

Física: el modelo de Bohr

J. F. G. H.

Master of Mystic Equations and Physmatics





The Strange Doctor/Doctor Strange will teach you Physics/Chemistry... And some bits of Mystic Equations (Arts), and Physmatics, as well...

Índice

1. Preludio	4
2. La inestabilidad electromagnética del átomo de hidrógeno	4
3. Los espectros atómicos	6
4. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno	7
5. Átomos hidrogenoides	9
6. Las ecuaciones de Maxwell	10
7. Hacia la Mecánica Cuántica	11



1. Preludio

Durante el siglo XIX, se recuperó la teoría atómica en Química mientras los descubrimientos en el estudio de la Óptica, la electricidad y el magnetismo, se condensó en las ecuaciones de Maxwell.

Dalton suponía que los átomos de los elementos químicos eran todos iguales. Mendeleiev propuso la primera Tabla Periódica Moderna. Sin embargo, el experimento de J. J. Thomson, como anticipaban ya las experiencias de Franklin y las propias ecuaciones de Maxwell, introdujeron la necesidad de que los otrora indivisibles átomos, tenían en su interior partículas. Así, en 1897, como consecuencia del experimento de los rayos catódicos, J. J. Thomson introdujo el electrón y el modelo atómico del pudín con pasas (plumcake model).

Rutherford, ideó un experimento para observar el interior de los átomos, bombardeando con partículas alfa (más adelante identificadas con núcleos de helio-4) una fina lámina de oro. El experimento, fue realizado por Geiger y Marsden y la desviación de las partículas alfa condujo a Rutherford a plantear el modelo nuclear del átomo. El átomo era un espacio esencialmente vacío, y dentro de él se encontraban los núcleos atómicos, de un tamaño 100000 veces menor que el tamaño atómico. La existencia de los núcleos era inevitable: no había otra forma de explicar los rebotes hacia atrás de las partículas alfa y su dispersión en la lámina de oro. Sin embargo, y aunque se introdujeron los protones y neutrones como partículas del núcleo, existían 2 problemas (de los que Rutherford era consciente):

- La inestabilidad electromagnética del átomo de hidrógeno.
- Los espectros atómicos discretos los átomos.

2. La inestabilidad electromagnética del átomo de hidrógeno

Cualquier átomo, según Rutherford, tendría los electrones orbitando circularmente, en balance de fuerzas según la ley sencilla:

$$F_c = F_e \leftrightarrow ma = \frac{mv^2}{r} = K \frac{e^2}{r^2} \leftrightarrow a = \frac{K_C e^2}{mr^2} \quad (1)$$

donde K es la constante de Coulomb, e es la carga elemental del átomo, y r es la distancia entre el electrón y el núcleo atómico. Sin embargo, la teoría electromagnética clásica, asentada por Faraday y Maxwell en el siglo XIX, implicaba que las partículas cargadas con aceleración deben radiar ondas electromagnéticas y perder energía.

La fórmula que da la potencia radiada por la partícula cargada en forma de radiación electromagnética es la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2K_C q^2 a^2}{3c^3} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (2)$$

La energía mecánica del átomo de hidrógeno clásico es igual a la energía cinética más la energía potencial eléctrica:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} - K \frac{e^2}{r} \quad (3)$$

Usando la relación anterior del balance de fuerzas

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{K e^2}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{K e^2}{mr} \quad (4)$$

la energía mecánica se simplifica a la siguiente expresión

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ke^2}{r} = \frac{mKe^2}{2mr} - \frac{Ke^2}{r} = -\frac{K_Ce^2}{2r} = \frac{2(K_Ce^2)^3}{3r^2c^3} \quad (5)$$

Ahora podemos igualar esta fórmula a la fórmula de Larmor, con $q = e$:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{K_Ce^2}{2r} \right) = \frac{2}{3} \frac{K_Ce^2 a^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{K_Ce^2}{c^3} \left(\frac{K_Ce^2}{mr^2} \right)^2 \quad (6)$$

