Formulario resumen $1^\circ - 2^\circ$ Bac.(Física)

J. F. G. H.😈🤯[1]

Multiverse of Madness

[1]Space-time Foundation, Eccentric Quantum TimeLord Virtual Academy

Contenido

Potencias múltiplo de 10 en el S.I.(2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol$=10^{100}$, googolplex$=10^{\text{googol}} = 10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Potencias submúltiplo de 10 en el S.I. (2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$	deci (d)
$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$	centi (c)
$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$	mili (m)
$10^{-6} = 1/10^6 = 0{,}000001$	micro (μ)
$10^{-9} = 1/10^9 = 0{,}000000001$	nano (n)
$10^{-12} = 1/10^{12} = 0{,}000000000001$	pico (p)
$10^{-15} = 1/10^{15} = 0{,}000000000000001$	femto (f)
$10^{-18} = 1/10^{18} = 0{,}000000000000000001$	atto (a)
$10^{-21} = 1/10^{21} = 0{,}000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{-24} = 1/10^{24} = 0{,}000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{-27} = 1/10^{27} = 0{,}000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{-30} = 1/10^{30} = 0{,}000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Notación científica y cifras significativas

Regla mnemotécnica: PEZYRQ-fazyrq para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$\boxed{Z = x.abcdef \cdots 10^{\pm n}}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef \cdots$ son números arbitrarios.

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

Componentes de velocidad y fuerza

En 2d, la velocidad se descompone así

$$\vec{v} = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} = v_0 \cos\theta \vec{i} + v_0 \sin\theta \vec{j} \quad (1)$$

En 3d, la velocidad se descompone así

$$\vec{v} = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} + v_{oz}\vec{k} = v_0 \cos\theta_1 \vec{i} + v_0 \cos\theta_2 \vec{j} + v_0 \cos\theta_3 \vec{k} \quad (2)$$

En 2d, la fuerza se descompone así

$$\vec{F} = F_{ox}\vec{i} + F_{oy}\vec{j} = F_0 \cos\theta \vec{i} + F_0 \sin\theta \vec{j} \quad (3)$$

En 3d, la fuerza se descompone así

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = F_0 \cos\vartheta_1 \vec{i} + F_0 \cos\vartheta_2 \vec{j} + F_0 \cos\vartheta_3 \vec{k} \quad (4)$$

Vectores 2d

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}, \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad |\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \tag{5}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} \tag{6}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |\vec{b}| = b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{7}$$

Producto escalar 2d y 3d:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \langle a|b \rangle = a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = ab\cos\varphi \tag{8}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \langle a|b \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = ab\cos\varphi \tag{9}$$

Vector unitario:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} \tag{10}$$

Vector inverso no canónico: $\vec{a}^{\,-1} = \dfrac{1}{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$

Proyecciones(I)

Proyección de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\text{proy}(\vec{a} \to \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos\varphi, \ \ \text{proy}(\vec{b} \to \vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| \cos\varphi \tag{11}$$

Proyección vectorial de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\overrightarrow{\text{proy}(\vec{a} \to \vec{b})} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}\vec{u}_b = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}}{b^2}, \ \ \overrightarrow{\text{proy}(\vec{b} \to \vec{a})} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\vec{u}_a = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}}{a^2} \tag{12}$$

Proyecciones(II)

Proyección ortogonal vectorial de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\overrightarrow{\text{proy}_{\perp}(\vec{a} \to \vec{b})} = \vec{b} - \overrightarrow{\text{proy}(\vec{a} \to \vec{b})} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2}\vec{b} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{\text{proy}_{\perp}(\vec{b} \to \vec{a})} = \vec{a} - \overrightarrow{\text{proy}(\vec{b} \to \vec{a})} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2}\vec{a} \tag{14}$$

Producto vectorial 3d

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$:

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{15}$$

There is a relation between cross product and matrices in $\mathbb{R}^3$. Define:

$$A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{16}$$

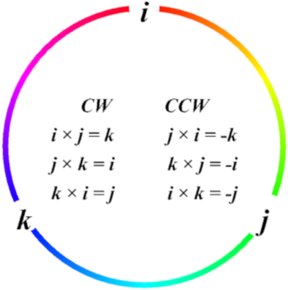
$$B = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \tag{17}$$

$$\vec{C} = \vec{A}_\times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{18}$$

It follows the magic word spell under the mnemonics cyclic XYZZY. Also, we could write

$$\vec{C}=\vec{B}_{\times}\vec{A}=\begin{pmatrix}0 & B_z & -B_y\\ -B_z & 0 & B_x\\ B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\ A_zB_x-A_xB_z\\ A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_x\\ C_y\\ C_z\end{pmatrix} \tag{19}$$

Note that $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$. There is another known mnemonics related to the cyclic triadic clock:



Producto vectorial(III)

XYZZY spell for the cross product (3d):

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \tag{20}$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z = -(a_x b_z - a_z b_x) \tag{21}$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{22}$$

or using 2×2 determinants

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[a, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \tag{23}$$

The cross product is a pseudovector, dual of a bivector in 3d. A bivector exists in any dimension such as

$$\vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b} \tag{24}$$

Producto vectorial(IV)

El producto vectorial no es conmutativo ni asociativo en general. Permite definir paralelismo, y, además, satisface la relación

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{25}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = a^2b^2 \tag{26}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0} \tag{27}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},\;\; (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{28}$$

Se puede definir el producto mixto de 3 vectores como el siguiente objeto

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \tag{29}$$

o equivalentemente

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_xb_yc_z + a_yb_zc_x + a_zb_xc_y - a_zb_yc_x - a_yb_xc_z - a_xb_zc_y \tag{30}$$

Producto vectorial(V)

- El producto vectorial es siempre un vector perpendicular al plano que generan los vectores factores, y tiene sentido dado por la regla de Maxwell, del tornillo o sacacorchos: el sentido el del avance de un tornillo o sacacorchos desde el primer factor al segundo por el camino más corto (regla de la mano derecha).
- El módulo del producto vectorial puede escribirse como sigue:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{31}$$

- Además, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que generan los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, i.e., $|\vec{a}\times\vec{b}| = A_{\square}(\vec{a}, \vec{b})$.
- Por otra parte, el producto vectorial no es ni conmutativo ni asociativo. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (es anticonmutativo), y $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.
- El producto vectorial de dos vectores paralelos o proporcionales es nulo.
- Por tanto, el producto vectorial: mide paralelismo, áreas, y representa giros en el espacio.

Producto vectorial 7d(heptadimensional)

El producto vectorial 3d admite una generalización única excepcional en 7d.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\times\mathbf{y} = {} & (x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_7 - x_7y_3 + x_5y_6 - x_6y_5)\,\mathbf{e}_1 && (32)\\
& + (x_3y_5 - x_5y_3 + x_4y_1 - x_1y_4 + x_6y_7 - x_7y_6)\,\mathbf{e}_2 && (33)\\
& + (x_4y_6 - x_6y_4 + x_5y_2 - x_2y_5 + x_7y_1 - x_1y_7)\,\mathbf{e}_3 && (34)\\
& + (x_5y_7 - x_7y_5 + x_6y_3 - x_3y_6 + x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{e}_4 && (35)\\
& + (x_6y_1 - x_1y_6 + x_7y_4 - x_4y_7 + x_2y_3 - x_3y_2)\,\mathbf{e}_5 && (36)\\
& + (x_7y_2 - x_2y_7 + x_1y_5 - x_5y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)\,\mathbf{e}_6 && (37)\\
& + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_6 - x_6y_2 + x_4y_5 - x_5y_4)\,\mathbf{e}_7. && (38)
\end{aligned}$$

Producto vectorial 7d(II)

Siendo bilineal, este producto vectorial admite una representación matricial en la forma siguiente

$$T_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_4 & -x_7 & x_2 & -x_6 & x_5 & x_3 \\ x_4 & 0 & -x_5 & -x_1 & x_3 & -x_7 & x_6 \\ x_7 & x_5 & 0 & -x_6 & -x_2 & x_4 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & x_6 & 0 & -x_7 & -x_3 & x_5 \\ x_6 & -x_3 & x_2 & x_7 & 0 & -x_1 & -x_4 \\ -x_5 & x_7 & -x_4 & x_3 & x_1 & 0 & -x_2 \\ -x_3 & -x_6 & x_1 & -x_5 & x_4 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

tal que

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = T_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_{i+3} mod(7)$$

7d cross product and Clifford products

$$\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_{i+1}) = -\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_{i+3}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx})$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_{124} + \mathbf{e}_{235} + \mathbf{e}_{346} + \mathbf{e}_{457} + \mathbf{e}_{561} + \mathbf{e}_{672} + \mathbf{e}_{713}$$

This is combined with the exterior product to give the cross product

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \lrcorner \mathbf{v}$$

×	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_4$	0	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_5$	0	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_6$	0	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_7$	0	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_2$	0

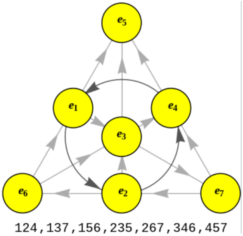


Figura 1: Octonion multiplication table and cross product rule.

Just as the 3-dimensional cross product can be expressed in terms of the quaternions, the 7-dimensional cross product can be expressed in terms of the octonions. After identifying $\mathbb{R}^7$ with the imaginary octonions (the orthogonal complement of the real line in $\mathbb{O}$), the cross product is given in terms of octonion multiplication by

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathrm{Im}(\mathbf{xy}) = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx}). \tag{40}$$

Conversely, suppose V is a 7-dimensional Euclidean space with a given cross product. Then one can define a bilinear multiplication on $\mathbb{R} \oplus V$ as follows:

$$(a, \mathbf{x})(b, \mathbf{y}) = (ab - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

The $\mathbb{R} \oplus V$ with this multiplication is then isomorphic to the octonions.

Geometría de productos de vectores

1. El producto escalar mide ortogonalidad y permite calcular ángulos entre vectores, proyecciones (escalares, vectoriales y ortogonales), normas y módulos de vectores, ángulos entre vectores, vectores unitarios e inversos no canónicos de vectores.
2. El producto vectorial mide paralelismo, y permite calcular áreas entre paralelogramos de vectores, calcular un vector ortogonal a 2 dados, y ayuda a medir quiralidad y sentidos de giro o rotación.
3. El producto mixto permite calcular volúmenes de paralelepípedos de 3 vectores, volúmenes de figuras geométricas y sirve para comprobar la coplanariedad.

Estas definiciones pueden ser canónicas en un espacio euclidiano o euclídeo, pero pueden generalizarse a cualquier dimensión (en el caso del producto escalar) y con cuidado al producto vectorial (el producto vectorial existe como tal solamente en 3d, aunque existe un producto llamado exterior que existen en cualquier dimensión). El producto vectorial binómico solamente existe en dimensiones 0, 1, 3, y 7. Existe un producto vectorial trinómico en 8d y un $(n-1)$-nómico en n-d.

Producto escalar Nd

Si el producto escalar se calcula en la base canónica, el resultado es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{41}$$

En forma intrínseca, el producto escalar es también igual a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi \tag{42}$$

y donde $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ es el módulo o longitud de $\vec{v}$, y φ es el ángulo formado por los dos vectores. El producto escalar permite calcular proyecciones sobre vectores, módulos o longitudes, estudiar la ortogonalidad y también permite calcular vectores unitarios a uno dado $\vec{v}$. $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

Producto escalar complejo

El producto escalar es una aplicación lineal que forma un número con dos vectores. Para un producto escalar definido positivo y no degenerado sobre los reales, se tiene que:

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$.
- $\vec{\lambda a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{\lambda b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

El producto escalar es sesquilineal sobre los complejos($XY = \sum_i \overline{X_i}Y_i$):

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \overline{\vec{b}\cdot\vec{a}}$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$.
- $\vec{a}\cdot\vec{\lambda b} = \lambda\vec{a}\cdot(\vec{b}) = (\overline{\lambda}\vec{a})\cdot\vec{b}$.

Producto escalar Nd(II)

El producto escalar bilineal generalizado $\vec{a}\cdot\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$, si hay una base $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ es igual a un número basado obtenido de los dos vectores en dicha base con la expresión formal siguiente:

Producto escalar generalizado

$$\langle\vec{a}|\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_n \\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{43}$$

Matricialmente, se puede escribir como $A\cdot B = G_{ij}A^iB^j = A^tGB$, donde G es la matriz de productos escalares de la base, o métrica, de dichos vectores, $G_{ij}=G_{ji}$, $G=G^t$.

Producto escalar complejo generalizado

El producto escalar complejo (hermítico) sesquilineal generalizado $\vec{a}\cdot\vec{b}$ en $\mathbb{C}^n$, si hay una base $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ es igual a un número basado obtenido de los dos vectores en dicha base con la expresión formal siguiente:

Producto escalar generalizado

$$\langle\vec{a}|\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix}\overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \cdots & \overline{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_n\\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix} \tag{44}$$

Matricialmente, se puede escribir como $A\cdot B = H_{ij}\overline{A}^i B^j = \overline{A}^t HB$, donde H es la matriz de productos escalares de la base, o métrica, de dichos vectores, $H_{ij} = \overline{H}_{ji}$, $H = \overline{H^t}$.

Aplicaciones

- Trabajo: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
- Potencia: $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
- Flujo de campo gravitacional: $\phi_g = \int \vec{g} \cdot d\vec{S}$.
- Flujo de campo eléctrico: $\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$.
- Flujo de campo magnético: $\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$.
- Flujo general: $\phi = \int \vec{X} \cdot d\vec{S}$.
- Flujo de un campo de velocidades: $\phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$.
- Momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$.
- Torque o momento de una fuerza: $\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- Fuerza magnética: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$.
- Fuerza de un hilo: $\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$.
- Gradiente, divergencia y rotacional: $\overrightarrow{\nabla\phi}$, $\nabla \cdot \vec{V}$, $\nabla \times \vec{F}$.

