2° *Bachillerato* : Formulario de Física

The Strange Doctor
☯

Multiverse of Madness

Parte 0. Herramientas fismáticas.

Vector en el espacio 3d: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$.

Producto escalar: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Vector unitario: $\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$. $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$.

Proyección:

$$\mathrm{Proy}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{1}$$

Cosenos directores:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{2}$$

Producto vectorial:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} = -\vec{b}\times\vec{a} \tag{3}$$

Módulo del producto vectorial: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = A_{\square}(\vec{a}, \vec{b})$. Identidad de Lagrange: $a^2b^2 = (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + (\vec{a}\times\vec{b})^2$.
$\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$.
Desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \tag{4}$$

Velocidad y aceleración medias

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{5}$$

Velocidad y aceleración instantáneas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración:

$$\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2 \tag{7}$$

Magnitudes angulares medias e instantáneaes (MCU, MCUA):

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{8}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{9}$$

Relación entre magnitudes lineales y angulares en el MCU:

$$s = \varphi R \quad v = \omega R \quad a_t = \alpha R \tag{10}$$

Aceleración total en un MCUA:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\alpha^2R^2 + (\omega^2R)^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{11}$$

Ecuaciones del MRU:

$$\Delta x = v\Delta t \quad x = x_0 + v(t - t_0) \quad v = cte. \quad a = 0 \tag{12}$$

Ecuaciones del MRUA:

$$\Delta x = x - x_0 = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \quad v = v_0 + a\Delta t \quad a = cte. \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \tag{13}$$

Ecuaciones del MCU:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \quad \varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) \quad \omega = cte. \quad \alpha = 0 \tag{14}$$

Ecuaciones del MCUA:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t \quad \alpha = cte. \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\varphi \tag{15}$$

Momento lineal, cantidad de movimiento, ímpetu, impulso:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{16}$$

Momento angular, momento cinético:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{17}$$

Momento o torque de una fuerza:

$$\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{18}$$

Fuerza media e instantánea:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{19}$$

Segunda ley de Newton de la Dinámica:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \tag{20}$$

Tercera ley de Newton: $\vec{F}(i \to j) = -\vec{F}(j \to i)$.
Ley fundamental de la Dinámica de rotación:

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} \tag{21}$$

Energía/trabajo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \to W(A \to B) = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{22}$$

Energía cinética (no relativista):

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{23}$$

Energía potencial (fuerzas conservativas):

$$\vec{F} = -\nabla E_p \quad \vec{F} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta r}\vec{u}_r \tag{24}$$

Energía potencial gravitacional, energía potencial eléctrica, energía potencial elástica:

$$E_p(g) = -G\frac{Mm}{r} \approx mgh \quad E_p(el) = K_C\frac{Qq}{r} \quad E_p(e) = \frac{k\Delta x^2}{2} \tag{25}$$

Energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$. Potencia: $P = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
Teorema de la energía mecánica(fuerzas conservativos solamente):

$$\Delta E_m = 0 \to E_m = constante \tag{26}$$

Teorema de la energía mecánica generalizado:

$$\Delta E_m = W(F_r) \tag{27}$$

$F_r = \mu N$ es la fuerza de rozamiento (estática o dinámica). El peso es $\vec{P} = m\vec{g}$. Fuerza centrípeta: $F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$. Momento de inercia:

$$I = mr^2 \tag{28}$$

Energía cinética de rotación:

$$E_c(rot) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega = \frac{L^2}{2I} \tag{29}$$

