The scientific method

The Strange Doctor

Resumen

We present in this article a possible definition of the modern scientific method.

What is the scientific method? There are many definitions out there, but I am providing mine, the one I explain to my students, here in this essay.

SCIENTIFIC METHOD

A (cyclical, iterative, systematic) method/procedure to acquire, gather, organize, check (verify or refute) and test, conserve (preserve) and transmit (communicate) knowledge (both in form of data or organized abstract data/axioms/propositions) or more generally information built from reason and thought.

It is based on the will to know due to ***curiosity*** and it uses:

- Experience. By experience we understand observation of natural phenomena, original thoughts, common sense perceptions and observed data from instruments or data. You can also gather data with emulation or simulation of known data, in a virtual environtment.
- Intuition and imagination. Sometimes scientific ideas come from experience, sometimes from intuitions and abstractions from real world and/or structures. You can also use imagination to test something via gedanken or thought experiments tied to the previous experiences or new experiences, or use computer/AI/machines to creatively check or do inferences.
- Logic and mathematical language. Logic, both inductive and deductive, is necessary for mathematical or scientific proofs. Since Galileo, we already know that Mathematics is the language in which Nature is better described with. We can also say that this includes reasoning or reason as a consequence. Thought and reason are a main tool of Science.

The will to know is basic for scientists. No curiosity, no new experiments, observations, theories or ideas.

The scientific method has some powerful additional tools:

- Computers and numerical simulations. This is new from the 20th century. Now, we can be aided by computer calculations and simulations to check scientific hypothesis or theories. Machine learning (and AI, Artificial Intelligenge) is also included here as subtool.
- Statistics and data analysis. Today, in the era of Big Data and the Rise of AI, this branch and tool from the scientific method gains new importance.
- Experimental devices to measure quantities predicted or expected from observations and or hypotheses, theories or models.
- Rigor. Very important for scientists, and mathematicians even more, is the rigor of the method and analysis.

- Scientific communication, both specialized and plain for everyone. Scientists must communicate and transmit their results and findings for further testing. Furthermore, they must try to make accessible the uses of their findings or why they are going to be useful or not in the future.

Scientific method can begin from data (observations, previous data), or from theories and models. Key ideas are:

- (Scientific) Hypothesis. Idea, proposition, argument or observation that can be tested in any experiment. By experiment, here, we understand also computer simulations, numerical analysis, observation with telescope or data analysis instruments, machine/robotic testing, automatic check and/or formal proof by mathematical induction or deduction.
- An axiom is a statement that is assumed to be true without any proof, based on logical arguments or experience.
- A theory is a set of tested hypotheses subject to be proven before it is considered to be true or false. A theory is also a set of statements that is developed through a process of continued abstractions and experiments. A theory is aimed at a generalized statement or also aimed at explaining a phenomenon.
- A model is a purposeful representation of reality.
- A conjecture is proposition based on inconclusive grounds, and sometimes can not be fully tested.
- A paradigm (Kuhn) is a distinct set of concepts or thought patterns, including theories, research methods, postulates, and standards for what constitutes legitimate contributions to a field.

What properties allow us to say something is scientific and something is not? Philosophy of science is old and some people thought about this question. Some partial answers are known:

- Falsifiability. Any scientific idea or hypothesis or proposition can be refuted and tested. Otherwise is not science. It is a belief. Scientific stuff can be refutable and argued against with. Experiments or proof can be done to check them. Kuhn defended the addition of additional ad hoc hypotheses to sustain a paradigm, Popper gave up this approach.
- Verification of data or hypotheses/theories/arguments. Even when you can refute and prove a theory is wrong, verification of current theories or hypotheses is an important part of scientific instruments.
- Algorithmic truths and/or logical procedures. Science proceeds with algorithms and/or logic to test things. Unordered checking looses credibility. Trial and error is other basic procedure of Science.
- Heuristics arguments based on logic and/or observations. Intuition and imagination can provide access to scientific truths before testing.
- Reproducibility. Any experiment or observation, in order to be scientific, should be reproducible.
- Testable predictions. Usually, theories or hypotheses provide new predictions, not observed before.

The scientific method is an iterative, cyclical process through which information is continually revised. Thus, it can be thought as a set of 4 ingredients as well:

- Characterizations (observations, definitions, and measurements of the subject of inquiry).
- Hypotheses (theoretical, hypothetical explanations of observations and measurements of the subject).
- Predictions (inductive and deductive reasoning from the hypothesis or theory).
- Experiments (tests of all of the above).

Pierce distinguished between three types of procedures:

- Abduction. It is a mere “guess", intuitive and not too formal.

- Deduction. It includes premises, explanations and demonstrations.
- Induction. A set of classification, probations and sentient reasoning.

From a pure mathematical and theorist way, there are only knowing and understanding facts, analysis, synthesis and reviews or extensions of information/knowledge. From the physical or experimentalist viewpoint, however, we have more:

- Characterization of experiences and observations.
- Proposals of hypotheses.
- Deductions and predictions from hypotheses.
- Realization of tests and experiments (gathering data).

Note that, from a simple viewpoint, the scientific method and/or main task of Science is to study:

- Regularities, patterns and relationships between objects and magnitudes.
- Anomalies or oddities, generally hinting something new beyond standard theories.
- Reality as something we measure and the link between observers and that reality.
- What is reality after all? Hard question from the quantum realm side...

