Física 1ºBachillerato
Enseñando Matemáticas con Fismática

J. F. G. H.[1]

Multiverse of Madness

[1]Space-time Foundation, Eccentric Quantum TimeLord Virtual Academy

Earth planet
Milky Way Galaxy, Laniakea, Known Universe (The Multiverse)

Contenido

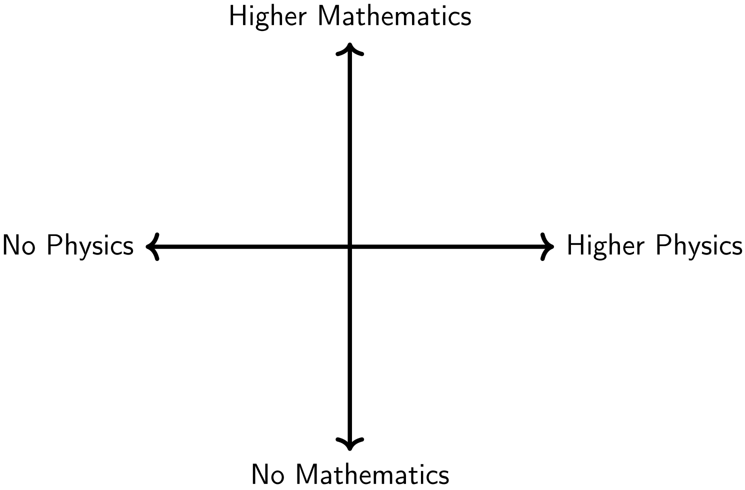
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .

No Physics $\longleftrightarrow$ Higher Physics

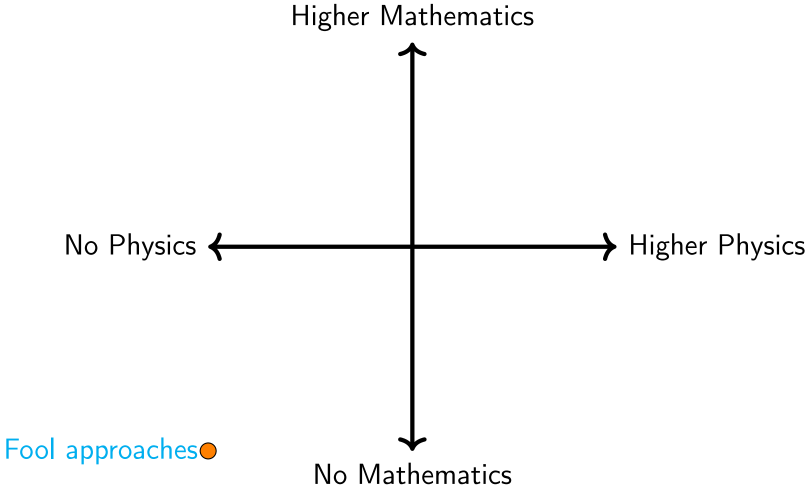
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .



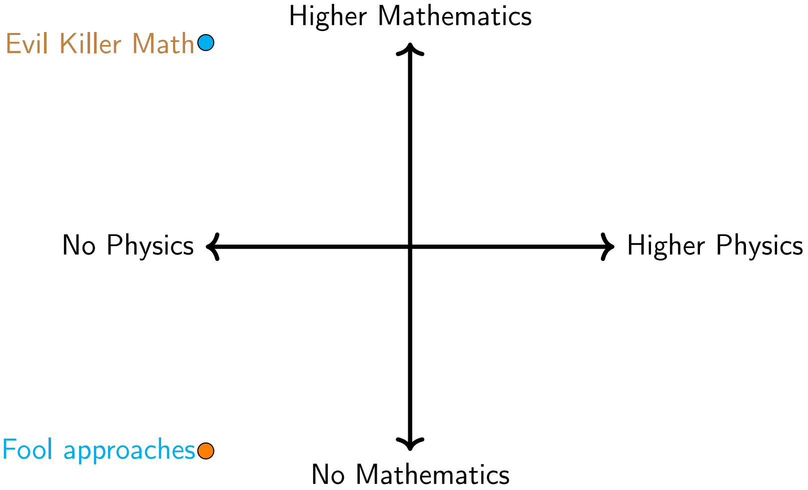
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



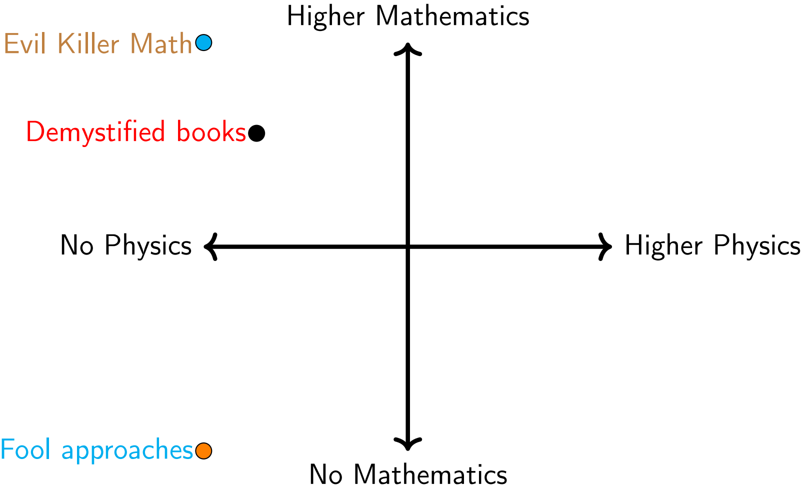
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



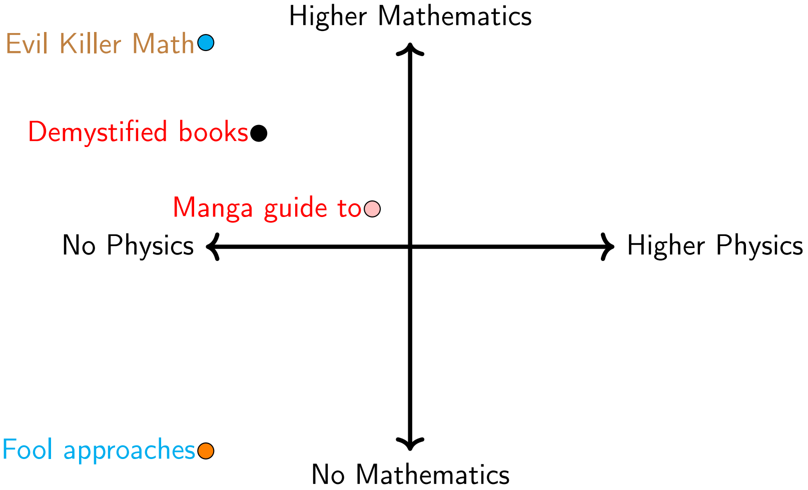
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .



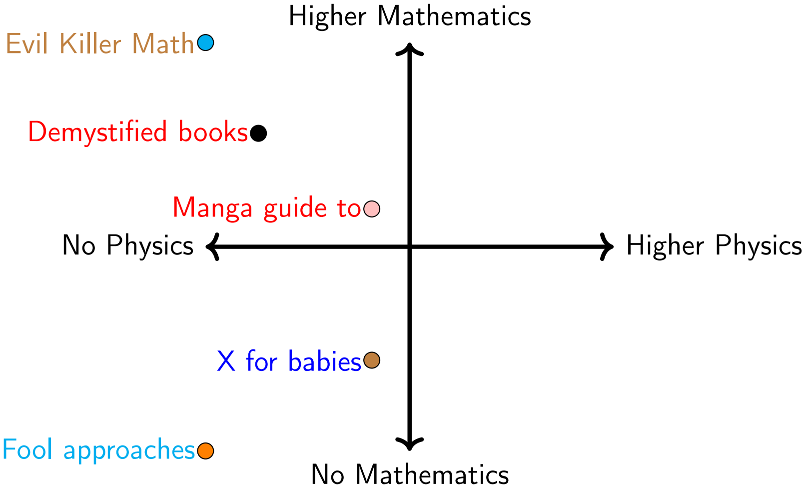
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



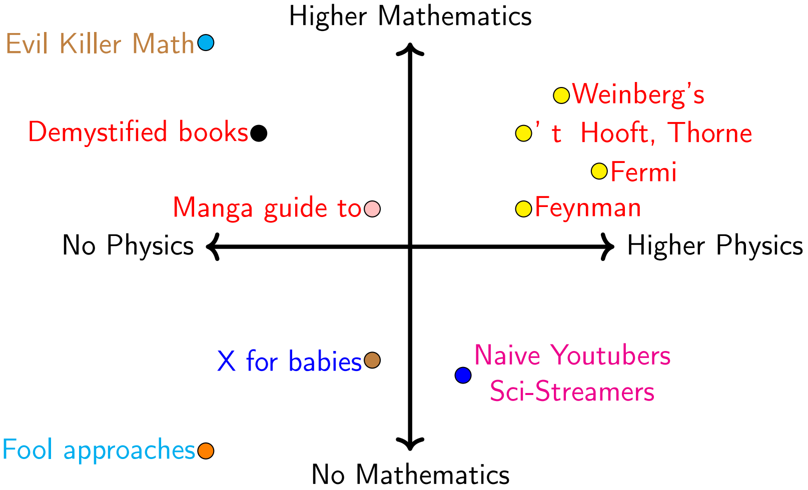
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