Para simplificar esta expresión un poco podemos introducir el llamado radio clásico del electrón r_0 , que es el radio hipotético del electrón clásico si toda su energía fuera de tipo potencial eléctrico:

$$mc^2 = \frac{Ke^2}{r_0} \rightarrow r_0 = \frac{Ke^2}{mc^2} \quad (7)$$

donde m es la masa del electrón. Con esta expresión de r_0 , la introducimos en la expresión de la potencia para dar:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{K_Ce^2}{2r} \right) = \frac{2r_0mc^2}{3c^3} \left(\frac{K_Ce^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{2r_0}{3mc} \left(\frac{K_Ce^2}{r^2} \right)^2 = \frac{2r_0(mc^2)^2 r_0^2}{3mc r^4} = \frac{2mc^3 r_0^3}{3r^4} \quad (8)$$

es decir, haciendo la derivada, pero con el signo cambiado porque pierde energía,

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{K_Ce^2}{2r} \right) = -\frac{K_Ce^2}{2r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2mc^3 r_0^3}{3r^4} \quad (9)$$

que se reescribe como

$$-r^2 dr = \frac{4mc^3 r_0^3}{3K_Ce^2} dt = \frac{4r_0^2 c dt}{3} \quad (10)$$

Ahora podemos integrar la ecuación

$$-3r^2 dr = 4r_0^2 c dt \rightarrow -\int_{a_0}^0 3r^2 dr = \int_0^t 4r_0^2 c dt \quad (11)$$

resultando

$$-r^3 + a_0^3 = 4r_0^2 ct \quad (12)$$

en donde hemos usado la condición inicial $r_0 = r(t=0) = a_0$, donde $a_0 = \hbar^2/(mK_Ce^2)$ es el radio de Bohr (no el radio clásico del electrón r_0), radio de la órbita fundamental del electrón en el átomo de hidrógeno (y que deduciremos en secciones posteriores). La solución es pues:

$$\boxed{r^3 = a_0^3 - 4r_0^2 ct} \quad (13)$$

Ahora podemos calcular el tiempo de caída, si $r(t_f) = 0$, entonces

$$4r_0^2 ct_f = a_0^3 \quad (14)$$

equivalentemente

$$\boxed{t_f = \frac{a_0}{4c} \sim 20\text{ps} = 2,0 \cdot 10^{-11} \text{s}} \quad (15)$$

Las siguientes expresiones para t_f son encontradas en la literatura:

$$t_f = \frac{1}{\alpha^5} \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{4c} = \frac{\hbar}{\alpha^5 4mc^2} \quad (16)$$

$$t_f = \frac{\hbar^6 c^5}{K_C^5 e^{10} 4mc^2} = \frac{\hbar^6 c^3}{4K_C^5 m e^{10}} \quad (17)$$

$$t_f = \frac{256 \hbar^6 c^3 (\epsilon_0 \pi)^5}{m e^{10}} = \frac{c^3 4^4 \epsilon_0^5 \pi^5 \hbar^6}{m e^{10}} \quad (18)$$

$$t_f = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 a_0^3}{e^4} \quad (19)$$