Centro de masas: $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$, $\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}$. $\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{\sum_i m_i}$. Volumen y área de la esfera: $V = \frac{4\pi}{3}R^3, A = 4\pi R^2 = \frac{dV}{dR}$.
Área del círculo y longitud de circunferencia: $A = \pi R^2, L = 2\pi R = \frac{dA}{dR}$.
Volumen del cilindro: $V = A_b h = \pi R^2 h$. Volumen del prisma recto: $V = abc$. Volumen del cubo: $V = L^3$.
Densidad volúmica (superficial y lineal) de masa: $\rho = \frac{M}{V}$. $\sigma = \frac{M}{S}$, $\lambda = \frac{M}{L}$.
Densidad volúmica (superficial y lineal) de carga: $\rho = \frac{Q}{V}$. $\sigma = \frac{Q}{S}$, $\lambda = \frac{Q}{L}$.
Densidad volúmica (superficial y lineal) de número de partículas: $\rho = \frac{N}{V}$. $\sigma = \frac{N}{S}$, $\lambda = \frac{N}{L}$.
Choques elásticos: conservación de $\vec{p}$ y E_c. Choques inelásticos: conservación de $\vec{p}$.
Giros: conservación del momento angular $\vec{L}$. Fuerzas de rozamiento en medios fluídicos: $\vec{F} = -kv^n\vec{u}_v$.
Ley de Hooke: $\vec{F} = -k\Delta\vec{r}$. Repulsión cósmica del vacío(energía oscura): $\vec{F} = +\Lambda\Delta\vec{r}$.
Ley de Hubble: $v = Hd$. $t_U = \frac{1}{H}, R_U = ct_U = \frac{c}{H}, \rho_c(U) = \frac{3H^2}{8\pi G}, M_U = \frac{c^3}{2GH}, E_U = \frac{c^5}{2GH}$.
Nabla en coordenadas rectangulares o cartesianas: $\nabla = \partial_x\vec{i} + \partial_y\vec{j} + \partial_z\vec{k} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$
Gradiente, divergencia y rotacional de campos $f(\vec{r}), \vec{v}(\vec{r}), \vec{F}(\vec{r})$:
$\mathrm{grad}f = \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$. $\mathrm{div}\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.
$\mathrm{rot}\vec{F} = \mathrm{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$. Laplaciano: $\nabla\cdot\nabla f = \nabla^2 f = \mathrm{div}(\mathrm{grad})f$. $\mathrm{rotgrad}f = \nabla\times\nabla f = \vec{0}$. $\mathrm{div}(\mathrm{rot})\vec{F} = \nabla\cdot\nabla\times\vec{F} = 0$.
D'Alembertiano(operador de ondas): $\Box\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi(x^\mu) = \left(-c^{-2}\partial_t^2 + \partial_i^2\right)\phi(x,t)$.

Parte 1. Campos.

Ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_N = -G_N \frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r \tag{30}$$

Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_C = K_C \frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r \tag{31}$$

Campo gravitacional:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_N}{m} = -G_N \frac{M}{r^2}\vec{u}_r \tag{32}$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q} = K_C \frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r \tag{33}$$

Principio de superposición:

$$\vec{g}(P) = -G_N \sum_i \frac{M_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} \tag{34}$$

$$\vec{E}(P) = K_C \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} \tag{35}$$

Variación del campo gravitacional con la altura:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G_N \frac{M}{(R_p+h)^2}\vec{u}_r \tag{36}$$

Energía potencial gravitacional:

$$E_p(g) = -\frac{G_N Mm}{r} \approx mgh \quad \vec{F} = -\nabla E_p(g) \tag{37}$$

Energía potencial eléctrica:

$$E_p(e) = \frac{K_C Qq}{r} \quad \vec{F} = -\nabla E_p(e) \tag{38}$$

Potencial gravitacional:

$$V_g(P) = -G_N \frac{M}{r} = -\int_\infty^P \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad V_g = \frac{E_p}{m} \quad \vec{g} = -\nabla V_g \tag{39}$$

Potencial eléctrico:

$$V_e(P) = K_C \frac{Q}{r} = -\int_\infty^P \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad V_e = \frac{E_p(e)}{q} \quad \vec{E} = -\nabla V_e \tag{40}$$

Principio de superposición para el potencial:

$$V_g(P) = \sum_i V_i(P) = -G_N \sum_i \frac{M_i}{r_i} \quad V_e(P) = \sum_i V_i(P) = K_C \sum_i \frac{Q_i}{r_i} \tag{41}$$

Trabajo externo para transportar partícula de masa m o carga q desde A hasta B:

$$W_g(A \to B) = m\Delta V = m(V_B - V_A) \quad W_e(A \to B) = q\Delta V = q(V_B - V_A) \tag{42}$$

Trabajo del campo para transportar partícula de masa m o carga q desde A hasta B:

$$W_g(A \to B) = -m\Delta V = m(V_A - V_B) \quad W_e(A \to B) = -q\Delta V = q(V_A - V_B) \tag{43}$$

Leyes de Kepler:

$$r(\varphi) = \frac{\mathcal{P}}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}, \quad V_A = \frac{dA}{dt} = \frac{vR}{2} = \frac{L}{2m} = constante, \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \tag{44}$$

Velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{45}$$

Velocidad de escape ($E_m = 0$):

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{r}} \tag{46}$$

Energía de satelización:

$$E_s = G_N M_p m_s \left(\frac{1}{R_p+h_0} - \frac{1}{2(R_p+h)}\right) \tag{47}$$