By the other hand, a purely bayesianist approach to Science is also possible. In a Bayesian setting, Science is only a set up to test the degree of belief of any proposition/idea/set of hypotheses/model/theory. Theories provide measurable observables and quantities, and scientific predictions are only valid up to certain confidence level with respect some probabilistic distributions. This probabilistic approach to Science does not exclude the existence of purely true or false hypotheses, a frequentist approach to data and error analysis (it complements that tool), and it only focuses on a framework to estimate the probability of propositions, data vectors and experimental parameters fitting certain probability distributions “a prior".

How to elucidate the degree of (scientific) belief of something? W. K. Clifford discussed this topic with Jaynes in order to give a list. In the Ethics of Belief was argued that: rules or standards that properly govern responsible belief-formation and the pursuit of intellectual excellence are what philosophers call epistemic (or “doxastic") norms. Widely accepted epistemic norms include:

1. Don’t believe on insufficient evidence.
2. Proportion your beliefs to the strength of the evidence.
3. Don’t ignore or dismiss relevant evidence.
4. Be willing to revise your beliefs in light of new evidence.
5. Avoid wishful thinking.
6. Be open-minded and fair-minded.
7. Be wary of beliefs that align with your self-interest.
8. Admit how little you know.
9. Be alert to egocentrism, prejudice, and other mental biases.
10. Be careful to draw logical conclusions.
11. Base your beliefs on credible, well-substantiated evidence.
12. Be consistent.

13. Be curious and passionate in the pursuit of knowledge.
14. Think clearly and precisely.
15. Carefully investigate claims that concern you.
16. Actively seek out views that differ from your own.
17. Be grateful for constructive criticisms.
18. Question your assumptions.
19. Think about the implications of your beliefs.
20. Persevere through boring or difficult intellectual tasks.
21. Be thorough in your intellectual work.
22. Stick up for your beliefs, even in the face of peer pressure, ridicule, or intolerance.

Unanswered questions by Science are yet to be provided:

- Why mathematics is so accurate and precise to describe Nature?
- Why is the Universe comprehensible and non-chaotic but regular and structured in general? It could have been very different!
- Why numbers and structures are so efficient?
- Is Science affected by the Gödel theorems or does it go beyond its applicability?
- Can Science explain everything?
- Are chaos and other mathematical universes possible and physically realizable or ideally are only unfeasible?

Usually, the scientific method contained theory and experiment only. Now, it also includes: computation, big data, machine learning and AI tools!

A shorter 3 step version of the scientific method is the following:

- S1: Make observations, ask questions about them, and gather information.
- S2: Form hypotheses to describe what has been observed, and make predictions.
- S3: Test the predictions against known or new observations, and accept, reject, or modify the hypothesis accordingly.

1. Método científico

1.1. Fundamentos del método

¿Qué es el método científico? En este curso tomamos como definición la siguiente:

Es un PROCEDIMIENTO para la adquisición, organización, comprobación y conservación (preservación) del CONOCIMIENTO. Está basado en la INTUCIÓN, la LÓGICA, el PENSAMIENTO, la RAZÓN Y LA EXPERIENCIA.

En cualquier momento, dicho procedimiento o método comunica o es capaz de comunicar sus resultados, de forma que se revisan y corrigen los posibles ERRORES.

La corrección de errores y de los resultados (o del método) requiere la REPRODUCIBILIDAD y COMPROBACIÓN DE LOS DATOS o conclusiones de forma INDEPENDIENTE.

En cualquier momento del proceso puede producirse la PUBLICACIÓN Y COMUNICACIÓN DE LOS RESULTADOS EN FORMA DE DATOS, o DESCUBRIMIENTOS, Y/O MODELOS/TEORÍAS/LEYES/PRINCIPIOS, incluso AXIOMAS en Matemáticas, O BIEN nuevas hipótesis o CONJETURAS.

En su versión moderna, comenzó con Galileo Galilei: "(...)Egli è scritto in lingua matematica(...)"

El método científico utiliza las Matemáticas desde entonces pero se fundamenta en la observación de la Naturaleza, los fenómenos naturales, las regularidades y anomalías que en ellos se producen. Está originado por la CURIOSIDAD.

En general, podemos considerar que el método científico está formado por una serie de etapas o pasos. A saber:

- 1. OBSERVACIÓN DE LOS FENÓMENOS NATURALES, sus PATRONES LÓGICOS/TEÓRICOS y las anomalías en los mismos.

- 2. ELABORACIÓN DE HIPÓTESIS CIENTÍFICAS, por inferencia o inducción lógica, en ocasiones por pura intución o sentido común, que se pueden comprobar/verificar o refutar/invalidar, mediante SIMULACIONES COMPUTACIONALES Y TEÓRICAS (en ordenadores, computadoras,...),mediante "experimentos mentales"/"thought experiments"/gedanken experiments.
- 3. Diseño y REALIZACIÓN DE EXPERIMENTOS CIENTÍFICOS, que nos proporcionan DATOS experimentales en laboratorios. Los datos son habitualmente NÚMEROS (cantidades) y las magnitudes físicas de los datos son PROPIEDADES(cualidades) que pueden ser medidas o cuantificadas.
- 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS EXPERIMENTALES mediante pensamiento lógico, matemático y razonado o intuitivo. Esto nos lleva a la refutación/invalidación de la/s hipótesis o la COMPROBACIÓN/VERIFICACIÓN de la/s hipótesis o conjeturas.
- 5. ELABORACIÓN DE UN MODELO.
- 6. FORMULACIÓN DE UNA TEORÍA.
- 7. ESTABLECIMIENTO DE LEYES Y PRINCIPIOS.
- 8. ENUNCIADO DE AXIOMAS Y POSTULADOS.