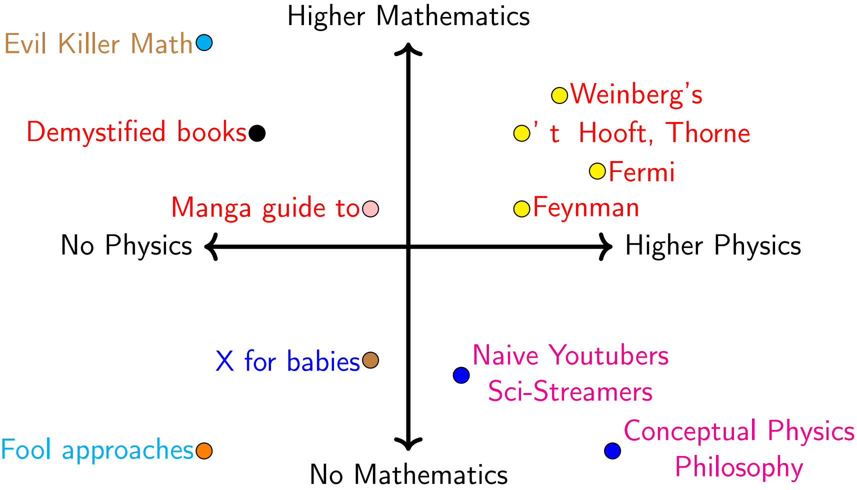
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .

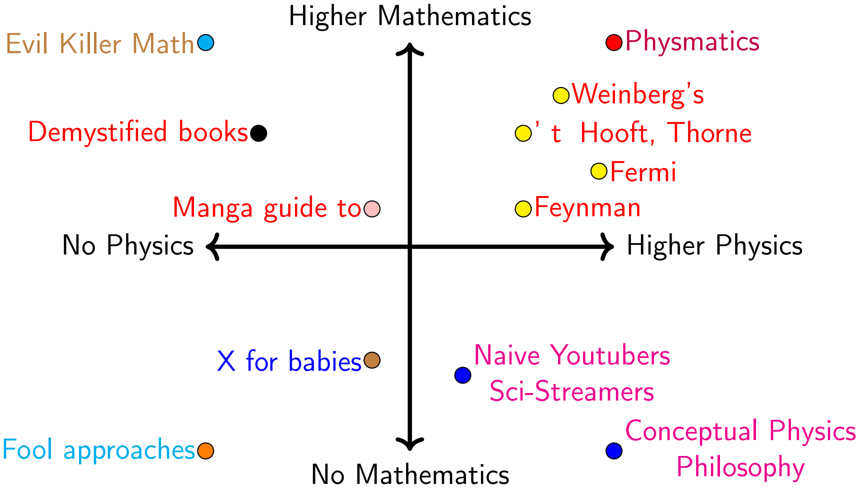


What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



Contenido

¿Estáis preparados para el viaje?

¿Seguro que estáis preparados para el viaje?

¿SEGURO?

Ecuaciones de la Física(o Fismática)

Vamos a escribir ejemplos de ecuaciones de la Física-Matemática. Quizás, hoy día la Física y las Matemáticas están condenadas a unirse en una Ciencia común, la Fismática (idea propuesta por E. Zaslow en el Clay Institute):

$$S_{NG} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \quad S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^4 x R$$

$$\partial_\beta\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu\right) = 0$$

$$PV = nRT, \quad dU = \delta Q + \delta W, \quad dS \geq 0$$

$$\vec{F} = m\vec{a}, \ \vec{F} = -k\Delta\vec{r}, \ \vec{F}_N = -G_N\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r, \quad \vec{F}_N = -mg\,\vec{u}_r, \ \vec{F}_C = K_C\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K_C\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r, \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}_N}{m} = -G_N\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Ecuaciones de la Física(II)

$$E = mc^2, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad H\Psi = E\Psi, \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{m\gamma v}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{j} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \{Q, \overline{Q}\} = 2\gamma^\mu P_\mu, \quad \{Q, Q\} = \epsilon Z, \quad [Z, Q] = 0$$

$$Z = \int [DgDAD\Psi D\phi]\, e^{\left(i\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_P^2}{2}R - \frac{G^2}{4} + i\overline{\Psi}\gamma\cdot D\Psi - Y\phi\overline{\Psi}\Psi - |D\phi|^2 - V_H(\phi)\right]\right)}$$

$$L_{SM} = -\frac{F^2}{4} - \frac{G^2}{4} + i\hbar\overline{\Psi}\gamma \cdot D\Psi + h.c. - Y\phi\overline{\Psi}\Psi + h.c - |D\phi|^2 - V_H(\phi)$$

Ecuaciones de la Física(III)

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^{\mu})_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2} + \cdots + (C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

4D:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^{\mu})_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2}$$

11D:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^{\mu})_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2} + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}$$

$$E_c(NR) = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_c(Rel) = E_t - mc^2 = mc^2(\gamma - 1), \quad [X, P] = i\hbar$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad P = \frac{dE}{dt} = F \cdot v, \quad (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V)\Psi = E\Psi$$

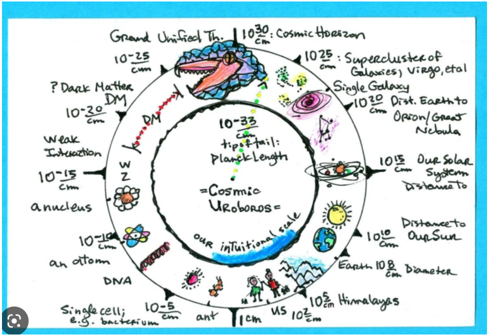
$$U = 0, \quad \Delta G = \Delta H - T\Delta S, \quad (i\hbar\gamma \cdot D - mc)\Psi = 0$$

Ecuaciones de la Física(IV)

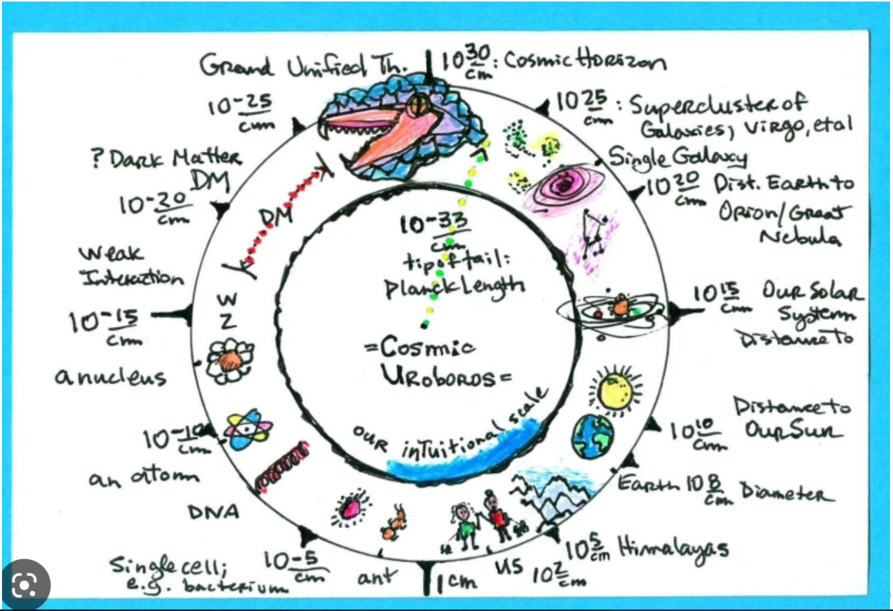
$$\left[\{a_\alpha, a_\beta^+\}, a_\gamma\right] = -2\delta_{\beta\gamma} a_\alpha, \quad e^{\pi i} + 1 = 0, \quad e^{2\pi i} = 0 + 1$$

$$\{a_\alpha, a_\alpha^+, \{a_\alpha, a_\beta\}, \{a_\alpha, a_\beta^+\}, \{a_\alpha^+, a_\beta^+\}\}_{\alpha,\beta=1,2,\cdots,n}$$