Coordenadas cilíndricas

Otras formas de dar las coordenadas adaptadas a ciertas simetrías en el espacio son las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y las coordenadas esféricas (r, θ, ψ):

Coordenadas cilíndricas

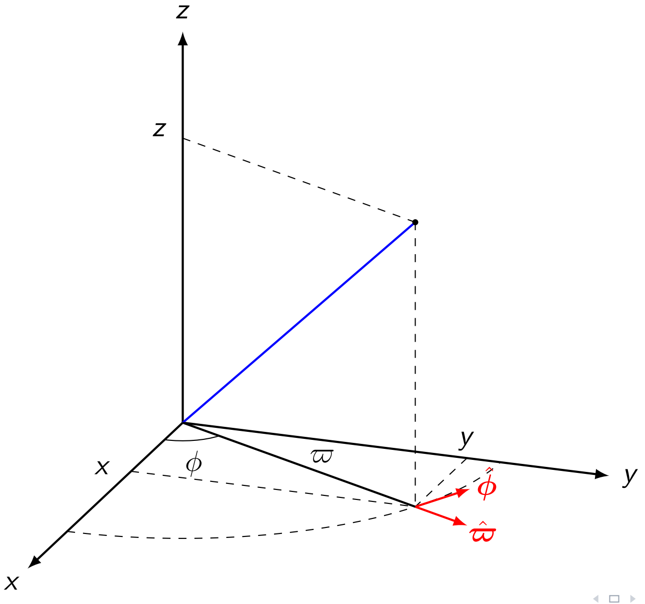
Sean $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $-\infty < z < \infty$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r\cos\theta \quad (45)$$

$$Y = r\sin\theta \quad (46)$$

$$Z = z \quad (47)$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y $z = Z$.


z
z
y
ϖ
ϕ
x
y
$\hat{\phi}$
$\hat{\varpi}$
x

Coordenadas esféricas

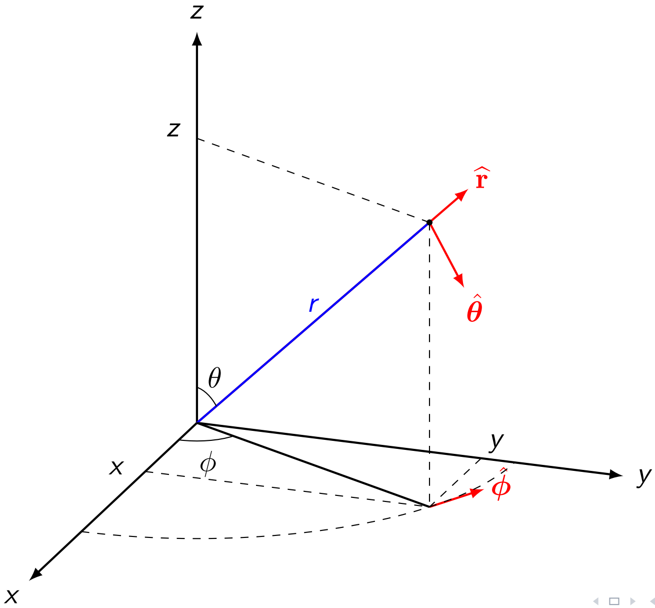
Sean $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r \sin\theta \cos\varphi \tag{48}$$

$$Y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{49}$$

$$Z = r \cos\theta \tag{50}$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$ y $\varphi = \tan^{-1} \dfrac{Y}{X}$.


z
z
r
$\hat{\mathbf{r}}$
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$
θ
ϕ
x
y
$\hat{\phi}$
y
x

Trazas y determinantes(I)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=g_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu}=a^{\mu}g_{\mu\nu}b^{\nu}=a^{T}Gb \tag{51}$$

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}=e_{\mu}\cdot e_{\nu} \tag{52}$$

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}\right)=\sum_{\sigma}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)} \tag{53}$$

$$\det(A)=\det\left(A^{T}\right) \tag{54}$$

$$\det(A+B)\geq\det(A)\det(B) \tag{55}$$

$$\det(\exp(A))=\exp(tr(A)),\ \det(AB)=\det(A)\det(B) \tag{56}$$

$$\frac{\partial\log\det A}{\partial A}=A^{-T}\leftrightarrow\frac{\partial\det A}{\partial A_{ij}}=\mathrm{adj}(A)_{ji}=\det(A)(A^{-1})_{ji} \tag{57}$$

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\rightarrow\chi_{a}(t)=\det(tI-A) \tag{58}$$

$$[A,B]=\frac{1}{2}(AB-BA),\{A,B\}=\frac{1}{2}(AB+BA) \tag{59}$$

Trazas y determinantes(II)

$$\det(A) = \frac{1}{2}\left[\left(tr(A)^2 - tr(A^2)\right)\right] \tag{60}$$

$$\det(A) = \frac{1}{6}\left(tr(A)^3 - 3tr(A)tr(A^2) + 2tr(A^3)\right) \tag{61}$$

$$\det(A) = \frac{(tr(A)^4 - 6tr(A^2)(tr(A))^2 + 3(tr(A^2))^2 + 8tr(A^3)tr(A) - 6tr(A^4)}{24} \tag{62}$$

1. $$\mathrm{Ber}(aA + bB) = a\,\mathrm{Ber}(A) + b\,\mathrm{Ber}(B) \tag{63}$$
2. $$\mathrm{Ber}(AB) = (-1)^{pq}\,\mathrm{Ber}(BA) \tag{64}$$
3. $$\mathrm{Ber}(ABC) = \mathrm{Ber}(CAB) = \mathrm{Ber}(BCA) \tag{65}$$

where A, B, and C are supermatrices, and a and b are scalars. The subscripts p and q represent the parities of the supermatrices A and B, respectively.$\mathrm{Ber}(X) = \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det(D)^{-1}$ or, equivalently, by $\mathrm{Ber}(X) = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$. $\mathrm{Ber}(e^X) = e^{\mathrm{str(X)}}$

Contenido

Vector de posición

En síntesis, en 2d la posición es un vector

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) \tag{66}$$

donde $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. Mientras, en 3d

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \tag{67}$$

donde ahora $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$ es la denominada base canónica ortonormalizada. Más generalmente, en Dd se tiene que

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{D} x_i \vec{e}_i = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_D\vec{e}_D = (x_1, \ldots, x_D) \tag{68}$$

donde $\vec{e}_i$, $i = 1, \ldots, D$, es la base ortonormal formada por un solo 1 y el resto ceros permutados un sitio según el avance del índice.

El desplazamiento es la diferencia entre dos vectores de posición respecto a un mismo punto de origen. Matemáticamente, en 2d

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_f - \vec{r}_0 = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} = (x - x_0, y - y_0) = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{69}$$

En 3d tendremos

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0 = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \tag{70}$$

y en Dd será

$$\Delta\vec{r} = \sum_{i=1}^{D} \Delta x_i\vec{e}_i = \Delta x_1\vec{e}_1 + \Delta x_2\vec{e}_2 + \cdots + \Delta x_D\vec{e}_D = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_D) \tag{71}$$

El modelo de la partícula o punto material, el que se toma o aproxima la descripción de un cuerpo o sistema por un punto matemático abstracto, con dimensión cero, es habitual:

Vector de posición 2d y 3d

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{en el espacio 3d}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \text{en el plano 2d}$$

El vector de posición con una dimensión del tiempo en nD, es

Vector de posición nD

$$\overrightarrow{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n$$

Movimiento(II)

Para el caso en el que el número de dimensiones espaciales es infinita $D=\infty$:

Vector de posición dD y ∞D

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i |i\rangle = c^0|0\rangle + \ldots + c^{d-1}|d-1\rangle \quad \text{(qdit, d-level q-state)}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |i\rangle = c^0|0\rangle + \ldots + c^{d}|d\rangle + \cdots \quad \text{(q}\infty\text{it, quantum field)}$$

Estas representaciones son útiles en Mecánica Cuántica(con la condición de normalización para conservación de probabilidad), redes neuronales ($y=\sum_i \omega_i x_i$) o sistemas generales arbitrarios de tipo vectorial.

El módulo del vector de posición es

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{en el plano}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{en el espacio}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{\sum_i^d x_i^2}, \quad \text{en el espacio de d-dimensiones}$$

Se denomina *trayectoria* al conjunto de puntos por los que pasa un móvil u objeto/punto durante su movimiento. Se denomina *hodógrafo* a la trayectoria que sigue el vector velocidad $\vec{v}$ en su movimiento. En coordenadas polares (en el plano):

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi$$

$$\vec{r} = R\cos\varphi(t)\vec{i} + R\sin\varphi(t)\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Movimiento(IV)

El vector desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

o infinitesimalmente

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2 + dx^3\vec{e}_3 + \cdots + dx^n\vec{e}_n$$

Vector velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta x^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Movimiento(VI)

Vector aceleración media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta v^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Vector jerk medio

$$\vec{j}_m = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\Delta a^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta a^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

También podemos definir los vectores velocidad, aceleración y jerk instantáneos:

Movimiento(VII)

Vector velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dx^n}{dt}\vec{e}_n = v^1\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n$$

Vector aceleración instantánea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dv^n}{dt}\vec{e}_n = a^1\vec{e}_1 + \cdots + a^n\vec{e}_n$$

Vector jerk instantáneo

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{da^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{da^n}{dt}\vec{e}_n = j^1\vec{e}_1 + \cdots + j^n\vec{e}_n$$

Movimiento(VIII)

Las unidades de la velocidad son m/s, de la aceleración m/s^2, y del jerk m/s^3. Pueden seguirse definiendo las sucesivas derivadas temporales también para el jerk, siempre y cuando estén matemáticamente bien definidas. También podemos definir el denominado "absement":

$$\mathcal{A}(t) = \int \vec{r}(t)dt$$

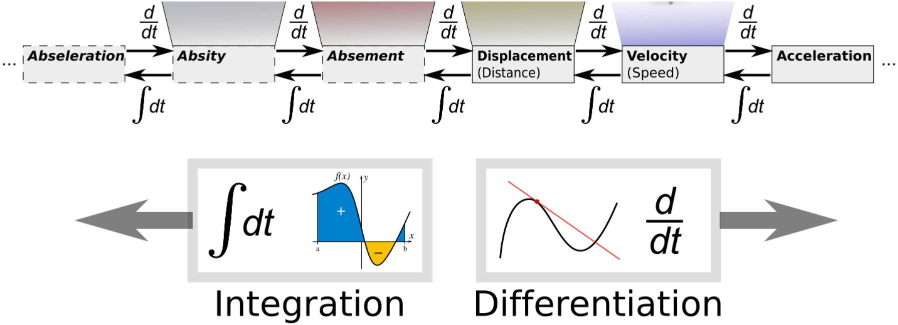
$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_2 = \int \mathcal{A}dt = \iint \vec{r}(t)d^2t$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}_3 = \int \mathcal{B}dt = \iiint \vec{r}(t)d^3t$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_4 = \int \mathcal{C}dt = \iiiint \vec{r}(t)d^4t$$

$$\mathcal{A}_n = \int \cdots \int \vec{r}(t)d^nt$$

Movimiento(IX)



Para $\vec{r}(t) = \textit{constante}$, se tiene

$$\mathcal{A} = \vec{r} \cdot \Delta t = \vec{r} \cdot (t - t_0)$$

Las unidades de $\mathcal{A}_n$ son $m \cdot s^n$. La generalización del modelo de la partícula puntual a múltiples dimensiones es como sigue:

Vector de posición multitemporal

$$\vec{r}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{t}) = X^i(t_k), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

Campo multitemporal

$$\phi(X^i, T^k) = \phi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{t}), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

Movimiento(XI)

Generalización: el modelo de la partícula puntual generaliza a objetos extenso, p-branas (o membranas de dimensión p).

Campo de la p-brana 1T

$$X^\mu(\Sigma,\tau)=X^\mu(\sigma^0,\ldots,\sigma^{p-1},\tau)$$

Campo de la p-brana multitemporal NT

$$X^\mu(\overrightarrow{\Sigma},\overrightarrow{\tau})=X^\mu(\sigma^0,\ldots,\sigma^{p-1},\tau^0,\ldots,\tau^{N-1})$$

También se podría pensar en otra generalización, denominada multivectorial, para los grados de libertad de las p-branas. En ese caso se define $X^{\mu_1\cdots\mu_p}=X^{\overline{\mu}}(\Sigma,\tau)$. Esto lleva a cierta generalación "tensorial" (multivectorial, polivectorial) o "multiforma" de las magnitudes físicas.

Movimiento

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{r}(t_B) = \vec{r}(t_A), \quad \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r} \neq 0 \rightarrow \vec{r}(t_B) \neq \vec{r}(t_A), \quad \text{movimiento}$$

Esta definición es extrapolable a un conjunto arbitrario de puntos materiales $\vec{r}_i$. Extendida a múltiples dimensiones del tiempo, es posible que las diferentes proyecciones sobre los diferentes vectores del tiempo puedan diferir. En tal caso, el concepto de reposo está restringido a subvariedades de tiempo o "ciertas ventanas" o ejes del tiempo.

Movimiento multitemporal

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) = \vec{r}(\vec{t}_A) \leftrightarrow \vec{r}(t_{A1}, \ldots, t_{AN}) = \vec{r}(t_{B1}, \ldots, t_{BN}), \ \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r} \neq 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) \neq \vec{r}(\vec{t}_A), \ \text{movimiento}$$

Movimiento(XIV)

- La extensión de este concepto de movimiento a partículas u objetos extensos, lleva a también considerar la variación o fluctuación de las dimensiones espaciales.
- Es importante notar que la noción de velocidad es sutil con dimensiones múltiples o sin ella. De hecho hay generalizaciones en el cálculo del concepto de derivada como la diferenciación fraccional o la diferentegración que hacen tal concepto más complicado y sofisticado, además de que para cierta clase de números importa el tipo de "número" que soportan las magnitudes.
- Así, aunque consideramos el tiempo "real", éste podría ser complejo o hipercomplejo en general, o incluso ser multivectorial.
- En general, el ritmo de cambio del desplazamiento respecto del tiempo es la velocidad, el ritmo de cambio de la variación de la velocidad es la aceleración y así sucesivamente.
- La posición puede considerarse el ritmo de cambio del "absement" o "ausición" respecto del tiempo.

Velocidad media e instantánea

La velocidad media es el ritmo de cambio de la posición en un intervalo o cambio de tiempo, y la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el cambio de tiempo y de posición se vuelven infinitesimales pero no nulos. Matemáticamente, en 2d la velocidad media es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \tag{72}$$

En 3d tendremos

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) \tag{73}$$

y en Dd será

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta t}\vec{e}_2 + \cdots + \frac{\Delta x_D}{\Delta t}\vec{e}_D = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \ldots, \frac{\Delta x_D}{\Delta t}\right) \tag{74}$$

Velocidad media e instantánea(II)

Matemáticamente, en 2d la velocidad instantánea es

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \tag{75}$$

En 3d tendremos

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{76}$$

y en Dd será

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \cdots + \frac{dx_D}{dt}\vec{e}_D = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_D}{dt}\right) \tag{77}$$

Las dimensiones de la velocidad es LT^{-1}, y las unidades habituales el m/s ó cm/s.

