

M.A.S. y ondas

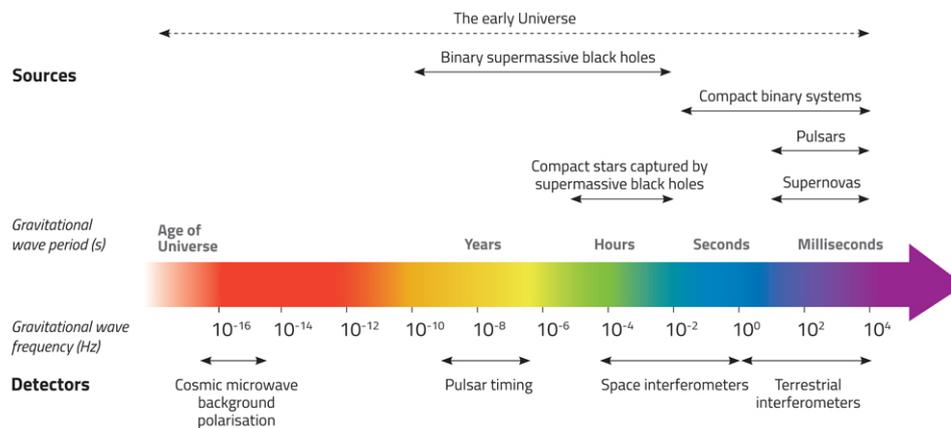
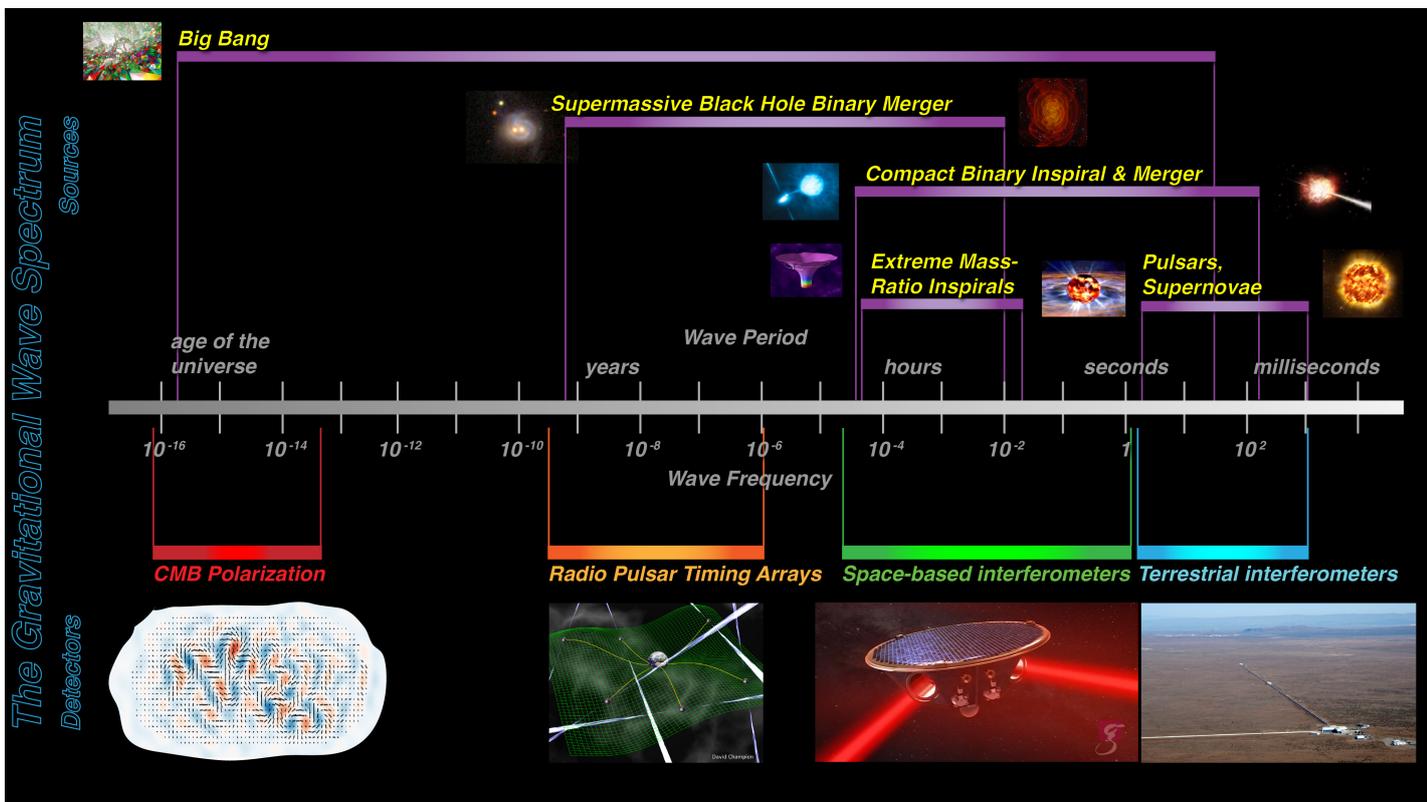
JFGH

Space-time Foundation & Quantum TimeLord Virtual Academy

Multiverse of Madness

Resumen

Resumen con \LaTeX en español de los temas de M.A.S. y movimiento ondulatorio(ondas).



Índice

1. M.A.S.	3
2. Movimiento ondulatorio y ecuaciones de onda	6
3. Ondas: propiedades y fenómenos	8
3.1. Velocidad y aceleración de vibración	8
3.2. Energía en ondas armónicas	8
3.3. Velocidades de propagación en medios	10
3.3.1. Onda transversal en una cuerda	10
3.3.2. Onda longitudinal en un sólido	10
3.3.3. Velocidad de ondas acústicas en un líquido o gas	10
3.3.4. Ondas superficiales en el mar u olas	11
3.3.5. Ondas electromagnéticas y gravitacionales	11
4. Ondas sonoras	11
5. Polarización	12
6. Reflexión y refracción	12
7. Interferencia	12
7.1. Caso 1: interferencia de ondas de igual frecuencia	13
7.2. Caso 2: interferencia de ondas esféricas de igual frecuencia	14
8. Difracción	15
9. Ondas de ondas: cuerdas, tubos y armónicos	16
9.1. Soluciones a la ecuación de ondas	16
9.2. Armónicos y condiciones de contorno	17
9.3. Ondas estacionarias en cuerdas	18
9.4. Armónicos	18
10. Efecto Doppler	19
11. Resonancia	21
12. Ecuaciones de ondas, campos y partículas (no entra en EvAU)	21
12.1. Ecuaciones escalares	21
12.2. Ecuaciones espinoriales	21
12.3. Ecuaciones de fotones (masivos)	22
12.4. Campo de Rarita-Schwinger: spin 3/2	22
12.5. Gravitones: espín 2	22
12.6. Otras ecuaciones de campo más exóticas o complicadas	23
13. Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell (no entra en EvAU)	23
14. Ecuaciones de Yang-Mills(no entra en EvAU)	26
15. Gravitational waves/ondas gravitacionales (no entra en EvAU)	27

1. M.A.S.

Un movimiento armónico simple (M.A.S.) es la proyección sobre una recta de un M.C.U. (movimiento circular uniforme). Por lo tanto, tiene las mismas variables:

- **Elongación** (según el eje x, y, z). Describe el estado de oscilación como función periódica del tiempo, mediante funciones $x(t), y(t), z(t)$, según el eje en el que haya oscilación.
- **Período** es el tiempo que tarda el móvil en pasar por el mismo punto con el mismo estado de vibración, es decir, el valor T para el que $x(t) = x(t + T)$, y similarmente con oscilaciones en torno a otros ejes.
- **Frecuencia** f es el número de oscilaciones en cada segundo, matemáticamente $f = 1/T$, en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ o hertzios.
- **Frecuencia angular** o **pulsación** ω , es la velocidad de vibración angular, matemáticamente $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Se mide en $\text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- **Velocidad de vibración**: es la derivada de la elongación respecto del tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

donde hemos tomado $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ como elongación.

- **Aceleración de vibración**: es la derivada de la velocidad de vibración respecto del tiempo:

$$a(t) = \frac{v(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

donde $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

- **Amplitud** es el valor máximo de la elongación.
- **Fase inicial**. Es el estado angular de oscilación inicial φ_0 . Se mide en radianes.
- **Fase**. Es la cantidad dependiente del tiempo $\varphi(t) = \omega(t - t_0) + \varphi_0$. Se mide en radianes.
- Ecuación de movimiento del M.A.S. (dos opciones:

$$x(t) = R \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0)$$

$$y(t) = R \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_0)$$

Generalmente $R = A$, y $t_0 = 0$, luego es también usual

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Debido a que un M.A.S. es una función sinusoidal, tanto la elongación, como la velocidad, la aceleración, el jerk y toda derivada temporal de la elongación están acotadas mediante la expresión:

$$0 \leq \left| \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right| \leq A\omega^n$$
$$-A\omega^n \leq \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leq A\omega^n$$

donde n es el orden de derivación, siendo la derivada de orden cero la función $x(t)$. Así, el valor máximo de la elongación, la velocidad o la aceleración son $A, A\omega, A\omega^2$, y los valores mínimos $-A, -A\omega, -A\omega^2$.

La causa de un movimiento oscilatorio o M.A.S. es una ley de fuerza tipo ley de Hooke: $F = -kx$, donde k es la constante elástica en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ y x es la elongación. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t)$$

se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ecuación del M.A.S.

Todo M.A.S. posee una ecuación de movimiento igual a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

y elongación

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

donde $m\omega^2 = k$ es la relación entre la constante de la ley de Hooke responsable del M.A.S., la masa de la partícula o sistema oscilante es m , y ω es su velocidad angular o pulsación. A es la amplitud o máxima elongación, φ_0 es la fase inicial.

Mediante derivación directa se puede comprobar efectivamente que la ecuación del M.A.S. se resuelve efectivamente con una función de tipo $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ o de tipo $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Un M.A.S. proviene de una ley de Hooke, que es una fuerza elástica del tipo de fuerzas conservativas que hemos visto posee energía potencial. Escribiendo

$$F = -\frac{dE_p(el)}{dx}$$

se obtiene mediante integración directa que $E_p = k^2/2$. Entonces, tenemos los siguientes resultados:

Energía cinética y energía potencial en el M.A.S.