Satélite geosíncrono (T igual al período del planeta orbitado):

$$r = R_p + h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \tag{48}$$

Energía gravitacional orbital y de transferencia orbital

$$E_m = E_c + E_p = constante = -\frac{G_N M m_s}{2r} = -\frac{1}{2}E_c = +\frac{1}{2}E_p \to \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) \tag{49}$$

Densidad y aceleración de la gravedad superficial de un planeta:

$$\rho_p = \frac{M_p}{V_p} \quad a_s = \frac{G_N M_p}{R_p^2} \tag{50}$$

Densidad efectiva de un agujero negro de Schwarzschild con radio $R_S = \dfrac{2G_N}{c^2}$, masa M_{BH} y gravedad superficial κ_{BH}

$$\rho_{BH} = \frac{M_p}{V_p} = \frac{3c^6}{32\pi G_N^3 M_{BH}^2} \quad \kappa_{BH} = \frac{c^4}{4GM_{BH}} \tag{51}$$

Flujo de un campo vectorial $\vec{A}$:

$$d\phi = \vec{A}\cdot d\vec{S} \rightarrow \phi = \int_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S} \rightarrow \phi = \vec{A}\cdot\vec{S} = AS\cos\varphi \tag{52}$$

Teorema de Gauss del campo gravitacional:

$$\phi_g = \int_\Sigma \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G_N M_{in} \tag{53}$$

Teorema de Gauss del campo eléctrico:

$$\phi_e = \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi K_C Q_{in} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \tag{54}$$

Campo eléctrico (gravitacional) de la esfera uniforme de carga(masa):

$$\vec{E} = \begin{cases} K_C\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ K_C\dfrac{4\pi\rho r}{3}\vec{u}_r = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r, & \text{si } r < R \end{cases} \tag{55}$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -G_N\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ -G_N\dfrac{4\pi\rho r}{3}\vec{u}_r, & \text{si } r < R \end{cases} \tag{56}$$

Campo eléctrico (gravitacional) de la esfera hueca con carga uniforme de carga(masa) superficial:

$$\vec{E} = \begin{cases} K_C\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ \vec{0}, & \text{si } r < R \end{cases} \tag{57}$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -G_N\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ \vec{0}, & \text{si } r < R \end{cases} \tag{58}$$

Campo eléctrico del plano infinito de carga(masa), con densidad superficial uniforme(constante) σ:

$$\vec{E} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n = 2\pi K_C\sigma\vec{u}_n, & \text{si } z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n = -2\pi K_C\sigma\vec{u}_n, & \text{si } z < 0 \end{cases} \tag{59}$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -2\pi G_N\sigma\vec{u}_n, & \text{si } z > 0 \\ +2\pi G_N\sigma\vec{u}_n, & \text{si } z < 0 \end{cases} \tag{60}$$

Campo eléctrico (gravitacional) del hilo infinito de carga:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r = \frac{2\pi K_C\lambda}{r}\vec{u}_r \tag{61}$$

$$\vec{g} = -\frac{2\pi G_N\lambda_M}{r}\vec{u}_r \tag{62}$$

Energía potencial eléctrica(gravitacional) para la esfera, plano e hilo:

$$E_p(e) = \frac{K_C Qq}{r}, \quad E_p(e) = -\vec{E}\cdot\vec{\Delta x}, \quad E_p(e) = -\frac{\lambda_Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r = -2\pi\lambda_Q K_C\ln r \tag{63}$$

$$E_p(g) = -\frac{G_N Mm}{r}, \quad E_p(g) = -\vec{g}\cdot\vec{\Delta x}, \quad E_p(g) = 2\pi G_N\lambda_M\ln r \tag{64}$$

Energía potencial electrostática (gravitacional) total de una esfera de carga Q(masa M), densidad ρ y radio R:

$$U_e = \frac{3}{5}K_C\frac{Q^2}{R} = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} = \frac{16\pi^2 K_C\rho^2 R^5}{15} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} \tag{65}$$

$$U_g = -\frac{3}{5}G_N\frac{M^2}{R} = -\frac{16\pi^2 G_N\rho^2 R^5}{15} \tag{66}$$

Conductores conectados en equilibrio: $V_1 = V_2$.
Ley de Ohm: $V = IR$.
Asociación de resistencias en serie: $R_T = \sum_i R_i$. Asociación de resistencias en paralelo: $R_T^{-1} = \sum_i 1/R_i$.
Resistencia y resistividad: $R = \rho\dfrac{L}{A}$. La carga eléctrica viene en dos tipos (positiva y negativa), y está cuantificada, ya que $Q = Ne$, donde e es la carga elemental, que puede tomarse la del electrón o uno de los quarks de la primera familia con carga $+e/3$. La carga eléctrica ni se crea ni se destruye, solamente es transforma o fluye mediante corrientes entre cuerpos y sistemas materiales.