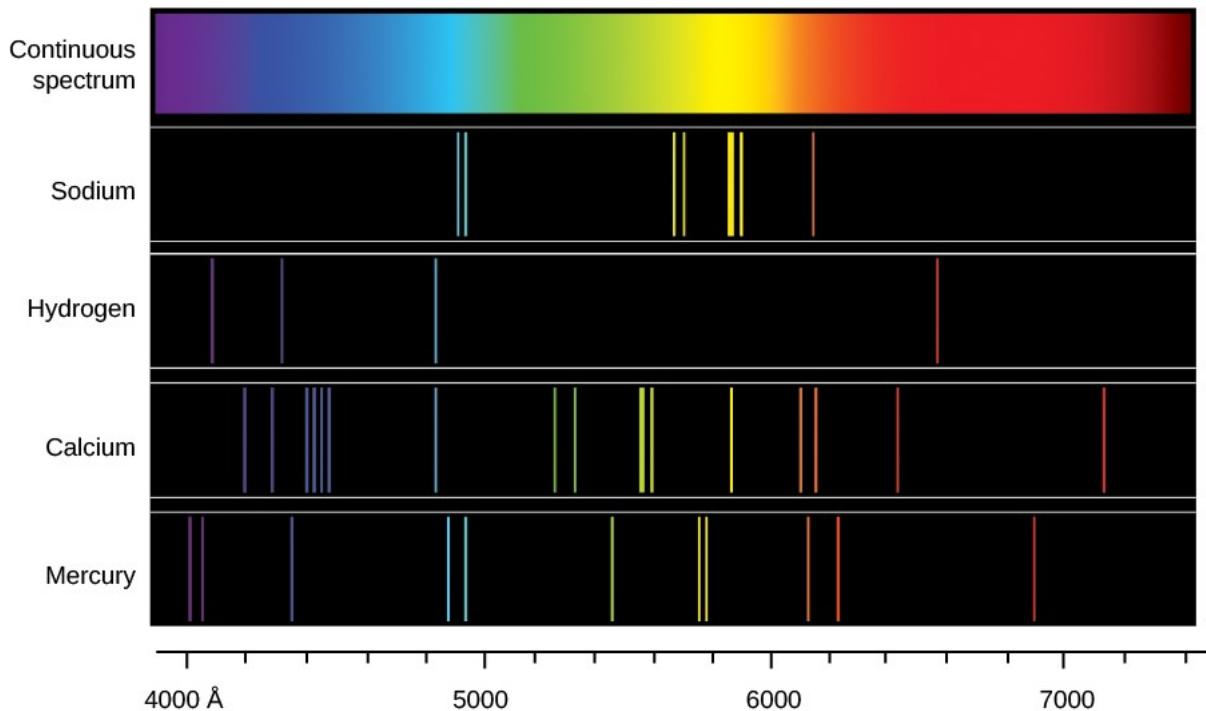
donde

$$\alpha = \frac{K_C e^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (20)$$

es la llamada constante de estructura fina electromagnética.

3. Los espectros atómicos

Los espectros atómicos son la huella dactilar de los átomos. Cuando un elemento químico se calienta (o enfría), a cierta temperatura, emite radiación electromagnética (luz) que puede ser descompuesta por un prisma. La descomposición de esta luz NO es un continuo sino un conjunto de líneas discretas.



Un espectro de emisión de un átomo (molécula o partícula) consisten generalmente en un conjunto de líneas discretas de colores en un fondo negro. En cambio, un espectro de absorción es un conjunto de líneas oscuras en un fondo negro. La física clásica no tiene explicación para este comportamiento. La primera pista para resolver el enigma la proporcionó la resolución de Planck del problema del cuerpo negro, o radiación electromagnética emitida por un cuerpo caliente. Planck tuvo que aceptar, a regañadientes y sin creérselo en serio, que la luz estaba formada por “átomos” o “granos” que llamó “cuantos”. En el fondo, no es diferente a la hipótesis corpuscular de la materia (o hipótesis atómico-molecular), que señala que la materia es granular, y está formada por un número grande de partículas

(cargadas), que se mueven, y atraen y repelen de distintas formas. Así, la hipótesis cuántica no es más que la extensión a la radiación de la hipótesis cinético-molecular.

Aunque Planck no le dio mucha importancia ni realidad a su hipótesis de cuantización (la observaba como un truco matemático sin realidad física), Albert Einstein sí se dio cuenta de su relevancia y que la hipótesis cuántica permitía explicar el efecto fotoeléctrica de forma natural, para el que habían fallado todas las soluciones de la teoría ondulatoria de la luz. La explicación del efecto fotoeléctrico por Albert Einstein, le daría el premio Nobel (para su disgusto, no por la teoría de la relatividad), en el año 1921. La ecuación que derivó Einstein, es

$$hf = hf_0 + E_c \quad (21)$$

o bien, equivalentemente,

$$hf - \phi_0 = hf - eV_f = E_c(max) \quad (22)$$

4. El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno

Para el modelo de Bohr, tenemos los siguientes postulados:

- Los electrones, aunque debieran radiar clásicamente ondas electromagnéticas, no lo hacen en órbitas circulares estacionarias.
- El momento angular $L = pr = mvr$ se encuentra cuantizado, en múltiplos enteros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Es decir,

$$L = pr = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (23)$$

- Cuando un electrón salta de una órbita a otra, se satisface la relación de Planck

$$\Delta E = E(n+1) - E(n) = hf = \hbar\omega \quad (24)$$

o más generalmente

$$\Delta E = E(n_2) - E(n_1) = Nhf = N\hbar\omega \quad N \in \mathbb{Z}^+, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (25)$$

Ahora tenemos dos ecuaciones, que ya hemos derivado previamente:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{Ke^2}{r^2} \quad (26)$$

$$E = -\frac{Ke^2}{2r} \quad (27)$$

De la condición de cuantización del segundo postulado del modelo de Bohr, se deduce que

$$m^2 v^2 r^2 = n^2 \hbar^2 \rightarrow mv^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{mr^2} \quad (28)$$