La energía potencial de todo M.A.S. es igual a:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}mA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

donde $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ es en general una función del tiempo. La energía cinética del M.A.S. es una función temporal

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

ya que $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Como la fuerza elástica es conservativa, existe una función conservada para todo valor del tiempo, la energía mecánica:

Energía mecánica del M.A.S.

Para todo M.A.S., la energía mecánica $E_m = E_k + E_p$ permanece constante, siendo su valor

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Demostración:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0))$$

de donde

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

por el teorema fundamental de la trigonometría.

Es importante recalcar que salen funciones sinusoidales gracias al signo de la fuerza elástica. Si el signo en la función de la fuerza de la ley de Hooke fuera positivo y no negativo (signo opuesto de la fuerza recuperadora), las soluciones en vez de soluciones trigonométricas salen funciones exponenciales, o su análogo que se llaman funciones “trigonométricas” hiperbólicas. Por curiosidad, supongamos que $F = +\lambda x$, y entonces $E_p = -\frac{\lambda x}{2}$, ya que $F = -dE_p/dx$. En este caso las soluciones de la ecuación de movimiento (no periódicas en los reales, sino periódicas con periodo imaginario $T = i\tau$)

$$F = ma = +\lambda x \rightarrow ma - \lambda x = 0$$

o bien

$$a = \ddot{x} - \frac{\lambda}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}x - \omega^2 x = 0$$

son o bien

$$x(t) = A \sinh(\omega t + \beta_0)$$

o bien

$$x(t) = A \cosh(\omega t + \beta_0)$$

y donde $\omega = \sqrt{\lambda/m}$, $m\omega^2 = \lambda$. La velocidad resulta ser (tomando $x(t) = A \sinh(\omega t + \beta_0)$)

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cosh(\omega t + \beta_0)$$

y la aceleración

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = A\omega^2 \sinh(\omega t + \beta_0) = \omega^2 x(t)$$

La energía cinética del oscilador hiperbólico es

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cosh^2(\omega t + \beta_0)$$

y la energía potencial

$$E_p = -\frac{1}{2}\lambda x^2(t) = -\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sinh^2(\omega t + \beta_0)$$

La energía mecánica es constante como el M.A.S. habitual:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cosh^2(\omega t + \beta_0) - \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sinh^2(\omega t + \beta_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}\lambda A^2$$

y donde se ha usado el teorema fundamental de la trigonometría hiperbólica

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

Existe un análogo angular para el MAS, llamado MAS angular u oscilador de torsión. La Dinámica del oscilaciones por torsión tiene ecuaciones análogas a las de desplazamiento lineal. Supongamos que

$$F = -kx \longrightarrow M = -k\varphi \quad (1)$$

$$F = ma \longrightarrow M = I\alpha \quad (2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{k}}} \quad (3)$$

Del péndulo simple surgen el péndulo simple y el péndulo físico

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad (5)$$

Las energías cinéticas, potenciales y mecánica del MAS de torsión son ahora

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (6)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\varphi^2 \quad (7)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I\omega_m^2 = \frac{1}{2}k\varphi_m^2 \quad (8)$$

2. Movimiento ondulatorio y ecuaciones de onda

El movimiento ondulatorio se describe con un objeto llamado *función de onda* $\Psi(x, t)$ satisface una ecuación llamada **ecuaciones de onda**. Una función de onda simple es aquella que realiza el denominado *movimiento armónico*. Un movimiento armónico realiza un M.A.S. en el espacio y en el tiempo de forma que su función de onda es una función sinusoidal

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (9)$$

que describe una onda armónica porque satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

como puede probarse por inspección o sustitución directamente, o escribir equivalentemente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = \square^2 \Psi(x, t) \equiv \square \Psi(x, t) = 0 \quad (11)$$

con v_p la velocidad de la onda, y donde se define el operador de D'Alembert o D'Alembertiano como

$$\square^2 = \square \cdot \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (12)$$

Cuando aumentamos el número de dimensiones, el D'Alembertiano se puede escribir:

$$\square \equiv \square_{2d+1}^2 = \square \cdot \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\square \equiv \square_{3d+1}^2 = \nabla \cdot \nabla - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (14)$$

y donde ∇ es el operador nabla

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \vec{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (15)$$

Se puede incluso generalizar el operador D'Alembertiano a espacios denominados ultrahiperbólicos, o multitemporales, de la forma siguiente. Si asumimos una misma velocidad (isotropía) de las direcciones temporales múltiples, tendremos los operadores de onda generalizados

$$\square \equiv \square_{nd+2t}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) \quad (16)$$

$$\square \equiv \square_{nd+mt}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} \right) = \sum_i \partial_{x_i}^2 - v_p^{-2} \sum_j \partial_{t_j}^2 \quad (17)$$

mientras que si permitimos diferentes velocidades (anisotropías) en los diferentes ejes y vectores del tiempo, escribiremos v_1, v_2, \dots, v_m como velocidades en las diferentes direcciones del tiempo, y el operador de onda se reescribe como

$$\square \equiv \square_{nd+mt}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \dots + \frac{1}{v_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} = \sum_i \partial_{x_i}^2 - \sum_j v_j^{-2} \partial_{t_j}^2 \quad (18)$$

Generalmente se simplifica la notación del D'Alembertiano escribiendo \square en vez de \square^2 . Cuando tenemos ondas electromagnéticas o gravitacionales en el vacío, es costumbre también escribir $v_p = c$. Para las ecuaciones de onda en el caso de dimensiones multitemporales, se guarda la denominación ultrahiperbólica por cuestiones puramente matemáticas. Por tanto, las ondas y ecuaciones de onda pueden ser unitemporales, o multitemporales, unidimensionales o multidimensionales. Cuando no hay dimensiones del tiempo, la ecuación ya no es una ecuación de onda, sino una ecuación laplaciana:

$$\nabla^2 \Psi \equiv \Delta \Psi = 0 \quad (19)$$

que no puede ser una ecuación temporal obviamente. Hay otra clase de ecuaciones de onda. Las ondas pueden ser

- **Longitudinales.** La vibración ocurre en la misma dirección que la de propagación. Ejemplo: el sonido, ondas sísmicas de tipo P,...
- **Transversales.** La vibración ocurre en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. Ejemplos: ondas electromagnéticas, ondas gravitacionales, ondas sísmicas de tipo S, ondas en una cuerda,...

Las ondas hoy día subyacen al concepto de campo, más fundamental. Además de las ecuaciones de Laplace o de D'Alembert, existen ecuaciones lineales y no lineales de onda de diferentes tipos adicionales: la ecuación de Dirac, la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon, y otras varias.

Una función de onda armónica es periódica en el tiempo y en el espacio. Se escribe generalmente en la forma

$$\Psi(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) = A \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (20)$$

o bien

$$\Psi(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (21)$$

y la doble periodicidad se manifiesta en el hecho matemático de que

$$\Psi(x, t) = \Psi(x, t \pm nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

para la periodicidad en el tiempo, o bien

$$\Psi(x, t) = \Psi(x \pm n\lambda, t), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (23)$$

La cantidad T es el período, y la cantidad λ , la periodicidad espacial, se llama *longitud de onda*. La cantidad de fase que puedo meter en cada longitud de onda se denomina k , y se llama *número de onda*. El número de onda es una suerte de pulsación espacial (es el análogo de ω). El número de onda dividido entre 2π , que es el análogo de la frecuencia f , es el número de longitudes de onda por metro, y se llama número de onda racionalizado \bar{k} . Matemáticamente, tenemos pues

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{k} \quad (24)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \quad (25)$$

Las unidades de k, \bar{k} son los son respectivamente los $rad/m, m^{-1}$, pero se escribe generalmente m^{-1} en ambos casos como norma habitual.

3. Ondas: propiedades y fenómenos

Las ondas experimentan una serie de fenómenos interesantes: superposición e interferencia, reflexión, refracción, difracción, polarización (exclusiva de ondas transversales), absorción o atenuación, resonancia, reverberación, sonoridad, dispersión, no linealidad (exclusiva de ondas no lineales), efecto Doppler y algunas otras propiedades menos estandarizadas.

3.1. Velocidad y aceleración de vibración

Para una función de onda $\Psi = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi)$, podemos definir la velocidad y aceleración vibratorias:

$$v_{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (26)$$

$$a_{\Psi} = \frac{\partial v_{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (27)$$

3.2. Energía en ondas armónicas

Según hemos visto, en un M.A.S. tenemos como energía mecánica constante (cuidado en no confundir la constante elástica k con el número de onda): $E_m = k_e A^2 / 2$, lo que se puede reescribir como sigue

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m (4\pi^2 f^2) A^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2 \quad (28)$$

En un medio de tipo homogéneo e isótropo, la dirección de propagación es siempre perpendicular al frente de ondas (conjunto de puntos con igual fase). Supongamos una fuente emite ondas en un tiempo inicial $t_0 = 0s$. Tras un tiempo t_1 , la energía se reparte en radio $r_1 = vt_1$, donde v es la velocidad de propagación. Igualmente, en t_2 , $r_2 = vt_2$. En cada tiempo habrá una energía, que podremos denotar respectivamente E_0, E_1, E_2 . Además, suponiendo una densidad uniforme ρ del medio vibrante, se tendrá que

$$E_0 = 2m_0\pi^2 f^2 A_0^2 \rightarrow E_0 = 2\rho S_0 x_0 \pi^2 f^2 A_0^2$$

$$E_1 = 2m_1\pi^2 f^2 A_1^2 \rightarrow E_1 = 2\rho S_1 \pi^2 f^2 A_1^2$$

$$E_2 = 2m_2\pi^2 f^2 A_2^2 \rightarrow E_2 = 2\rho S_2 \pi^2 f^2 A_2^2$$

y donde $V = Sx = 4\pi r^2 vt$, donde v es la velocidad. El frente de onda esférico, con igualdad de energía, implica que

$$r_1^2 A_1^2 = r_2^2 A_2^2 = \text{constante} \quad (29)$$

$$r_i A_i = \text{constante} \quad (30)$$

Si definimos la potencia de una onda como

Potencia de una onda

La potencia de una onda es el producto de su intensidad por la superficie. Matemáticamente:

$$P = IS \quad (31)$$

o bien la intensidad es el cociente de la potencia en vatios W y la superficie que atraviesa (una esfera si la onda tiene un frente de onda esférico)

$$I = \frac{P}{S} \quad (32)$$

Esta intensidad se mide en $W \cdot m^{-2}$. Para una onda armónica, se tiene que

$$I = I(\rho, v, A, f) = 2\pi^2 \rho v A^2 f^2 \quad (33)$$

ya que

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{tS}$$

También se satisfacen las relaciones (para ondas esféricas)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Para ondas de tipo circular o cilíndrico se tiene $Ir = \text{const}$ en vez de $Ir^2 = \text{const}$.