Comentario: Los pasos o etapas del método científico no siguen necesariamente el orden anterior. Por ejemplo, uno puede comenzar con una teoría y estudiar posibles nuevos fenómenos a observar en vez de elaborar la teoría a partir de la síntesis de unos fenómenos u observaciones.

1) Una **conjetura** es un modelo incompleto, o una analogía (comparación) con otro dominio. Ejemplos: el llamado desplazamiento hacia el rojo cosmológico está causado por la luz que pierde energía cuando viaja a través del espacio (conjetura de la "luz cansada"), las leyes de la Física son constantes en el tiempo y el espacio en todo el Universo (hipótesis de universalidad o uniformización), las especies evolucionan a estadios superiores (evolución).

2) Una **hipótesis** (o conjetura verosímil) es un modelo basado en todos los datos de un determinado dominio, sin contraejemplos e incorporando una nueva predicción que debe ser validad por hechos empíricos o experimentales (o bien lógico-formales en un sistema axiomático usado en las Matemáticas). Ejemplos: el envejecimiento mental puede ser retrasado mediante el uso del "úsalo o piérdelo", "el desplazamiento hacia el rojo es un desplazamiento Doppler".

3) Una **teoría** es una hipótesis refrendada o validada con al menos un dato, idea o predicción no trivial. Ejemplos: relatividad, Cosmología del Big Bang, teoría de la Evolución, teoría cinético-molecular, teoría del caos,. . . .

4) Una **ley** es una teoría que ha recibido validación en todas las posibles ramificaciones y formas, y que es conocida y válida hasta cierto nivel de exactitud o aproximación. Ejemplos: Mecánica newtoniana, gravitación universal, ley de Henry, leyes de la Termodinámica.

5) Un **principio** es una ley verificada que usamos, sin demostrar, en la deducción de nuevas hipótesis o conjeturas, de nuevos fenómenos, por el método lógico-matemático-formal.

6) Un **axioma** es una regla matemática aceptada como universalmente cierta o verdadera. Ejemplo: la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad distributiva, la existencia de un elemento neutro, el axioma de elección,. . .

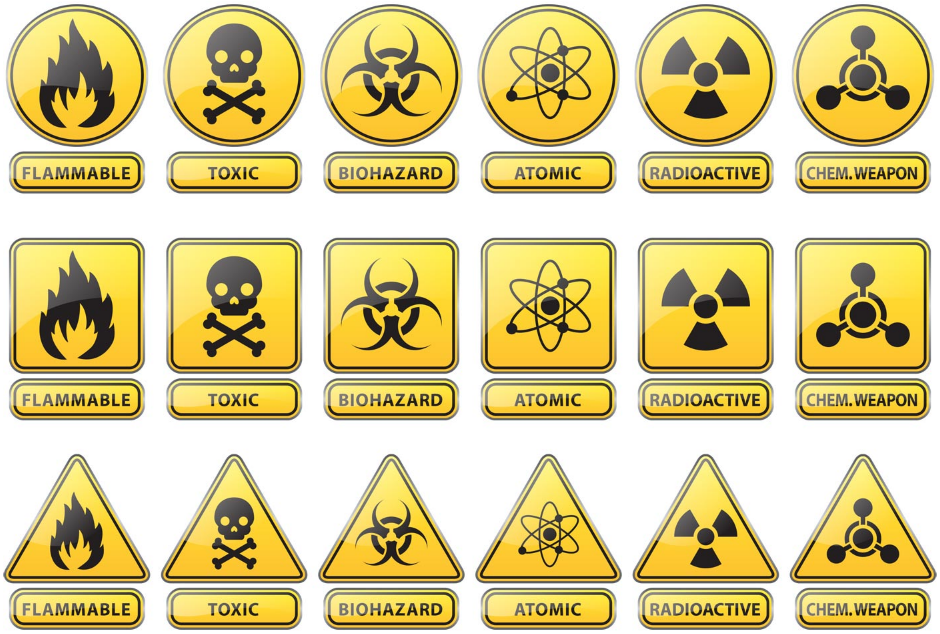
7) Un **modelo** es una representación o "imagen", o aproximación simplificada, simplificación de un sistema (real o imaginario) que usamos para explicar su funcionamiento real (físico) o virtual (imaginario). Ejemplos: Modelo Estándar, Modelo Cosmológico Estándar, Modelo de Capas, Modelo de Bolas, Modelo de Cuerdas, Modelo de Thomson, Modelo de la partícula puntual. . .