La aceleración media es el ritmo de cambio de la velocidad en un intervalo o cambio de tiempo, y la aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el cambio de tiempo y de velocidad se vuelven infinitesimales pero no nulos. Matemáticamente, en 2d la velocidad media es

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \tag{78}$$

En 3d tendremos

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right) \tag{79}$$

y en Dd será

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_{x_1}}{\Delta t}\vec{e}_1 + \frac{\Delta v_{x_2}}{\Delta t}\vec{e}_2 + \cdots + \frac{\Delta v_{x_D}}{\Delta t}\vec{e}_D = \left(\frac{\Delta v_{x_1}}{\Delta t}, \frac{\Delta v_{x_2}}{\Delta t}, \ldots, \frac{\Delta v_{x_D}}{\Delta t}\right) \tag{80}$$

Matemáticamente, en 2d la aceleración instantánea es

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = (a_x, a_y) \quad (81)$$

En 3d tendremos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (a_x, a_y, a_z) \quad (82)$$

y en Dd será

$$\vec{a} = \frac{dv_{x_1}}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dv_{x_D}}{dt}\vec{e}_D = \left(\frac{dv_{x_1}}{dt}, \frac{dv_{x_2}}{dt}, \ldots, \frac{dv_{x_D}}{dt}\right) = (a_{x_1}, \cdots, a_{x_D}) \quad (83)$$

Las dimensiones de la velocidad es LT^{-2}, y las unidades habituales el m/s^2 ó cm/s^2.

Componentes intrínsecas(I)

La aceleración en una curva plana usa componentes intrínsecas:

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} \tag{84}$$

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 \tag{85}$$

donde la aceleración centrípeta o norma es

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{86}$$

y la aceleración tangencial es

$$a_\tau = \alpha r \tag{87}$$

Si $r = R$ es constante, tenemos un movimien to circular. R es el radio de curvatura que será $\kappa = 1/r$ en general para movimiento no circular. ω es la velocidad angular.

Componentes intrínsecas(II)

Para magnitudes angulares

$$\boxed{360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 400^g} \quad \boxed{1 \text{ r.p.m} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}}$$

Dimensionalmente

$$[\theta] = \emptyset, \ , [\omega] = T^{-1}, [\alpha] = T^{-2}$$

Existen equivalencias genéricas entre magnitudes lineales y angulares:

$$\Delta s = \Delta\theta R \leftrightarrow s = \theta R \leftrightarrow v = \omega R \qquad (88)$$

$$\Delta v = \Delta\omega R \leftrightarrow a_t = \alpha R \qquad (89)$$

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leftrightarrow \omega = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \ ; \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \leftrightarrow \alpha = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (90)$$

Definido el vector binormal $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, pueden calcularse también las cantidades:

$$\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \frac{d\vec{n}}{ds}, \frac{d\vec{b}}{ds}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} \end{pmatrix} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \tag{91}$$

♡ Se puede demostrar que las definiciones de los vectores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ implican las ecuaciones siguientes, denominadas ecuaciones de Frenet-Serret:

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = \kappa\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{\tau} + T\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} = -T\vec{n} \end{cases} \tag{92}$$

♡ La versión multidimensional de estas ecuaciones se escribe a continuación en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = |\vec{r}'(s)| \cdot \begin{pmatrix} 0 & \chi_1(s) & & 0 \\ -\chi_1(s) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \chi_{n-1}(s) \\ 0 & & -\chi_{n-1}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (93)$$

La curvatura K y el radio de curvatura R de una curva parametrizada por un elemento de arco ds mediante $\vec{r}(s)$ se calcula con la expresión:

$$\boxed{K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}$$

También puede calcularse si parametrizamos con el tiempo mediante el tiempo $\vec{r}(t)$ con la fórmula equivalente:

Curvatura y radio de curvatura para $\vec{r}(t)$

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{v}\right|^3} = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

La torsión T y el radio de torsión τ de una curva parametrizada por un elemento de arco ds mediante $\vec{r}(s)$ se calcula con la expresión:

$$T = \frac{1}{\tau} = R^2 \left|\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right| = R^2 \det\left(\vec{r'}(s), \vec{r''}(s), \vec{r'''}(s)\right)$$

También puede calcularse si parametrizamos con el tiempo mediante el tiempo $\vec{r}(t)$ con la fórmula equivalente:

Torsión y radio de torsión para $\vec{r}(t)$

$$T = \frac{1}{\tau} = \frac{\det\left(\vec{v}, \vec{a}, \vec{j}\right)}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|^2} = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right|}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|^2}$$

Ecuaciones del M.R.U.

$$\vec{a} = \vec{0}\ m/s^2 \tag{94}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n = \frac{d\vec{r}}{dt}\ m/s \tag{95}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t\ m \tag{96}$$

En el plano $2d$, se tiene que $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, y que también, en $3d$, es $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. En ecuaciones paramétricas, para $\vec{r} = (x, y, z, \ldots)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0) \\ y = y_0 + v_y(t - t_0) \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \\ \ldots \end{cases}$$

Ecuaciones del M.R.U.A.

M.R.U.A.: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

Características: $\vec{a} = constant = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ m/s^2$.

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{constante} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k} \neq 0\ m/s^2 \quad (97)$$

$$\overrightarrow{v} = v^1\overrightarrow{e}_1 + v^2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + v^n\overrightarrow{e}_n = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}\Delta t\ m/s \quad (98)$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\Delta t^2\ m \quad (99)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\overrightarrow{a}\overrightarrow{\Delta r} \quad (100)$$

MCU

Para un arco de circunferencia se tiene: $s = \theta r$. También:

$$\Delta s = \Delta\theta r \tag{101}$$

A nivel diferencial en la circunferencia, $dv = d\omega R$, luego a nivel incremental

$$\Delta v = \Delta\omega R$$

de donde dividiendo por ΔT:

$$\boxed{a = a_t = \alpha R}$$

En un MCU no hay aceleración tangencial pero sí una aceleración ligada al hecho de la variación de la dirección de la velocidad lineal: la aceleración centrípeta $a_c = v^2/R = \omega^2 R$. Las ecuaciones del MCU serán pues:

- Aceleraciones: $a_t = 0m/s^2$, $\alpha = 0rad/s^2$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.
- $\omega = constant$.
- $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t \leftrightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t$.

MCU(II)

En el plano, se puede escribir la ecuación del MCU en forma vectorial como sigue:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \;\; m$$

La velocidad lineal y la aceleración resultan ser:

$$\vec{v} = -R\omega\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\omega\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} - R\omega^2\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s^2 = -\omega^2\vec{r}$$

En el MCU también se definen los siguientes conceptos:

1. **Período** T: Tiempo que tarda en dar una vuelta completa u oscilación. $\boxed{T = 2\pi/\omega = 1/f}$.
2. **Frecuencia** f: Número de vueltas dadas en cada segundo.$\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$. Las unidades de la frecuencia (no confundir con frecuencia angular ω) son los s^{-1} o hertzios (Hz).
3. **Número de vueltas** N general. $N = \Delta\varphi/2\pi$.
4. **Número de onda** (variable de movimiento armónico simple, proyección sobre una línea del MCU): $k = 2\pi/\lambda$ (unidades m^{-1}). La longitud de onda λ es el **período espacial** de un MCU que sea periódico en el espacio y no solamente en el tiempo como el MCU (movimiento ondulatorio sinusoidal o armónico). También se define $\overline{k} = \overline{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$, como el recíproco de la longitud de onda, o el número de vueltas u oscilaciones por metro (no angulares).

MCUA(I)

Características: trayectoria circular, $\alpha = constant.rad/s^2$, y aceleraciones tangencial y centrípeta no nulas, con valores dados por las relaciones usuales $a_t = \alpha R = constant \neq 0$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.

Ecuaciones del MCUA

$$\alpha = constant \quad rad/s^2, \quad \text{y si} \quad \Delta t = (t - t_0) \quad s \tag{102}$$

$$\Delta\omega = \alpha\Delta t \quad rad/s \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t \quad rad/s \tag{103}$$

$$\Delta\theta = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \tag{104}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \tag{105}$$

MCUA(II)

Para el MCUA, las componentes intrínsecas y la aceleración total resultan ser igual a

Aceleraciones del MCUA

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \leftrightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \tag{106}$$

$$a_c = \omega^2 R \quad \text{no constante} \tag{107}$$

$$a_t = \alpha R \quad \text{constante} \tag{108}$$

$$\alpha = constante \quad rad/s^2 \tag{109}$$

$$a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha R)^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{110}$$

Composición 2 MRUs

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_c \quad m/s \\ x = v_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = 0 \quad m/s^2 \\ v_y = const. = v_n \quad m/s \\ x = v_n t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores:} \\ \vec{a} = \overrightarrow{0} \;\; m/s^2 \\ \vec{v} = \overrightarrow{v}_c + \overrightarrow{v}_n = v_c\vec{i} + v_n\vec{j} \;\; m/s \\ \vec{r} = v_c t\vec{i} + v_n t\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \;\; m \end{cases}$$

Si el ancho del río es D, entonces el tiempo en cruzar será:

$$t_{cruzar} = \frac{D}{v_n}$$

Y tras este tiempo, en $y = D$, el punto donde llega en el eje X será

$$x = \frac{v_c D}{v_n}$$

luego

$$\vec{r}(t_c) = \frac{v_c D}{v_n}\vec{i} + D\vec{j} \quad m$$

Espacio horizontal en cruzar: $\Delta x = v_c t_c = \dfrac{Dv_c}{v_n}$.

Punto de llegada:

$$\vec{r} = \frac{Dv_c}{v_n}\vec{i} + D\vec{j} \tag{111}$$

Caída libre: En el campo gravitacional terrestre, supuesto $a = -g = -9,8 m/s^2$, que es una aproximación de baja altura al caso más general posible de una teoría de campos, se puede resolver el problema del tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo desde una altura $H = h_0 = y_0$ arbitraria, dejándose caer (con velocidad inicial cero, $v_0 = 0$). Ecuaciones (Sistema de referencia en el suelo): $a = -g\ m/s^2$.

$$v = v_0 - gt = -gt, \quad h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiempo en llegar al suelo t_s (en $h = 0$, $t = t_s$): $\boxed{t_s = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$ La velocidad cuando llega al suelo es $\boxed{v_s = -gt_s = -\sqrt{2h_0 g}}$

MRUA: Tiro vertical

Lanzamiento vertical:
La velocidad cuando llega al suelo es

$$\boxed{v_s = -gt_s = -\sqrt{2h_0 g}}$$

Notad que si hubiera inicialmente una velocidad inicial hacia abajo, hay que cambiar un par de ecuaciones y resolver:

$$a = -g, \quad v = -v_0 - gt, \quad y = H_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

mediante

$$-\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + H_0 = 0$$

Si lanzamos un objeto desde el suelo ($h_0 = 0$) con velocidad inicial v_0, podemos calcular su altura máxima h_{max}, el tiempo en alcanzar dicha altura máxima t_m, y el tiempo que tarda en volver al suelo $t_s = 2t_m$ (que será el doble por simetría de t_m y despreciando el efecto de rozamientos y otros detalles).

Tiro vertical(II)

En la altura máxima h_m, la velocidad es nula, por lo que tardará

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

Sustituyendo y operando en la ecuación de la altura proporciona la altura máxima y el tiempo en llegar al suelo

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$t_s = 2t_m = \frac{2v_0}{g}$$

Velocidad al llegar al suelo igual y de sentido opuesto que la inicial

$$v_s = -v_0$$

El espacio recorrido es por tanto $s = 2h_m$. Si la altura inicial es h_0, se rompe la simetría y debemos calcular para el tiempo de llegada al suelo:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 = 0 \rightarrow t_{\pm} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{-g} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$$

MRU+MRUA(tiro horizontal)

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = V \quad m/s \\ x = v_x t = Vt \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = -g, \quad g = 9{,}8 m/s^2 (Earth) \\ v_y = -gt \quad m/s \\ y = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores :} \\ \vec{a} = -g\vec{j} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = v_x \vec{i} - gt\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = Vt\vec{i} + \left(H - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{j} \quad m \end{cases} \qquad \boxed{t(X_m) = \sqrt{\frac{2H}{g}}}, \quad \boxed{X_m = V\sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

Tiro horizontal(III)

La velocidad justo en el instante de llegada al suelo del objeto lanzado es

$$\overrightarrow{V}_s = V\vec{i} - gt(X_m)\vec{j} = v_x\vec{i} - \sqrt{2gH}\vec{j} \quad m/s$$

cuyo módulo es

$$v = \sqrt{v_x^2 + 2gH}$$

y forma un ángulo de entrada en el suelo de

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sqrt{2gH}}{V} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2gH}}{V}\right)}$$

Encuentros: 2 MRUs

MRU1: $a_1 = 0$, $v_1 = cte.$, $x_1 = v_1 t$.
MRU2: $a_2 = 0$, $v_2 = cte.$, $x_2 = d + v_2 t$.
Estos MRUS son síncronos o simultáneos $t_1 = t_2 = t$, pero puede resolverse el caso asíncrono no simultáneo si $t_2 = t_1 + C$.
Condición de encuentro: $x_1 = x_2$.
Supongamos $v_1 > v_2 > 0$, entonces $t_e = \dfrac{d}{v_1 - v_2}$
Si $v_2 < 0$, $t_e = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$
Punto de encuentro:

$$s_1 = x_1 = x_2 = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} \tag{112}$$

Espacio recorrido por segundo vehículo: $s_2 = x_2 - d = \dfrac{v_2 d}{v_1 - v_2}$ en la misma dirección los dos, y en el opuesto

$$s_2 = \frac{v_2 d}{v_2 + v_1},\ \Delta\hat{s} = \frac{(v_2 - v_1) d}{v_2 + v_1} \tag{113}$$