Ley de absorción

Un sistema que tiene un coeficiente de absorción β en m^{-1} , atenúa la onda mediante la ley

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

Demostración simple: una onda armónica plana (o también algunas ondas no planas), disminuye su intensidad al atravesar un medio de absorción β de forma proporcional a la intensidad y distancia de forma que

$$dI = -\beta I dr$$

Integrando

$$\int \frac{dI}{I} = -\beta \int dr$$

se sigue de forma trivial que $\ln(I) - \ln(I_0) = -\beta r$, de donde se deduce la ley de forma natural. La distancia de semiabsorción $D_{1/2}$ es la distancia que debe cruzar una onda en un medio para que su intensidad se reduzca a la mitad. Matemáticamente

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

3.3. Velocidades de propagación en medios

3.3.1. Onda transversal en una cuerda

Velocidad de propagación en una cuerda

Para una cuerda con tensión $T_s = F$, en newtons, y una densidad lineal de masa en kg/m igual a $\eta = \lambda$, se tiene que

$$v_s = \sqrt{\frac{T_s}{\eta}} \quad (34)$$

3.3.2. Onda longitudinal en un sólido

Velocidad de propagación en un sólido

Una vibración longitudinal de un cuerpo sólido de densidad volúmica ρ y módulo de Young en N/m^2 igual a \mathcal{Y} se propaga con velocidad

$$v_p = \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\rho}} \quad (35)$$

3.3.3. Velocidad de ondas acústicas en un líquido o gas

Velocidad acústica

Para un gas con coeficiente adiabático γ , adimensional, modelado como un gas ideal cuya constante es $R = 8,31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} = 0,082 atmL/Kmol$, a una temperatura absoluta T , y con una masa molar o molecular M en kg/mol , se tiene que

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (36)$$

En el caso de un polítropo con $K = \gamma p$ de factor de compresibilidad, en un medio de densidad ρ , se tiene

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (37)$$

mientras que para un líquido con K y densidad ρ será

$$v_a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (38)$$

3.3.4. Ondas superficiales en el mar u olas

Velocidad de las ondas superficiales marinas

La velocidad de las ondas marinas u olas, en el caso de que la longitud de onda es mucho menor que la profundidad, viene dada por

$$v_{ola} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (39)$$

3.3.5. Ondas electromagnéticas y gravitacionales

Velocidad de perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales en el vacío

Si definimos la permitividad eléctrica en el vacío

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_C} = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$$

y la permitividad magnética en el vacío como

$$\mu_0 = 4\pi K_m = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} N \cdot A^{-2}$$

se define la velocidad de la luz en el vacío o velocidad de transporte de las perturbaciones en el espacio-tiempo ordinario como

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{K_C}{K_m}} \quad (40)$$

4. Ondas sonoras

La intensidad es $I = P/S$, pero se define el nivel de intensidad sonora o sonoridad mediante la ley de Weber-Fechner, basada en escala logarítmica:

Sonoridad y logaritmos

El nivel de intensidad de referencia se toma como $I_0 = 10^{-12} W/m^2$, basado en el umbral de audición humano, lo que permite definir la sonoridad en la escala logarítmica de decibelios como sigue:

$$\beta = N.I. = S (dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = k \log_{10} I - k' \quad (41)$$

Sound sources (noise) Examples with distance	Sound pressure Level L_p dB SPL
Jet aircraft, 50 m away	140
Threshold of pain	130
Threshold of discomfort	120
Chainsaw, 1 m distance	110
Disco, 1 m from speaker	100
Diesel truck, 10 m away	90
Kerbside of busy road, 5 m	80
Vacuum cleaner, distance 1 m	70
Conversational speech, 1 m	60
Average home	50
Quiet library	40
Quiet bedroom at night	30
Background in TV studio	20
Rustling leaves in the distance	10
Hearing threshold	0

5. Polarización

Las ondas transversales pueden vibrar en direcciones diferentes a las de propagación. Así, la amplitud de la onda polarizada inclinada un ángulo α respecto de una onda polarizada será

$$A_\alpha = A \cos \alpha$$

La intensidad de una onda polarizada inclinada un ángulo α respecto de una onda polarizada incidente viene dada por la expresión

$$I_\alpha = I \cos^2 \alpha$$

expresión que se denomina **Ley de Malus** de la polarización. Se puede comparar su importancia a la ley de Brewster $n_r = \tan i$ de la polarización por reflexión.

6. Reflexión y refracción

Ley de la reflexión

$$\theta_i = \theta_r \quad (42)$$

Ley de la refracción de Snell-Descartes

$$\frac{\theta_i}{v_i} = \frac{\theta_r}{v_r} \quad (43)$$

7. Interferencia

Cuando dos o más ondas coinciden en un punto del espacio, puede interferir. Se llama interferencia al fenómeno ondulatorio que tiene lugar cuando se combinan diferentes funciones de onda en un punto del espacio.

Matemáticamente, equivale a aplicar el principio de superposición:

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^N \Psi_i = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_N \quad (44)$$

7.1. Caso 1: interferencia de ondas de igual frecuencia

Sean las funciones de onda armónicas:

$$\Psi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1) \quad (45)$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2) \quad (46)$$

Entonces:

$$\Psi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (47)$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (48)$$

Usando la superposición $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, se obtiene

$$\Psi = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (49)$$

$$\Psi = A_1 [\sin(\omega t) \cos(\varphi_1) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_1)] + A_2 [\sin(\omega t) \cos(\varphi_2) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_2)] \quad (50)$$

$$\Psi = \sin(\omega t) [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2] + \cos(\omega t) [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2] \quad (51)$$

$$\Psi = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (52)$$

y donde se ha definido

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \quad (53)$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \quad (54)$$

y de donde entonces obtenemos las relaciones interferenciales para la amplitud y fase de la onda resultante:

Amplitud y fase para superposición de ondas armónicas de igual frecuencia

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (55)$$

En interferencia, son útiles las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\pi + \varphi) = \sin(\varphi), \quad \cos(2\pi + \varphi) = \cos \varphi, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

De aquí, si $\alpha + \beta = \varphi_1$, $\alpha - \beta = \varphi_2$, se deduce que $\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ y

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

y entonces

$$\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = 2 \sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

De aquí, también si $\alpha + \beta = \varphi_1$, $\alpha - \beta = \varphi_2$, se deduce que se deduce que $\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ y

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

y entonces

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

Cuando las ondas interfirientes están desfasadas $0^0=0$ rad, i.e., cuando $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, y entonces

$$A_t^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

Se dice que la interferencia es constructiva, los puntos están en fase, y las amplitudes se suman, lo que ocurre en general para $\Delta\varphi = 2n\pi = 2\delta$, con $n \in \mathbb{Z}$. Cuando las ondas interfirientes están desfasadas en π rad, entonces

$$A_t^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

y se dice que la interferencia es destructiva o los puntos están en oposición de fase, lo que ocurre más en general cuando $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi = 2\delta$, con $n \in \mathbb{Z}$. Para hallar los puntos x donde se producirán estas condiciones, basta con hacer la diferencias

$$\Delta\varphi_M = (\omega t - kx) - (\omega t - k(x + n\lambda)) = nk\lambda = 2\pi n$$

lo que da para los máximos

$$\Delta\varphi_M = 2n\pi \rightarrow \Delta x_M = n\lambda$$

y las diferencias

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx) - (\omega t - k(x + \frac{2n+1}{2}\lambda)) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

lo que da para los mínimos

$$\Delta\varphi_m = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \Delta x_m = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\lambda$$

7.2. Caso 2: interferencia de ondas esféricas de igual frecuencia

Una onda esférica tien intensidad $I \propto r^{-2}$ en el espacio euclídeo tridimensional, y $A \propto \sqrt{I} \propto r^{-1}$. La función de onda radial

$$\Psi(r, t) = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \delta) \quad (56)$$

es diferente pero similar a una onda plana $\psi = A \sin(\omega t - kz + \delta)$. Superponemos dos ondas

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (57)$$

$$\Psi = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr) + \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \delta) \quad (58)$$

$$\Psi_t = \frac{A_0}{r} [\sin(\omega t - kr) + \sin(\omega t - kr + \delta)] \quad (59)$$

El resultado final es

$$\Psi = \frac{2A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \frac{\delta}{2}) \cos(\frac{\delta}{2}) \quad (60)$$

$$\Psi = A_t \sin(\omega t - kr + \frac{\delta}{2}) \quad (61)$$

donde

$$A_t = \frac{2A_0}{r} \cos(\frac{\delta}{2}) \quad (62)$$

La intensidad de la onda esférica es proporcional al cuadrado de la función de onda, i.e., proporcional a

$$I = \frac{4A_0^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{4A_0^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2}\right) = \frac{2A_0^2}{r^2} (1 + \cos \delta) \quad (63)$$

2 ondas de luz aleatorias de luz son en general incoherentes. Si producimos coherencia, desde u mismo foco, mediante radiación monocromática y rendijas, sí habrá interferencia. En síntesis, la condición de interferencia entre dos ondas de igual frecuencia que proceden del mismo punto y que han seguido dos caminos x_1, x_2 es $|x_1 - x_2| = n\lambda$, y $|x_1 - x_2| = (2n + 1) \lambda/2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$. Otra idea importante es la de pulsación de dos ondas, con frecuencias f_1, f_2 . 2 ondas de frecuencias diferentes f_1, f_2 ($f_1 > f_2$), de la misma amplitud y fase, propagándose en la misma dirección, en $x = 0$, mediante superposición:

$$\Psi_1 = A \sin(2\pi f_1 t) \tag{64}$$

$$\Psi_2 = A \sin(2\pi f_2 t) \tag{65}$$

$$\Psi_t = A [\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)] \tag{66}$$

producen una onda resultante igual a

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \tag{67}$$

donde la frecuencia de desplazamiento es $f_d = (f_1 + f_2)/2$, y la frecuencia de batido o pulsación es igual al resultado mencionado anteriormente, $f_b = f_p = f_1 - f_2$.