Campo magnético: $\vec{B}$.
Fuerza magnética de partícula de masa M, carga Q y velocidad $\vec{v}$:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{67}$$

Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{68}$$

Selector de velocidades:

$$F_e = F_m \rightarrow E = vB \tag{69}$$

Principio del ciclotrón:

$$F_c = F_m \rightarrow R = \frac{mv}{qB} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{70}$$

Ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{r} \times \vec{u}_r}{r^2} \rightarrow \vec{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{r} \times \vec{u}_r}{r^2} \tag{71}$$

Campo magnétido de un hilo infinito:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\varphi \tag{72}$$

Campo magnético de una espira circular de radio R en un punto de su centro:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2R}\vec{u}_\perp \tag{73}$$

Campo magnético de un solenoide recto, con $n = N/L$ espiras por unidad de longitud, en un punto de su eje:

$$\vec{B} = \mu_0\frac{n}{I} = \mu_0\frac{NI}{L} \tag{74}$$

Momento magnético de una espira:

$$\vec{m} = I\vec{S} \rightarrow \vec{\tau} = I\vec{S} \times \vec{B} \tag{75}$$

Ley de Ampère (circulación del campo magnético):

$$\Gamma(\vec{B}) = \int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{en} \tag{76}$$

Inducción electromagnética (ley de Faraday-Lenz):

$$\varepsilon = f.e.m. = -\frac{d\phi_m}{dt} \tag{77}$$

y donde $\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\varphi$ es el flujo del campo magnético. Para una espira rotatoria: $\varepsilon = BS\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$. Para un carril de anchura L con velocidad constante perpendicular al carril: $\varepsilon = BLv$. Para un carril que se mueve con MRUA de forma perpendicular, con anchura L y velocidad inicial v_0, se tiene que $\varepsilon = BL(v_0 + at)$.
Autoinducción: $\phi = LI$, $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$. Durante el siglo XIX se fundamentaron las leyes del electromagnetismo, en forma condensada en las denominadas ecuaciones de Maxwell: 1) Ley de Gauss del campo eléctrico, 2) Ley de Gauss del campo magnético, 3) Ley de Ampère generalizada, 4) Ley de Faraday-Lenz general. También se puede formular el electromagnetismo no solamente en el vacío sino en medios materiales. Así, hay ecuaciones de Maxwell macroscópicas y microscópicas.

Parte 2. MAS y ondas

Ecuación del MAS, para $k = m\omega^2$, movimiento oscilatorio proyección de un MCU:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \quad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0), \quad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{78}$$

Fuerza elástica: $F = -k\Delta x = -k(x - x_0)$. Las energías cinética, potencial y mecánica del oscilador:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{79}$$

Ondas armónicas (planas):

$$\Psi(x,t) = A\sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \tag{80}$$

Velocidad de propagación, frecuencia angular, número de onda, longitud de onda, período, frecuencia (relaciones útilese):

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \bar{k} = \frac{1}{\lambda} = \bar{\nu} \tag{81}$$

Velocidad y aceleración de vibración de la onda:

$$v_v = \frac{\partial\Psi}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad a_v = \frac{\partial v_v}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \tag{82}$$

Ecuación de onda:

$$\frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \tag{83}$$

Para ondas en cuerdas, acústicas y electromagnéticas (gravitacionales):

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad v_p = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{K_C}{K_m}} \tag{84}$$

Principio de superposición para ondas:

$$\Psi = \sum_i \Psi_i = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots + \Psi_n \tag{85}$$

Potencia de una onda: $P = IS$.
Potencia media e intensidad media de una onda armónica plana:

$$\overline{P} = 2\pi^2 \rho S v_p f^2 A^2 \qquad \overline{I} = 2\pi^2 \rho v_p f^2 A^2 \tag{86}$$