Entonces

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m n^2 \hbar^2}{r mr^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{mr^3} \rightarrow \frac{n^2 \hbar^2}{mr^3} = \frac{K_C e^2}{r^2} \quad (29)$$

de donde se obtiene la cuantización de las órbitas del modelo de Bohr

$$r = r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{m K_C e^2} = \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) n^2 = a_0 n^2, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (30)$$

con el valor del radio de Bohr a_0 dado por

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mK_C^2} \approx 0,53\text{\AA} = 5,3 \cdot 10^{-11}m \quad (31)$$

El tiempo en dar una vuelta a la órbita n-ésima por un fotón o partícula sin masa es:

$$t_n(\gamma) = \frac{2\pi r_n}{c} = \frac{2\pi\hbar^2 n^2}{mcK_C e^2} = \frac{2\pi\hbar n^2}{\alpha mc^2} \quad (32)$$

Sin embargo, el período del electrón en la n-ésima órbita será:

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n} = \frac{2\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right) n^2}{\frac{\alpha c}{n}} = \frac{2\pi\hbar n^3}{\alpha^2 mc^2} \quad (33)$$

Es interesante comparar este tiempo con el que se obtendría de saturar la expresión del principio de indeterminación de Heisenberg ($E_n \tilde{T}_n = \hbar/2$):

$$\tilde{T}_n = \frac{\hbar}{2E_n} = -\frac{\hbar n^2}{mc^2 \alpha^2} = -\frac{T_n}{2\pi n} \quad (34)$$

Insertando la expresión de la cuantización de Bohr, en la expresión de la velocidad, obtenemos la cuantización de las velocidades:

$$v^2 = \frac{K_C e^2}{mr} = \frac{(K_C e^2)^2}{\hbar^2 n^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{n^2} \rightarrow v_n = \frac{\alpha c}{n} \quad (35)$$

También están cuantificadas las aceleraciones:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{K e^2}{mr^2} \rightarrow a = a_n = \frac{\frac{(K_C e^2)^2}{(n\hbar)^2}}{\frac{mK_C e^2}{(n\hbar)^4}} = \frac{m(K_C e^2)^3}{(n\hbar)^4} \rightarrow a_n = \frac{\alpha^3 mc^3}{\hbar n^4} \quad (36)$$

Se puede probar que los períodos, las frecuencias, y todas las variables cinemáticas y dinámicas clásicas (incluso las no estándar) están cuantizadas de forma trivial en el modelo de Bohr. Por ejemplo, para el jerk o sobreaceleración, se tiene que:

$$j_n = \frac{a_n}{T_n} = \frac{\frac{\alpha^3 mc^3}{\hbar n^4}}{\frac{2\pi\hbar n^3}{mc^2 \alpha^2}} \rightarrow j_n = \frac{a_n}{T_n} = \frac{\alpha^5 m^2 c^5}{\hbar^2 n^7} = \frac{K_C^5 m^2 e^{10}}{\hbar^7 n^7} \quad (37)$$

Para la variable “absement” (ausición, ausimiento) $\mathcal{A}_n = r_n T_n$:

$$\mathcal{A}_n = \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{n^2}{\alpha}\right) \left(\frac{\hbar}{mc^2} \frac{n^3}{\alpha^2}\right) \rightarrow \mathcal{A}_n = \frac{\hbar^2 n^5}{\alpha^3 m^2 c^3} = \frac{\hbar^5 n^5}{m^2 K_C^3 e^6} \quad (38)$$

En el caso particular importante de la energía total, se obtiene que, usando la cuantización de las órbitas, la energía mecánica cuantizada total es igual a

$$E = -\frac{K_C e^2}{2r} \rightarrow E_n = -\frac{m(K_C e^2)^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} = -\frac{Ry}{n^2} \quad (39)$$

donde se define la constante de Rydberg

$$Ry = \frac{\alpha^2 mc^2}{2} = \frac{m(K_C e^2)^2}{2\hbar^2} \approx 2,18 \cdot 10^{-18} J = 13,6 eV \quad (40)$$

Ahora podemos derivar la fórmula de Balmer (o de Rydberg) para el átomo de hidrógeno. Si hacemos una transición de un nivel n_1 a otro $n_2 > n_1$, el átomo absorberá una energía igual a:

$$\Delta E = E(n_2) - E(n_1) = Ry \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (41)$$

que es la celeberrima fórmula de Balmer, y cuya derivación le daría a Niels Bohr el premio Nobel de Física.