8. Difracción

La difracción de una onda es la propiedad física que tiene una onda de rodear obstáculos, superándolos e interfiriendo en la materia. El dibujo siguiente para un foco emisor F, dos rendijas F_1, F_2 , separadas una distancia a , y a una distancia d de una pantalla donde interfieren, y que implica un patrón interferencial

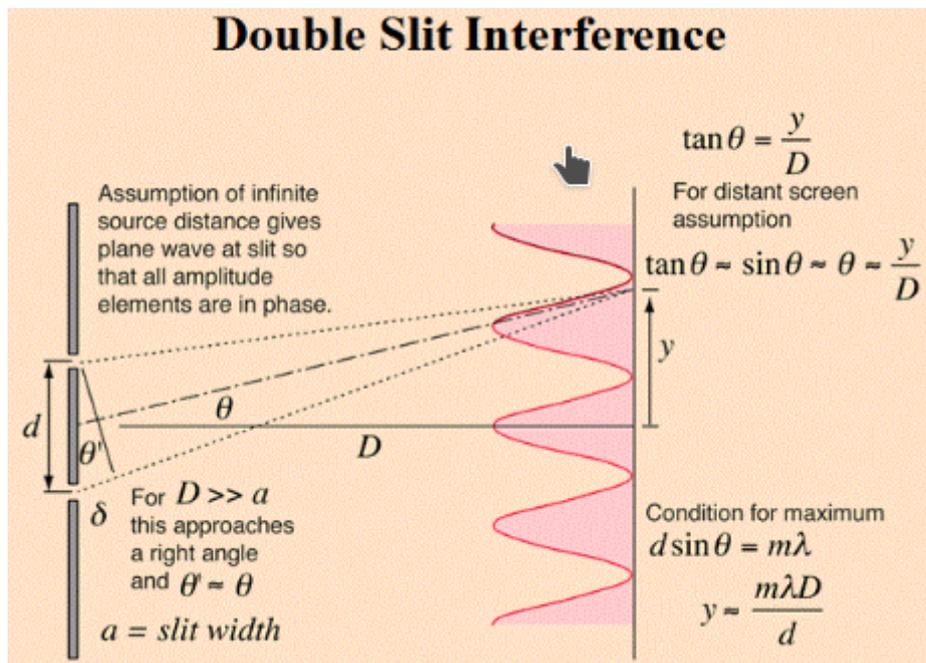
$$F_2P - F_1P = F_2D = a \sin \alpha \approx a \tan \alpha \tag{68}$$

de donde

$$a \tan \alpha \approx \frac{ay}{d} \tag{69}$$

Con lo cual, hay máximos y mínimos dados por

$$\boxed{\frac{ay_M}{d} = n\lambda}, \quad \boxed{\frac{ay_m}{d} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda} \tag{70}$$



9. Ondas de ondas: cuerdas, tubos y armónicos

9.1. Soluciones a la ecuación de ondas

La ecuación de ondas en 1+1 dimensiones se escribe como sigue:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi = 0 \quad (71)$$

La solución general de esta ecuación fue obtenida por D'Alembert, como una suma de una función que se propaga hacia una dirección y su dirección contraria (que podemos llamar, derecha + e izquierda -, o bien arriba y abajo, o similar):

$$\Psi = F_-(x - ct) + F_+(x + ct) \quad (72)$$

y donde F_-, F_+ son dos funciones arbitrarias que describen perturbaciones u ondas viajeras con velocidad c , y que se propagan hacia “adelante” en el tiempo F_- y hacia “delante” detrás F_+ . Estas funciones pueden ser determinadas mediante las llamadas condiciones de contorno o frontera, también llamadas condiciones de valor inicial. Si, por ejemplo, definimos $\Psi(x, 0) = f(x)$, $\partial_t \Psi(x, 0) = g(x)$, entonces:

$$\Psi(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (73)$$

donde $f(x) \in C^k$, $g(x) \in C^{k-1}$, tal que $\Psi(x, t) \in C^k$. Además, F, F_+ pueden no ser funciones estrictas sino cierta clase de objetos matemáticos llamados funciones generalizadas (distribuciones es otro nombre popular). Cualquier función o función generalizada puede admitir un desarrollo o descomposición en “armónicos trigonométricos”, es decir, en ondas u osciladores armónicos (suma de M.A.S.), conocidos en matemáticas como series de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (74)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (75)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) f(t) dt \quad (76)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) f(t) dt \quad (77)$$

en donde a_0 , y a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) son números reales. También es posible una forma compleja pura del desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (78)$$

donde ahora los coeficientes

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (79)$$

son generalmente números complejos. Tanto en el caso real, como en el complejo, $\omega_n = 2\pi n/T$. La versión continua de las series de Fourier se llaman transformadas de Fourier, y hay otras variantes del formalismo, usadas en diversos ámbitos científico-matemáticos.

9.2. Armónicos y condiciones de contorno

Una forma equivalente de escribir la solución de la ecuación de onda arbitraria en 1+1D es mediante la función

$$\Psi(x, t) = (A \sin(kx) + B \cos(kx)) \cos(\omega t) \quad (80)$$

donde A, B son constantes arbitrarias reales. Para fijar dichas constantes, se deben especificar condiciones de contorno o frontera en el medio oscilante. General y matemáticamente hablando, hay 3 tipos de condiciones de contorno:

- Dirichlet: si se especifica el valor de Ψ en la frontera $\partial\Sigma$.
- Neumann: si se especifica el valor de la derivada normal $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ sobre $\partial\Sigma$.
- Cauchy: si se especifica tanto el valor de la función Ψ como su derivada normal $\partial_n\Psi$ en $\partial\Sigma$.
- Mixtas: si hay una combinación de las anteriores condiciones en la frontera del medio de oscilación.

Vamos solamente a estudiar la solución de la ecuación de onda en tres casos:

- **Caso 1:** una cuerda de longitud finita $L_s = L$, con extremos fijos (o en un tubo cerrado). Usando $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$, se deduce de forma trivial que $B \cos(\omega t) = 0 \rightarrow B = 0$. Entonces:

$$0 = A \sin(kL) \cos(\omega t), \quad \forall t \rightarrow kL = n\pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (81)$$

Como $c = \lambda f$, se deduce entonces que

$$f_n = \frac{cn}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_s}{\rho}} \quad (82)$$

- **Caso 2:** una cuerda con extremos libres, de longitud finita $L_s = L$, o tubo abierto por los dos extremos. Usando las relaciones

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}|_{x=L} = 0 \quad (83)$$

derivando

$$\partial_x\Psi = [Ak \cos(kx) - Bk \sin(kx)] \cos(\omega t) \quad \forall t \quad (84)$$

de donde

$$Ak \cos(\omega t) = 0 \rightarrow A = 0 \quad \forall t \quad (85)$$

Por ende,

$$[Ak \cos(kL) - Bk \sin(kL)] \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \quad (86)$$

De nuevo, obtenemos el mismo resultado que antes, unos armónicos con

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{cn}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_s}{\rho}} \quad (87)$$

- **Caso 3:** condiciones de Cauchy (Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro), i.e., $\Psi(0, t) = \partial_x\Psi(L, t) = 0$. Ahora se tendría que $B \cos(\omega t) = 0 \rightarrow B = 0$. Y de las ecuaciones

$$Ak \cos(kL) - Bk \sin(kL) = 0 \rightarrow \cos(kL) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \quad (88)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. En este caso, por tanto,

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad f_n = \left(\frac{2n-1}{4L}\right)c = \left(\frac{2n-1}{4L}\right) \sqrt{\frac{T_s}{\rho}} \quad (89)$$

9.3. Ondas estacionarias en cuerdas

La solución de la ecuación de ondas para la superposición de dos ondas que se interfieren constructivamente, mediante el principio de superposición:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \quad (90)$$

o bien

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \sin(\omega - kx t) + A \sin(\omega t + kx) \quad (91)$$

Esta ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\Psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) = A_r \cos(\omega t) \quad (92)$$

Esta función de onda describe una onda que oscila en el tiempo, pero con dependencia espacial estacionaria $x \neq x(t)$. Los puntos de amplitud nula se llaman generalmente nodos (o antivientres), y los puntos de amplitud máxima vientres (o antinodos). Si A_r es máxima, entonces vale $A_r = \pm 2A$, y la solución de la ecuación trigonométrica $\sin(kx) = \pm 1$ produce $kx_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 0, 1, \dots, \infty$. Las posiciones de los vientres serían pues $x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$. Para los puntos con amplitud nula, o nodos, se tendría que $A_r = 0 \rightarrow kx = n\pi$, de donde se obtendría que $x_n = \frac{n\lambda}{2}$, con $n = 0, 1, \dots, \infty$. En síntesis:

- Nodos o antivientres. Puntos de oscilación nula en ondas estacionarias. Se tiene que están en semienteros de la longitud de onda o enteros pares de cuarto de longitud de onda:

$$\boxed{A_r = 0} \rightarrow \boxed{x_n = \frac{n\lambda}{2}} \quad (93)$$

- Vientres o antinodos. Puntos de oscilación máxima en ondas estacionarias, con $A_r = \pm A$, y se encuentran en enteros impares de cuarto de longitud de onda o semienteros de media longitud de onda:

$$\boxed{x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}} \quad (94)$$

9.4. Armónicos

Las ondas de un objeto o instrumento musical pueden producirse con ciertos patrones. La frecuencia natural o fundamental de tales objetos resuena a ciertos múltiplos de la frecuencia fundamental, como hemos visto en los subapartados anteriores. En ciertos instrumentos, son múltiplos enteros y el sonido o percepción de ondas con razones o proporciones de números enteros es agradable. En ondas en una cuerda:

$$f(n+1) = (n+1)f_0, \quad \lambda(n+1) = \frac{\lambda_0}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (95)$$

o bien

$$f(n) = nf_0, \quad \lambda(n) = \frac{\lambda_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (96)$$

Los armónicos de una cuerda fija por sus 2 extremos satisfacen las relaciones siguientes

$$f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad c = \sqrt{\frac{T_s}{\lambda}} \quad (97)$$

Los armónicos de una cuerda fija en un extremo y libre en el otro, satisfacen las relaciones:

$$f_n = \frac{nc}{4L} \rightarrow f_n = nf_1, \quad n = 1, 3, \dots, \infty \quad (98)$$

Una onda con un extremo fijo y uno libre vibra solamente en el modo fundamental y tiene solamente armónicos impares. Un tubo abierto por un extremo es análogo a una cuerda con un extremo libre.