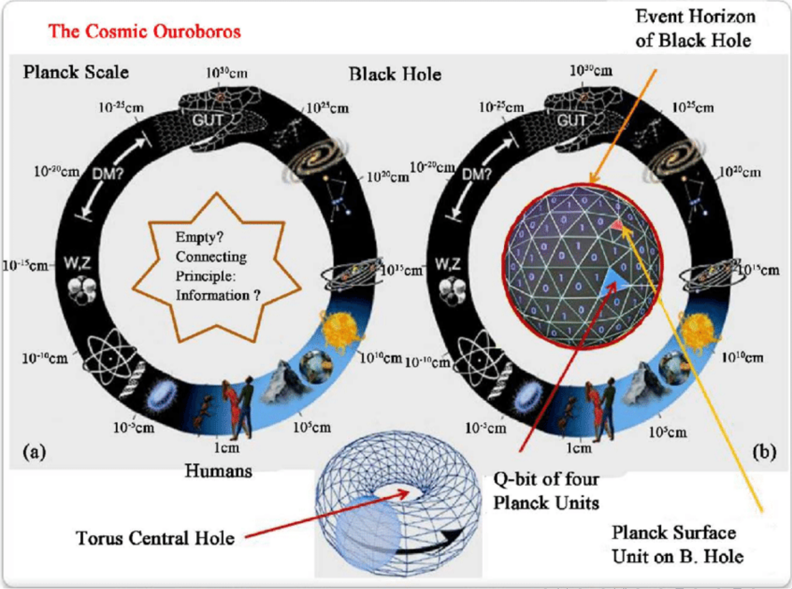
$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \quad \partial_\sigma X_L^\mu(\sigma,\tau) + \partial_\tau X_R^\mu(\sigma,\tau) = 0, \quad \partial_\tau^2 X^\mu(\sigma,\tau) - \partial_\sigma^2 X^\mu(\sigma,\tau) = 0$$



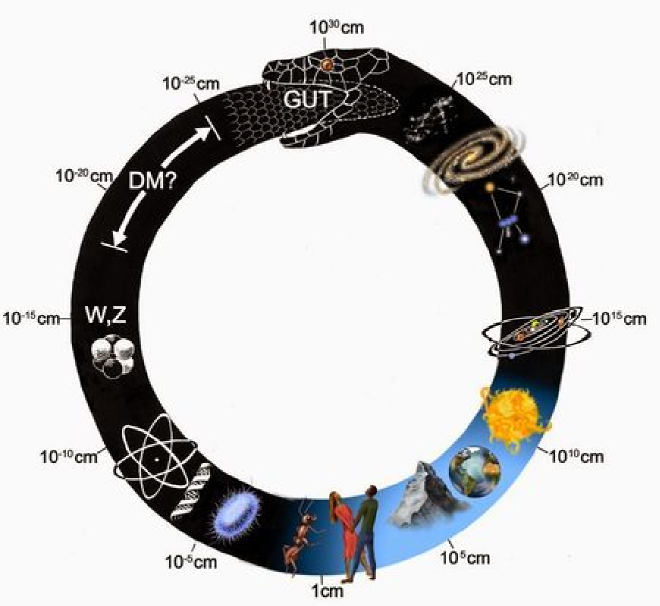
Cosmic Ouroboros(I)



Cosmic Ouroboros(II)



Cosmic Ouroboros(III)




Grand Unified Theory
Galactic Clusters
10^{25}cm
String Theory
10^{-25}cm
GUT
Galaxies
Calabi-Yau Manifolds
10^{20}cm
Constellations
10^{-20}cm
Quantum Foam
Solar System
10^{15}cm
Photons
10^{-15}cm
Stars
10^{10}cm
Atomic Nuclei
Planets
10^{-10}cm
Atoms
DNA
10^{5}cm
Mountains
10^{-5}cm
Bacteria
1cm
Insects
Man

Generalmente, en Matemáticas o Física usamos letras de alfabetos (normalmente latino o griego, y de otros excepcionalmente, cuando es necesario) y símbolos de operadores matemáticos. Para los operadores:

$$=, \neq, \approx, \simeq, \approxeq, \sim, \propto, >, <, \geq, \leq, \gtrsim, \lesssim, \equiv, \doteq, \pm, \mp$$

$$D, \Delta x, \nabla, \square, |x|, \|, \sum_i x_i, +, \cdot, -, :, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r}, f(t), A_{ij}, A_{i_1\cdots i_n}, \rightarrow, \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{\vec{A}}}, \overleftrightarrow{A}, \ldots$$

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}, \int dt, \int_a^b ()dt, a\cdot b, a\times b, a\wedge b, ab, \frac{a}{b}, a^x, \log_b x, \sqrt[n]{x}$$

A continuación, una breve colección de identidades que todo el mundo debería saber:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{d}{c} = \frac{ac\pm bd}{bc}$$

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \frac{ac}{bd} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Simbología matemática(II)

$$x^n x^m = x^{n+m}$$
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$
$$(x^n)^m = x^{nm}, (x^n)^m \neq x^{n^m}, \frac{1}{x^n} = x^{-n}, x^0 = 1$$

Resolver ecuaciones cuadráticas (o bicuadráticas) completas:
$ax^2 + bx + c = 0$.
Completas:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Incompletas:

$$ax^2 = 0 \rightarrow x = 0$$
$$ax^2 + bx = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -b/a \end{cases}$$

Simbología matemática(III)

$$ax^2 + c = 0 \to x = \pm\sqrt{-c/a}$$

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = h^2$.
Además, el conocimiento del área y volumen de figuras planas y multidimensionales es útil. Ecuaciones de rectas y planos en 2d. En 2d, las rectas tienen diversas ecuaciones (vectorial, paramétrica, contínua, punto-pendiente, la general, explícita y segmentaria):

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$AX + BY + C = 0, \quad y = mx + n$$

$$\frac{X}{u} + \frac{Y}{v} = 1$$

Simbología matemática(IV)

Ecuación de una circunferencia de radio R centrada en (a, b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Ecuación de una parábola: $y = ax^2 + b$.
Ecuación de una hipérbola: $xy = c$.
Ecuación de una elipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

En general, para una curva cuadrática plana, se tiene que:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$$

También existen curvas cúbicas, con forma general:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H = 0$$

O también curvas elípticas planas, con forma general: $y^2 = x^3 + Ax + B$ y más generalmente curvas (hiper)elípticas con $y^2 = P(x)$.

Simbología matemática(V)

Existen otras fórmulas para politopos en *nd*, para positroides, y también para apeirógonos, apeiroedros, o también para el amplituedro:

$$\boxed{\mathcal{M}_{n,k,L}\left[Z_a\right] = \mathrm{Vol}\left[\mathcal{A}_{n,k,L}\left[Z_a\right]\right]}$$

y

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$$

Además, conviene saber el uso de la circunferencia goniométrica o unidad, el sistema de radianes y gradianes (o gones): $2\pi\ rad = 360^\circ = 400^g$.

Teorema del seno:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad (3)$$

Fórmulas matemáticas

Rectángulo: $A = bh$
Cuadrado: $A = L^2$
Paralelogramo: $A = bh$
Triángulo: $A = bh/2$
Trapecio de lados paralelos a y b, altura h: $A = \dfrac{(a+b)h}{2}$
Polígono regular de n lados de longitud L: $A = \dfrac{1}{4} n L^2 \mathrm{co}\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$
Círculo de longitud $L_c = 2\pi R = \pi d$: $A_C = \pi R^2$
Elipse de semiejes a, b: $A = \pi ab$
Cono circular recto de radio R y altura h con generatriz L:
$A = \pi RL = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$
Cilindro circular recto de altura h y radio R: $A = 2\pi Rh$
Esfera de radio R: $A = 4\pi R^2$
Sector circular de ángulo θ: $A = R^2\theta/2$
Área de un hipercubo D-dimensional: $A_{D-1} = D!L^{D-1}$

Fórmulas matemáticas(II)

El área del toro es igual a $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo.

Paralelepípedo u ortoedro: $V = abc = \det(OA, OB, OC)$

Hiperparalelepípedo, politopo rectangular de lados X_i: $V_n = \prod_i X_i$

Esfera 3d: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Esfera nd: $V_n = \dfrac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Esfera nd, área: $A_{d-1} = \dfrac{dV_n}{dR} = \dfrac{n\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}$

Cilindro recto 3d: $V = \pi R^2 h$

Huso o cuña esférica: $V = \dfrac{4 \cdot \pi R^3 n}{3 \cdot 360}$, $A = 4\pi R^2 n/360$.

Casquete esférico: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, $A = 2\pi Rh$.

Fórmulas matemáticas(III)

Zona esférica: $V = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2 + 3r'^2\right)$, $A = 2\pi Rh$.

Pirámide de área A y altura h en 3d: $V = \frac{Ah}{3}$

Cono circular recto de radio R, altura h: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$. $A_c = \pi R(g + R)$.

Tronco de cono: $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$, $A = \pi\left[g(R + r) + R^2 + r^2\right]$.

Elipsoide de semiejes a, b, c: $V = \frac{4}{3}\pi abc$

Volumen del hipercubo nd: $V = L^n$.

Volumen tetraedro 3d: $V_t = L^2\sqrt{2}/12$, área $A_t = L^2\sqrt{3}$.

Dónut o toro: $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 Rr^2$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo.