5. Átomos hidrogenoides

El modelo de Bohr no puede generalizarse a átomos polielectrónicos, ni siquiera cuando sea el helio. Sin embargo, sí da resultados aceptables para átomos con un núcleo de Z protones y un solo electrón, átomos llamados hidrogenoides. Basta con hacer en las fórmulas de Bohr, la sustitución $e^2 \rightarrow Ze^2$. Así, se obtienen la cuantización para las órbitas, períodos, velocidades, aceleraciones, jerks, absements o la energía siguientes:

$$r = r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mZK_C e^2} = \frac{a_0 n^2}{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (42)$$

$$t_n(\gamma) = \frac{2\pi r_n}{c} = \frac{2\pi \hbar^2 n^2}{mcK_C e^2} = \frac{2\pi \hbar n^2}{\alpha mc^2} \quad (43)$$

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n} = \frac{2\pi \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \left(\frac{1}{Z\alpha} \right) n^2}{\frac{Z\alpha c}{n}} = \frac{2\pi \hbar n^3}{Z^2 \alpha^2 mc^2} \quad (44)$$

$$v^2 = \frac{K_C e^2}{mr} = \frac{Z^2 (K_C e^2)^2}{\hbar^2 n^2} = \frac{\alpha^2 c^2}{n^2} \rightarrow v_n = \frac{\alpha Zc}{n} \quad (45)$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{ZK_C e^2}{mr^2} \rightarrow a = a_n = \frac{\frac{(ZK_C e^2)^2}{(\hbar n)^2}}{\frac{\hbar^2 n^2}{mZK_C e^2}} = \frac{mZ^3 (K_C e^2)^3}{(\hbar n)^4} \rightarrow a_n = \frac{\alpha^3 Z^3 mc^3}{\hbar n^4} \quad (46)$$

$$j_n = \frac{a_n}{T_n} = \frac{\frac{Z^3 \alpha^3 mc^3}{\hbar n^4}}{\frac{\hbar n^3}{mc^2 Z^2 \alpha^2}} \rightarrow j_n = \frac{a_n}{T_n} = \frac{Z^5 \alpha^5 m^2 c^5}{\hbar^2 n^7} = \frac{Z^5 K_C^5 m^2 e^{10}}{\hbar^7 n^7} \quad (47)$$

$$\mathcal{A}_n = r_n T_n = \left(\frac{\hbar}{mc} \frac{n^2}{Z\alpha} \right) \left(\frac{\hbar}{mc^2} \frac{n^3}{Z^2 \alpha^2} \right) \rightarrow \mathcal{A}_n = \frac{\hbar^2 n^5}{Z^3 \alpha^3 m^2 c^3} = \frac{\hbar^5 n^5}{m^2 Z^3 K_C^3 e^6} \quad (48)$$

$$E = -\frac{ZK_C e^2}{2r} \rightarrow E_n = -\frac{m(ZK_C e^2)^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{Z^2 \alpha^2 mc^2}{2n^2} = -\frac{Z^2 Ry}{n^2} \quad (49)$$

Para la fórmula de Balmer-Rydberg del átomo hidrogenoide, se tendrá que:

$$\Delta E = E(n_2) - E(n_1) = Z^2 Ry \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (50)$$

6. Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo fueron sintetizadas por James Clerk Maxwell en una elegante formulación matemática (aunque ya eran conocidas para Michael Faraday años antes a nivel empírico o experimental). En forma diferencial e integral, son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi K_C Q = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \leftrightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (52)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (53)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 (I + I_D), \quad I_D = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (54)$$

