Kepler, tiene mucha importancia para los objetos tipo satélite que orbitan planetas o satélites del Sistema Solar. Dos de los cuerpos más interesantes del Sistema Solar, en especial porque son candidatos a tener algún tipo de actividad biológica bajo sus superficie son Marte y Europa (luna de Júpiter). Calcula:

- a) Período de un satélite que fuera “geoestacionario” en Marte y en Europa. ¿Depende el resultado de la masa del satélite? ¿Y de la masa del planeta? ¿Y del radio del planeta? ¿Y del radio orbital de Marte alrededor del Sol o de Europa alrededor de Júpiter? Razona las respuestas (pero sé breve).
- b) Halla la velocidad orbital de esos satélites, “Marteestacionario” y “Europaestacionario”.
- c) Compara las velocidades de rotación de los satélites en función de la distancia al centro del planeta con las velocidades de rotación de las galaxias que prueban la existencia de materia oscura. ¿Cumplen las curvas de rotación galácticas las leyes de Kepler?

10. Cuestión 3C: La tercera ley de Kepler y los Universos paralelos multidimensionales

Se puede derivar la tercera ley de Kepler usando la igualdad de la fuerza centrípeta con la fuerza gravitacional en 3 dimensiones. En un extraño y maravilloso Universo paralelo, la ley de gravitación no es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, sino una ley del siguiente tipo:

$$F(r) = G_N(D) \frac{Mm}{r^D}$$

donde D está relacionada con las dimensiones del espacio.

- Usando el mismo planteamiento que el usado en clase para “deducir” la tercera ley de Kepler mediante la Ley de Gravitación universal, calcula una expresión que relacione el cuadrado del período de las órbitas circulares inducidas por la gravedad en este universo paralelo con la masa, la constante de gravitación universal en D dimensiones $G_N(D)$, r y la dimensión D.
- ¿Cuál sería el valor de la energía potencial gravitatoria en tal Universo y a qué potencia está elevada r, la distancia que separa el observador del objeto gravitante?
- ¿A qué potencia es proporcional la velocidad orbital en dicho Universo paralelo? Halla la velocidad de escape de un objeto con masa M en este Universo multidimensional.
- El caso en que D=1 está relacionado con el Universo llamado “Planilandia”. ¿Cómo sería la expresión en Planilandia de la energía potencial gravitatoria? ¿Y la velocidad de escape y orbital de un objeto que viviera en Planilandia? Representa gráfica pero cualitativamente las velocidades orbitales en los casos D=1, D=2 (lo mencioné en clase), D=8, D=10, D=11, $D = \infty$. Comenta el resultado.
- ¿Qué relación encuentras entre D y el número de dimensiones del espacio? Pista: Pensar por qué he llamado Planilandia al caso D=1; D=2 corresponde al caso usual newtoniano.

11. Cuestión 1D: La masa y energía del Universo

A) La expresión matemática para el contenido de masa del Universo depende de una serie de constantes fundamentales de la Física, a partir de la relación:

$$M_U = \rho_U V_U = \frac{3}{8} \left(\frac{H^2}{\pi G} \right) \left(\frac{4\pi c^3}{3H^3} \right) \rightarrow \boxed{M_U = \frac{c^3}{2GH}}$$

en donde los valores de las constantes son $c = 299792458 \text{ m/s}$, $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ y $H = 67.8 \text{ km/s/Mpc}$, siendo km el kilómetro, s es segundo y Mpc es megapársec (una unidad de distancia usada en Astronomía, Astrofísica y Cosmología). Sabiendo esos datos, y la equivalencia del megaparsec en unidades del S.I. $1 \text{ Mpc} = 3.0857 \cdot 10^{22} \text{ m}$, insertando los valores de G y c dados, y **expresando H en unidades del sistema internacional**, calcula la masa del Universo (M_U) en kilogramos, indicando la precisión del resultado final.

B) La masa tiene un equivalente en energía dada por la celeberrima ecuación de Einstein, $E = mc^2$. Aplicada a nuestro Universo, la energía del mismo es igual a $E_U = M_U c^2$, o bien, usando la ecuación anterior:

$$E_U = M_U c^2$$

o bien

$$E_U = \frac{c^5}{2GH}$$

en donde si expresamos todas las unidades en el S.I., hallaremos la energía del Universo en julios (J). **Calcula dicha energía y exprésala en ergios** ($1 \text{ ergio} = 10^{-7} \text{ J}$).

12. Cuestión 2D: La radiación de Hawking

A) Stephen William Hawking, popularmente conocido S.W. Hawking, se hizo famoso por su descubrimiento o hallazgo teórico de la radiación térmica (y electromagnética) emitida por los denominados agujeros negros (estrellas con gran masa “colapsadas” bajo la acción de la fuerza de gravedad, y que se describen en la teoría gravitacional de Einstein de una forma matemática complicada). Desde entonces, la esta radiación se denomina radiación de Hawking, y en síntesis, dice que todos los agujeros negros tienen una determinada temperatura, también llamada temperatura de Hawking, en su honor. La fórmula matemática de la temperatura de Hawking es:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}$$

y donde T es la temperatura en grados kelvin si las constantes son $\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34} J \cdot s$, $c = 299792458 m/s$, $\pi = 3.14$, $G = 6.673 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, y la constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$. Con estos valores, sabiendo que la masa de nuestro sol es $1.99 \cdot 10^{30} kg$, usando la fórmula, **calcula la temperatura (en K) de nuestro sol sustituyendo los valores en la fórmula (temperatura que tendría si se convirtiera en un agujero negro), indicando la precisión obtenida.**

B) El otro descubrimiento respecto a los agujeros negros de Hawking es que al ir radiando térmicamente, se “evaporan”. El tiempo que tardan en evaporarse (hasta donde llegan nuestros conocimientos actuales), viene dado por la expresión:

$$t = \frac{5120\pi G^2 M^3}{\hbar c^4}$$

Usando los valores dados de esos números y constantes, **halla el tiempo en segundos necesario para que se evapore un agujero negro de masa solar** (la masa del sol se indica en el apartado anterior), **y pasa ese resultado a años**, dando el resultado final con dos cifras significativas. **Compara dicho resultado con la edad actual del Universo observable conocido** (unos 14 mil millones de años).

13. Cuestión 3D: La ley de Hubble y la expansión cósmica

A) La ley de Hubble representa la velocidad de recesión galáctica debida a la aceleración universal. Generalmente, se expresa mediante la ecuación:

$$V = Hd$$

Para un valor del parámetro de Hubble de 68 km/s/Mpc , donde Mpc es megaparsec, hallar la velocidad de recesión de: un objeto situado a 1 año luz, 0.1 Mpc, 10 Mpc, 1 Gpc, 1 Tpc.

B) Para distancias mayores que el llamado radio de Hubble, los objetos receden a velocidad mayor que la de la luz. El radio de Hubble se calcula mediante la expresión

$$R_H = \frac{c}{H}$$

Calcula el valor del radio de Hubble si H vale 50, 70 y 100 km/s/Mpc.

Curiosidad: realmente, la constante de Hubble no es “constante” sino un parámetro que depende del redshift. Es una constante sólo en el espacio, no en el tiempo, y el radio de la esfera de Hubble puede aumentar o disminuir en el tiempo.