Fórmulas matemáticas(IV)

Si tenemos un vector $(x_1, \cdots, x_n)$ en L_p con norma

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Entonces tenemos el volumen de las p-hiperesferas en nd:

$$V_n(p) = \frac{\left(2\Gamma(\frac{1}{p}+1)R \right)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$$

En particular $V_n^1 = \dfrac{2^n}{n!}R^n$ y $V_n^\infty = (2R)^n$. Otra posible generalización:
$B_{p_1,\ldots,p_n} = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$.

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

Fórmulas matemáticas(V)

Más allá del teorema de Pitágoras 2d, $a^2 + b^2 = h^2$, tenemos por ejemplo la fórmula de Herón para el área de un triángulo:

$$A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{4}$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. También está la fórmula de Brahmagupta para el área de un cuadrilátero cíclico: $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ donde s es el semiperímetro del cuadrilátero.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

que generaliza la fórmula de Herón para el triángulo (d=0). Otra forma de escribir la fórmula de Brahmagupta es:

$$K = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

Fórmulas matemáticas(VI)

o bien

$$K = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+8abcd-2(a^4+b^4+c^4+d^4)}}{4}.$$

Si el cuadrilátero no es cíclico, la fórmula es algo más complicada:

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\theta}$$

siendo θ la semisuma de dos ángulos opuestos. Una variante de la fórmula de Brahmagupta se debe a Coolidge:

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+pq)(ac+bd-pq)}$$

donde p, q son las longitudes de las diagonales del cuadrilátero. En un cuadrilátero cíclico (inscrito en circunferencia), $pq = ac + bd$ (teorema de Ptolomeo), y la fórmula de Coolidge se transforma en la de Brahmagupta.

Gallivan 1st theorem

Single direction folding a piece of paper, of strip length L and thickness t provides the bound

$$\boxed{L = \frac{\pi t}{6}\left(2^n + 4\right)\left(2^n - 1\right)} \tag{5}$$

Proof. Let me consider a paper with length L and thickness t. In the first fold, via a semicircle, the lost length is πt. After the second fold, the lost length is

$$\pi t + \pi t + 2\pi t$$

The third fold lost length becomes

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t) + (3\pi t) + (4\pi t)$$

Primer teorema de Gallivan(II)

And after *n*-folds

$$\pi t+(\pi t+2\pi t)+(3\pi t)+(4\pi t)+\ldots+(\pi t+\ldots+2^{n-1}\pi t)$$

Adding the lost length after the n-folds, you have

$$\pi\left(1+(1+2)+\ldots+(1+2+\ldots+2^{n-1})\right)$$

Using the result about how to sum any arithmetic sum (Gauss, the king!):

$$\frac{\pi t}{2}\left(1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 5+8\cdot 9+\ldots+2^{n-1}\cdot(2^{n-1}+1)\right)$$

$$\frac{\pi t}{2}\left((2^0+2^2+\ldots+2^{2(n-1)})+(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1})\right)$$

Finally,

$$L=\frac{\pi t}{2}\left(\frac{(2^{2n}-1)}{3}+(2^n-1)\right)$$

or equivalently, after basic algebra (hint, use $x=2^n$),

$$L=\frac{\pi t}{6}(2^n+4)(2^n-1)\quad Q.E.D.$$

Segundo teorema de Gallivan

Gallivan 2nd theorem

Alternate direction folding a piece of paper, of strip length L and paper width W provides the bound

$$\boxed{W = \pi t 2^{\frac{3(n-1)}{2}}} \tag{6}$$

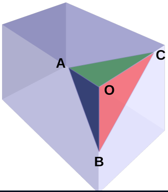
Proof: first fold gives $W_0 \to W_0/2$, 1st alternate fold: n-odd $t' = \pi t$. 2nd fold gives $W_0 \to W_0/4$, and the 2nd alternate fold $t'' = 2\pi t'$. The 3rd fold gives $W_0 \to W_0/8$, and the second alternate fold $t''' = 2t'' = 4t' = 4\pi t$. By induction, $W = 2^{n/2}\pi t/2^{-n}2^{3/2}$. It yields $W_n(t) = \pi t 2^{3(n-1)/2}$, Q.E.D.

Fórmula de De Gua

Existe un análogo de dimensión superior para el teorema de Pitágoras, diferente del teorema de Fermat $a^n + b^n = c^n$, o el caso vectorial multidimensional.

Si tenemos un tetraedro con un ángulo recto, entonces se cumple el teorema de De Gua: si un tetraedro posee un vértice formado por ángulos rectores (como en el caso de los vértices de un cubo), entonces el cuadrado del área de la cara opuesta a dicho vértice es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las otras tres caras.

$$\boxed{A_{ABC}^2 = {A_{ABO}}^2 + {A_{ACO}}^2 + {A_{BCO}}^2}$$



Fórmula de De Gua hiperdimensional

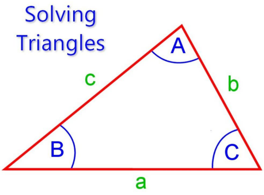
Generalización del teorema de De Gua: Tanto el teorema de Pitágoras, como el teorema de Gua son casos especiales para $n = 2, 3$ de un simplex (hipertetraedro) sobre n-símbolos con una esquina ángulo recto. Esto, a su vez, es un caso especial de un teorema de Pitágoras generalizado de Donald R. Conant y William A. Beyer, que puede enunciarse como sigue.
Sea "U" un subconjunto Borel medible de un subespacio afín $\mathbb{R}^n$ (así que $k \leq n$). Para cualquier subconjunto $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con exactamente "k" elementos, sea U_I la proyección ortogonal de "U" sobre el span lineal de $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$, donde $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ y $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica estándar para $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\mathrm{vol}_k^2(U) = \sum_I \mathrm{vol}_k^2(U_I)$$

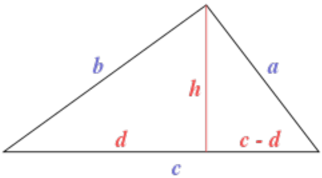
donde $\mathrm{vol}_k(U)$ es la llamada medida de Hausdorff o volumen k-dimensional de "U" y la suma es sobre todos los subconjuntos $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con exactamente "k" elementos.

Ejercicio geométrico

✍**Ejercicio:** Demostrar la fórmula de Herón



algebraicamente.



¿Qué herramientas?: magnitudes y campos(b)

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,. . .).

¿Qué herramientas?(II): magnitudes y campos(c)

Tensores y más allá

Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,. . . , hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, . . . Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \rightarrow Y$, con $y = \phi(X)$.

El nuevo S.I. (circa 2020)

- En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas.
- Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:
    - La velocidad de la luz en el vacío (c).
    - La constante de Planck (h).
    - La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs-133)$).
    - La constante de Boltzmann (k_B).
    - La carga eléctrica elemental del electrón (e).
    - La constante de Avogadro (N_A).
    - La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.
- Estas 7 magnitudes básicas definen el S.I. El resto serán magnitudes derivadas, dimensionalmente $[X]=L^aM^bT^c\Theta^dn^eJ^fI^g$

Potencias múltiplo de 10 en el S.I.(2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol=10^{100}, googolplex=$10^{\mathrm{googol}} = 10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Potencias submúltiplo de 10 en el S.I. (2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$	deci (d)
$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$	centi (c)
$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$	mili (m)
$10^{-6} = 1/10^6 = 0{,}000001$	micro (μ)
$10^{-9} = 1/10^9 = 0{,}000000001$	nano (n)
$10^{-12} = 1/10^{12} = 0{,}000000000001$	pico (p)
$10^{-15} = 1/10^{15} = 0{,}000000000000001$	femto (f)
$10^{-18} = 1/10^{18} = 0{,}000000000000000001$	atto (a)
$10^{-21} = 1/10^{21} = 0{,}000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{-24} = 1/10^{24} = 0{,}000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{-27} = 1/10^{27} = 0{,}000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{-30} = 1/10^{30} = 0{,}000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Regla mnemotécnica: PEZYRQ-fazyrq para las últimas potencias.
Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

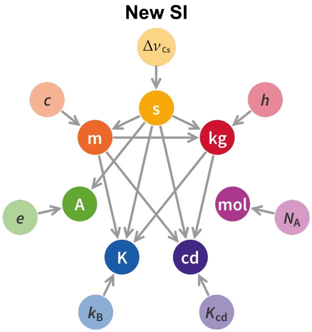
$$\boxed{Z = x.abcdef\cdots 10^{\pm n}}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef\cdots$ son números arbitrarios.

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

Magnitudes: basic and derived/básicas y derivadas

Magnitud es todo aquello que podemos **medir**. Hay magnitudes cuantitativas y cualitativas. También, en teorías modernas, puede haber magnitudes no observables. En todo sistema de unidades hay magnitudes básicas o fundamentales, y derivadas (combinación de dos o más de una magnitud básica).



S.I.: Sistema Internacional

El S.I. es el sistema de unidades en el que se define como magnitudes básicas: la longitud (L), el tiempo(T), la cantidad de materia o masa (M), la cantidad de sustancia (n), la temperatura absoluta(Θ), la intensidad luminosa (J, I_L) y la intensidad de corriente eléctrica (I).