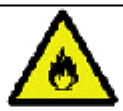
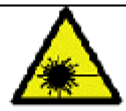
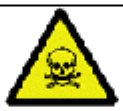
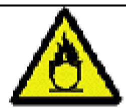
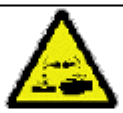
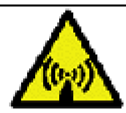
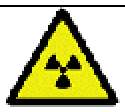
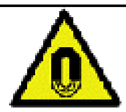
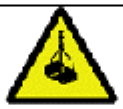
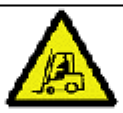
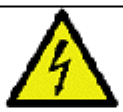
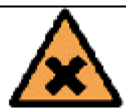
8) **Ciencia** es cualquier área del saber que usa el método científico (y no un sucedáneo) para obtener conocimiento. ¡Rechaza imitaciones! No son ciencias ni la Astrología (sí lo es en cambio la Astronomía), ni la religión, ni sectas como la Cienciología y muchas otras "pseudociencias". Atención: esto no significa que la Ciencia pueda explicarlo todo, ni que ésas otras áreas de la Humanidad como la Religión, la Mitología, o la superchería no puedan tener aplicaciones, en ocasiones bastante terribles. Generalmente las ciencias se dividen en **exactas o naturales** e **inexactas o sociales** (aunque es una división algo ad hoc y tal vez obsoleta ya en los tiempos en que vivimos, cada vez más matematizados).

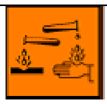
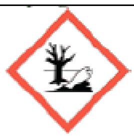
1.2. Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio

En todo laboratorio hay unas normas de seguridad que hay que aplicar para evitar accidentes o peligros mortales. Es similar a un trabajo con riesgo por lo que hay legislación al respecto. Además, internacionalmente, hay unos pictogramas de laboratorio que advierten de diferentes peligros a sustancias o situaciones.

A continuación una selección de pictogramas usuales en la vida cotidiana y los laboratorios/trabajos usuales (hay más que estos, como ejercicio pueden buscarse otros pictogramas):



	Materias Inflamables		Peligro en General
	Materias Explosivas		Radiación Láser
	Materias Tóxicas		Materias Comburentes
	Materias Corrosivas		Radiaciones No Ionizantes
	Materias Radioactivas		Campo Magnético Intenso
	Materias Suspendidas		Riesgo de Tropiezo
	Vehículos de Mantenimiento		Riesgo Biológico
	Riego Eléctrico		Materia Nocivas o Irritantes

		**bombona de gas**	**Gases a presión** en un recipiente (gases comprimidos, licuados o disueltos). Algunos pueden explotar con el calor. Los licuados refrigerados pueden producir quemaduras o heridas relacionadas con el frío, son las llamadas quemaduras o heridas criogénicas.
		**Calavera con tibias**	**Tóxicos:** sustancias y preparados que, por inhalación, ingestión o penetración cutánea en pequeñas cantidades producen efectos adversos para la salud, Pueden provocar náuseas, vómitos, dolores de cabeza, pérdida de conocimiento e, incluso, la muerte.
		**Corrosión**	**Corrosivos**: Pueden causar daños irreversibles a la piel u ojos, en caso de contacto o proyección.
 **Xn Nocivos** **Xi Irritantes**		**Exclamación**	Producen efectos adversos en dosis altas. También pueden producir irritación en ojos, garganta, nariz y piel. Provocan alergias cutáneas, somnolencia y vértigo.
		**Peligro par la salud**	Pueden ser: Cancerígenos (pueden provocar cáncer); Mutágenos (pueden modificar el ADN de las células); Tóxicos para la reproducción; Pueden modificar el funcionamiento de ciertos órganos, como el hígado, el sistema nervioso, etc., provocar alergias respiratorias o entrañar graves efectos sobre los pulmones..
 **N**		**Medio ambiente**	**Peligroso para el medio ambiente**: presentan o puedan presentar un peligro inmediato o futuro. Provocan efectos nefastos para los organismos del medio acuático (peces, crustáceos, algas, otras plantas acuáticas, etc.). Símbolo en el que no suele existir la palabra de advertencia pero, cuando existe, es siempre: "Atención".

	E **Explosivo:** En determinadas condiciones, incluso sin presencia de oxígeno, la sustancia puede detonar o, bajo un calor intenso, explotar.		E **Comburente:** Productos químicos que en contacto con sustancias inflamables producen una reacción fuertemente exotérmica.
	F+ **Extremadamente inflamable:** Sustancias que a temperatura y presión normales son inflamables con el aire.		F **Fácilmente inflamable:** Productos que pueden inflamarse con aire a temperatura ambiente o sólidos que quemen con un contacto breve con una llama.
	T+ **Muy tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades muy pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.		T **Tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.
	Xn **Nocivo:** Productos que por inhalación, ingestión o penetración cutánea pueden producir efectos graves o crónicos.		Xi **Irritantes:** Productos que en contacto con la piel o la mucosa pueden producir una reacción inflamatoria.
	C **Corrosivo:** Productos que en contacto con tejidos vivos, como la piel humana, destruyen el tejido.		N **Peligroso para el medio ambiente:** Sustancias que pueden producir un efecto nocivo al medio ambiente.