10. Efecto Doppler

El efecto Doppler es la variación de la frecuencia de una onda de velocidad u observada por un observador, dependiendo del movimiento de la fuente V_o , o del emisor con V_s , relativo al observador. Si el observador se mueve con velocidad V_o , entonces la frecuencia observada será

$$f' = f \left(1 + \frac{V_o}{u} \right) \quad (99)$$

Si el emisor o fuente se mueve con velocidad V_s , entonces la frecuencia observada será:

$$f' = f \left(1 - \frac{V_s}{u} \right)^{-1} \quad (100)$$

En el caso relativista, hay una deducción complicada más detallada, pero se puede simplificar el análisis yendo al resultado: suponiendo que $V_o = V_s = v$, que $u = c$, y que $v/c = \beta$, la fórmula del efecto Doppler longitudinal relativista es meramente la media geométrica de los efectos Doppler de observador y fuente de los casos 1 y 3, suponiendo que $f' = f_r = f_p$ es la frecuencia del observador (receptor, perceptor), y $f = f_s$ es la frecuencia del emisor, se tiene que:

Efecto Doppler relativista longitudinal

$$f' = f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (101)$$

Efecto Doppler relativista arbitrario y transversal

En el caso de una fuente moviéndose respecto del receptor con velocidad v , y dirección θ_r respecto del mismo, la relatividad especial predice

$$f' = f \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta \cos \theta_r} = \frac{f}{\gamma(1+\beta \cos \theta_r)} \quad (102)$$

Si ambos ocurren, i.e., que tanto observador como emisor se mueven, la ecuación es

Efecto Doppler para una onda general

$$f' = f \left(1 + \frac{V_0}{u}\right) \left(1 - \frac{V_s}{u}\right)^{-1} = f \frac{\left(1 + \frac{V_0}{u}\right)}{\left(1 - \frac{V_s}{u}\right)} \quad (103)$$

Una deducción más rigurosa, caso por caso, es como sigue:

- Caso 1. El observador se aleja de la fuente con velocidad V_0 (cambiamos el signo respecto del criterio usado antes). Entonces, la velocidad relativa es $v_r = v - V_0$. Si $v - V_0 = \lambda f_p$, donde f_p es la frecuencia percibida (antes f'), y $v = \lambda f_e$, donde $f_e = f$ es la frecuencia emitida, resulta que $v - V_0 = v f_p / f_e$, de donde se tiene trivialmente que

$$f_p = f_e \left(\frac{v - V_0}{v}\right) = f_e \left(1 - \frac{V_0}{v}\right) \quad (104)$$

Vemos que el sonido es más grave (la luz es más roja), porque la frecuencia disminuye.

- Caso 2. El observador se acerca. El mismo análisis proporciona, con $-V_0$ la expresión:

$$f_p = f_e \left(\frac{v + V_0}{v}\right) = f_e \left(1 + \frac{V_0}{v}\right) \quad (105)$$

Ahora, el sonido es más agudo (la luz más azul), porque la frecuencia aumenta.

- Caso 3. La fuente se aleja con velocidad v_s . Ahora $\lambda_1 = \lambda + v_s T$, y como $s = v_s T$, $f_1 = v / \lambda_1$, se tiene que $f_p = v / \lambda_p$. Como $v = \lambda f$, $T = 1 / f$, se deduce que

$$f_p = f \frac{v}{v + v_s} = f \left(\frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 + \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (106)$$

El sonido se hace más grave (la luz más roja), al alejarse la fuente, al disminuir la frecuencia.

- Caso 4. La fuente se acerca, con velocidad $-v_s$. Repitiendo el mismo análisis, o cambiando el signo a la velocidad vectorial, se deduce que

$$f_p = f \frac{v}{v - v_s} = f \left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (107)$$

El sonido es más agudo (la luz más azul), al aumentar la frecuencia.

- Caso 5. Combinando los casos del movimiento del observador y la fuente, la fórmula general del efecto Doppler no relativista se escribe ($v_s = v_f$, $v_0 = V_0$, $v = c$,

$$f_p = f_e \frac{v \pm v_0}{v \mp v_s} = f \left(\frac{1 \pm \frac{v_0}{v}}{1 \mp \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 \pm \frac{v_0}{v}\right) \left(1 \mp \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (108)$$

11. Resonancia

Una onda forzada, por una fuerza externa, puede amplificarse en amplitud enormemente si $\omega = \omega_0$, donde ω es la frecuencia de forzamiento y ω_0 es la frecuencia natural:

$$A = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

12. Ecuaciones de ondas, campos y partículas (no entra en EvAU)

Hay una triada entre ecuaciones de campos (clásicos o cuánticos), campos y partículas:

Ecuaciones de ondas \leftrightarrow Campos \leftrightarrow Partículas o cuantos

12.1. Ecuaciones escalares

Un campo escalar libre satisface la ecuación de Klein-Gordon

Ecuaciones de espín cero

Un campo escalar libre con masa m , escalar o de espín cero, satisface la ecuación:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (109)$$

Estas ondas pueden representar por ejemplo la inflación cósmica, o el campo de Higgs libre (aunque éste generalmente se presenta con autointeracciones y NO libre).

12.2. Ecuaciones espinoriales

Un campo espinorial libre satisface o bien la ecuación de Weyl, la ecuación de Dirac o la ecuación de Majorana:

Ecuaciones de espín 1/2

Un campo espinorial libre con masa m , sin carga eléctrica, de espín 1/2, satisface la ecuación de Dirac

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\Psi = 0 \quad (110)$$

o bien la ecuación de Weyl

$$\sigma^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (111)$$

o bien la ecuación de Majorana

$$-i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + mc\Psi_c = 0 \leftrightarrow i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_c + m\Psi = 0 \quad (112)$$

donde $\Psi_c = i\Psi^*$.

Hay ecuaciones de espinores exóticos con espín continuo o con espín infinitas componentes (ecuación de Majorana de alto espín).

12.3. Ecuaciones de fotones (masivos)

Las ondas electromagnéticas son un caso particular de ecuaciones de tipo campo Yang-Mills. Las ecuaciones de YM para el fotón son ecuaciones de espín uno sin masa. Una generalización para permitir masa se denomina ecuación de Proca:

Ecuación de onda de espín 1 de Maxwell-Proca

Un fotón o fotón masivo dado por un campo gauge (que supondremos abeliano B^ν) satisface la ecuación de Maxwell o de Proca:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) B^\nu = 0 \quad (113)$$

y donde $\partial_\nu B^\nu = 0$. La variación

$$B^\mu \rightarrow B^\mu + \delta B^\mu = B^\mu + \varepsilon \partial^\mu \varphi \quad (114)$$

es una transformación de gauge. En el caso de Maxwell, $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, implica que $\square A_\mu = 0$, y las soluciones de vacío son las ondas electromagnéticas, de las que la luz visible forma una pequeña parte.

12.4. Campo de Rarita-Schwinger: spin 3/2

Una partícula espinorial vectorial con masa m se llama campo de Rarita-Schwinger. Satisface una ecuación compleja:

Ecuación de espín 3/2 de Rarita-Schwinger

Un campo de espín 3/2 libre satisface la ecuación de Rarita-Schwinger

$$i\hbar \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho + m_{3/2} \gamma^{\mu\nu} \Psi_\nu = 0 \quad (115)$$

y donde $\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi_\nu = 0$, $\gamma^\mu \Psi_\mu = 0$ son ligaduras del campo, y donde $\gamma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \frac{1}{2}$, y $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\rho]}$.

Esta ecuación de Rarita-Schwinger proviene de un lagrangiano

$$L_{RS} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_\mu (i\gamma^{\mu\rho\nu} \partial_\rho + m_{3/2} \gamma^{\mu\nu}) \Psi_\nu \quad (116)$$

12.5. Gravitones: espín 2

Los hipotéticos gravitones asociados a radiación gravitacional (constituyentes de ondas gravitacionales u excitaciones del campo gravitacional), $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ son fluctuaciones pequeñas del campo gravitacional, que producen en general una ecuación de espín 2 para el gravitón (en relatividad general los gravitones NO tienen masa, pero hay teoría de gravedad con gravitones masivos):

Ecuación del gravitón de espín 2

El gravitón o partícula de espín 2, tendrá en general una ecuación de onda dada por la expresión:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (117)$$

12.6. Otras ecuaciones de campo más exóticas o complicadas

Existen campos tensoriales con número par de índices de tipo bosónico, y ecuaciones de campos tensoriales con número impar de índices. Algunas veces se les llama notophs o hipernotophs. Matemáticamente:

$$\square F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2p}} = 0$$

$$\square F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2p+1}} = 0$$

También existen objetos de tipo superespinorial, twistorial, supertwistorial, hiperespinorial, hipersupertwistorial con ecuaciones más sofisticadas, pero no demasiado diferentes a las ecuaciones de onda y campos anteriores. Existen otras ecuaciones de onda como la ecuación de Schrödinger o la ecuación del calor, y generalizaciones no lineales de las mismas. La ecuación del calor o difusión se escribe:

Ecuación del calor o de la difusión

Sea la función $\Phi(x, y, z, t)$, la ecuación del calor es la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (118)$$

en donde α es la difusividad del medio.

Ecuación de Schrödinger

Sea la función $\Psi(x, y, z, t)$, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es la ecuación en derivadas parciales

$$H\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (119)$$

en donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck racionalizada, m es la masa, $H = T + V$ el hamiltoniano, e $i^2 = -1$. No es más que una ecuación de difusión con tiempo imaginario. La versión independiente del tiempo de la ecuación de Schrödinger, para estados estacionares tales que $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$ se escribe como sigue:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi = E\psi \quad (120)$$

13. Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell (no entra en EvAU)

Durante el x.XIX, se estableció la unión definitiva entre la electricidad y el magnetismo. La síntesis del electromagnetismo, anticipada por Faraday, se condensa en las siguientes ecuaciones, denominadas ecuaciones de Maxwell:

Ley de Gauss del campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a lo largo de una superficie cerrada Σ es proporcional a la carga eléctrica encerrada por la superficie. Matemáticamente, a nivel integral se escribe

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi K_C Q_{in} \quad (121)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (122)$$

y donde ρ es la densidad de carga en unidades del S.I. Las fuentes del campo eléctrico son las cargas eléctricas.

Ley de Gauss del campo magnético

El flujo del campo magnético a lo largo de una superficie cerrada Σ es cero porque no existen los monopolos magnéticos. Matemáticamente, a nivel integral se escribe

$$\phi_B = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (123)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0 \quad (124)$$

La existencia de hipotéticos monopolos magnéticos, predichos por algunas teorías de gran unificación (GUT) o incluso por el modelo estándar, forzaría a cambiar esta ecuación introduciendo la carga magnética $Q_m = P$. Si no hay monopolos, esta ley significa que no hay polos magnéticos aislados, y que las fuentes del campo magnético son en general dipolos magnéticos.