Ondas esféricas: $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{r_2^2}{r_1^2} = \dfrac{A_1^2}{A_2^2}$. Escala de decibelios (nivel de intensidad de una onda sonora):

$$\beta = dB = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{87}$$

donde $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ es la intensidad umbral.
Ley de absorción:

$$I = I_0 e^{-\beta x} \tag{88}$$

Principio de Huygens: Toda frente de onda es a su vez origen de fuentes secundarias de ondas.
Ondas estacionarias en una cuerda:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A\sin(\omega t - kx + \varphi_2) + A\sin(\omega t + kx + \varphi_2) = 2A\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \tag{89}$$

Vientres: $x_v(N) = \dfrac{N\lambda}{2}$. Nodos: $x_n(N) = \dfrac{\lambda}{2}\left(N + \dfrac{1}{2}\right)$.
Armónicos de ondas transversales en una cuerda de densidad lineal ρ, tensión T, longitud L_s y $v = \sqrt{T/\rho}$: $\lambda_n = \dfrac{2L_s}{n}$, $f_n = \dfrac{nv}{2L_s}$.
Ondas en tubos (o cuerdas extremos fijos/libres): $f_N = N f_1$. En el caso del tubo abierto solo por un extremo(cuerda 1 extremo libre solamente), $\lambda_N = \dfrac{4L_s}{2N+1}$, y $f_N = \dfrac{2N+1}{4L_s}v$.
Batido y modulación:

$$\Psi = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right) \tag{90}$$

donde las frecuencias de batido y modulación son $f_b = |f_1 - f_2|$, modulación $f_m = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$.
Ley de la reflexión:

$$\varphi_i = \varphi_r \tag{91}$$

Ley de la refracción (Snell):

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i} \tag{92}$$

Difracción por una rendija (Franhofer), mínimos: $a\sin\theta = n\lambda \to y_m \approx \dfrac{n\lambda D}{a}$.
Difracción por una doble rendija, máximos: $y_M \approx \dfrac{n\lambda D}{a}$.
Red de difracción(máximos): $d\sin\theta = m\lambda$, n entero.$d = 1/N$ es la constante de la red.
Efecto Doppler (variación de la frecuencia de observación de la onda según el movimiento relativo de fuente, source, y observador, observer):

$$f' = f \cdot \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right) \tag{93}$$

Parte 3. Óptica física y geométrica

Ley de la reflexión: $\varphi_i = \varphi_r$.
Ley de la refracción (Snell):

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i} \tag{94}$$

Dioptrios esféricos:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R} \tag{95}$$

Espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} \tag{96}$$

Espejos planos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 0 \tag{97}$$

Ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \tag{98}$$

Aumento lateral: $\beta_L = A_L = \dfrac{s'}{s}$. Para el dioptrio esférico, $A_L = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{ns'}{n's}$. Para el espejo esférico, $A_L = \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{s'}{s}$. Para el espejo plano, $A_L = 1$. Para la lente delgada, $A_L = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s}$.
Potencia de una lente o sistema óptico: $P = \dfrac{1}{f'}$, P en dioptrías si f' en metros.

Parte 4. Física moderna

Relatividad

Transformaciones de Lorentz (1d):

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = v/c \tag{99}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{100}$$

Momento relativista:

$$p = m\gamma v = mc\beta\gamma = mc\sinh\varphi \leftrightarrow \varphi = \sinh^{-1}\frac{p}{mc}, \quad \beta\gamma = \sinh\varphi \tag{101}$$

Energía relativista:

$$E = m\gamma c^2 = mc^2\cosh\varphi = mc^2\cosh\tanh^{-1}\beta \leftrightarrow \frac{E}{mc^2} = \gamma = \cosh\varphi = \cosh\tanh^{-1}\beta \leftrightarrow \varphi = \cosh^{-1}\frac{E}{mc^2} = \cosh^{-1}\gamma \tag{102}$$

Energía cinética relativista:

$$E_c(rel) = E - E_0 = E - mc^2 = (\gamma - 1)\,mc^2 \tag{103}$$

Relación de dispersión relativista:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \frac{pc}{E} = \beta = \frac{v}{c} = \tanh\varphi, \quad v = c\tanh\varphi = c\tanh\cosh^{-1}\frac{E}{mc^2} = c\tanh\sinh^{-1}\frac{p}{mc} \tag{104}$$

Diltación del tiempo: $\Delta t' = \gamma t$.
Contracción de longitudes: $L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-\beta^2}$.
Masa relativista: $M = m\gamma$.