1.3. Instrumentos de laboratorio

Un laboratorio de Física hoy día es muy variado, además de poder ser también virtual. Instrumentos posibles de medida: telescopio, microscopios (incluso los electrónicos), manómetro, barómetro, teslómetro, multímetro digital, balanzas, osciloscopios, material de Electrónica y circuitería, klystrons, termómetros, calorímetros, cronómetros, cintas métricas, calibradores, y otros varios son instrumentos usuales y populares en los laboratorios de Física convencionales. En los laboratorios de Química, también en los usuales, podemos encontrar probetas, mecheros Bunsen, pipetas, matraces, reactivos químicos, ... Este dibujo ayuda a entender la tipología de materiales en laboratorios de Química:

2. Herramientas fismáticas

La Física usa las Matemáticas como su lenguaje formal, aunque no es reducible solamente a éste. La Física tiene diferentes áreas con intersección mutua no vacía en varios casos. Una lista no exhaustiva es la siguiente:

- Mecánica. Puede ser Mecánica de partículas y sistemas. Mecánica de fluidos y campos son lo que junto a la de partículas forman la Mecánica clásica.
- Astronomía, Astrofísica y Cosmología. La Radioastronomía, neutrinología y otras ramas recientes como la astronomía de ondas gravitacionales o de rayos cósmicos están incluidos aquí.

- Mecánica Cuántica.
- Óptica.
- Física de ondas.
- Geofísica.
- Físico-Química.
- Física biológica/Biofísica.
- Física de los sistemas complejos.
- Física no lineal.
- Electrónica.
- Electromagnetismo (parte de la Mecánica Clásica).
- Termodinámica.
- Física relativista.
- Física matemática o física teórica.
- Mecánica estadística.
- Física nuclear y de partículas (altas energías).
- Física atómica.
- Física molecular.
- Espectroscopía.
- Radiofísica.
- Teoría de (super)cuerdas y p-branas.
- Relatividad General.

En la Química hay una división por áreas similar. Así, hablamos de Astroquímica, Química orgánica, Bioquímica, Química-Física, Química cuántica, Química molecular, Electroquímica, Termoquímica, Cinética química, Química de polímeros, Química atómica y nuclear, Química de las reacciones químicas y estequiometría, Química analítica, Química atmosférica,. . .

Del estudio del movimiento se encargan dos partes de la Física: la **Cinemática** y la **Dinámica**. Juntas forman la Mecánica Clásica de partículas y sistemas de partículas. El modelo de la partícula puntual es usado habitualmente en Física. Aunque hoy día se pueden usar otros modelos (cuerdas y membranas) hasta cierto punto de sofisticación y entendimiento.

2.1. Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros.

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ...Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \to Y$, con $y = \phi(X)$.

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs-133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs-133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiaciónde 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

2.1.1. Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770}s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta \nu(Cs-133)}} \tag{1}$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458m/s$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs-133)$ como sigue:

$$\boxed{1m = \frac{c}{299792458}s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \approx 30{,}663319\frac{c}{\Delta f(Cs-133)}} \tag{2}$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg \cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1kg = \frac{h}{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}}\frac{s}{m^2} = \frac{299792458^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)}\frac{h\Delta f}{c^2} = 1{,}4755214 \cdot 10^{40}\frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2}} \tag{3}$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}C \quad (A \cdot s)$ como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1A = \frac{e}{1{,}602176634 \times 10^{-19}}s^{-1} = \frac{e\Delta f(Cs-133)}{(1{,}602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6{,}789687 \cdot 10^{8} e\Delta f_{Cs}} \tag{4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2{,}2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}} \tag{6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I_v ó $\mathcal{J}$. La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entre vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683} \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2{,}61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2} \tag{7}$$

En el sistema C.G.S. o cegesimal, la unidad fundamental de longitud es el centímetro y la de masa es el gramo. Se mantiene el resto de unidades básicas en general. La dina es la unidad de fuerza, siendo el producto de 1 gramo por $1cm/s^2$ (galileo), dicha unidad de fuerza (1 dina). En el sistema técnico, el kilogramo-fuerza o kilopondio es la unidad de fuerza, manteniéndose el resto de unidades también en general.

2.1.2. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, 1Å$=10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec=3,26años-luz (lyr)$=3{,}086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1{,}496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M, $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}kg$.

- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA,...)
- Temperatura absoluta Θ, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_v: candela.
- Cantidad de sustancia o materia n: el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales ºC, gradianes (grados centesimalese). $2\pi rad = 360^\circ = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω: estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa M/L.
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondio o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1Nm$.
- Trabajo o energía: $W = Fd$, $ML^2T^{-2}.1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7 ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2.
- Momento angular ML^2T^{-1}.
- Potencia ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=1J/s. 1 C.V.=$735,4W$.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.

- Tensión superficial M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad η, $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise$\approx 0,1 Pa \cdot s$.
- Número de onda k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D. $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm. ϕ_L. Dimensiones ϕ_L.
- Luminancia B: $\phi_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=$10^4 cd/m^2$.
- Iluminación E: ϕ_L/L^2. lux. Otras: $1phot = 10^4 lux$.
- Módulo del campo gravitacional g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1}, en K^{-1}.
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2}.
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ε: $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m.
- Carga eléctrica: culombio C. $Q = IT$. $1e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F.
- Módulo de la densidad de corriente j: IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω.
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- Permeabilidad magnética μ. $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss=$10^{-4}T$.
- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber=$1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell=$10^8 Wb$.
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted= $10^3/4\pi$ A/m.

- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio= 1 Ci≈ $3{,}7 \cdot 10^{10} desintegraciones/s$, o también $1Ci = 6{,}14 \cdot 10^{-14} mol/s$.

2.1.3. Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.
- Constante universal de los gases $R = 8{,}314 J/Kmol$=$0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón $m_e = 0{,}511 keV/c^2 \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$.
- Masa del protón $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón $m_n \approx m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad $g_0(\oplus) = g_\oplus = 9,81 m/s^2$.
- Radio terrestre $R_\oplus = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4ºC, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.
- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2{,}89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5{,}67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2{,}88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96485 C/mol$.

2.2. Potencias de 10 y notación científica

En el S.I., hay unso prefijos universalmente aceptados a nivel internacional de múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad en cualquier sistema de unidades:

- Prefijos para múltiplos: deca (da) 10, hecta (h) 10^2, kilo (k) 10^3, mega (M) 10^6, giga (G) 10^9, tera (T) 10^{12}, peta (P) 10^{15}, exa (E) 10^{18}, zetta (Z) 10^{21}, yotta (Y) 10^{24}.
- Prefijos para submúltiplos: deci (d) 10^{-1}, centi (c) 10^{-2}, mili (m) 10^{-3}, micro (μ) 10^{-6}, nano (n) 10^{-9}, pico (p) 10^{-12}, femto (f) 10^{-15}, atto (a) 10^{-18}, zepto (z) 10^{-21}, yocto (y) 10^{-24}.

Regla mnemotécnica: PEZY-FAZY para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$\boxed{Z = x.abcdef \cdots 10^{\pm n}}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef \cdots$ son números arbitrarios.

2.3. Cifras significativas (c.s.)

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

2.4. Análisis de datos estadísticos. Teoría, gráficas e informe de resultados (avanzado)

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.

Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.

2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:
1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.
2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.
1. Statistical estimators.
Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{8}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{9}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{10}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{11}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{12}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.
Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{13}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1 \rightarrow n$:

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma^2_{x,n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = s_n} \tag{14}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}} \tag{15}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}{n}} \tag{16}$$

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right) = \sigma^2_{\sigma^2} = \sigma^2\left(\sigma^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{17}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right) = \sqrt{\sigma^2_{\sigma^2}} = \sigma\left(\sigma^2\right) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{18}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma] \longrightarrow P \approx 68{,}3\,\% \sim \frac{1}{3} \tag{19}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma] \longrightarrow P \approx 95{,}4\,\% \sim \frac{1}{22} \tag{20}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}7\,\% \sim \frac{1}{370} \tag{21}$$

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x} - 4\sigma, \overline{x} + 4\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}994\,\% \sim \frac{1}{15787} \tag{22}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x} - 5\sigma, \overline{x} + 5\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}99994\,\% \sim \frac{1}{1744278} \tag{23}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x} - 6\sigma, \overline{x} + 6\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}9999998\,\% \sim \frac{1}{506797346} \tag{24}$$

For a given confidence level *C.L.* (generally 90 %, 95 %, 98 %, 99 %), the interval width will be: $1{,}645\sigma, 1{,}96\sigma, 2{,}326\sigma, 2{,}576\sigma$.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{25}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:

$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.

$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.

$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{26}$$

If $q = x/y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{27}$$

3C. Error in powers.

With $x \pm \delta x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|} = |n||x^{n-1}|\delta x \tag{28}$$

and if $g = f(x)$, with the error of x being δx, you get

$$\boxed{\delta f = |\frac{df}{dx}|\delta x} \tag{29}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}} \tag{30}$$

or, equivalently, the errors are combined in quadrature (via standard deviations):

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta^2 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta^2 x_n}} \tag{31}$$

since

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{32}$$

for independent random errors (no correlations). Some simple examples are provided:
1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = k\delta x}$.
2nd. $q = \pm x \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \delta y + \cdots}$.
3rd. $q = kx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1| \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n| \frac{\delta x_n|}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided, the best estimator for the combined mean is a weighted mean with the variance, i.e.,

$$\overline{X}_{best} = \frac{\sum_{i=n}^{n} \frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{33}$$

The best standard deviation from the different combined measurements would be:

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{34}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. There, the standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{35}$$

2.5. Linear fits, least squares

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let (X_i, Y_i) from $i = 1, \ldots, n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with $Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.

We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

Writing $y = \alpha + \beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} \tag{36}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=i}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{37}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{38}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{39}$$

$$s_{\alpha}^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i(x_i - \overline{x})^2}\right]\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{40}$$

$$s_{\beta}^2 = \frac{1}{\sum_i(x_i - \overline{x})^2}\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{41}$$

Alternatively, all the above can be also written as follows. Define

$$S_x = \sum x_i \tag{42}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{43}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{44}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{45}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{46}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \hat{\varepsilon}$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}\hat{\alpha} = \frac{1}{n}S_y - \hat{\beta}\frac{1}{n}S_x \tag{47}$$

$$s_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n(n-2)}\left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2(nS_{xx} - S_x^2)\right] \tag{48}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{ns_{\varepsilon}^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{49}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2\frac{1}{n}S_{xx} \tag{50}$$

and where the correlation coefficient is

$$r=\frac{nS_{xy}-S_xS_y}{\sqrt{(nS_{xx}-S_x^2)(nS_{yy}-S_y^2)}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)s_xs_y} \tag{51}$$

or equivalently

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \tag{52}$$

and where s_x, s_y are the corrected sample standard deviations of x, y. To know what $s_{x,y}$ is in a more general setting, we note that the sample mean vector $\bar{\mathbf{x}}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{ij},\quad j=1,\ldots,K.$$