En la formulación relativista especial del electromagnetismo en un espacio-tiempo de 3+1 dimensiones (o más generalmente, en cualquier espacio-tiempo) se pueden reformular estas 4 ecuaciones como dos ecuaciones dependientes una de la otra:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (55)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \partial^\nu F^{\sigma\tau} = 0 \quad (56)$$

o bien, en formalismo de formas diferenciales:

$$\star d \star F = J \quad (57)$$

$$dF = 0 \quad (58)$$

que da la conservación de la corriente y carga eléctrica via $d \star d \star F = dJ = 0$, y $F = dA$ (en componentes, es $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$) es la 2-forma campo de fuerza derivada de la 1-forma potencial gauge electromagnético. En el caso de teorías gauge no abelianas, estas ecuaciones admiten una generalización, dada por las denominadas ecuaciones de Yang-Mills:

$$\star D_A \star F_A = J \leftrightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} + [A^\mu, F_{\mu\nu}] = J_\nu \quad (59)$$

$$D_A F_A = 0 \leftrightarrow D_\mu F_{\nu\sigma} + D_\nu F_{\sigma\mu} + D_\sigma F_{\mu\nu} = 0 \quad (60)$$

$$D_A = d + A \wedge \leftrightarrow \partial_\mu + [A_\mu, \quad] \quad (61)$$

$$F_A = dA + A \wedge A \leftrightarrow F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (62)$$

En el formalismo de álgebras de Clifford se puede reformular el electromagnetismo como una simple ecuación:

$$\partial F = (\partial \cdot + \partial \wedge) F = J \quad (63)$$

De las ecuaciones de Maxwell, macroscópicas o microscópicas, se deduce la existencia, incluso en el vacío, de soluciones de tipo ondas, llamadas ondas electromagnéticas, y que se propagan con una velocidad (en el vacío) igual a

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (64)$$

Cuando Maxwell derivó sus ecuaciones, e introdujo su término adicional para lograr la conservación de la carga eléctrica, se dio cuenta de la combinación de las constantes eléctricas y magnéticas en forma de velocidad de la luz, y propuso que la luz, que ya en su época estaba intentando experimentalmente medirse su velocidad, era una onda electromagnética. Faraday, se quedó impresionado por el trabajo teórico de Maxwell, que ponía colofón y fin a la comprensión clásica del electromagnetismo que había llevado casi un siglo.

7. Hacia la Mecánica Cuántica

La fórmula de Bohr para el átomo de hidrógeno no captura otros efectos cuánticos, como el efecto Stark, el efecto Zeeman, el efecto Zeeman anómalo, ni explica el espín del electrón ni otras partículas subatómicas. Se intentó una corrección relativista del modelo de Bohr, incluyendo órbitas elípticas, mediante la introducción de números cuánticos adicionales, mediante las llamadas variables acción-ángulo de la Mecánica Clásica, corrección llamada de Bohr-Sommerfeld o modelo semiclásico del átomo. Así, se tenían:

$$\oint p dr = n\hbar \quad (65)$$

$$\oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi \hbar \quad (66)$$

$$\oint p_\theta d\theta = n_\theta \hbar \quad (67)$$

Pero esto tampoco daba cuenta del espín del electrón de forma obvia o natural, aunque sí tuvo éxitos parciales rederivando correcciones relativistas del átomo de hidrógeno. Louis de Broglie introdujo la dualidad onda-partícula. Toda partícula tiene una longitud de onda asociada, no es solamente que las ondas se pueden comportar como partículas, las propias partículas son también ondas bajo ciertas condiciones. Esta dualidad, derivada por de Broglie en forma relativista, adquiere la forma simple:

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{Mv} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (68)$$

Posteriormente, Heisenberg introdujo la llamada mecánica matricial, y su principio de indeterminación, que indica que no puede conocerse simultáneamente y con precisión los valores de dos observables conjugados:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (69)$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (70)$$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle |[A, B]| \rangle \quad (71)$$

Finalmente, Schrödinger y Dirac, introdujeron sus ecuaciones cuánticas para los átomos:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z, t) \right) \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = E\Psi \quad (72)$$

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu + i\hbar e\gamma^\mu A_\mu + mc) \Psi = (i\hbar\gamma \cdot D + mc) \Psi = 0 \quad (73)$$