7 magnitudes básicas(I)/ 7 basic magnitudes: Tiempo/Time

Tiempo/Time

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770}s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta\nu(Cs-133)}} \qquad (7)$$

Proton lifetime is about $t(p^+) \geq 10^{34}yrs = 10^{41}s$. Proton decay is expected naturally at some point between 10^{45}yrs or 10^{122}yrs.

Longitud/Length

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en 1/299792458 segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458 m/s$, mientras que el metro queda definido en función de c y de $\Delta f(^{133}Cs)$:

$$\boxed{1m = \frac{c}{299792458}s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta f(^{133}Cs)} \approx 30{,}663319\frac{c}{\Delta f(^{133}Cs)}} \tag{8}$$

Masa/Mass

Masa es magnitud base de cantidad de materia en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg \cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1kg = \frac{h}{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}} \frac{s}{m^2}} \tag{9}$$

o

$$1kg = \frac{299792458^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{c^2} = 1{,}4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2}$$

Cantidad de sustancia/Amount of substance

antidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es *n*. La unidad base es el mol (*mol*), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{10}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta/Absolute temperature

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}} \tag{11}$$

o

$$1\ K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2{,}2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}$$

Electric current intensity/Intensidad de corriente eléctrica

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1{,}602176634 \times 10^{-19} C(A \cdot s)$ como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1A = \frac{e}{1{,}602176634 \times 10^{-19}} s^{-1}} \tag{12}$$

o bien

$$1\ A = \frac{e\Delta f(Cs - 133)}{(1{,}602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6{,}789687 \cdot 10^{8} e\Delta f_{Cs}$$

Intensidad luminosa/Luminous intensity

La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entre vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

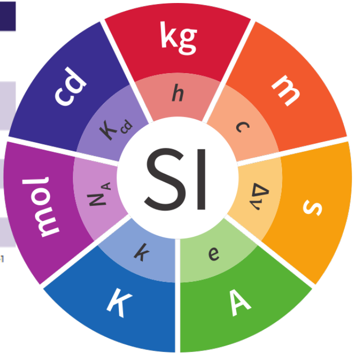
$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683}\frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683}} \quad (13)$$

$$1cd \approx 2{,}61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2$$

El nuevo S.I./The new S.I.

Defining constant	Symbol	Numerical value	Unit
hyperfine transition frequency of caesium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
Planck constant	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	lm W^{-1}

Table 1: The seven defining constants of the SI, and the seven corresponding symbols, numerical values, and units



Un vector es una magnitud orientada con ciertas propiedades abstractas. Se puede escribir un vector en 2d, 3d,... En componentes cartesianas:

Vector 3d

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{14}$$

Suma y resta de vectores

Sean $\vec{a}, \vec{b}$ dos vectores en componentes cartesianas:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} \tag{15}$$

Multiplicación de vector y escalar

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\vec{v}$ es un vector, entonces

$$\vec{V} = \lambda \vec{v} = \lambda v_x \vec{i} + \lambda v_y \vec{j} + \lambda v_z \vec{k} \tag{16}$$

- Se pueden definir varias operaciones entre vectores 3d.
- Las dos más importantes son el productos escalar y el producto vectorial.
- En otras dimensiones, con otros objetos geométricos disponibles, hay varios tipos de productos adicionales naturales.

Vectores(III)

Producto escalar

La definición en componentes cartesianas del producto escalar $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es como sigue

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{17}$$

La definición geométrica usa la definición de módulos o magnitud/-longitud del vector:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{18}$$

donde $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ es el módulo o norma del vector $\vec{a}$, y similarmente con $\vec{b}$.

El producto escalar define ortogonalidad y permite también calcular proyecciones:

Proyección de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\mathrm{proy}(\vec{a} \to \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos\varphi \tag{19}$$

También permite calcular vectores unitarios a uno dado. Por ejemplo:

$$\vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{r}{|\vec{r}|} \tag{20}$$

Producto vectorial 3d

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{21}$$

El producto vectorial no es conmutativo ni asociativo en general. Permite definir paralelismo, y, además, satisface la relación

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \tag{22}$$

y la identidad

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 \tag{23}$$

Vectores(V)b

There is a relation between cross product and matrices in $\mathbb{R}^3$. Define:

$$A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{24}$$

$$B = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \tag{25}$$

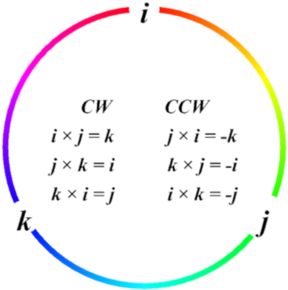
Then, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$ is related to

$$\vec{C} = \vec{A}_\times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{26}$$

It follows the magic word spell under the mnemonics cyclic XYZZY. Also, we could write

$$\vec{C} = \vec{B}_{\times}\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{27}$$

Note that $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. There is another known mnemonics related to the cyclic triadic clock:



Fórmulas útiles(I)

Usando el binomio de Newton, se tiene una aproximación cuando un sumando es pequeño:

Aproximación de Newton

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2), \quad x << 1 \tag{28}$$

Volumen y área de la esfera, área del círculo y longitud de circunferencia:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad S_E = 4\pi R^2 = \frac{dV}{dR} \tag{29}$$

$$A_C = \pi R^2 \quad L_C = 2\pi R = \frac{dA_C}{dR} \tag{30}$$

El teorema fundamental de la trigonometría señala que

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Fórmulas útiles(II)

La densidad es un concepto genérico interesante. Se pueden definir la densidad de masa, carga, número, energía,. . . por unidad de longitud, superficie, volumen, hipervolumen, . . .

Densidad

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \rho_Q = \frac{Q}{V} \tag{31}$$

$$\sigma = \frac{M}{S} \qquad \sigma_Q = \frac{Q}{S} \tag{32}$$

$$\lambda = \frac{M}{L} \qquad \lambda_Q = \frac{Q}{L} \tag{33}$$

¿Qué es la Física?(I)

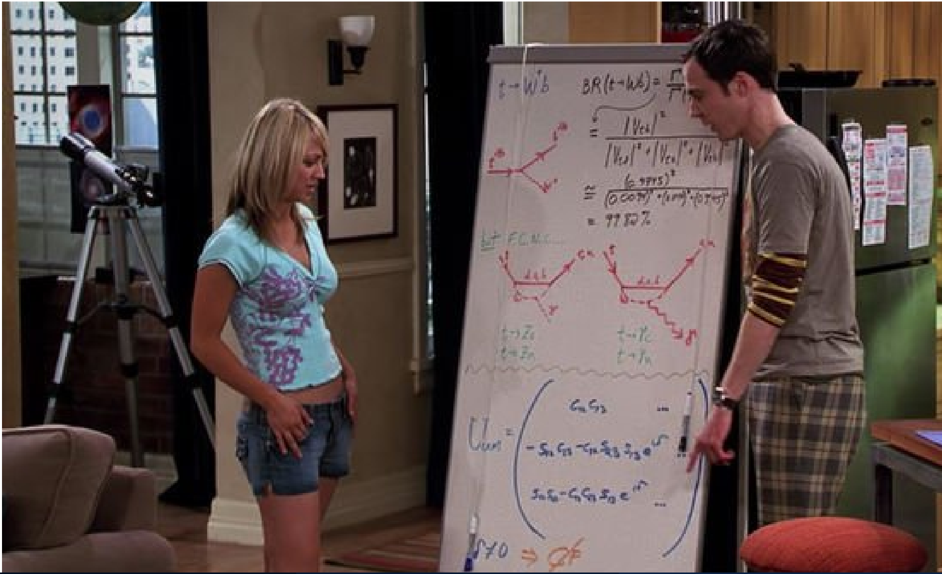
- Las Matemáticas son un *lenguaje*.
- Galileo Galilei dijo tiempo ha que la Naturaleza estaba escrita en lenguaje matemático.
- Quizás el mayor descubrimiento de todos para la Física y las Ciencias Naturales.
- Wigner indicó que la eficacia de las Matemáticas para describir el mundo le parecía poco razonable.