Ley de Faraday-Lenz

La circulación del campo eléctrico a lo largo de una línea cerrada γ es igual al cambio del flujo del campo magnético, lo que genera una fuerza electromotriz inducida (f.e.m.) y una corriente inducida. Matemáticamente

$$\Gamma_E = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \varepsilon \quad (125)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (126)$$

Esta ley significa que podemos generar campos (potenciales) eléctricos mediante campos magnéticos variables en el tiempo. Además, el campo eléctrico es conservativo, por lo que puede escribirse, incluso si hay f.e.m., como

$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad} V \quad (127)$$

En el caso de que el flujo del campo magnético no cambie, tenemos la relación habitual $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.

Ley de Ampère-Maxwell

La circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada γ es igual a la suma del flujo de carga (corriente eléctrica) con el cambio del flujo del campo eléctrico, multiplicados por ciertas constantes. Matemáticamente

$$\Gamma_B = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right) \quad (128)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (129)$$

y donde \vec{j} es el vector densidad de corriente superficial, definido como $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. En el caso de que el campo eléctrico no dependa del tiempo, se tiene la ley de Ampère usual, $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$. Esta ley de Ampère-Maxwell significa que podemos generar campos magnéticos mediante campos eléctricos variables en el tiempo incluso en ausencia de corrientes eléctricas libres. Además, el campo magnético no es conservativo, pero puede definirse un objeto llamado potencial vector tal que

$$\vec{B} = -\nabla \times \vec{A} = -\text{rot} \vec{A} \quad (130)$$

Las ecuaciones de Maxwell escritas de esta forma tridimensional pierden simetría, pero son la forma habitual de escribirlas en Ingeniería y cursos aplicados. En esta forma, predicen la existencia en el vacío (ausencia de corrientes y cargas, i.e., $I = 0$, $\vec{j} = 0$, $Q = 0$) de soluciones que son las ondas electromagnéticas que observamos de una forma u otra, y que se mueven con velocidad

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{K_C}{K_m} \quad (131)$$

Además de predecir naturalmente la existencia de ondas electromagnéticas, poseen algunas cualidades matemáticas interesantes:

- Conservan la carga eléctrica, dado que ésta se relaciona con la densidad de corriente \vec{j} mediante la denominada ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (132)$$

- No son invariantes bajo transformaciones de Galileo, sino bajo otras transformaciones más generales, las transformaciones de Lorentz (o incluso las de Poincaré). También poseen un conjunto de simetrías aún mayor, dadas por el llamado grupo conforme.
- En el vacío, también poseen otra propiedad matemática o invariancia denominada transformación de dualidad, en la que cambios $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ dejan las ecuaciones invariantes. Si hay cargas, la dualidad requiere la introducción de monopolos magnéticos para mantenerse como simetría.
- Transformaciones de gauge. Las ecuaciones de Maxwell tienen una simetría adicional, que es su invarianza bajo cambios de los campos $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, y $\vec{E} = -\nabla V - \partial_t \vec{A}$, del tipo $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f$, $V \rightarrow V - \partial_t f$ (no solamente desplazamientos del potencial $V \rightarrow V + C$), las ecuaciones de Maxwell se mantienen inalteradas.
- Condiciones de contorno. Las ecuaciones de Maxwell, para resolverse en un medio general, también requerirán condiciones de contorno o frontera para los campos eléctricos y magnéticos.
- En un formalismo tetradimensional, donde el tiempo es una cuarta coordenada, las ecuaciones de Maxwell adoptan un lenguaje más sencillo, reduciéndose a dos ecuaciones compactas:

Ecuaciones de Maxwell 3+1 y más allá

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$$

(133)

y donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Estas ecuaciones pueden generalizarse a espacios de dimensión arbitraria $D = s + t$. Usando objetos llamados formas diferenciales, las ecuaciones de Maxwell se reescriben sucintamente como $dF = J$, y $\star d \star F = \delta F = 0$, ya que $F = dA$, se tiene que $dJ = 0$ (conservación de la carga) y la identidad $d^2 F = 0$ más la identidad de Bianchi del tensor dual via la codiferencial o bien $d * F = 0$. El operador codiferencial $\delta = \star d \star$ usa el llamado operador de Hodge-estrella, y también permite combinar las ecuaciones de Maxwell Dirac en una sola ecuación híbrida, llamada forma de Kähler-Dirac: $(d + \delta)F = 0$. En vez de formas diferenciales, hay otro formalismo equivalente multivectorial, debido a W. K. Clifford y otros. En este formalismo también pueden escribirse las ecuaciones de Maxwell de forma compacta en una simple ecuación: $\partial F = J$, donde $\partial = \partial \cdot + \partial \wedge$ es el operador derivada en cálculo geométrico/de Clifford.

En el caso de medios materiales, se definen las cantidades denominadas desplazamiento eléctrico \vec{D} , polarización $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, campo magnético \vec{H} , magnetización $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$, y las cargas y corrientes libres ρ_f, I_f . Para medios lineales, homogéneos e isotrópos, se puede escribir que

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (134)$$

Y la primera ecuación de Maxwell queda $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$, o bien $\oint_{\mathcal{V}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$, y donde en general $Q = Q_f + Q_b$, $\rho = \rho_f + \rho_b$. Análogamente, para medios lineales, homogéneos e isotrópos, se puede escribir que

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (135)$$

Con estas definiciones de magnetización y polarización, las ecuaciones de Maxwell macroscópicas restantes quedarían escritas como sigue:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (136)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (137)$$

y donde

$$Q = Q_f + Q_b = \int_V \rho dV \quad (138)$$

$$I = I_f + I_b = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (139)$$

14. Ecuaciones de Yang-Mills(no entra en EvAU)

El caso del electromagnetismo es un subcaso de un conjunto más general de teorías gauge llamadas teorías de Yang-Mills. En estas teorías se define

$$F = dA + A \wedge A \leftrightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (140)$$

donde $[T_b, T_c] = i f_{bc}^a T_a$. Si definimos

$$D_\mu = I \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \quad (141)$$

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig T^a F_{\mu\nu}^a \quad (142)$$

se deducen las ecuaciones de Yang-Mills

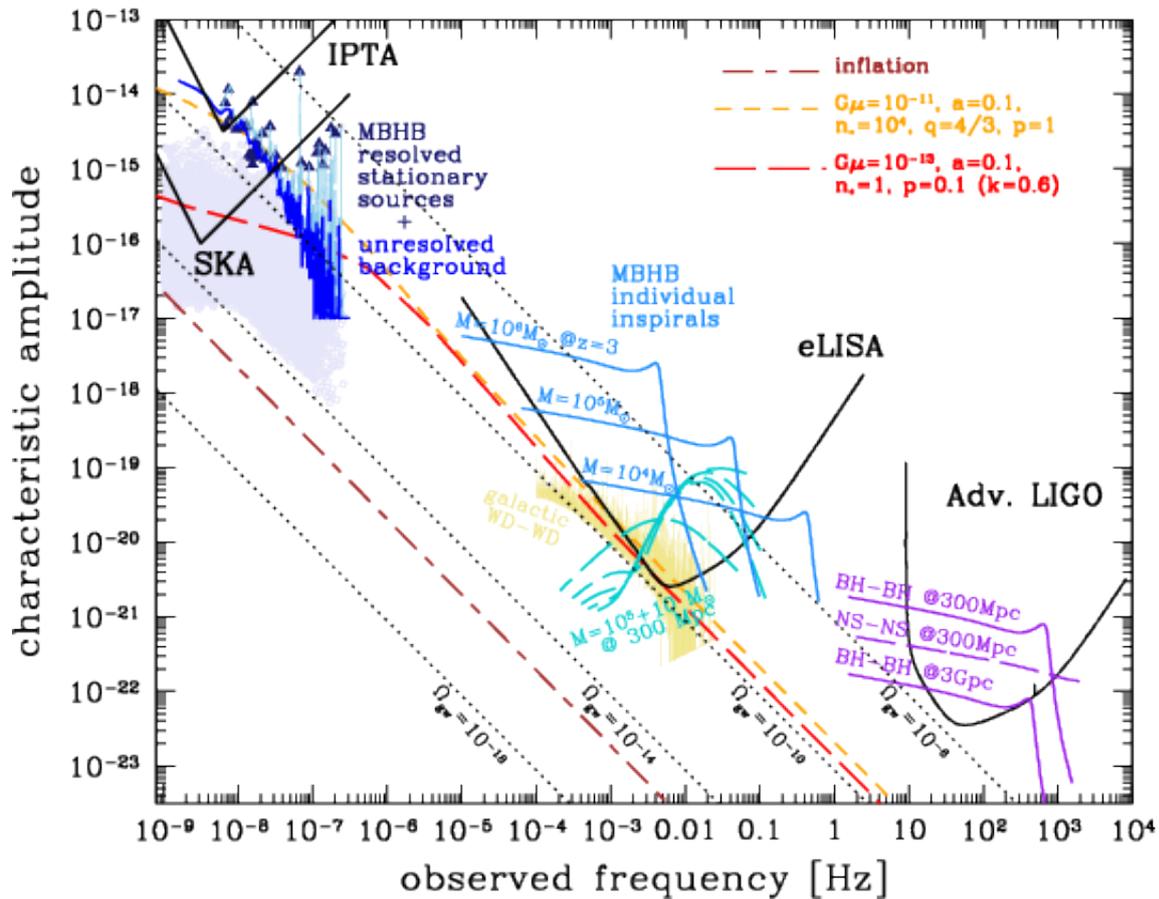
$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c = -J_\nu^a \tag{143}$$

y las identidades de Bianchi se escriben ahora

$$(D_\mu F_{\nu\kappa})^a + (D_\kappa F_{\mu\nu})^a + (D_\nu F_{\kappa\mu})^a = D^\mu * F_{\mu\nu}^a = 0 \tag{144}$$

En lenguaje más sucinto, se pueden escribir $D_A F = J$, y $\star D_A \star F = 0$, casi como antes. Las ecuaciones de Yang-Mills son ecuaciones de tipo no abeliano, no conmutativas en general, y complicadas de resolver en el vacío. Circa 2020, sigue sin resolverse el problema Clay consistente en demostrar esencialmente que las ecuaciones de Yang-Mills predicen esencialmente un “mass-gap”, que explicaría esencialmente por qué algunas partículas poseen masa.