Encuentros: 2 MCUs

MCU1: $\alpha_1 = 0$, $\omega_1 = cte.$, $\theta_1 = v_1 t$.
MCU2: $\alpha_2 = 0$, $\omega_2 = cte.$, $\theta_2 = \varphi_0 + \omega_2 t$.
Estos MCUS son síncronos o simultáneos $t_1 = t_2 = t$, pero puede resolverse el caso asíncrono no simultáneo si $t_2 = t_1 + C$.
Condición de encuentro: $\varphi_1 = \varphi_2$.
Supongamos $\omega_1 > \omega_2 > 0$, entonces, si $\varphi_0 = 2\pi$ $t_e = \dfrac{\varphi_0}{\omega_1 - \omega_2} = \dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$
Si $\omega_2 < 0$, $t_e = \dfrac{\varphi_0}{\omega_1 + \omega_2}$.
También se puede escribir

$$t_e = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \tag{114}$$

o bien

$$\frac{1}{t_e} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \tag{115}$$

Tiro parabólico u oblícuo(I)

1. Aceleración $a_y = -g \quad m/s^2$, en el eje Y.
2. Velocidad inicial constante con valor v_0 de módulo e inclinación φ respecto la horizontal (positiva).
3. Altura inicial h_0, que podemos tomar nula por simplicidad en un análisis desde el punto de lanzamiento (suelo).

$$\begin{cases} \text{Eje X}: \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_x \cos\varphi \quad m/s \\ x = v_x t = v_0 t \cos\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{Eje Y}: \\ a_y = -g, \quad g = 9{,}8 m/s^2 (Earth) \\ v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin\varphi - gt \quad m/s \\ y = h_0 + v_0 \sin\varphi t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Tiro parabólico u oblícuo(II)

Podemos calcular la altura máxima, si h_m $(v_y = 0)$:

$$v_y = 0 \rightarrow t(h_m) = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

Si la altura inicial es cero, el tiempo del alcance máximo X_m es:

$$t(X_m, y_0 = 0) = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = 2t(Y_m)$$

Si la altura inicial no es cero, el tiempo del alcance máximo se calcula con

$$\left(y_0 + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2\right) = 0, \text{es decir,} \quad \frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\varphi t - y_0 = 0$$

$$\boxed{t(X_m, y_0) = \frac{v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}}$$

Tiro parabólico u oblícuo(III)

El alcance máximo y la altura máxima para $y_0 = 0$ resultan ser:

$$\boxed{X_m = \frac{2v_0^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}}, \boxed{Y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}}$$

y el alcance máximo se da para $\varphi = 45^\circ = \pi/4$ *rad*, y si $h_0 = 0$:

$$\overrightarrow{V}_s = v_x(t(X_m))\vec{i} + v_y(t(X_m))\vec{j} = v_0\cos\varphi\vec{i} - v_0\sin\varphi\vec{j} \quad m/s$$

$$\tan\theta_s = \tan\frac{v_y}{v_x} = \tan(-\varphi) = \tan(-\varphi) \rightarrow \theta_s = -\varphi$$

Si la altura inicial no es cero, el alcance y altura máximos son iguales a

$$X_m(y_0) = v_0\cos\varphi t_\pm = \frac{v_0^2\cos\varphi\sin\varphi \pm v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}$$

$$Y_m(y_0) = y_0 + \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g}, \text{trayectoria:} y = y_0 + x\tan\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}$$

Centro de masas

Un sistema de partículas se puede estudiar como un sistema de una sola partícula en su centro de masas. El centro de masas tiene una posición dada por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{116}$$

donde

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_i m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{117}$$

es la masa total de las partículas con posición $\vec{r}_i$. En cierta forma es algo similar a medir una concentración total (en masa o volumen) de una disolución mezcla al combinar $i = 1, \ldots, n$ disoluciones con concentraciones c_i:

$$C_m = \frac{\sum_i m_i c_i}{\sum_i m_i}, \; C_V = \frac{\sum_i V_i c_i}{\sum_i V_i} \tag{118}$$

Centro de masas(II)

Para un sistema continuo

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\int \rho(\vec{r})\vec{r}dV}{\int \rho dV} \tag{119}$$

donde

$$M = \int \rho dV = \int \rho d^3x \tag{120}$$

aunque la definición es válida en cualquier dimensión D. Para 3d, las componentes serían

$$X_{CM} = \frac{\int X\rho dV}{\int \rho dV} \tag{121}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int Y\rho dV}{\int \rho dV} \tag{122}$$

$$Z_{CM} = \frac{\int Z\rho dV}{\int \rho dV} \tag{123}$$

Contenido

Dinámica y fuerzas

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento atendiendo a las causas que lo producen. Esas causas o interacciones son las fuerzas:

Fuerza (The Force)

Fuerza es todo agente o causa que es capaz de modificar el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo.

Inercia (Inertia)

Inercia[a] es la tendencia o propiedad de todos los cuerpos de conservar o mantener su estado de movimiento (o reposo) frente a interacciones (fuerzas). El reposo es el estado de movimiento con velocidad nula ($\vec{v}=0$) que no produce desplazamientos $\Delta\vec{r}=0$.

[a] Trägheitslosigkeit: no inertia, from the movie Explorers (1985).

Impulso

Se llama impulso, ímpetu, cantidad de movimiento, simplemente momento lineal (este último término es el más frecuente actualmente, circa 2020) o *momento*, a la magnitud vectorial

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \text{unidades:} \quad kg \cdot m \cdot s^{-1}(N \cdot s). \left[MLT^{-1}\right]$$

Reposo: $\Delta\vec{r} = 0, \Delta\vec{v} = 0, \Delta\vec{a} = 0, \ldots$ La importancia del impulso o momento es que $\vec{p}$ es una magnitud conservada en cuerpos aislados, o invariantes bajo traslaciones en el espacio según el teorema de Nöether (la invariancia traslacional espacial implica la conservación del momento). René Descartes sobre los movimientos de cuerpos libres: el movimiento es perpetuo y en línea recta.

Newton: sobre los cuerpos libres indica que se quedan en MRU o en reposo solamente si no hay fuerza externa neta. 3 leyes de la Dinámica.

Leyes de Newton(I)

Primera ley de Newton (Ley de inercia de Galileo).

Es una reformulación del Principio de Inercia de Galileo. Según la primera ley de Newton, todo cuerpo o sistema que está en reposo, o en movimiento rectilíneo y uniforme, permanece en reposo o en MRU mientras no actúe ninguna fuerza. Equivalentemente, se puede enunciar como sigue: en un sistema de referencia inercial (MRU) son válidas las leyes de Newton de la Dinámica. También, existe al menos un sistema de referencia (inercial), donde el objeto o sistema se mueve "en línea recta" conservando el momento.

Leyes de Newton(II)

Comentario: algunas veces se "deduce" la primera ley de Newton de la segunda ley de Newton. Es incorrecto.

- Sin la primera ley antes enunciada, no se puede deducir a priori que de $F = 0$ no haya aceleraciones. De hecho, en sistema de referencia no inerciales aparecen fuerzas "ficticias".
- Además, la primera ley dice algo más que simplemente esa implicación. Indica que si está en reposo permanece en reposo, y si está en MRU, queda en MRU si no hay fuerzas.
- Un cuerpo podría experimentar no fuerza instantánea, ni velocidad, y aún así empezar a moverse (por ejemplo, si aplicásemos un jerk contínuo y no nula en un instante).
- La primera ley elimina esa opción porque por su enunciado implica que la constante de movimiento debe ser la misma para el cuerpo o sistema.
- Algunas veces, el primer principio actúa de forma que el jerk sería no continuo.

Leyes de Newton(III)

1. La descripción de todo movimiento depende del observador y el sistema de referencia elegido.
2. Pero en una clase especial de sistemas de referencia, valen las leyes de Newton (las 3).
3. El movimiento tiene en cuenta que los objetos cambian. Los sistemas de referencia en reposo o con velocidad uniforme (constante) se llaman sistemas inerciales.
4. Otros sistemas de referencia, denominados no inerciales, están en rotación y poseen aceleración de algún tipo.
5. Se usa también como sinónimo de sistema de referencial la palabra *referencial*.

Segunda ley de Newton (Ley fundamental de la Dinámica).

La segunda ley de Newton o Ley fundamental de la Dinámica señala

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt},\ \text{Si la masa es constante } \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_i$$

Tercera ley de Newton (Principio de acción-reacción).

La Tercera ley de Newton, o principio de acción-reacción, señala

$$\vec{F}(1 \to 2) = -\vec{F}(2 \to 1)$$

Fuerzas(I)

- Las fuerzas fundamentales conocidas, exceptuando la actual (circa 2020) desconocida fuerza ligada a la energía oscura y constante cosmológica, son 4: fuerza gravitacional, fuerza electromagnética, fuerza nuclear débil y fuerza nuclear fuerte.
- A nivel cuántico, están mediadas por partículas mensajero o bosones gauge llamadas gravitones, fotones, bosones W y Z, y gluones.
- Se puede considerar que el campo de Higgs, o dador de masa de las partículas elementales (el protón y los nucleones obtienen su masa de objetos compuestos por un mecanismo diferente debido a la interacción fuerte) puede considerarse otra interacción fundamental que da origen a la masa de partículas.
- Por tanto la masa puede entenderse también como interacción entre campos cuánticos.
- De hecho, para cualquier partícula, podemos escribir que su valor de masa es el valor de su acoplo de Yukawa y el campo de Higgs por el valor del campo de Higgs en el vacío, que no es nulo, en la forma $m = g_Y \langle H \rangle$.

Las fuerzas fundamentales, entonces, tienen unas constantes de fuerza características:

- Fuerza gravitacional: $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Fuerza eléctrica: $K_C = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.
- Fuerza magnética: $K_m = 2K_A = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$, permeabilidad magnética $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$ (unidades equivalentes N/A^2, H/m, donde H es el henrio). Aparece en la ley de Ampère $\dfrac{F_m}{L} = 2K_A \dfrac{I_1 I_2}{r}$.
- Electromagnetismo: $\alpha = \dfrac{K_C e^2}{\hbar c} \simeq 1/137$, donde la última igualdad es a escalas de energía ordinarias. La constante de estructura fina α es renormalizada a altas energías (distancias pequeñas).

- Interacción nuclear débil: constante de Fermi

$$G_F^0 = \frac{G_F}{(\hbar c)^3} = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2c^4} = \frac{\sqrt{2}g^2}{8E_{W0}^2} = 1{,}166 \cdot 10^{-5}\,GeV^{-2}$$

- Valor esperado del campo de Higgs en el vacío, v.e.v.:

$$\langle H \rangle = v = \left(\sqrt{2}G_F^0\right)^{-1/2} = 246{,}22\,GeV$$

A nivel de árbol, en el Modelo Estándar (ME/Standard Model,SM),

$$G_F^0 \simeq \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2\left(1 - \dfrac{M_W^2}{M_Z^2}\right)}$$

Esta expresión se simplifica usando el ángulo de Weinberg

$$G_F^0 \simeq \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2\cos^2\theta_W\sin^2\theta_W}$$

- Interacción nuclear fuerte: g_s ó $\dfrac{g_s^2}{\hbar c} = \alpha_s \sim 1$.

El MAS(I)

El movimiento de cuerpos bajo una fuerza recuperadora o elástica, tipo ley de Hooke:

$$\vec{F}_e = -k\vec{r}$$

produce un tipo de movimiento llamado movimiento armónico simple (MAS) que ya hemos comentado previamente en estos apuntes y notas. La descripción de un MAS en una dimensión espacial y temporal es relativamente simple. Se determina la elongación $x(t)$ de tipo sinusoidal

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = B\cos\left(\omega' t + \varphi_0'\right)$$

Se puede ver que, el MAS, es en realidad la proyección sobre una recta de un MCU, donde $A = B$ es la máxima elongación, que se llama *amplitud*.

El MAS(II)

Podemos calcular la elongación sobre el eje X o el eje Y $(x(t), y(t))$, o más generalmente, la proyección sobre cualquier eje o recta en un espacio multidimensional arbitrario $X_n(t)$. ω es la velocidad angular o pulsación, constante en un MAS, t es el tiempo (generalmente unidimensional), φ_0 es la fase inicial, $\varphi = \omega t - \varphi_0$ es la fase, $T = 2\pi/\omega$ es el período y $f = 1/T$ la frecuencia. Recordad que para el MCU teníamos:

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = R\sin(\omega t + \varphi_0)$$

de donde se sigue la semejanza y dualidad entre el MAS y el MCU. El MAS es un movimiento periódico, ya que $x(t) = x(t + T) = x(t + nT)$, con n entero. Para ver el origen del MAS derivado de la ley de Hooke, en una simple dimensión, se tiene que:

$$ma = -kx$$

por tanto

$$ma + kx = 0$$

$$a + \frac{k}{m}x = a + \omega^2 x = 0$$

de donde se sigue que $\omega = \sqrt{k/m}$, o $k = m\omega^2$. La resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

produce efectivamente

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Derivando respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

lo que efectivamente satisface $a + \omega^2 x = 0$. La fase inicial se puede fijar mediante condiciones iniciales del MAS:

$$x(0) = x_0 = A\sin(\varphi_0), \; v(0) = v_0 = A\omega\cos(\varphi_0), \; a(0) = a_0 = -A\omega^2\sin(\varphi_0)$$

El MAS(IV)

La elongación, velocidad y aceleración (y realmente cualquier derivada temporal del MAS) se encuentran acotadas superior e inferiormente:

$$-A \leq x(t) \leq A$$

$$-A\omega \leq v(t) \leq A\omega$$

$$-A\omega^2 \leq a(t) \leq A\omega^2$$

$$-A\omega^n \leq \frac{d^n x}{dt^n} \leq A\omega^n$$

La energía cinética de un MAS es la cantidad:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad J$$

La energía potencial elástica (la fuerza recuperadora es conservativa y deriva de una función energía potencial) es

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad J$$

El MAS(V)

La suma de energía cinética y potencial es la *energía mecánica*:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

de donde

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = constant$$

Que la energía potencial elástica es $E_p = kx^2/2$ puede deducirse de un simple argumento geométrico del MAS. La fuerza recuperadora es proporcional a la cantidad de deformación o estiramiento x producido. Por tanto, el trabajo realizado es el área bajo la curva $F = F(x) = kx$, que no es más que un triángulo en la representación $F - x$. El área es $W = F(x)x/2 = (kx)x/2 = kx^2/2 = E_p$.

Este argumento es visible en la figura adjunta.