Las ventajas del lenguaje matemático para describir el mundo:

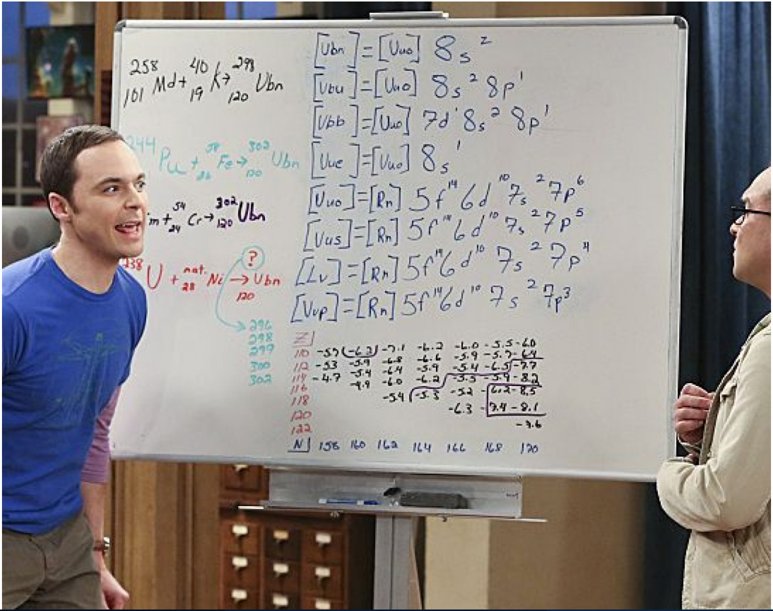
- Brevedad. El lenguaje matemático es breve o conciso, con una notación adecuada.
- Precisión y exactitud. Las Matemáticas son quizás las más exactas de todas las Ciencias de la Naturaleza. Son también muy precisas cuando se afinan sus instrumentos.
- Universalidad. Las Matemáticas sirven para modelar sistemas muy diferentes y diversos. Esto les confiere una propiedad de universalidad difícil de encontrar en otras Ciencias. ¿Es también multiversal?

¿Qué es la Física?(II)

¿Qué es la Física?(III)

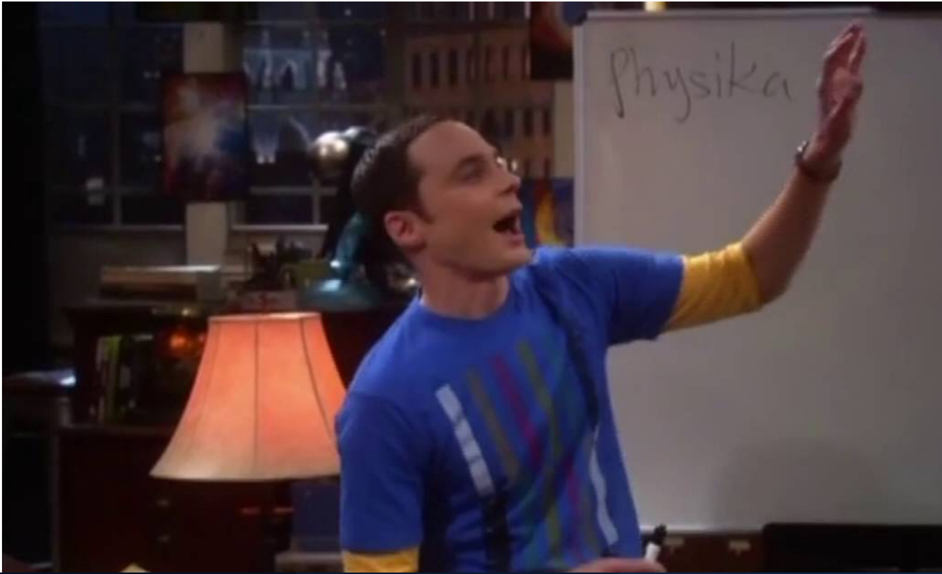


¿Qué es la Física?(IV)



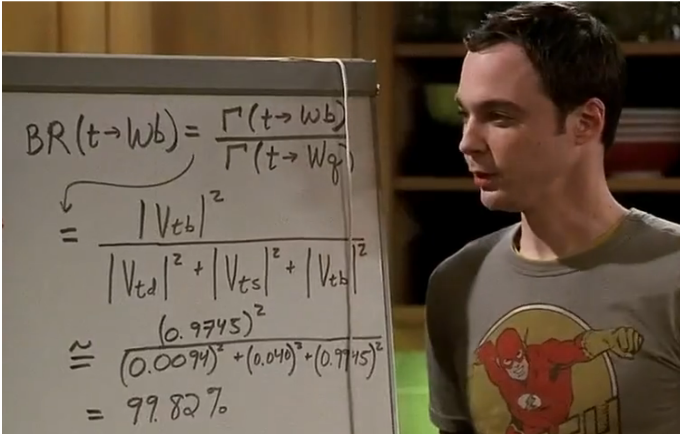
Cosas de físicos

¿Qué es la Física?(V)



¿Qué es la Física?(VI)

$$R = \frac{\mathcal{B}(t \to Wb)}{\mathcal{B}(t \to Wq)} = \frac{\mid V_{tb} \mid^2}{\mid V_{tb} \mid^2 + \mid V_{ts} \mid^2 + \mid V_{td} \mid^2}$$



Escalares, vectores y más allá

En Física hay diferentes estilos de magnitudes. Las dos más básicas son **Escalares**: magnitudes solamente definidas por un número o valor. Ejemplos son la longitud de un objeto o el espacio recorrido, la temperatura, la masa, la intensidad de corriente eléctrica, la cantidad de sustancia, el tiempo, la intensidad luminosa, la densidad, la carga eléctrica, la potencia,. . .
Vectoriales: magnitudes definidas por un número (magnitud o módulo), una dirección, un sentido y un punto de aplicación u origen. Requieren varios números para su especificación precisa.

- Las magnitudes escalares suelen tener dimensiones físicas en un determinado sistema de unidades, y un símbolo de dimensión.
- Por ejemplo, las magnitudes fundamentales del S.I:: masa (M), tiempo (t), temperatura Θ, longitud L, cantidad de sustancia n, intensidad de corriente eléctrica I, intensidad luminosa I_L.

Escalares, vectores y más allá(II)

- Luego las magnitudes derivadas tienen también símbolos, como el trabajo W, energía E, presión P, carga eléctrica Q, pero hay que recordar que las letras en los diferentes alfabetos son finitas, de ahí usar el alfabeto griego, además del latino, y a veces otros como el ruso o el hebreo.
- Ejemplos de magnitudes vectoriales: posición y desplazamiento $\vec{r}, \Delta\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$, aceleración $\vec{a}$, fuerza $\vec{F}$, campo eléctrico $\vec{E}$, campo gravitacional no relativista $\vec{g}$.

Las magnitudes básicas del S.I. son:

- Longitud (L), unidad metro (m).
- Masa (M), unidad el kilogramo (kg).
- Tiempo (T), unidad el segundo (s).
- Temperatura absoluta Θ, unidad el kelvin (K).
- Cantidad de sustancia n, unidad el mol (mol).
- Intensidad de corriente eléctrica I, unidad el amperio (A).
- Intensidad luminosa I_L, unidad la candela (cd).

Estas 7 magnitudes básicas, y sus unidades, usan 7 constantes de la naturaleza para su definición: c (velocidad de la luz), h (constante de Planck), $\Delta t(Cs-133)$, k_B (constante de Boltzmann), N_A (número de Avogadro), e (carga eléctrica elemental del electrón), y K_{cd} (eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540 THz).
La expresión de resultados en Física o Ciencias experimentales usa la notación científica

$$a.xyz\cdots 10^{\pm n}$$

donde $a, n\neq 0$. El número de cifras significativas de un resultado coincide conel número de cifras de una cantidad expresada en notación científica. Para múltiplos y submúltiplos de unidades en cualquier sistema de medida, se suelen usar unos prefijos universales. Las potencias de 10 positivas son $da, h, k, M, G, T, P, E, Z, Y, R, Q$ y las potencias de 10 negativas son $d, c, m, \mu, n, p, f, a, z, y, r, q$. Las últimas dos adiciones al S.I. (2022) son $R=10^{27}$(Ronna), $Q=10^{30}$(Quetta), $r=10^{-27}$(ronto), $q=10^{-30}$(quecto). Un resumen de estas potencias en forma de tabla:

Potencias de 10

METRIC PREFIXES			
Power of Ten	Exponential Notation	Metric Prefix	Abbreviation
septillion	10^{24}	yotta	Y
sextillion	10^{21}	zetta	Z
quintillion	10^{18}	exa	E
quadrillion	10^{15}	peta	P
trillion	10^{12}	tera	T
billion	10^{9}	giga	G
million	10^{6}	mega	M
thousand	10^{3}	kilo	k
hundred	10^{2}	hecto	h
ten	10^{1}	deca	da
tenth	10^{-1}	deci	d
hundredth	10^{-2}	centi	c
thousandth	10^{-3}	milli	m
millionth	10^{-6}	micro	µ
billionth	10^{-9}	nano	n
trillionth	10^{-12}	pico	p
quadrillionth	10^{-15}	femto	f
quintillionth	10^{-18}	atto	a
sextillionth	10^{-21}	zepto	z
septillionth	10^{-24}	yocto	y

Table 2. Proposed prefixes for powers of ten larger than 24 and smaller than –24.

Power of ten	Prefix	Symbol	Origin
–27	xenno	x	Gr, ennea, nine
–30	weko	w	Gr, deka, ten
–33	vendeko	v	Gr, hendeka, eleven
–36	udeko	u	Gr, dodeka, twelve
27	xenta	X	Gr, ennea, nine
30	wekta	W	Gr, deka, ten
33	vendekta	V	Gr, hendeka, eleven
36	udekta	U	Gr, dodeka, twelve

PROPUESTA antigua no oficial(descartada ya en potencias 27-30,-27 y -30).