15. Gravitational waves/ondas gravitacionales (no entra en EvAU)



The spectrum of gravitational waves!!!! Purely gravitational wave music! Sources of gravitational waves:

- Axions and axion decoupling in the early Universe, plus other possibly unknown phase transitions.
- Binary (or multiple) stellar mass black hole mergers and (exotic) compact object mergers.
- Primordial black holes.
- Binary mergers from intermediate or supermassive black holes.
- Cosmic strings or cosmic defects like domain walls and alike.
- Stochastic gravitational wave backgrounds.

- Primordial gravitational waves (from inflation or similar transitions).
- Cosmic graviton background fluctuations.
- Unknown sources, specially in very low, very high frequencies.

These notes are from my blog. Today, I will cover two topics from elementary viewpoints: falling into a non-rotating black hole and gravitational wave “music”, i.e., gravitational wave formulae! It is a hard equilibrium just to fall into the BH singularity and to be spaghettified, but you will be awarded with gravitational wave physics at the second act! Happy???

Non-rotating black holes are called Schwarzschild black holes, or Schwarzschild-Tangherlini, since the latter generalized the black hole metric into extra space-like dimensions in 1963. I will keep mathematics as simple as possible, but that will introduce some imprecisions that, I wish, experts in the field will forgive.

A classical particle owns a lagrangian

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

It implies that

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\frac{m^2 g_{tt} \cdot \dot{t}}{L} = \text{constant} = -E$$

Thus

$$\dot{t} = \frac{LE}{m^2 g_{tt}} \quad (145)$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -1 \quad (146)$$

$$L = -m \rightarrow \dot{t} = -\frac{E^2}{mg_{tt}} \quad (147)$$

and then

$$g_{tt} \dot{t}^2 + g_{rr} \dot{r}^2 = -1 \rightarrow \dot{r}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) + \frac{E^2}{m^2}$$

Firstly, let us consider a test particle at rest from an infinite distance from the black hole event horizon, with $E = m$, and thus set up

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r}$$

Note that the above result is essentially the classical escape velocity. Secondly, make a trip towards the singularity, starting from $r = r_0$ (at $\tau = 0$). Supposing its distance from $\tau = 0$ is r you get

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

and now proceed to integrate the above equation with the proper above mentioned limits

$$\int_{r_0}^R r^{1/2} dr = -\sqrt{2GM} \int_0^\tau d\tau$$

Remark: until the singularity from the boundary event horizon radius, you get a distance $r = R_S$, until the initial point, you have a distance $r = r_0$, until the final point you have $r = R$ from the initial point but $r = r_0 - R$ from the singularity at the center.

After integration, and reintroducing c , you will obtain that

$$\tau_{BH}^f = \frac{2}{3R_S^{1/2} c} (r_0^{3/2} - R^{3/2}) \quad (148)$$

If $r_0 = R_S$ and $R = 0$ for the time we reach the singularity, then

$$\tau = \frac{2R_S}{3c} = \frac{4GM}{3c^3}$$

This calculation can be performed for a D -dimensional black hole with d space-like dimensions. If you define the higher dimensional version of the Schwarzschild radius $r_s = r_s(D)$ the analogue integration is about

$$\tau_{BH}^f = \frac{(D-2)}{(D-1)R_S^{(D-3)/2}c} \left(r_0^{(D-1)/2} - R^{(D-1)/2} \right) \quad (149)$$

and similarly

$$\tau(XD) = \frac{(D-2)r_s(D)}{(D-1)c}$$

A variation of this time (but you will be likely death before the singularity arrives), can be done if you use the same geodesic equation above but with initial $E = 0$ (or a big test mass so $E \ll m$), then the integral is lightly different and you have to be careful to evaluate it. I will calculate it only in the usual $D = 4$ spacetime to compare it with the previous result:

$$\tau_f = \frac{1}{c} \int_0^{R_S} \frac{1}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - 1}} dr$$

The result is

$$\tau_f = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_S}{c} \right) = \frac{\pi GM}{c^3}$$

The difference is not big, since $\tau_f = 3\pi\tau/4$, so we can be sure that we will be pushed into the singularity in about that order of time. Of course, the caveats are the life of the passenger and that quantum gravity should be taken into account at some point in the interior of the black hole. Maybe even before, according to the firewall paradigm.

What is next? Small problem: what is the density for a spherical exoplanet, moon or compact object to stay weightlessness in the equator surface? For 3d space, we can equalize

$$F_g = F_c \leftrightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

and plugging $v = 2\pi r/T$ and $V = 4\pi r^3/3$, $\rho = M/V$, then we will obtain

$$\frac{4\pi G r^3 \rho}{3r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}$$

and thus

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3\pi f^2}{G}$$

or

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{G\rho}{3\pi}}$$

By the other hand, our Universe is mysterious. Just like when we have different types of gravitational lensing (strong lensing, weak lensing and microlensing), via e.g. a simple equation

$$\theta_E = \frac{4GM}{rc^2} = \frac{2R_S}{r} = \frac{D_S}{r}$$

the study of the gravitational waves just began. Perhaps, we will have new tools to test even the black hole entropy of our almost de Sitter Universe. The dS Universe entropy is given by

$$S_{dS} = \frac{A_{dS}}{4L_p^2} = \frac{\pi}{L_p^2 H_\Lambda^2}$$

For Keplerian orbits, the same argument than the previous one will help us to find the gravitational wave frequencies. The orbital frequency for quasi-circular keplerian orbits will be

$$f_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

The gravitational wave frequency in Einstein theory is twice the orbital frequency, i.e., $f_{GW} = 2f_K$, and then

$$f_{GW} = 2f_K = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

or, in terms of density,

$$f_{GW} = 2f_K = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \sim \sqrt{G\rho}$$

We want to compute this quantity from some reference scale, e.g., solar mass scale. Then, since $R_s = 2GM/c^2$ and M_\odot are the Schwarzschild radius and the solar mass respectively, by ratios we can calculate

$$f_{GW} = \frac{\sqrt{G}}{\pi} \left[\left(\frac{M}{R^3} \right) \left(\frac{M_\odot}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_s^3}{R_s^3} \right) \right]^{1/2}$$

so

$$f_{GW} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\pi GM_\odot} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

and then

$$f_{GW} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\pi GM_\odot} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Therefore, the dominant gravitational wave frequency for quasicircular keplerian orbits reads off as

$$f_{GW} \approx 2,29 \cdot 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ Hz} \approx 23 \text{ kHz} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

For periods

$$T_{GW} = \frac{1}{f_{GW}} = 43,7 \mu\text{s} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

In the end, unless quantum gravity changes the rules, any gravitational bounded system will decay gravitationally! The time for the gravitational coalescence of two orbiting bodies can also be computed from General Relativity for any (even eccentric) orbit. If initially the two bodies, with masses M_1, M_2 have a separation a and eccentricity e , then the time till coalescence will be

$$t_{GW}^c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4 f(e)}{G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}$$

with the eccentricity function

$$f(e) = \frac{(1 - e^2)^{7/2}}{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}$$

Since a is the major semi-axis, the apoastron and periastron centers will be $R = a(1 + e)$, $r_p = a(1 - e)$. Also, define the chirp mass

$$\mathcal{M}_c = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}$$

Then, the time to coalescence is

$$t_{GW,c} \approx 10^5 \text{Gyr} \left(\frac{1}{AU} \right)^4 \left(\frac{10M_\odot}{M_1} \right) \left(\frac{10M_\odot}{M_2} \right) \left(\frac{20M_\odot}{(M_1 + M_2)} \right) (1 - e^2)^{7/2}$$

while the peak of the gravitational wave frequency (music) will be

$$f_{GW,peak} = 0,35 \text{mHz} \left(\frac{M_{BHB}}{30M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{0,01AU} \right)^{-3/2} \frac{(1 + e)^{1,1954}}{(1 - e^2)^{1,5}}$$

See, e.g., Wen 2003, or Antonini et al. 2014. to check the above formulae. By the other hand, merger anatomy is generally complex and hard with current tools. There are phases: inspiral, plunge, merger and coalescence. The final phase is “balding hair” of the black hole (in the case of binary black hole mergers). After plunge and merger phase end, there is also a new phase called “ring-down”. The final product is a Kerr black hole in general. At least from the current knowledge of gravity, general relativity and black hole theory. Kerr black hole is perturbed and the so-called quasinormal modes are emitted. For quadruple QNM (quasinormal mode), from the paper PRD 34, 384 (1986), you can get the values

$$\frac{\omega_{QNM}}{2\pi} = f_{QNM} = 32 \text{kHz} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) (1 - 0,63(1 - j)^{0,3})$$

and

$$\tau_{QNM} = 20 \mu\text{s} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \frac{(1 - j)^{-0,45}}{1 - 0,63(1 - j)^{0,3}}$$

where $j = a/M_f$ is the Kerr parameter for the final state. In this field, there are also zoom-whirls. Zoom-whirl orbits are perturbations of unstable circular orbits that exist within the inner stable circular orbits (ISCO). The number of whirls n is related to perturbation magnitude δr and instability exponent γ via $e^n \propto |\delta r|^{-\gamma}$. Orbit taxonomy and classification of Kerr-like black hole orbits are also possible. It is generally defined a rational number $q = \omega + \nu/z$, where ω is the number of whirls, and z is the number of leaves that make up the zooms, while ν is the sequence in which the leaves are traced out ($\nu/z < 1$). Any non-closed orbit is arbitrarily close to some periodic orbit. If $a = J/M_f c$, then $j = a/M_f = J/M_f^2 c$.

There are two more places where gravitational waves are important. Firstly, for the so-called Kozai-Lidov resonances in ternary systems. When a binary system is perturbed by a third body, the latter can induce some periodic oscillations in the libration of the orbital ellipse and a variation in the orbital eccentricity. The typical Kozai-Lidov oscillations can be calculated to have a period

$$T_{KL} = \frac{2T_0^2}{3\pi T} (1 - e_0^2)^{3/2} \left(\frac{m_1 + m_2 + m_0}{m_0} \right)$$

where T is the period of the triplet’s inner orbit (keplerian), T_0 is the period of the triple’s outer orbit (keplerian).