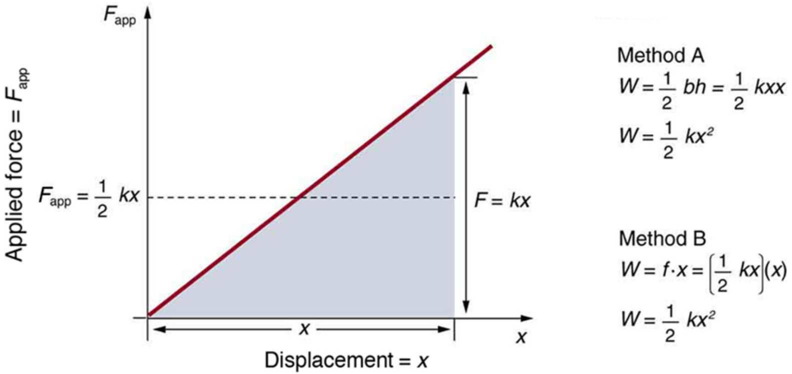


Figura 2: Derivación geométrica de la energía potencial para la ley de Hooke.

Fuerzas de rozamiento

En reposo, hay que vencer una fuerza de rozamiento estático F_e para lograr que un cuerpo en contacto con otro empiece a moverse. La fuerza de rozamiento estática es $\vec{F}_e = \mu_e \vec{N}$, donde $\vec{N}$ es la fuerza normal a la superficie de contacto con el cuerpo. Una vez iniciado el movimiento, el rozamiento disminuye un poco (debido a las interacciones entre superficie y cuerpo/objeto). En tal caso, se habla de fuerza de rozamiento dinámica, y se escribe $\vec{F}_d = \mu_d \vec{N} = \mu \vec{N}$. Habitualmente, en Dinámica, se suele considerar con mayor frecuencia el rozamiento dinámico, y no el estático, aunque los dos conceptos son relevantes e importantes. Además, se tiene que

$$0 \leq \mu_d = \mu < \mu_e < 1$$

En general, pues

$$\vec{F}_r = -\mu N \vec{e}_v$$

donde e_v es un vector unitario (módulo unidad) en la dirección y sentido de la velocidad $\vec{v}$. También, en módulo, por tanto,

$$|\vec{F}_d| < |\vec{F}_e|$$

Fuerzas de rozamiento(II)

En fluidos (líquidos y gases), se tiene

$$\vec{F}r = -kv^n\vec{e}_v$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ es un entero generalmente. En fluidos viscosos, se obtiene habitualmente

$$\vec{F}_r = -K\eta v\vec{e}_v$$

donde K es una constante de viscosidad geométrica, η es la viscosidad, y v es el módulo de la velocidad. Las unidades de la viscosidad son

$$[\eta] = [F]\,/\,[v] = J\cdot s\cdot m^{-2} = MT^{-1} = kg\cdot s^{-1}$$

Fuerzas de rozamiento(III)

Un caso particular de esta ley de viscosidad es cuando hay fricción en esferas fluidas. En tal caso la expresión anterior se reexpresa mediante la forma denominada Ley de Stokes

$$F_r = -6\pi R\eta v\vec{e}_v$$

Si $[R] = L$, entonces η cambia la dimensionalidad previa a

$$[\eta] = J \cdot s \cdot m^{-3} = ML^{-1}T^{-1}$$

Por lo tanto, hay que tener cuidado con el coeficiente K (R) de viscosidad geométrica porque a veces lleva unidades de longitud.

Fuerzas centrales

Usando la ley de Stokes, se puede calcular la velocidad terminal o límite en el aire (despreciando el empuje y otros factores) como sigue:

$$F = ma = mg - 6\pi R\eta v$$

Si $a = 0$, entonces la velocidad límite es

$$v_l = \frac{mg}{6\pi R\eta}$$

Vectorialmente se puede escribir también

$$\vec{v}_l = \frac{m\vec{g}}{6\pi R\eta}$$

Una fuerza se dice que es central si

$$\vec{F} = F_r\vec{e}_r$$

Es decir, una central es aquella que solamente depende de la dirección hacia un punto C, en un línea, y se denomina centro de fuerzas. La definición de fuerza conservativa es más sutil (íntimamente relacionada con la tercera ley de Newton y la primera ley también en última instancia).

Fuerzas conservativas

Se dice que una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si cumple cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes (véase el apartado de trabajo y energía más adelante):

- $\vec{F} = -\nabla E_p = -\nabla U$. Aquí ∇ es el operador de derivadas parciales $\nabla = \partial_i$, en componentes cartesianas y $3d$:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

- $\nabla \times \vec{F} = \text{rot}\vec{F} = \text{curl}\vec{F} = 0$. Aquí el rotacional es un producto vectorial (en 3d). En dimensiones superiores a 3, hay que usar el producto exterior $\wedge$ o la derivada exterior $F = dA$, en ocasiones con el operador estrella de Hodge $\star$, para generalizar este concepto de rotacional y producto vectorial. El producto vectorial está restringido dimensionalmente, como operación binaria, a espacios de 3 y 7 dimensiones; como operación n-aria hay restricciones también. El producto exterior se define para espacios de cualquier dimensión $p \leq n$.

Fuerzas conservativas(II)

- El trabajo para llevar una partícula desde un punto inicial A a otro B no depende del camino sino solamente de la posición de A y de B.

$$W_\gamma(A,B) = W_{\gamma'}(A,B) = \dots$$

- El trabajo anterior se puede escribir como menos la variación de la función energía potencial:

$$W_\gamma(A,B) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- El trabajo para ir y volver al mismo punto no depende del camino y es igual a cero:

$$W_\gamma(A,A) = 0, \ \ \forall\gamma$$

$$W_\gamma = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \ \ \forall\gamma$$

- La variación de energía mecánica es nula $\Delta E_m = 0J$.
- La energía mecánica permanece constante, i.e., $E_m = constant \ \ J$.

Fuerzas elásticas/cósmicas

Para muelles, osciladores, que no superar el límite de elasticidad de su estructura atómico-molecular:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{r}, \quad \vec{F}_{\Lambda} = +\Lambda\Delta\vec{r}$$

Dimensiones: $[k] = MT^{-2} = [\Lambda]$.

Fuerza gravitacional y peso

$$\vec{F}_N = -G_N\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r = -G_N\frac{Mm\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = -m\left(G_N\frac{M_{\oplus}}{r^2}\vec{e}_r\right)$$

Fuerza eléctrica

La fuerza entre cargas puntuales está dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_e = K_C\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r = K_C\frac{Qq\vec{r}}{r^3}$$

Para el espacio euclídeo tridimensional (o el espacio-tiempo cuadridimensional), las constantes de gravitación universal y de Coulomb para masas y cargas puntuales valen respectivamente

$$G_N = \frac{1}{4\pi g_0} = 6{,}674\cdot 10^{-11}Nm^2/kg^2$$

$$K_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99\cdot 10^{9}Nm^2/C^2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_C} = 8{,}85\cdot 10^{-12}C^2/Nm^2$$

$$g_0 = \frac{1}{4\pi G_N} = 1{,}19 \cdot 10^9 kg^2/Nm^2$$

Igualando la fuerza eléctrica coulombiana a la gravitacional newtoniana, para $Q = q$ y $M = m$, a igual distancia, se sigue que

$$\left(\frac{Q}{M}\right)^2 = \frac{G_N}{K_C},\ \left(\frac{Q}{M}\right) = \sqrt{\frac{G_N}{K_C}},\ M = Q\sqrt{\frac{K_C}{G_N}}$$

De la relación habitual entre las permitividades eléctrica y magnética en el vacío

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{4\pi K_C}{\mu_0} = \frac{K_C}{K_m}$$

si usamos la cuantización de Dirac $Q_e Q_m = 2\pi N$, se sigue que un monopolo magnético $N = 1$ tendría una masa

$$M = 2\pi q_e c\sqrt{\frac{K_m}{G_N}} = q_e c\sqrt{\frac{\pi\mu_0}{G_N}} \sim 1{,}17 \cdot 10^{-8} kg$$

Esta masa es similar a la masa de Planck, que también se obtiene por otro camino: igualando la escala de longitud cuántica dada por la longitud de onda de de Broglie/Compton (fotón o cuanto de energía con momento Mc) con la mitad (por comodidad) del radio de Schwarzschild

$$\frac{\hbar}{Mc} = \frac{G_N M}{c^2},\ M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \sim 10^{-8} kg$$

La longitud de Planck, distancia fundamental a las que se espera la unificación de la gravitación con la teoría cuántica sale con

$$L_C L_G = L_p^2 \rightarrow \frac{\hbar}{Mc}\frac{G_N M}{c^2} = L_p^2 \rightarrow L_p^2 = \frac{G_N \hbar}{c^3} \rightarrow L_P = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}} \sim 10^{-35} m$$

El tiempo de Planck es igual a

$$T_p = L_p/c = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^5}} \sim 10^{-43} s$$

Algunas expresiones útiles

Además, el absement o ausición de Planck es

$$\mathcal{A} = L_p T_p \sim 10^{-78} m \cdot s$$

Algunas expresiones de energías potenciales para fuerzas habituales son:

- Energía potencial gravitacional $E_p(g) = -G_N \dfrac{Mm}{r}$. A baja altura, adopta la expresión $E_p = mgh = (-mg)(-h)$.
- Energía potencial eléctrica $E_p(el) = K_C \dfrac{Qq}{r}$.
- Energía potencial elástica $E_p(elas) = \dfrac{kx^2}{2}$, o más generalmente se escribe también $\Delta E_c(elas) = \dfrac{1}{2} k \Delta x^2$.

Torque y momento angular

Torque

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{124}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{125}$$

Ley de dinámica de rotación

$$\vec{M} = \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\alpha \tag{126}$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \leftrightarrow \text{Momento de inercia} \tag{127}$$

Conservación del momento lineal y angular

Si $\sum F = 0$, entonces $\vec{P}$ se conserva para un sistema de partículas (o una partícula simple):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{P} = \sum_i \vec{p_i} = \text{constant} \qquad (128)$$

Si $\sum \tau = 0$, entonces $\vec{L}$ se conserva para un sistema de partículas (o una partícula simple):

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = \sum_i \vec{p_i} = \text{constant} \qquad (129)$$

Si $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$, entonces

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L_i} = \sum \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_i m_i r_i^2 \omega \qquad (130)$$

es decir

$$\boxed{L = I\omega} \qquad (131)$$

Analogías de traslación-rotación

- Velocidades: $v = s/t$, $\omega = \theta/t$.
- Aceleración: $a = v/t$, $\alpha = \omega/t$.
- Fuerza y momento: $F = ma = dp/dt$, $\tau = I\alpha = dL/dt$.
- Trabajo y energía: $W = Fx$, $W_r = \tau\theta$.
- Energía cinética: $E_c = mv^2/2$. $E_c(r) = I\omega^2/2$.
- Potencia: $P = Fv$, $P = \tau\omega$.
- Momento lineal y angular: $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Contenido

Trabajo elemental

$$dE = dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \to W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (132)$$

Potencia media e instantánea

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \to \mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (133)$$

Unidades: energía se mide en julios(J) en el S.I., ergios (erg) en C.G.S., o incluso *kWh* ó *eV*. Potencia se mide en vatios (a veces en C.V.). El calor es una forma de transferencia de energía, y 1 caloría (1cal) es 4,186J (equivalencia mecánica del calor).

Teorema generalizado de la energía mecánica

Teorema de la energía mecánica (generalizado)

Si sobre una partícula, cuerpo o sistema actúan una serie de fuerzas conservativas y no conservativas, la variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas:

$$\Delta E_m = W(F_{nc})$$

Energía de rotación

Energía cinética de rotación

Para una partícula simple, si usamos $v = \omega R$, se tiene una energía cinética de rotación:

$$E_c(rot) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

es decir

$$\boxed{E_c(rot) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{\vec{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j} \qquad (134)$$

Cuando hay no una sino varias partículas, tenemos un sistema de partículas. La masa total de un sistema de partículas es la suma de las masas de las partículas:

$$M = m_t = \sum_{i=1}^{N} = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$$

Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes. En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos externos son cero. Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$.

Momentos de inercia sencillos

Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \frac{3}{10}MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$.
- Caja paralelepípedo: $I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$.

Momento de sistemas de partículas

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{R} = M\vec{a}_G$. Para un punto material

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{135}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \tag{136}$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{137}$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*) \tag{138}$$

donde $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i^* = m_i \vec{v}_i^*$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p}, \ \vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \tag{139}$$

Fuerzas y campos(I)

Para las fuerzas gravitacional y eléctrica, el campo gravitacional y eléctrico se define como

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G_N \frac{M}{r^2}\vec{e}_r \quad N/km(m/s^2)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}_e}{m} = K_C \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \quad N/C$$

El potencial es una definición análoga para energías:

$$V_g = \frac{E_p(g)}{m} = -G_N \frac{Mm}{r} \quad J/kg$$

$$V_e = \frac{E_p(el)}{q} = K_C \frac{Q}{r} \quad V(J/C)$$

Así, se definen también las variaciones de energía en función de las variaciones de potencial y viceversa:

$$\Delta E_p(g) = m\Delta V_g$$

$$\Delta E_p(el) = q\Delta V_e$$

Fuerzas y campos(II)

El concepto de campo subyace a toda la Física. El sueño de todo teórico y científico que quiera estudiar el Universo/Multiverso y explicarlo es la construcción de una teoría unificada del campo. Los campos son objetos que podemos imaginar de tipo "fluídico" que llenan el vacío o espacio-tiempo. Los campos tienen propiedades características que lo generan: el campo gravitacional la masa(energía), el campo eléctrico la carga eléctrica, el campo magnético las cargas en movimiento, la fuerza nuclear débil el sabor, y la fuerza nuclear fuerte el color. La carga eléctrica y también la energía sabemos desde el siglo XX que están cuantizadas:

$$E = Nhf$$

$$Q = Ne$$

La carga eléctrica y la energía son magnitudes generalmente conservadas en la Naturaleza:

$$\sum_i \Delta E_i = 0, \; \sum_i Q_i^+ + \sum_i Q_i^- = \sum \Delta Q_i = 0$$

Fuerzas y campos(III)

La materia se organiza en distribuciones de carga y masa discretas y continuas. Existen materiales aislantes, semiconductores y conductores. También existen superconductores y aislantes topológicos (conducen en la superficie pero no lo hacen en el "bulk"). La ley de Coulomb vale para cargas puntuales (para cargas distribuidas en volúmenes hay que usar un teorema denominado teorema de Gauss):

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$$

La permitividad eléctrica de un material es

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

Para un conductor, dentro, no hay campo (el potencial es constante en el interior de un conductor eléctrico estándar).