De estas ecuaciones, resueltas numéricamente, se obtienen actualmente las estructuras espectrales de átomos, moléculas y partículas subatómicas. El objeto fundamental de la Física Cuántica es una función de onda o vector de estado *Psi* que es en general un número complejo $\Psi \in \mathbb{C}$, $\Psi = a + bi$, con lo que la interpretación real de la función de onda debe ser entendida de otra forma. Max Born, introdujo la idea de que la función de onda es una amplitud de probabilidad, y no es medible, pero el cuadrado de la función de onda, o más precisamente el módulo al cuadrado, da la probabilidad de encontrar a la partícula en el espacio-tiempo. La Física Cuántica, extendida a sistemas relativistas, convierte la función de onda en una superposición de ondas sobre la que actúan operadores cuánticos de creación y destrucción de partículas. Es la llamada Teoría Cuántica Relativista Especial o Teoría Cuántica de Campos invariantes, en su versión más refinada conocida hoy día como Modelo Estándar de la Física de partícula subatómica o Física de Altas Energía. Fenómenos cuánticos que no tienen explicación clásica:

- Espín del electrón y otros números cuánticos de partículas subatómicas.
- En la Física Atómica: los efectos Zeeman normal, Zeeman anómalo, el efecto Stark, la interacción espín-órbita, el desplazamiento Lamb,...
- La superposición cuántica de estados “indefinidos”.
- El entrelazamiento cuántico.
- Estados cuánticos exóticos de la materia: condensados de Bose-Einstein, condensados fermiónicos, aislantes y superconductores topológicos, aniones (partículas con espín arbitrario), superconductividad, superfluidez, cristales de tiempo, puntos cuánticos,...
- El efecto Zenón cuántico y el efecto anti-Zenón cuántico.
- La decoherencia cuántica.
- La creación de pares de partículas-antipartículas (y la predicción de la antimateria).
- La creación de pares en campos fuertes.
- El efecto Hall cuántico y Hall cuántico fraccional.
- El colapso de la función de onda o reducción del vector de estado (interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica).
- Las oscilaciones de neutrinos y quarks.
- La desintegración radioactiva.
- Procesos de decaimiento y penetración de partículas en barreras impenetrables clásicamente (efecto túnel cuántico).
- El mass-gap de las teorías Yang-Mills y la masa cuántica de las partículas en QCD.
- La ruptura espontánea de simetría.
- La explicación de la Tabla Periódica de los Elementos Químicos.
- La estructura y brillo de las estrellas.
- La fisión y fusión nuclear.
- Interconversión de materia y energía en partículas.
- El plasma de quark-gluones y otros tipos de plasma.
- El Modelo Estándar de partículas elementales.
- La termodinámica cuántica y evaporación de los agujeros negros.
- Las teorías de supercuerdas/teoría M, F, S,...

La Teoría Cuántica de Campos permite explicar el 5 % del Universo, pero no incluye la gravitación todavía, que está gobernada por la teoría de campos localmente relativista general llamada Relatividad General (no debe confundirse con la Relatividad Especial), que en su versión más refinada se llama Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM. Las ecuaciones de la Relatividad General adquieren la forma tensorial simple siguiente:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (74)$$

De estas ecuaciones, entre otros efectos, se puede deducir, para una métrica $g_{\mu\nu}(x)$, la curvatura, la precesión del perihelio de Mercurio, la dilatación gravitacional del tiempo, el gravitomagnetismo, los agujeros negros (y los agujeros de gusano), la teoría del Big-Bang, la existencia o no de singularidades espacio-temporales y curvas cerradas de género tiempo (CTC), las lentes gravitacionales, las ondas gravitacionales, el decaimiento orbital por la emisión de ondas gravitacionales, la termodinámica de agujeros negros, la posibilidad de la existencia de la energía oscura (o una constante cosmológica), las ecuaciones del movimiento geodésico, el tensor energía-momento-esfuerzos de un espacio-tiempo, la corrección de excentricidad, el retraso de Shapiro, la existencia o no de warp-drives,...

La detección de ondas gravitacionales que se progagan a velocidad c , en el vacío, como predije la teoría einsteniana de la gravitación abre un número de debates no resueltos. ¿Es la velocidad de la luz c electromagnética en origen? Podría suponerse que sí, pero en el espacio-tiempo, se puede introducir como un factor de conversión del tiempo en espacio de la métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\vec{x}^2 - c^2 dt^2 \quad (75)$$

Y, por tanto, la ecuación de ondas en aproximación linealizada, para la perturbación gravitacional en el vacío satisface

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (76)$$

que es similar en estructura a la ecuación de ondas del campo electromagnético A_μ en el vacío:

$$\square^2 A_\mu = 0 \quad (77)$$

¡Fascinante! Todo se explica con la ecuación $U = 0$...