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{\mathbf{x}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_j\\ \vdots\\ \bar{x}_K\end{bmatrix} \tag{53}$$

The sample covariance matrix is a “K”-by-“K” matrix

$$\mathbf{Q}=\left[q_{jk}\right]$$

with entries

$$q_{jk}=s_{x,y}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)(x_{ik}-\bar{x}_k)$$

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$\mathbf{Q}=s_{x,y}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where $\hat{\beta},\hat{\alpha}$ are. The t-value has a Student’s t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for $\hat{\beta}$:

$$\beta\in\left[\widehat{\beta}-s_{\widehat{\beta}}t^*_{n-2},\ \widehat{\beta}+s_{\widehat{\beta}}t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where t^*_{n-2} is the $\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\gamma=0{,}05$, then the C.L. is 95 %.

Similarly, the confidence interval for the intercept coefficient $\hat{\alpha}$ is given by

$$\alpha\in\left[\widehat{\alpha}-s_{\widehat{\alpha}}t^*_{n-2},\ \widehat{\alpha}+s_{\widehat{\alpha}}t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where as before above

$$s_{\widehat{\alpha}}=s_{\widehat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_i^{\,2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

2.6. Escalares, vectores y más allá

- Las magnitudes se pueden clasificar en escalares o vectoriales.
- Las magnitudes escalares quedan totalmente especificadas si aparte de la unidad correspondiente, damos un número. Por ejemplo, son escalares la temperatura, la densidad, la masa, el tiempo,. . .
- Las magnitudes vectoriales necesitan, aparte de un número, especificar una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Matemáticamente, las magnitudes vectoriales son vectores con ciertas propiedades y físicamente pueden visualizarse como segmentos orientados en el espacio. Son vectoriales, exempli gratia, la posición (o el desplazamiento), la velocidad, la aceleración, la fuerza, . . .

Curiosidad: existen, además de las magnitudes escalares y vectoriales, otras magnitudes más complicadas. Son los denominados pseudoescalares, los pseudovectores, los tensores y los pseudotensores. También en ciertas teorías se usan cantidades de tipo "espinorial", "twistorial" y otros tipos más sutiles de magnitudes de tipo matemático que no entran en este curso.

Propiedades y operaciones básicas con vectores en el plano. Los vectores, en un sistema cartesiano rectangular de coordendas, se pueden representar por segmentos orientados de tipo

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

con $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\sin\varphi$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. La suma (or resta) de vectores se realiza gráficamente con la ley del paralelogramo, o matemáticamente, si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$, $\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B}$ es tal que:

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j}$$

Además, multiplicar un número por un vector es prolongarlo tantas veces como el número indica (con el signo menos indicando inversión de sentido):

$$\lambda\vec{C} = \lambda C_x\vec{i} + \lambda C_y\vec{j}$$

Entre dos vectores planos también existe un producto llamado producto escalar, que define ortogonalidad y proyecciones:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\varphi$$

y donde

$$|\vec{A}| = +\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

2.7. Trigonometría básica

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{H} \tag{54}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{H} \tag{55}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B} \tag{56}$$

$$\operatorname{co}\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{H}{A} \tag{57}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{B} \tag{58}$$

$$\mathrm{co}\tan\alpha = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A} \tag{59}$$

Razones trigonométricas de ángulos más importantes del primer cuadrante (el resto se sacan por simetría mediante circunferencia goniométrica):

$\varphi(^\circ, rad)$	sin	cos	tan
$0, 0$	0	1	0
$30, \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45, \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60, \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90, \pi/2$	1	0	∞

Equivalencia entre radianes y grados

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$$

Identidades trigonométricas notables:

Teorema fundamental

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \mathrm{co}\sec^2 x$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{60}$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{61}$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{62}$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{63}$$

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{64}$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{65}$$

$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1 - \tan^2(X)} \tag{66}$$

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{2}} \tag{67}$$

$$\cos(X/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos(X)}{2}} \tag{68}$$

$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{1 + \cos(X)}} \tag{69}$$

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1-\cos(2X)}{2} \tag{70}$$
$$\cos^2 X = \frac{1+\cos(2X)}{2} \tag{71}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{72}$$
$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{73}$$
$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{74}$$
$$\sin(X)-\sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{75}$$
$$\cos(X)+\cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{76}$$
$$\cos(X)-\cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{77}$$

2.8. Resolución de ecuaciones básicas de grado 1 y 2

Las ecuaciones lineales de variable real y compleja se resuelven de forma sencilla. Ecuaciones lineales: $ax+b=c$. Si $a\neq 0 \rightarrow x=\frac{c-b}{a}$. Ecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c=0$. La resolución es mediante la conocida fórmula:

$$x_{\pm} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac \;\; \text{es el discriminante.}$$

Si $\Delta>0$, las soluciones son simples y diferente $x_{\pm}$. Si $\Delta=0$, las soluciones son iguales $x_{\pm}=x_{+}=x_{-}=-\frac{b}{2a}$. Si $\Delta<0$, las soluciones son simples pero complejas conjugadas (en los complejos). Una ecuación bicuadrática $ax^4+bx^2+c=0$ se resuelve mediante el cambio $z=x^2$. Hay 4 soluciones en general. Hay fórmulas complicadas para la resolución de las ecuaciones de cuarto y tercer grado. Para las de grado quinto o superior, no se puede hacer mediante funciones “elementales”.