Tanto el campo eléctrico como el campo gravitacional obedecen un principio denominado principio de superposición (aunque en el caso de la gravitación relativista y electromagnetismo en medios no lineales, no es cierto en general dicho principio), que indica que el campo total de un conjunto de cargas o masas en un punto es igual a la suma de campos de cada carga y punto:

$$\vec{E}_t(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} K_C \frac{Q_i}{r_i^2(P)} \vec{e}_i(P)$$

$$\vec{g}_t(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + \vec{g}_n = -\sum_{i=1}^{n} G_N \frac{M_i}{r_i^2(P)} \vec{e}_i(P)$$

Fuerzas y campos(IV)bis

El principio de superposición también vale para potenciales

$$V_t(el) = \sum_i V_i(el) = V_1(el) + V_2(el) + \cdots + V_n(el) = \sum_i \frac{K_C Q_i}{r_i(P)}$$

$$V_t(g) = \sum_i V_i(g) = V_1(g) + V_2(g) + \cdots + V_n(g) = -\sum_i \frac{G_N M_i}{r_i(P)}$$

Es importante no confundir el símbolo de campo eléctrico con el de energía. El trabajo eléctrico se relaciona con el potencial si hay suficiente simetría de la forma siguiente:

$$W_{el} = QEr = QEd$$

Como el campo eléctrico es conservativo $\Delta E_c = -\Delta E_p$, i.e. $\Delta E_m = 0$.

Condensadores

Los condensadores eléctricos son dispositivos que almacenan carga:

$$C = \frac{Q}{V}$$

o en general

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Las unidades de la capacidad o de los condensadores eléctricos son los faradios (F), $1F = 1C/1V$.

La resistencia eléctrica disipa calor por efecto Joule, y es responsable de la pérdida de eficiencia en el transporte de electricidad o carga eléctrica. Matemáticamente, la ley de Ohm relaciona la resistencia eléctrica de materiales usuales con el potencial y la corriente

$$V = IR$$

La corriente eléctrica es la magnitud que mide el flujo de carga por unidad de tiempo, es decir, la variación de carga por unidad de tiempo (media o instantánea) es la corriente eléctrica:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

La corriente eléctrica se mide en amperios A $(1A = 1C/1s)$ y la resistencia eléctrica se mide en ohmios (Ω), $1\Omega = 1V/1A$. La asociación de resistencias en paralelo o serie da lugar a dos fórmulas:

- Resistencias en serie. Se suman:

$$R_t = \sum_i R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

- Resistencias en paralelo. Se hace el recíproco:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Para condensadores es al revés:

- Condensadores en paralelo. Se suman:

$$C_t = \sum_i C_i = C_1 + \cdots + C_n$$

- En serie. Se hace el recíproco:

$$\frac{1}{C_t} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Resistencias y generadores

La relación entre resistencia, longitud y área de un conductor viene dada por la fórmula de la resistividad ρ_e

$$R = \rho_e \frac{L}{S}$$

Para un generador de corriente, el trabajo se calcula

$$W_g = \varepsilon I t$$

en donde ε es ahora el voltaje del motor o generador. La potencia de un generador viene dada por la ley de Joule

$$P = \varepsilon I = I^2 R$$

donde R es la resistencia del generador. Para un generador realista o real

$$\varepsilon_r = \varepsilon - Ir$$

donde r es una resistencia interna del generador.

Con un motor intercalado, de voltaje ε' y resistencia r', esta definición produce la ley de Ohm generalizada

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'}$$

Demostración: Por el circuito total circula una corriente I.La resistencia interna es r y la interna r', estando todas en serie, luego $R_t = R + r + r'$. El voltaje del circuito es es del generador menos el del motor interno, i.e., $V = \varepsilon - \varepsilon'$. Igualando se obtiene la ley de Ohm generalizada de arriba. Factores que afectan a la resistencia:

1. Temperatura.
2. Naturaleza del material.
3. La longitud del material.
4. La sección o área del material.

Contenido

Las 3 leyes de Newton son las leyes fundamentales de la Dinámica de partículas y sistema de partículas a bajas energías y grandes objetos.

Ley fundamental de la Dinámica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \tag{140}$$

La resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación del momento $\vec{p} = m\vec{v}$. Las unidades de las fuerzas son los newton (N), o las dinas. $1N = 10^5 dinas$. También existe el kilopondio (kp). $1kp = 9,8N$.

Dinámica(II)

Supongamos un sistema de puntos materiales formado por n masas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Se define el centro de masa como el punto con vector de posición:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \tag{141}$$

La velocidad del centro de masas se define derivando:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \tag{142}$$

y la aceleración similarmente:

$$\vec{a}_G = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{f}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M} \tag{143}$$

Dinámica(III)

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{R} = M\vec{a}_G$. Para un punto material, también se definen el momento angular y momento de una fuerza(torque), respectivamente, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{144}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \tag{145}$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{146}$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i^{\,*} \times \vec{p}_i^{\,*}) \tag{147}$$

donde $\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i^{\,*} = m_i \vec{v}_i^{\,*}$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \tag{148}$$

$$\vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \tag{149}$$

El trabajo o energía se define como la cantidad

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_\gamma dW = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}} \quad (150)$$

La energía de una partícula libre está relacionada con su momento. Es la llamada energía cinética (no relativista o relativista). Una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante satisface

$$\vec{p} = m\vec{v} \leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (151)$$

Multiplicando

$$\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right) = 0 \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} = E_c \quad (152)$$

- La energía cinética fue introducidad originalmente por Descartes bajo el nombre de *vis viva*.
- La energía cinética de un sistema de partículas se puede relacionar también con la energía del centro de masas y la energía de las partículas alrededor de éste, o simplemente la suma de las energías de cada partícula, ya que es una cantidad aditiva ($E_c(tot) = \sum_i E_c(i)$).

Potencia

Se llama potencia a la energía por unidad de tiempo:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{153}$$

La potencia se mide en vatios (W). $1W = 1J/s$. $1kWh = 3{,}6MJ$ es unidad de energía.

Dinámica(VII)

- Si $W = 0$, la energía cinética del punto permanece constante.
- En un sistema de partículas, si el trabajo total(fuerzas interiores y exteriores) es nulo, la energía cinética del sistema se mantiene constante.
- En choques o colisiones de partículas, estas ideas son muy importantes.
- Si el choque es elástico, se conservarán el momento lineal y la energía cinética de las partículas.
- En un choque inelástico, el momento lineal se conservará, pero no se conservará la energía cinética de las partículas.

Dinámica(VIII)

Sólido rígido

- Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes.
- En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos externos son cero.

Momento de inercia

Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$.

Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \dfrac{2}{5} MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \dfrac{1}{2} MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \dfrac{3}{10} MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \dfrac{1}{12} ML^2$.
- Caja paralelepípedo: $I = \dfrac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$.

- El momento de inercia permite simplificar la Dinámica de rotación.
- Así, el análogo de $\vec{F} = m\vec{a}$ es $\vec{\tau} = I\alpha$, donde $L = I\omega$.
- Además, podemos definir la energía cinética de rotación como $E_c(rot) = \dfrac{1}{2}I\omega^2 = \dfrac{1}{2}L\omega$.
- El trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el sólido ha girado un ángulo se puede determinar mediante la integral del momento de fuerzas o torque sobre el ángulo:

$$W = \int_i^f M d\varphi = \int_i^f \tau d\varphi \tag{154}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{155}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{156}$$

En relatividad especial, se define la "rapidity" φ

$$\gamma = \cosh\varphi, \quad \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} \tag{157}$$

$$E = m\gamma c^2 = mc^2\gamma = mc^2\cosh\varphi, \quad p = m\gamma v = mc\gamma\frac{v}{c} = mc\gamma\beta = mc\sinh\varphi \tag{158}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \beta\gamma = \sinh\varphi, \quad \beta = \tanh\varphi \tag{159}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = \frac{v}{c} = \tanh\varphi = \tanh\cosh^{-1}\gamma \tag{160}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\varphi = \cosh\tanh^{-1}\beta \tag{161}$$

Relatividad(II)

$$p = m\gamma v, \quad \lambda = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{p} \tag{162}$$

$$E = mc^2\gamma, \; E_c(r) = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = \sqrt{p^2c^2 - m^2c^4} - mc^2 \tag{163}$$

$$E_c(r)^2 = E^2 - 2Emc^2 + (mc^2)^2 \tag{164}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 + (mc^2)^2}} = \frac{hc}{\sqrt{E_c^2(r) + 2E_c(r)mc^2}} \tag{165}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_c(r)mc^2\left(1 + \frac{E_c(r)}{2mc^2}\right)}} \tag{166}$$

$$\frac{pc}{E} = \beta, \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \tag{167}$$

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{p}{mv} \tag{168}$$

$$H=\frac{p^2}{2m}+V=\frac{1}{2}mv^2+V,\quad \Psi=\Psi(x,y,z,t)\in\mathbb{C} \tag{169}$$

$$p_j=-i\hbar\partial_j,\quad E=i\hbar\partial_t \tag{170}$$

$$p_j^2=-\hbar^2\partial_j^2,\ E^2=-\hbar^2\partial_t^2 \tag{171}$$

$$|\Psi(x,y,z,t)|^2=\overline{\Psi}\Psi=P(x,y,z,t)=\mathrm{Prob}(x,y,z,t) \tag{172}$$

Ondas planas (1d):

$$e^{\frac{PX}{\hbar}}=e^{\frac{px-Et}{\hbar}}\sim\Psi,\quad PX=px-p_0x_x=px-Et \tag{173}$$

$$\partial_x e^{\frac{px-Et}{\hbar}}=ip/\hbar,\quad \partial_{xx}=-p^2/\hbar^2 \tag{174}$$

$$\partial_t e^{\frac{px-Et}{\hbar}}=-iE/\hbar \tag{175}$$

$$H\Psi=E\Psi\rightarrow\frac{p^2}{2m}\Psi\rightarrow -p^2/\hbar^2=-iE/\hbar\rightarrow(-i\hbar)^2\partial_{xx}\Psi=E\Psi \tag{176}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\Psi=\frac{p^2}{2m}\Psi=E\Psi \tag{177}$$

Partícula en una caja, con

$$V = \begin{cases} \infty, x < 0, x > L \\ 0, 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad , \quad \Psi(0) = \Psi(L) = 0 \tag{178}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi = E\Psi \rightarrow \partial^2\Psi_x = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi \rightarrow \partial_{xx}\Psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = 0 \tag{179}$$

Soluciones:

$$\boxed{\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)}, n = 1, 2, \ldots, \infty \tag{180}$$

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{181}$$

Partícula en una caja 3d:

$$-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi = E\Psi(x,y,z,t) \tag{182}$$

$$\Psi(0,y,z) = \Psi(L_x,y,z) = 0 \tag{183}$$
$$\Psi(x,0,z) = \Psi(x,L_y,z) = 0 \tag{184}$$
$$\Psi(x,y,0) = \Psi(x,y,L_z) = 0 \tag{185}$$

$$\Psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{L_xL_yL_z}}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi x}{L_y}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi x}{L_z}\right) \tag{186}$$

$$E(n_x,n_y,n_z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}+\frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \tag{187}$$

Átomo de hidrógeno:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{Ke^2}{r}\right)\Psi = E\Psi \tag{188}$$

$$\Psi(x,y,z) = R_n(r)P_l(\theta)\Theta_{m,l}(\varphi) \tag{189}$$

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\left(\frac{2}{na_B^*}\right)^3} e^{-\rho/2}\rho^l L_{n-l-1}^{2l+1} Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{190}$$

$$\rho = \frac{2r}{na_B^*}, \quad a_0^* = \frac{\hbar^2}{Ke^2\mu}, \quad \mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \tag{191}$$

y donde $n = 1, 2, \ldots, \infty$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, $m = -l, \ldots, +l$. Incluyendo espín, $\psi(nlms) = \Psi(nlm)\chi_s$.

$$\Psi(1,0,0)(r) = \frac{e^{-r/a_0^*}}{\sqrt{\pi}a_0^{*3/2}} \tag{192}$$

$$|\Psi(1,0,0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \tag{193}$$

Oscilador armónico cuántico:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\Psi=E\Psi \tag{194}$$

Funciones de onda:

$$\boxed{\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)} \tag{195}$$

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right) \tag{196}$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega n+E_0,\quad E_0=\hbar\omega/2 \tag{197}$$

Mecánica Cuántica(VI)

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(\hat{x} + i/m\omega\hat{p})\,, \quad a^\dagger = \sqrt{m\omega/2\hbar}\,(\hat{x} - i/m\omega\hat{p}) \tag{198}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)\ \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a) \tag{199}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{200}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad N = a^\dagger a \tag{201}$$

$$N\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,. \tag{202}$$

$$Na^\dagger|n\rangle = \left(a^\dagger N + [N, a^\dagger]\right)|n\rangle = \left(a^\dagger N + a^\dagger\right)|n\rangle \tag{203}$$

$$= (n+1)a^\dagger|n\rangle, \tag{204}$$

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\,|0\rangle\,, \quad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{205}$$

¿Qué es un ordenador cuántico? Los conceptos básicos de QM necesarios son: qubit, qutrit,...,qudit,quit, superposición cuántica y entrelazamiento cuántico.

- Tradicionalmente en Física Clásica localimos una partícula con una posición bien definida, e.g., en 2d, por $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$, donde a, b son números reales definidos (no indefinidos).
- Ejemplo: una partícula está en posición $(3,4) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
- En un ordenador usual, una instrucción eléctrica está basada en bits, que son vectores digitales que se obtienen al combinar 0's y 1's, paso o no de corriente, en una sucesión dada.
- Para nd, $\vec{r} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$, $a_i \in \mathbb{R}$ números reales definidos.
- El principio de superposición está clásicamente permitido como en mecánica cuántica, solamente que los observables existen incluso si no miramos los objetos, no como en mecánica cuántica.

Computación cuántica y QM(II)

¿Qué es un ordenador cuántico? Los conceptos básicos de QM necesarios son: qubit, qutrit,...,qudit,quit, superposición cuántica y entrelazamiento cuántico.