Q1. Familiarization with prefixes and abbreviations.

10^n	Prefix	Abbreviation	10^n	Prefix	Abbreviation
10^0					
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yocto-	y

Suppose, $x = ay^4$ where $a = 2.00\ \mathrm{ng/Pm}$. Determine the value of y when x = 16.0 (Zg fm^2)/(ms^3). Express the result in scientific notation and simplify the units.

(Hint: Refer to the table above, and note that SI prefixes are never used to multiply powers of units. For example, the abbreviation cm^2 means (10^{-2} m)^2, not 10^{-2} m^2, and ns^{-1} is 1/ns or 10^9 s^{-1}, not 10^{-9}s^{-1}. Also note m that can stand for meter or for milli, depending on the context.)

Vectores y espacios vectoriales(I)

En Física, un vector es un segmento orientado con magnitud o módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. En Matemáticas, un vector es un objeto abstracto con ciertas propiedades axiomáticas, más concretamente, un elemento $v = \vec{v}$ de una estructura algebraica denominada espacio vectorial $V(+,\cdot,v)$. En el plano (real o complejo), un vector es una pareja de números reales, que con respecto a la base canónica $\vec{i},\vec{j}$ se expresa de la forma

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{34}$$

El módulo de este vector se define como

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{35}$$

La base canónica de vectores $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base denominada ortonormal, porque $\vec{i} \perp \vec{j}$, con $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, siendo además dichos vectores de módulo unidad, es decir $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Una base es un conjunto de vectores cuya combinación lineal produce cualquier elemento del espacio vectorial, y además es el conjunto de dimensión máxima linealmente independiente. El producto escalar de dos vectores se define como la magnitude escalar, respecto de la base canónica:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{36}$$

La definición independiente de la base del producto escalar lo asocia al módulo de los vectores y al ángulo que forman dichos vectores en el plano:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi \tag{37}$$

Los vectores satisfacen las siguientes propiedades axiomáticas respecto de la operación suma $+$ de vectores:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{38}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \tag{39}$$

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v} \tag{40}$$

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0} \tag{41}$$

Con respecto a la multiplicación por escalares, un espacio vectorial satisface los axiomas:

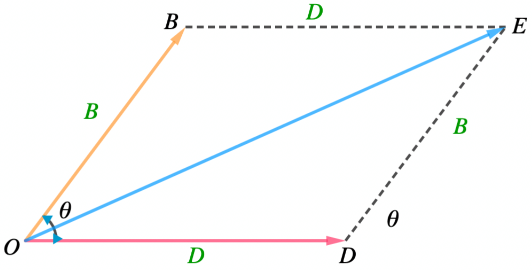
$$\lambda_1\lambda_2\vec{v}=\lambda_1(\lambda_2\vec{v})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{v} \tag{42}$$

$$1\vec{v}=\vec{v} \tag{43}$$

$$\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v} \tag{44}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{v}=\lambda_1\vec{v}+\lambda_2\vec{v} \tag{45}$$

Dos vectores se suman geométricamente haciéndoles coincidir en origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que formarían los vectores. Es la denominada regla del paralelogramo. El módulo de un vector en el plano, respecto de la base canónica, no es más que una forma equivalente del teorema de Pitágoras.



Espacios vectoriales(I)

Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial, y $V \subset E$ un subconjunto de E. Se dice que V es subespacio vectorial si y sólo si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Independencia lineal

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto linealmente independiente de vectores en E, entonces

$$\sum_i^n \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \leftrightarrow \lambda_i = 0 \tag{46}$$

Generadores

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto V de vectores en E, entonces son un generador de vectores $\vec{u}$ si puedo encontrar siempre combinaciones lineales tales que puedo expresar en componentes del conjunto generador de vectores a $\vec{u}$

$$\vec{u} = \sum_{i}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_n \vec{v}_n \tag{47}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ serían las componentes de $\vec{u}$ en G. Equivalentmente, el generador de un conjunto de m vectores en E es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de G, y se denota como $Span(G) = G_V$.

Espacios vectoriales(III)

Un conjunto de un espacio vectorial que es a la vez linealmente independiente y generador del espacio vectorial, se denomina habitualmente **base** de V. La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores de su base, o el mínimo número posible de vectores generadores. La base canónica de un espacio vectorial está caracterizada por vectores que tienen un 1 en una sola componente, y son cero las demás componentes. En el caso del espacio vectorial de vectores en $\mathbb{R}^D$, la base canónica es:

$$\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0),\vec{e}_2=(0,1,\ldots,0),\quad\cdots,\quad\vec{e}_D=(0,\ldots,1)\tag{48}$$

Las aplicaciones lineales o 1-formas en un espacio vectorial son entes matemáticos abstractos. Si J e Y son espacios vectoriales, la aplicación $f:J\rightarrow Y$, donde J,Y son espacios vectoriales se dice lineal si y sólo si:

- $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})$, donde $\vec{u},\vec{v}$ son vectores de J, y $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ vectores de Y. Esto se debe cumplir para cualesquiera vectores de J,Y.

Espacios vectoriales(IV)

Conjuntos interesantes de aplicaciones lineales:

- Núcleo o kernel. Es el conjunto $ker(f) = \{\vec{v} \in J / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
- Imagen, recorrido o conúcleo. Es el conjunto $Im(g) = \{f(J), \vec{u} \in Y / \exists \vec{v} \in J, f(\vec{v}) = \vec{u}$.
- Rango es generalmente la dimensión de la imagen de f, i.e., $Rang(f) = \dim(\text{Im(f)})$.
- Teorema de la dimensión: $\dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(J)$.
- Autovector o vector propio de una aplicación. Si A es un operador lineal asociado a una aplicación lineal f, se dice que $\vec{v}$ es eun autovector o vector propio con autovalor o valor propio λ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El conjunto de todos los valores propios (con matices en espacios de dimensión infinita), se denomina espectro de un operador lineal $\sigma(A)$. En espacios de dimensión finita, el espectro es discreto en general, y se llama espectro puntual. En dimensión infinita el espectro en general se divide en espectro puntual, espectro residual y espectro continuo.

Escalares, vectores y más allá(IV)

La magnitud de un vector o su módulo es en 2d:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

y en 3d

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y en D dimensiones:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{D} v_i^2}$$

Para 3d tendremos que:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \left(\lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\right)$$

Desigualdad triangular: $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
Proyecciones de las componentes de un vector en el plano:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{49}$$

$$v_x = v\cos\varphi, \quad v_y = v\sin\varphi \tag{50}$$

En el espacio se usan cosenos directores:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{51}$$

$$v_x = v\cos\varphi_x \tag{52}$$

$$v_y = v\cos\varphi_y \tag{53}$$

$$v_z = v\cos\varphi_z \tag{54}$$

donde $\cos^2\varphi_x + \cos^2\varphi_y + \cos^2\varphi_z = 1$. Relación que es extrapolable a cualquier dimensión como sigue:

$$\sum_{i=1}^{D}\cos^2\varphi_i = 1$$

Vectores unitarios y operaciones vectoriales(I)

Los vectores unitarios (módulo uno) y ortogonales entre sí de la base canónica son $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, aunque también se usan en ocasiones en nD como $\vec{e_i}, \vec{u_i}$. Otras operaciones con vectores son el producto escalar y el producto vectorial (y también el producto exterior o externo). El producto escalar de dos vectores en la base canónica es trivialmente escrito como sigue:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

El producto vectorial se define como la expresión formal:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

que se define explícitamente con

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

Vectores unitarios y operaciones vectoriales(II)

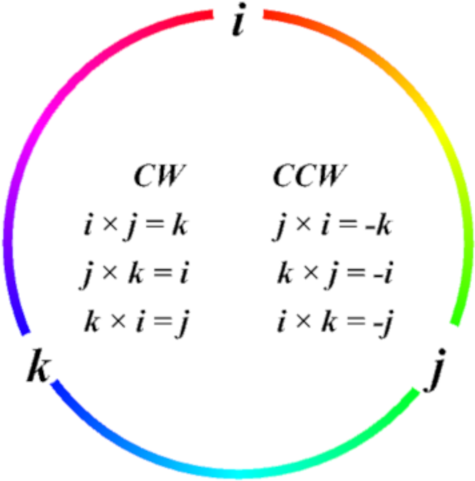
Por la anticonmutatividad del producto vectorial tenemos que $\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$, también:

$$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$$

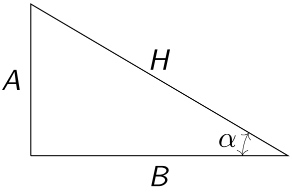
En un espacio euclídeo existe un producto escalar canónico (también en un espacio pseudoeuclídeo riemanniano o complejo hermítico o pseudohermítico). En el caso del producto vectorial, éste existe solamente como tal estrictamente como producto binario en $3d$ y $7d$, como producto ternario en $8d$ y como producto $(n-1)-ary$ en nD. El producto externo $a\wedge b$ existe en cualquier dimensión para n factores es no nulo para $n\leq D$ en general. Existe una operación entre $p-formas$ en D dimensiones que las transforma en $(D-p)-formas$, mediante el denominado operador de Hodge (estrella $\star$). Las $p-formas$ son duales de los multivectores o $p-vectores$ formados externamente con el producto de p vectores y el producto $\wedge$.