2.9. Fórmulas y resultados útiles: miscelánea fismática

2.9.1. Áreas

Rectángulo: $A=bh$
Cuadrado: $A=L^2$
Paralelogramo: $A=bh$
Triángulo: $A=bh/2$
Trapecio de lados paralelos a y b, altura h: $A=\frac{(a+b)h}{2}$
Polígono regular de n lados de longitud L: $A=\frac{1}{4}nL^2 \text{co}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$
Círculo de longitud $L_c=2\pi R=\pi d$: $A_C=\pi R^2$
Elipse de semiejes a,b: $A=\pi ab$
Cono circular recto de radio R y altura h con generatriz L:
$A=\pi RL=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$
Cilindro circular recto de altura h y radio R: $A=2\pi Rh$

Esfera de radio R: $A = 4\pi R^2$
Sector circular de ángulo θ: $A = R^2\theta/2$
Área de un hipercubo D-dimensional: $A_{D-1} = D!L^{D-1}$

2.9.2. Volúmenes

Paralelepípedo: $V = abc = \det(OA, OB, OC)$
Hiperparalelepípedo, politopo rectangular de lados X_i: $V_n = \prod_i X_i$
Esfera 3d: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Esfera nd: $V_n = \dfrac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Esfera nd, área: $A_{d-1} = \dfrac{dV_n}{dR} = \dfrac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}$
Cilindro recto 3d: $V = \pi R^2 h$
Pirámide de área A y altura h en 3d: $V = \dfrac{Ah}{3}$
Cono circular recto de radio R, altura h: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$
Elipsoide de semiejes a, b, c: $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$
Volumen del hipercubo nd: $V = L^n$.
Volumen del hipertoro hiperdimensional isótropo ($R_i = R, \forall i = 1, 2, \ldots, n$): $V_t(nd) = (2\pi R)^n$.

2.9.3. Densidad

Densidades de masa:

$$\rho = \frac{M}{V}, \sigma = \frac{M}{S}, \lambda = \frac{M}{L}$$

Densidades de carga:

$$\rho = \frac{Q}{V}, \sigma = \frac{Q}{S}, \lambda = \frac{Q}{L}$$

Densidades de energía:

$$\rho = \frac{E}{V}, \sigma = \frac{E}{S}, \lambda = \frac{E}{L}$$

Densidades de partículas:

$$\rho = \frac{N}{V}, \sigma = \frac{N}{S}, \lambda = \frac{N}{L}$$

Densidades de cantidad de sustancia (concentración):

$$\rho = \frac{n}{V}, \sigma = \frac{n}{S}, \lambda = \frac{n}{L}$$

3. Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es $\mathbb{C}$, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación de n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas...

3.1. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}} \tag{78}$$

3.2. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida "en general". Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \dfrac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

3.3. Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

3.3.1. Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a "discriminant" whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the "irreducible case" of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- "Eliminate the square term" by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution x = 1 in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

3.3.2. Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

3.3.3. Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$

$$ST = -Q$$

$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$
$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that m+nm+nm+n must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$
$$y_2 = Sw + Tw^2$$
$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions.
Q.E.D.

3.3.4. Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q, R, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

3.4. Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

3.4.1. Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

3.4.2. Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.
- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.
- Reescribe la ecuación como
$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$
- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2. Esto da dos soluciones:
$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$
- Para cada z, z_1, z_2, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,:
$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

3.4.3. General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \tag{79}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \tag{80}$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \tag{81}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2 d}{8a^3} \tag{82}$$

and where

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\,p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{83}$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \tag{84}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \tag{85}$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2 e + 27ad^2 - 72ace \tag{86}$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for “Q”, any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

4. Otras definiciones científicas

Axioma: Enunciado o fórmula que se admite sin demostrar.

Postulado: Supuesto que se establece para fundar una demostración, una teoría o un cuerpo de doctrina.

Doctrina o disciplina: método o conjunto de métodos que persiguen algún fin. Así tenemos disciplinas o doctrinas científicas, religiosas, etc.

Definición: Declaración del significado de un término o signo, es decir, del uso que de él se va a hacer.

Proposición: Enunciado de una verdad demostrada, o que se trata de demostrar.

Escolio: Proposición aclaratoria.

Lema: Proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema.

Teorema: Proposición que afirma una verdad demostrable. Consta de tres partes: hipótesis (lo que se supone), tesis (lo que se va a demostrar) y demostración (la prueba de la tesis).

Corolario: Proposición que se deduce por sí sola de los demostrado anteriormente.

Métodos de inferencia lógicos: deducción, inducción y abducción(retroducción o presunción). Los 3 métodos conocidos de razonamiento son el deductivo, el inductivo y el abductivo, ya conocidos por Aristóteles como la epagogé (inducción), la apodeixis (deducción) y la apagogé (abducción).