- En Mecánica Cuántica $\Psi \in \mathbb{C}$, y debido a la naturaleza ondulatoria de la materia y la energía, no hay posiciones bien definidas hasta que no observamos.
- Para $z = a + bi$, tenemos un qubit

$$\Psi = z_0 \left|0\right\rangle + z_1 \left|1\right\rangle, \left|z_0\right|^2 + \left|z_1\right|^2 = 1. \tag{206}$$

- Los números complejos no están bien definidos sino indeterminados (salvo una fase), pues son esencialmente oscilaciones.
- Un estado cuántico puede quedar bien definido si se mide o se prepara previamente.
- Bits clásicos (0,1), trits (0,1,2),...,dits(0,1,...,d-1) son sustuidos por equivalentes cuánticos indefinidos.

Computación cuántica y QM(III)

- Según los postulados mecanocuánticos, mientras no se mide, un estado cuántido está en combinación lineal de todos los estados intermedios superpuestos posibles. Cuando se mide o se prepara un estado, cesa esta superposición por proyección del estado a la "realidad".
- Según los postulados cuánticos, todo estado tiene una probabilidad:

$$P(\Psi) = \sum_{a,b,c,\ldots} |\langle \ldots cba|\Psi\rangle|^2 \tag{207}$$

En el caso más dramático, tenemos un gato u otro objeto macroscópico en una caja con un dispositivo cuántico (e.g., un átomo radioactivo que puede o no desintegrarse). O también una novia que nos ama o nos odia, según midamos o no la caja. En tal caso:

$$|\Psi\rangle = C_{\text{❤️}}\left|\text{❤️}\right\rangle + C_{\text{💔}}\left|\text{💔}\right\rangle \leftrightarrow |\Psi\rangle = C_{\text{🐈}}\left|\text{🐈}\right\rangle + C_{\text{🐈‍⬛}}\left|\text{🐈‍⬛}\right\rangle \tag{208}$$

Computación cuántica y QM(III)

En casos extremos tenemos el quit

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |i\rangle \, , \quad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = 1 \tag{209}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=\infty}^{\infty} w_i |i\rangle \, , \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w_i|^2 = 1 \tag{210}$$

También podemos tener suma de estados discretos y continuos cuánticos mixtos

$$|\Psi\rangle = \int d\mu(x)\phi(x), \quad P_\Psi = \int d\mu|\phi(x)|^2 \tag{211}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |i\rangle + \int d\mu\phi(x) \tag{212}$$

Contenido

Relatividad(I)

La teoría de la relatividad especial está basada en vectores de cuatro dimensiones (tetravectores) en su versión más simple (puede generalizarse a cualquier dimensión espacial y temporal).
La Relatividad Especial señala que las leyes de la Física son invariantes bajo transformaciones de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{213}$$

donde $\gamma = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)$, $\beta = v/c$, y c es la velocidad de la luz en el vacío.
A baja velocidad $\beta << 1$:

$$\gamma \simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\beta^4\right) \tag{214}$$

usando la aproximación binomial de Newton ($(1+x)^n \simeq 1 + nx$):

$$(\gamma - 1)mc^2 \simeq \left[\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) - 1\right] mc^2 = \frac{v^2 mc^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2} = E_c \tag{215}$$

Relatividad(II)

Entonces, las variantes SR del momento, energía cinética y energía total, usando la energía en reposo $E_0 = mc^2$ son

$$p = m\gamma v \tag{216}$$

$$E_c = E - mc^2 = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2 \tag{217}$$

$$E = m\gamma c^2 \tag{218}$$

A veces, se introduce el confuso y poco conveniente concepto de masa relativista

$$M = m\gamma \tag{219}$$

que es solamente la llamada masa transversal. La masa longitudinal es

$$M_L = \gamma^2 M = \gamma^3 m \tag{220}$$

Es más natural el concepto de energía desprendida en una desintegración radioactiva

$$\Delta E = \Delta M c^2 \tag{221}$$

Vector espacio-tiempo

$$\mathbb{X} = (\vec{r}, ct) = (x^i, x^0) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{222}$$

$$\mathbb{X} = x^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu e_\mu = \sum_\mu x^\mu \vec{e}_\mu \tag{223}$$

Vector tetramomento

$$\mathbb{P} = \left(\vec{p}, p^0\right) = (p^i, p^0) = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{224}$$

$$\mathbb{P} = p^\mu e_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} p^\mu e_\mu = \sum_\mu p^\mu \vec{e}_\mu \tag{225}$$

Vemos que el tiempo puede imaginarse como una cuarda coordenada si $x^0 = x^4 = ct$, y la energía es en realidad la cuarta componente del tetramomento. Además, definimos la masa invariante

Masa invariante

$$P = p^\mu p_\mu = p^2 - m^2\gamma^2 c^2 = -m^2 c^2 = -(mc)^2 \qquad (226)$$

Esto permite clasificar las partículas o sistemas atendiendo al signo de P:

- Si la masa invariante es cero, tenemos luxones o partículas con $v = c$, $E = pc$.
- Si la masa invariante es positiva $m > 0$ (o negativa), $P < 0$, $v < c$. Son los tardiones.
- Si la masa invariante es imaginaria $m = i\hat{m}$, $P > 0$ y $v > c$. Son los taquiones (generalmente no físicos por lo que se cree no existen).

El tetravector espacio-tiemo une espacio y tiempo, y el tetravector momento une momento lineal y energía. También se definen los conceptos de longitud y tiempo propios:

$$X = x^\mu x_\mu = x^2 - c^2 t^2 = -L_0^2 = -c^2\tau^2 \tag{227}$$

El tetravector potencia-fuerza une las nociones de fuerza y potencia 3D:

Tetravector potencia-fuerza

$$\mathbb{F} = \mathcal{F}^\mu e_\mu = \left(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^i\right) = \left(F^0, F^1, F^2, F^3\right) \tag{228}$$

donde

$$\mathbb{F} = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \gamma\left(\frac{dE}{cdt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \gamma\left(\frac{dE}{cdt}, \vec{F}\right) \tag{229}$$

Tetravelocidad

$$\mathbb{V} = v^\mu e_\mu = \gamma(c, \vec{v}) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\gamma, \gamma\vec{v}) = \gamma(c, \vec{v}) \tag{230}$$

La relatividad especial permite condensar conceptos, produce:

- Unión espacio-tiempo.
- Unión velocidad de la luz-velocidad.
- Unión momento-energía.
- Unión fuerza-potencia.

con adecuados factores de conversión. La relación de dispersión

Relación de dispersión relativista especial

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \leftrightarrow E(p,m) = \pm\sqrt{(pc)^2 + E_0^2} \tag{231}$$

Contenido

Para solventar el problema de la radiación del cuerpo negro, Max Planck introdujo la cuantificación de la energía, que es el análogo de la teoría atómica de la materia para la radiación:

$$E = hf = \hbar\omega \tag{232}$$

Esta hipótesis permite deducir correctamente la llamada ley de Stefan-Boltzmann para el cuerpo negro

$$\mathcal{P} = \sigma T^4 \tag{233}$$

usando que

$$u_f(T)df = \frac{8\pi h f^3 df}{c^3\left(e^{-\frac{hf}{k_B T}} - 1\right)} \rightarrow \int_0^\infty u_f(T)df = \sigma T^4 \tag{234}$$

donde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \tag{235}$$

Teoría cuántica(II)

En cuántica, toda partícula tiene una longitud de De Broglie asociada

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\gamma v} \tag{236}$$

$$E = pc \leftrightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} \tag{237}$$

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

$$hf = hf_0 + E_c(max) \leftrightarrow hf = W + \frac{1}{2}mv^2 \tag{238}$$

donde $W = hf_0$ es el trabajo de extracción o función de trabajo, $E_c(max) = eV_f$ es la energía cinética máxima de los electrones, y V_f es el potencial de frenado. $f \geq f_0$ para que exista efecto fotoeléctrico. Experimentalmente, el cambio de la intensidad de la luz no afecta a la energía cinética máxima de los fotoelectrones (pero sí la frecuencia), pero sí al número de electrones o corriente eléctrica.

El fracaso de los modelos clásicos o semiclásicos del átomo originó la creación del modelo mecanocuántico del átomo. En éste, las partículas son descritas por funciones de onda o vectores de estado que son generalmente números complejos. Se satisface la ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi = H\Psi \tag{239}$$

Para el átomo de hidrógeno, la función de onda del estado $1s$ resulta ser

$$\Psi_{100} = \frac{e^{-\frac{r}{a_0}}}{\sqrt{\pi a_0^3}} \tag{240}$$

La Mecánica Cuántica introduje la idea de que el observador altera el estado de las partículas, y, que, mientras no se observa, la función de onda está superpuesta sobre todos los estados posibles admisibles. Esto lleva al concepto de principio de indeterminación

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}\langle [A, B]\rangle \tag{241}$$

Para partículas subatómicas de tipo fermiónico,

$$\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi = 0 \tag{242}$$

En algunas teorías, hipotéticas aún, modernas, se generaliza el principio de Heisenberg a

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 + \alpha + \beta\frac{\Delta x}{L_{\lambda}^{2}} + \gamma\frac{\Delta p}{L_{p}^{2}}\right) \tag{243}$$

Para el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno:

$$E_n = \frac{(K_C e^2)^2}{2\hbar^2 n^2} \tag{244}$$

$$r_n = a_0 n^2 \tag{245}$$

$$\Delta E = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \tag{246}$$

$$R = Ry = \frac{(K_C e^2)^2}{2\hbar^2} \simeq 2{,}18 \cdot 10^{-18} J = 13{,}6\ eV, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{247}$$

Teoría cuántica(V)

Estas expresiones se derivan sencillamente de las siguientes hipótesis:

- Igualar la fuerza centrípeta a la fuerza electrostática de Coulomb.
- Suponer la cuantización de la acción o momento angular $L = mvr = n\hbar$.
- Suponer que en órbitas estacionarias, los electrones no radian ondas electromagnéticas.

Para átomos de un electrón, basta hacer el scaling

$$e^2 \rightarrow Ze^2 \tag{248}$$

Y para sistemas binarios cuánticos, se puede hacer la corrección de la masa

$$m \rightarrow \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{249}$$

que consiste en reemplazar la masa por la masa reducida, convirtiendo el sistema de 2 cuerpos en uno de 1 cuerpo, reducido al centro de masas.

Contenido

Desintegración radioactiva

Un sistema que se desintegre, posee al final un número de partículas

$$N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 2^{-t/T_{1/2}} \tag{250}$$

donde $\lambda = 1/\tau$ es la constante radioactiva, τ es la vida media y el periodo de semidesintegración es igual a

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2\tau \tag{251}$$

La rapidez con que se desintegra un núcleo o átomo (o partícula subatómica inestable) es la actividad

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = \left|\frac{dN}{dt}\right| = A_0 e^{-t/\tau} = A_0 2^{-t/T_{1/2}} \tag{252}$$

cuyas unidades son los becquerel (Bq), o desintegraciones por segundo.

Contenido

Artes oscuras y matematica(I)

Normalmente, uno pensaría que la suma

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \tag{253}$$

es divergente y no da un resultado finito. Sin embargo, uno puede recurrir a ciertas técnicas sublimes matemáticas, lo que podríamos llamar artes matemágicas oscuras, para regularizar o dar un valor finito a esa suma infinita. Esto puede dar problemas de multivaluación. Por ejemplo:

$$S = 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + \cdots \tag{254}$$

$$S = 1 + 9 + 18 + 27 + \cdots \tag{255}$$

$$S - 1 = 9(1 + 2 + 3 + \cdots) \tag{256}$$

$$S - 1 = 9S \tag{257}$$

$$S = -\frac{1}{8} \tag{258}$$

Artes oscuras y matemagia(II)

Sin embargo, podríamos hacer en su lugar

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \tag{259}$$

$$C = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \leftrightarrow C = 1 - C \rightarrow C = 1/2 \tag{260}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \cdots \tag{261}$$

$$-3S = -3 - 6 - 9 - 12 \cdots \tag{262}$$

$$-3S = 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots) \tag{263}$$

$$X = 1 - (2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots) \tag{264}$$

$$X = 1 - (1 - 2 + 3 - 4 + \cdots) - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) \tag{265}$$

$$-3S = 1 - (-3S) - C \tag{266}$$

$$-6S = 1 - C \tag{267}$$

$$S = -1/12 \tag{268}$$

Artes oscuras y matemagia(II)bis

También podríamos usar "tramposamente" la serie

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \tag{269}$$

$$4S = 4 + 8 + 12 + \cdots \tag{270}$$

$$-3S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{(1+1)^2} \tag{271}$$

$$S = -1/12 \tag{272}$$

Parece que es natural (sorprendentemente) que la suma de los naturales sea $-1/12$. Usando la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{273}$$

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)\frac{\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}} \tag{274}$$

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{275}$$

se tiene que la ecuación funcional de la función zeta de Riemann proporciona el valor

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots = \zeta(2)\frac{\Gamma(1)\pi^{-1}}{\Gamma(-1/2)\pi^{1/2}} \tag{276}$$

$$\zeta(-1) = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\pi^{-1}}{-2\sqrt{\pi^2}}\right) = -\frac{1}{12} \tag{277}$$

Artes oscuras y matemagia(III)bis

Este hecho fue también descubierto por Srinivasa Ramanujan

$$\sum_{n=1}^{x} = \int_0^s f(t)dt + C_R + \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x) \tag{278}$$

y la constante regularizada de la serie divergente

$$C_R = -\frac{1}{2}f(0) - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(0) \tag{279}$$

$$\sum_{n=1}^{x} 1 = I_\infty + C_R + \frac{1}{2} \tag{280}$$

y también recuperar el resultado anterior dando $-1/12$, puesto que

$$\sum_{n=1}^{x} n = \int_0^x tdt + C_R + \frac{n}{2} + \frac{1}{12} \tag{281}$$

y donde B_k son los números de Bernoulli ($B_0 = 0, B_2 = 1/6$), y $f^{(n)}$ denota derivación.