Física cuántica

Ley de cuantización de la energía de Planck:

$$E = hf \tag{105}$$

Ley de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$hf = hf_0 + E_c(max) = W_0 + E_c(max) \tag{106}$$

Potencial de frenado: $V_f = \frac{W_0}{e} = \frac{hf_0}{e}$, o bien $V_f = \frac{h(f-f_0)}{e}$, si $v \neq 0$.
Longitud de de Broglie:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{107}$$

Para fotones, $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = hf$.
En el caso relativista:

$$\lambda(r, dB) = \frac{h}{p_r} = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\beta^2} \tag{108}$$

Principio de indeterminación de Heisenberg:

$$\Delta A\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|, \quad \Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{109}$$

Tiempo propio: $x^2 - c^2t^2 = -c^2\tau^2$.

Física nuclear y de partículas

Defecto de masa (átomo o núcleo):

$$\Delta m_a = M_f - M_0 = Zm_p + Nm_n + Zm_e - m_a \qquad \Delta M_N = Zm_p + Nm_n - m_N \tag{110}$$

Energía de enlace por nucleón:

$$\Delta E = \frac{\Delta mc^2}{A} \tag{111}$$

Ley de desintegración:

$$N(t) = N_0e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \qquad \text{o con la masa} \quad m(t) = m_0e^{-\lambda t} = m_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \tag{112}$$

Período de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau\ln 2 \tag{113}$$

donde τ es la vida media $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Modelo de la gota líquida: $R = R_0A^{1/3}$.
Actividad:

$$A(t) = \left|\frac{dN}{dt}\right| = A_0e^{-\lambda t} = A_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \tag{114}$$

y donde $A_0 = N_0\lambda$. Nótese que $n = \frac{M(g)}{MM}$ y que $N = nN_A$, luego $N = \frac{M(g)N_A}{MM}$, o bien $M(g) = \frac{N \cdot MM}{N_A}$.

Cosmología y Modelo Estándar

El Universo se expande, y se puede considerar como homogéneo e isótropo para todos los propósitos prácticas a muy grandes escalas. Para el Universo conocido, se tiene que la ley de expansión (modelo cosmológico estándar) sigue una métrica de Friedmann-Robertson-Walker. La expansión cósmica fue comprobada por E. Hubble y recibe su nombre en su honor.

Ley de Hubble y propiedades cósmicas: $v = Hd$. $t_U = \frac{1}{H}$, $R_U = ct_U = \frac{c}{H}$, $\rho_c(U) = \frac{3H^2}{8\pi G}$, $M_U = \frac{c^3}{2GH}$, $E_U = \frac{c^5}{2GH}$.
El Universo subatómico está gobernado por el llamado Modelo Estándar, que agrupa las partículas en bosones (portadores de fuerza) y materia (fermiones). Los fermiones son leptones y quarks. Los leptones son 6 (electrón, muón y tau, más sus antipartículas), y los quarks 6(up, down, charm, strange, top o truth, bottom o beauty). Además, los bosones son el fotón(electromagnetismo), gluón(interacción nuclear fuerte de color), bosones electrodébiles masivos W (W^+, W^-, tienen carga eléctrica), bosones electrodébiles masivos Z (sin carga eléctrica), y el llamado bosón de Higgs o dador de masa H_0. El Modelo Estándar es una teoría Yang-Mills cuántica no abeliana de 3 interacciones (2 a energía mayores que 100 GeV), el Modelo Cosmológico Estándar es una teoría cosmológica basada en la teoría de la Relatividad General (teoría relativista de la gravitación). No hay aún una teoría cuántica de la gravedad consistente verifidad experimentalmente exceptuando los modelos y teorías de cuerdas (testados a nivel teórico), o la gravitación cuántica de bucles (loop quantum gravity), ni una teoría unificada coherente de todas las interacciones no gravitacionalas a cualquier energía (GUT), o de todas las interacciones a todas las energías (TOE).

Ecuaciones condensadas de la TGR :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{115}$$

De estas ecuaciones se derivan las ecuaciones del Modelo Cosmológico Estándar, también denominadas ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - K\frac{c^2}{a^2} \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3}\Lambda c^2 - \frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \tag{116}$$

Ecuaciones condensadas del Modelo Estándar subatómico:

$$L_{SM} = i\overline{\Psi}\not{D}\Psi - \frac{1}{4}F^2 + g_Y\phi\overline{\Psi}\Psi + D_\mu\phi^+D^\mu\phi - V(\phi) + h.c. \qquad V(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4 = m_H^2H^2 + \lambda_3H^3 + \lambda_4H^4 \tag{117}$$