Finally, we have the so-called stochastic gravitational wave background, a buzz in GW caused by non-resolved GW sources. This is different from the so-called gravitational or graviton relic background (the cosmic analogue of the cosmic microwave background). Just as the current CMB has a temperature $T_\gamma \sim 3K$, and the cosmological neutrino background has a temperature $T_\nu \leq 2K$, the relic graviton background is expected to be $T_g \leq 1K$. For the stochastic background, however, we define the energy density

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \left(\frac{d\rho_{GW}}{d \ln f} \right)$$

and the gravitational wave cosmological stochastic density to be

$$\rho = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ab} \dot{h}^{ab} \rangle$$

Therefore, the strain spectrum and the strain scale are respectively

$$S(f) = \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \frac{\Omega_{GW}(f)}{f^3}$$

$$h(f) = 6,3 \cdot 10^{-22} \sqrt{\Omega_{GW}(f)} \left(\frac{100\text{Hz}}{f} \right)^{3/2} \text{Hz}^{-1/2}$$

Where do all of those equations come from? Consider a small perturbation of the spacetime metric

$$\delta\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

The Einstein's Field Equations read off

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

In vacuum $T_{\mu\nu} = 0$ implies that $\square^2\Psi \equiv \square\Psi$ can be used to compute

$$\partial_\nu h_\mu^\nu(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu h_\nu^\nu = 0$$

and with

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

it yields

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

and plus sources

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

The simplest solution to a wave-equation is the plane wave

$$h_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$$

With many simplifications, the solution is rewrite as the variation of a quadrupole moment

$$h^{ij}(t, x) \sim \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} (I^{ij}(t - r/c))$$

There, the distance to the source is r and the quadrupole moment is delayed or computed in the so-called retarded time. This is easier than the entropic uncertainty principle $H(x) + H(p) \geq \ln(e\pi)$ for sure. Gravitational waves from binaries, during the inspiral phase, is just elementary physics from these considerations. First, assume edge on observation ($\theta = i = \pi/2$) such as $\cos\theta = 0.4$. Then, you can check that ($t_r = t - r/c$ is the retarded time):

$$h_+ = h_+(t, \theta, \psi, r) = \frac{4G\mu}{c^4 r} \omega_K^2 a^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \cos(2\omega_K t_r + \psi)$$

$$h_\times = h_\times(t, \theta, \psi, r) = \frac{4G\mu\omega_K^2 a^2}{c^4 r} \cos\theta \sin(2\omega_K t_r + \psi)$$

Now, define

$$h = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2} = \frac{4G\mu\omega_K^2 a^2}{c^4 r} \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \theta}{4} + \cos^2 \theta}$$

and then, with the previous conditions, deduce that

$$h = \frac{4G\mu\omega_K^2 a^2}{c^4 r}$$

where $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, and with the aid of Kepler third law you get

$$h = \frac{4G^2}{c^4} \left(\frac{\mu M}{ra} \right) = \frac{4G^2 m_1 m_2}{c^4 r a} = \frac{4}{c^4} (\mathcal{M}G)^{5/3} \left(\frac{\omega_{GW}}{2} \right)^{2/3}$$

with $M = m_1 + m_2$. Now, resume the formulae

$$\mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{M^{1/5}} \quad (150)$$

$$M = m_1 + m_2 \quad (151)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (152)$$

$$\eta = \frac{m_1 m_1}{M^2} \quad (153)$$

$$T_K = \frac{2\pi}{\omega_K} = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{GM} \right]^{1/2} \quad (154)$$

$$a = \frac{GM^{1/3}}{\omega_K^{2/3}} \quad (155)$$

$$\omega_{ISCO} = \frac{2c^3}{6^{3/2} GM} \quad (156)$$

$$\omega_{GW} = 2\omega_K \quad (157)$$

$$a_{ISCO} = 3 \times \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2} \quad (158)$$

Furthermore,

$$h = \frac{4G^{5/3}}{c^4} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \omega_{orb}^{2/3} = \frac{4G^{5/3}}{c^4} m_{chirp}^{5/3} \omega_{orb}^{2/3}$$

or

$$h \propto \left[\frac{m_{chirp}}{M_\odot} \right]^{5/3} \left[\frac{P_b}{\text{hours}} \right]^{-2/3} \left[\frac{r}{\text{kpc}} \right]^{-1}$$

Moreover, we can calculate the gravitational wave power radiated in the GW emission as

$$\begin{aligned} P &= \frac{dE_{orb}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{Gm_1 m_2}{2a} \right] = \frac{Gm_1 m_2}{2} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \\ &= \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{1}{a^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) \quad \text{from the quadrupole formula} \\ &= \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left[\frac{Gm_{chirp} \omega_{GW}}{2c^3} \right]^{10/3} \end{aligned}$$

and the time varying angular frequency will be

$$\frac{d\omega_{GW}}{dt} = \omega_{GW}^{11/3} m_{chirp}^{5/3}$$

from which

$$\omega_{\text{gw}} = \left[\frac{64}{5 \times 2^{2/3}} \right]^{-3/8} \left[\frac{Gm_{\text{chirp}}}{c^3} \right]^{-5/8} t_{\text{GW}}^{-3/8}$$

and for quasicircular orbits, you get the previously mentioned value

$$t_{\text{GW}} \sim \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4}{(m_1 m_2)(m_1 + m_2)}$$

while the general formula in the literature is

$$t_{\text{GW}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4(1 - e^2)^{7/2}}{(m_1 m_2)(m_1 + m_2)}$$

From Peter and Mathews, we also have

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (159)$$

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2}}{c^5 a^{7/2} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (160)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{304}{15} e \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^3}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{da}{de} \right\rangle = \frac{12}{19} \frac{a}{e} \frac{\left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{36}{96} e^4 \right]}{(1 - e^2) \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]} \quad (161)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3} \quad (162)$$

Integrating the semi-axis from a_0 to a , you would get

$$a(t) = (a_0^4 - 4Ct)^{1/4}$$

For the major semi-axis shrinking value we get in the literature being similar

$$a(t) = \left(a_0^4 - 4C \frac{t}{(1 - e^2)^{7/2}} \right)^{1/4}$$

and the integration constant

$$C = \frac{64}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5}$$

The function of radial shrinking in terms of eccentricity reads

$$a(e) = \frac{\omega e^{12/19}}{1 - e^2} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{870/2299}$$

The period decreases as

$$\dot{T} = -\frac{192G^{5/3}}{5c^5} (m_1 m_2) (m_1 + m_2)^{-1/3} \left(\frac{T}{2} \right)^{-5/3} f(e)$$

where

$$f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right]$$

The power decrease is given by the formula

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{5c^5} G^{5/3} (m_1 + m_2)^{-1/3} m_1 m_2 \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{-5/3} f(e)$$

where $f(e)$ is, as before,

$$f(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)$$

Maggiore's book on gravitational waves define

$$\tau_c = t_c - t_0 = t_{GW}$$

with

$$f_{GW} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right]^{3/8} \left[\frac{GM_c}{c^3} \right]^{-5/8} = 134 Hz \left(\frac{1,21 M_\odot}{M_c} \right)^{5/8} \left(\frac{1s}{\tau} \right)^{3/8}$$

$$\tau_0 = \frac{5c^5}{256G^3} \frac{a_0^4}{m_1 m_2 M}$$

$$\tau \sim 2,18s \left(\frac{1,21 M_\odot}{M_c} \right)^{5/3} \left(\frac{100 Hz}{f_{GW}} \right)^{8/3}$$

Relativity and newtonian gravity approximation (valid in weak gravitational fields) provide limits to the mass-radius ratio:

$$\frac{M}{R} \leq \left(\frac{Rc^2}{G_N} \right) \quad (163)$$

or equivalently

$$M \leq \frac{R^2 c^2}{G_N} \quad (164)$$

and

$$R \geq \frac{\sqrt{G_N M}}{c} \quad (165)$$

since $\omega_c = \sqrt{G_N M R} \leq Rc$ is the maximal spinning rate consistent with SR and weak gravity in GR (newtonian approximation). In the GW zone, the strain

$$s = \frac{\Delta L}{L} \sim \frac{h}{2} \quad (166)$$

where h is the GW amplitude

$$h_{GW} = \frac{4G^2 M_1 M_2}{c^4 a R} \quad (167)$$

for a binary M_1, M_2 system. Here, a is the separation of the circular binary and R is the distance to the observer from the binary (inclination is neglected). Using the Kepler 3rd law $a^3 = \tau^2 G_N (M_1 + M_2) / (4\pi^2)$, we obtain the useful formula

Gravitational wave amplitude

Gravitational wave amplitudes, in a circular binary with $\sin \iota = 1$, have the formal expression

$$|h_{GW}| = \frac{2\pi^{2/3} (2G_N)^{5/3} M_1 M_2 f^{2/3}}{c^4 R (M_1 M_2)^{1/3}} \quad (168)$$

with $f = 2f_K$ the gravitational wave frequency, and $f = nc/2L$.

Simple estimate for a GW burst from binary coalescence, for a couple of neutron stars (NS) about minimal mass and total mass $M = 2 \cdot M_{Ch} = 2 \cdot 1,4M_{\odot}$:

$$h_{BBH} \sim \frac{GM}{c^2 r} \sim 10^{-21} \left(\frac{200 \text{Mpc}}{r} \right) \quad (169)$$

Simple gross estimate for continuous (periodic) GW emission from a pulsar (fast NS):

$$h_{CW} \sim 6 \cdot 10^{-25} \left(\frac{f}{500 \text{Hz}} \right) \left(\frac{1 \text{kpc}}{r} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \quad (170)$$

and where ϵ is the ellipticity parameter. CGW are a signal of peaks or mountains (asymmetries from sphericity) at the NS surface, and its deformability. They can provide a way to study the hard issue of the equation of state of nuclear matter in the core of NS, currently unknown.

Yominum crystals (fictional formula): $K_4YM_3(SO_7^3ES_2)$, or a more realistic versions $K_4Ym(SO_7)_3EsS_2$, $K_4YMn(SO_7) \cdot 3ErS_2$, or even $K_4YMn(SO_3)_7ErS_2$. SK: 50kton, HK: up to 250000kton?

Alpha equation

Alpha equation in D space-like dimensions:

$$\alpha(D) = K_C(D)^{D-2} e^{D-1} G_N^{\frac{3-D}{2}} \hbar^{2-D} c^{D-4} \quad (171)$$

Doctor Who?

ϱΔΞΘΣΨΧΚΙΟ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\spadesuit\spadesuit\rangle) \quad \oint_{\partial\Sigma} \Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$