Otra manera de obtener finitos es introducir reguladores. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{N} n^k = (-1)^k \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial^k}{\partial\varepsilon^k} e^{-\varepsilon n} \tag{282}$$

Demostraremos la fórmula para $k = 1$.
PASO 1. Serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} - 1 \tag{283}$$

con $x = e^{-\varepsilon}$.
PASO 2. Uso de serie de Taylor y aproximación binomial de Newton:

$$\frac{1}{1 - e^{-\varepsilon}} = \frac{1}{1 - \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots\right)} = \frac{1}{\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots} \tag{284}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{(1-\frac{\varepsilon}{2!}+\frac{\varepsilon^2}{3!}+\cdots)}=\frac{1}{\varepsilon}(1+(\frac{\varepsilon}{2!}+\frac{\varepsilon^2}{3!}+\cdots)+(\frac{\varepsilon}{2!}+\frac{\varepsilon^2}{3!}+\cdots)^2+\mathcal{O}((\ldots)^3)) \tag{285}$$

$$\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{3!}+\frac{\varepsilon^2}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{12}+\ldots \tag{286}$$

Y por tanto, aplicando la fórmula del límite

$$\sum_{n=1}^{\infty} n=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{12}=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\zeta(-1) \tag{287}$$

Nótese que podemos aproximar

$$\frac{1-e^{(N+1)\varepsilon}}{\varepsilon} \approx (N+1) - \varepsilon\frac{(N+1)^2}{2} \tag{288}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left((N+1)\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\frac{(N+1)^2}{2}\right) = \frac{N(N+1)}{2} \tag{289}$$

Más generalmente tenemos un resultado más poderoso:

$$\sum_{n=1}^{n} n^k e^{-\varepsilon n} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial\varepsilon^k}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \zeta(-k) \tag{290}$$

Artes oscuras y matemagia(VII)

Para $k = -2$ se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-2} = \int \ln \varepsilon d\varepsilon + \zeta(2) = \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon + \zeta(2) \tag{291}$$

Para $k = -1$ se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-1} = -\ln \varepsilon + \zeta(1) = \gamma_E + \ln(N) \tag{292}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \zeta(1) = \gamma_E + \ln(N\varepsilon) = \infty \tag{293}$$

Es poco conocido que una suma infinita puede regularizarse a valores finitos, aunque el punto es que no una una regularización única. Sin embargo, hay regularizaciones más "naturales" que otras, en el sentido que pueden producir interpretaciones físicas o matemáticas profundas que una regularización arbitraria no tendrá en general.

Contenido

La densidad de energía cuántica es formalmente

$$\rho_E = \frac{E}{V} = \frac{hf}{L^3} = \frac{hc}{L^4} = \frac{m^4c^5}{h^3} \tag{294}$$

Un campo de materia oscura armónico universal podría tener la forma

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2\rho_{dm}}{m}} \sin\left(2\pi\left(\frac{mc^2}{h}t\right)\right) \tag{295}$$

si $\rho_{dm} \sim 0{,}4 GeV/cm^3$. Dimensionalmente la amplitud es

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{2G_N\rho_{dm}}{\pi c^2 f_{dm}^2}} = \frac{h}{mc^2}\sqrt{2G_N\rho_{dm}/\pi} \tag{296}$$

También es posible la expresión

$$\varphi(x,t) = \varphi_0 \cos\left(2\pi f_{dm}t + \theta_{dm}\right) \tag{297}$$

y donde

$$f_{dm} = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} \tag{298}$$

Densidad cuántica y materia oscura(II)

Una fascinante posibilidad es que haya interacciones superdébiles de neutrinos esencialmente sin masa, oscuros, dando interacciones residuales a lo Van der Waals

$$V_{ee} = \left(2\sin^2\Theta_W + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{G_F^2}{4\pi^3}\frac{1}{r^5} \tag{299}$$

tal que

$$G_F = 1{,}17\cdot 10^{-5}\,(GeV)^{-2}\,\hbar^3 c^3 \tag{300}$$

Nótese que para el campo de Higgs

$$v_0 = \left(\sqrt{2}G_F\right)^{-1/2} \simeq 246\,GeV \tag{301}$$

es el valor del campo en el vacío de nuestro Universo observable. Para un campo cuántico

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int d^D x\langle 0|\hat{\Pi}^2 + (\nabla\phi)^2|0\rangle = V\int\frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{\hbar\omega_k}{2} \tag{302}$$

con $\hat{\pi} = \partial_t\phi$.

Contenido

Ondas gravitacionales: lo básico

- En electromagnetismo, la radiación electromagnética se produce por la presencia de cargas eléctricas aceleradas.
- Similarmente, en gravitación, la radiación gravitacional se produce por masas aceleradas. Más precisamente, las ondas gravitacionales se producen por la variación temporal de momento cuadrupolar de masa.
- Esto es debido al hecho de que la conservación de la masa evita la radiación gravitacional monopolar, y la radiación gravitacional dipolar (el análogo electromagnético sí existe no nulo) tampoco existe por la conservación del momento.
- El denominado momento cuadrupolar es el origen de la radiación gravitacional. Se esperan fuentes astrofísicas de diferente tipo:
  - Ondas gravitacionales continuas de púlsares y el fondo estocástico.
  - Ondas gravitacionales no continuas, por ejemplo de sistemas coalescentes binarios compactos, o de bursts de ruptura de cuerdas cósmicas, defectos topológicos, transiciones de fase, explosiones de supernovas,. . .

Ondas gravitacionales: lo básico(II)

Para sistemas binarios, con componentes puntuales, las formas de ondas adopta una forma seductivamente simple

$$h(t) = \mathcal{A}\cos\Phi(t) \tag{303}$$

$$\mathcal{A} = \frac{2(G\mathcal{M})^{5/3}}{c^4 r}\left(\frac{\pi}{P_{gw}(t)}\right)^{2/3} \tag{304}$$

G es la constante gravitacional, c es la velocidad de la onda gravitacional y velocidad de la "luz", r es la distancia luminosidad al sistema binario y P_{gw} es el periodo de la onda gravitacional. La masa chirp es

$$\mathcal{M} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1+M_2)^{1/5}} \tag{305}$$

Además, $\Phi(t)$ es la fase de la onda gravitacional, y representa el ciclo de la onda en un detector, permitiendo el seguimiento de la amplitud de la onda

$$\Phi(t) = \Phi_0 + 2\pi\int_0^t \frac{dt'}{P_{gw}(t')} \tag{306}$$

Ondas gravitacionales: lo básico(III)

Para ondas gravitacionales de un sistema binario de 2 estrellas de neutrones en nuestra galaxia, se tiene

$$\mathcal{A} = 10^{-22}\left(\frac{\mathcal{M}}{1{,}22M_\odot}\right)^{5/3}\left(\frac{r}{8\ kpc}\right)^{-1}\left(\frac{P_{gw}}{10^3\ s}\right)^{-2/3} \qquad (307)$$

Las ondas gravitacionales transportan energía y momento angular, de forma que un sistema binario perderá distancia, aumentará frecuencia, en el transcurso del tiempo, hasta la coalescencia. Las ondas gravitacionales tienen 2 estados de polarización (al menos, si uno se restringe a la teoría gravitacional relativista mínima, la relatividad generalizada). Además,

$$P_{gw}(t) = \left(P_0^{8/3} - \frac{8}{3}kt\right)^{3/8} \qquad (308)$$

donde P_0 es el período inicial, y

$$k = \frac{96}{5}(2\pi)^{8/3}\left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3}\right)^{5/3} \qquad (309)$$

Ondas gravitacionales: lo básico(IV)

La relación del período y frecuencia orbitales keplerianos con el periodo y frecuencia de la onda gravitacional es

$$P_{orb}(t) = 2P_{gw}(t) \tag{310}$$
$$f_{gw}(t) = 2f_{orb}(t) \tag{311}$$

El factor 2 puede entenderse como el hecho de que el orden del momento multipolar más pequeño para la radiación gravitacional es el cuadrupolar (o segundo orden), aunque también puede verse como el hecho de que el espín de los hipotéticos gravitones es dos. Recordemos que para un sistema binario, la tercera ley de Kepler da

$$G(M_1 + M_2) = \left(\frac{2\pi}{P_{orb}}\right)^2 R^3 \tag{312}$$

Contenido

Astrofísica básica(I)

- El Universo conocido observable tiene una masa del orden de $2 \cdot 10^{53} kg$ y un radio de $100\,Ym = 10^{26} m$.
- Las estrellas generalmente tienen una clasificación espectral *OBAFGKM*. El sol es una estrella de tipo G.
- Las estrellas pueden ser menos masivas y frías, como las enanas rojas de tipo M, o ser gigantes azules como las de tipo O.
- La luminosidad de una estrella se mide en vatios, pero en el estudio astronómico de las estrellas se introducen las llamadas magnitudes aparentes y absoluta m, M, relacionadas por

$$m - M = 5\log_{10}\frac{d(pc)}{10} \tag{313}$$

- Las galaxias también se clasifican en diversas categorías. Por morfología:
  - Galaxias elípticas.
  - Galaxias espirales.
  - Galaxias irregulares.

Por tamaño, las galaxias pueden ser normales, enanas o grandes. Y también pueden tener brazos y una estructura barrada. El movimiento de las galaxias sugiere que hay materia no visible que no podemos observar electromagnéticamente. Es la denominada *materia oscura*. Además, desde 1998, se sabe que el Universo se expande de forma acelerada como consecuencia de una substancia que se ha denominado *energía oscura*. Las mediciones del desplazamiento Doppler

$$\frac{\Delta f}{f}=-\frac{v}{c},\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c} \tag{314}$$

y se observa que salvo las galaxias ligadas gravitacionalmente, la mayoría de las galaxias se alejan unas de otras. Se tiene así la ley de Hubble

$$\boxed{v=H_0R} \tag{315}$$

$$H_0\simeq 70km/s/Mpc,\quad t_U=\frac{c}{H_0}=\frac{R_U}{c} \tag{316}$$

Cosmología(II)

El principio cosmológico enuncia que el Universo es igual por todas partes (existe una versión descartada llamada principio cosmológico perfecto que señalaba que no solamente era igual en todas partes, sino en todos los momentos del tiempo). La Teoría del Big Bang postula que el Universo pasó por una fase muy caliente y pequeña que se expandió y se enfrió. La Teoría del Big Bang caliente tiene un número independiente de evidencias confirmadas. Como base de la Teoría del Big Bang se tiene al Modelo Estándar de Física de partículas subatómicas y al Modelo Cosmológico Estándar LCDM dado por la Teoría General de la Relatividad. Las evidencias son:

- Medidas del fondo cósmico de microondas y sus anisotropías.
- Estructura a gran escala cósmica y simulación computacional.
- Medidas de supernova tipo IA.
- Medida de la antigüedad de cúmulos globulares.
- Bullet Cluster.
- Curvas de rotación de galaxias espirales y dispersión de velocidad en galaxias elípticas.

Cosmología(III)

- Se especula que en el principio del Universo, todas las fuerzas fundamentales estaban unificadas.
- Poco después del "principio" del tiempo, ocurrió una fase de inflación o expansión exponencial cósmica.
- Luego se formaron los hadrones, se produjo la separación de los neutrinos(y creación de su fondo cósmico), y tras varias transiciones de fase, a los 3 minutos, se forman los núcleos atómicos.
- Cuando el Universo tenía 380000 años, se produjo la creación de los átomos de hidrógeno, helio y litio primordiales, y la formación del fondo cósmico de microondas.
- Tras cientos de millones de años, y tras la formación y desaparición de las primeras generaciones de estrellas, se formaron las galaxias hasta el tiempo presente.

Cosmología(IV)

Para conocer el destino del Universo, sabiendo que la gravedad ralentiza el Universo Y la energía oscura lo acelera, es necesario conocer la llamada densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \sim 10^{-27} kg/m^3 \tag{317}$$

El Universo puede ser plano (es lo que se observa), o podría tener una pequeña curvatura positiva (tipo esfera) o negativa (tipo silla de montar).

1. Actualmente, el modelo LCDM indica que la energía oscura domina la expansión del universo (aceleración positiva en un universo tipo Friedmann-Robertson-Walker).
2. El universo parece ser espacialmente plano.
3. Las partículas de materia conocidas son leptones y quarks.
4. Las partículas de campo o fuerza conocidas son el fotón, los bosones W y Z, el bosón de Higgs, los gluones y el hipotético gravitón.
5. La materia visible del universo es solamente un 5 % de éste al parecer. El resto del Universo es oscuro. Podría existir un Multiverso.

Contenido

Geología(I)

La Tierra tiene 3 capas:

- Corteza.
- Manto. Parte superior, cuya parte más superficial se llama litosfera. Astenosfera es la parte media, y luego está el manto interior.
- Núcleo. El núcleo exterior se cree fundido de hierro y níquel. El núcleo interior se cree sólido de hierro y níquel.

1. Las placas terrestres se mueven, de acuerdo a la teoría de la deriva continental.
2. Las placas flotan por isostasia.
3. Los terremotos se producen por movimientos bruscos de las placas, que hacen vibrar o romperse éstas.
4. Las ondas sísmicas son generalmente de dos tipo: P(longitudinales) y S(transversales).

Geología(II)

La atmósfera terrestre se extiende hasta unos 500 km y el espacio exterior en una serie de capas:

- Troposfera.
- Estratosfera.
- Mesosfera.
- Termosfera.
- Ionosfera incluye las capas mesosfera y termosfera.

La presión cambia por la altura mediante $p = p(h) = p_0 e^{-kh}$.

Contenido

Circuitos(I)

Los 3 elementos de circuitos más simples son

- Resistencias. R. Unidades Ω (ohmios).
- Condensadores (capacidades). Unidades F (faradios).
- Inductores (inductancias).

Un circuito RC tiene una carga

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \tag{318}$$

donde $RC = t_{rc}$ es la constante de tiempo del circuito RC. La ley de Ohm es

$$V = IR \tag{319}$$

y la ley de Joule da la disipación de energía en un circuito, mediante

$$P = IV = I^2 R = V^2/R \tag{320}$$

Circuitos(II)

Hay varios tipos de resistencias (resistores, reóstatos, termistores), condensadores e inductancias. Para corrientes eléctricas, la corriente es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{321}$$

$$I = nAev \tag{322}$$

donde v es la movilidad de los electrones o cargas. La densidad de corriente sería $J = I/S = neV$. Para conductores usuales, la resistividad es

$$\rho = \frac{AR}{L}, \text{ en } \Omega \cdot m \tag{323}$$

Un superconductor es un sistema que a cierta temperatura no ofrece resistencia al paso de corriente eléctrica. Un superfluido es un fluido que a cierta temperatura no posee viscosidad. La energía que almacena un condensador es

$$E = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{324}$$