Mnemonics


i
j
k
CW
$i \times j = k$
$j \times k = i$
$k \times i = j$
CCW
$j \times i = -k$
$k \times j = -i$
$i \times k = -j$

Trigonometría elemental(I)

Sea



Entonces:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{H} \tag{55}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{H} \tag{56}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B} \tag{57}$$

$$\operatorname{co}\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{H}{A} \tag{58}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{B} \tag{59}$$

$$\operatorname{co}\tan\alpha = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A} \tag{60}$$

Razones trigonométricas de ángulos más importantes del primer cuadrante (el resto se sacan por simetría mediante circunferencia goniométrica):

$\varphi(^\circ, rad)$	sin	cos	tan
$0, 0$	0	1	0
$30, \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45, \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60, \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90, \pi/2$	1	0	∞

Trigonometría elemental(III)

Equivalencia entre radianes y grados

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$$

Identidades trigonométricas notables:

Teorema fundamental

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{co}\sec^2 x$$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{61}$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{62}$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{63}$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{64}$$

Trigonometría elemental(V)

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{65}$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{66}$$

$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1-\tan^2(X)} \tag{67}$$

Trigonometría elemental(VI)a

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(X)}{2}} \tag{68}$$

$$\cos(X/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(X)}{2}} \tag{69}$$

$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(X)}{1+\cos(X)}} \tag{70}$$

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1-\cos(2X)}{2} \tag{71}$$

$$\cos^2 X = \frac{1+\cos(2X)}{2} \tag{72}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{73}$$

$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{74}$$

$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{75}$$

$$\sin(X)-\sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{76}$$

$$\cos(X)+\cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{77}$$

$$\cos(X)-\cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{78}$$

Identidades ángulo triple

$$\sin(3X) = 3\sin(X) - 4\sin^3(X) \tag{79}$$

$$\cos(3X) = 4\cos^3(X) - 3\cos(X) \tag{80}$$

$$\tan(3X) = \frac{3\tan(X) - \tan^3(X)}{1 - 3\tan^2(X)} \tag{81}$$

$$\sin^3(X) = \frac{3}{4}\sin(X) - \frac{1}{4}\sin(3X) \tag{82}$$

$$\cos^3(X) = \frac{3}{4}\cos(X) + \frac{1}{4}\cos(3X) \tag{83}$$

$$\tag{84}$$

Identidades ángulo cuádruple

$$\sin(4X) = 4\sin(X)\cos(X) - 8\sin^3(X)\cos(X) \tag{85}$$

$$\cos(4X) = 8\cos^4(X) - 8\cos^2(X) + 1 \tag{86}$$

$$\tan(4X) = \frac{4\tan(X) - 4\tan^3(X)}{1 - 6\tan^2(X) + \tan^4(X)} \tag{87}$$

$$\sin^4(X) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2X) + \frac{1}{8}\cos(4X) \tag{88}$$

$$\cos^4(X) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2X) + \frac{1}{8}\cos(4X) \tag{89}$$

(90)

Identidades ángulo quíntuple

$$\sin(5X) = 5\sin(X) - 20\sin^3(X) + 16\sin^5(X) \tag{91}$$

$$\cos(5X) = 16\cos^5(X) - 20\cos^3(X) + 5\cos(X) \tag{92}$$

$$\tan(5X) = \frac{\tan^5(X) - 10\tan^3(X) + 5\tan(X)}{1 - 10\tan^2(X) + 5\tan^4(X)} \tag{93}$$

$$\sin^5(X) = \frac{5}{8}\sin(X) - \frac{5}{16}\sin(3X) + \frac{1}{16}\sin(5X) \tag{94}$$

$$\cos^5(X) = \frac{5}{8}\sin(X) + \frac{5}{16}\sin(3X) + \frac{1}{16}\sin(5X) \tag{95}$$

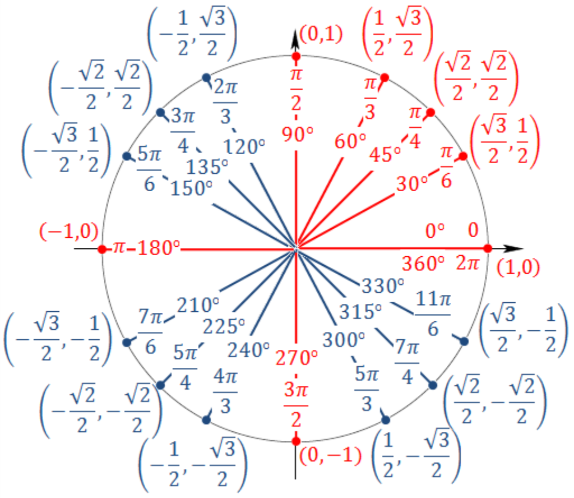
Trigonometría elemental(XI)a

Identidad de Euler y fórmula de Moivre

$$e^{iX} = \cos(X) + i\sin(X) \qquad (96)$$

$$e^{inX} = \cos(nX) + i\sin(nX) = (\cos(X) + i\sin(X))^n \qquad (97)$$

Circunferencia mnemotécnica



Trigonometría extras(I)

Teorema del seno

En cualquier triángulo $A\hat{B}C$

$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}} \tag{98}$$

La demostración se simplifica enormemente usando el álgebra vectorial, y el producto vectorial. Basta con ver que el área del triángulo $A\hat{B}C$ es $1/2$ del módulo del producto vectorial de cualesquiera de los lados con mismo origen, e.g., $\vec{AB}, \vec{AC}$, $\vec{BC}, \vec{BA}$ o bien $\vec{CA}, \vec{CB}$.

Trigonometría extras(II)

Teorema del coseno

En cualquier triángulo $A\hat{B}C$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{99}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \tag{100}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{101}$$

Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, entonces se tiene que

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Trigonometría extras(III)

- Mediana: recta que une un vértice con el mpunto medio del lado opuesto.
- Baricentro: punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.
- Altura: recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.
- Ortocentro: punto de intersección de las 3 alturas de un triángulo.
- Mediatriz: recta perpendicular a un lado y que pasa por su punto medio.
- Circuncentro: punto de intersección de las 3 mediatrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo.
- Bisectriz: recta que pasa por un vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.
- Incentro: punto de intersección de las 3 bisectrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Otras fórmulas relevantes para triángulos: la fórmula de Herón

$$A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{102}$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \tag{103}$$

$$a = b\cos C + c\cos B \tag{104}$$

$$b = a\cos C + c\cos A \tag{105}$$

$$c = a\cos B + b\cos A \tag{106}$$

Logaritmo: propiedades

$$y = \log_b(x) \longleftrightarrow b^y = x \quad (107)$$

$$\text{Dom }(\text{f=}\log_b) = (0, \infty) \quad (108)$$

$$\log_e = \ln \quad \log_{10} = \log \quad (109)$$

$$\log_b(0^+) = -\infty \quad (110)$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (111)$$

$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1 \quad \log_b b^\alpha = \alpha \quad (112)$$

$$\log_b(XY) = \log_b X + \log_b(Y) \quad \log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b(X) - \log_b(Y) \quad (113)$$

$$\log_b x^y = y \log_b x \quad (114)$$

Combinatoria(I)

Factorial y coeficiente binomial

$$n! \equiv= n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{115}$$

Combinatoria(II)

Coeficiente binomial: propiedades

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{116}$$

Binomio de Newton

$$(X+Y)^n = \binom{n}{0} X^n + \binom{n}{1} X^{n-1}Y + \binom{n}{2} X^{n-2}Y^2 +$$
$$+ \binom{n}{3} X^{n-3}Y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} XY^{n-1} + \binom{n}{n} Y^n$$

Combinatoria(IV)

Multinomial

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}$$

donde la suma comprende todos los enteros $n_1, \ldots, n_k$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Aproximación de Newton

$(1 + X)^n = 1 + nX + \mathcal{O}(X^2)$ si $X << 1$.

Trigonometría hiperbólica(I)

Definiciones

$$\sinh(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{2} \tag{117}$$

$$\cosh(X) = \frac{e^X + e^{-X}}{2} \tag{118}$$

$$\tanh(X) = \frac{\sinh(X)}{\cosh(X)} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \tag{119}$$

Trigonometría hiperbólica(II)

Algunas propiedades de funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1 \tag{120}$$

$$\sec h^2 X + \tanh^2 X = 1 \tag{121}$$

$$\mathrm{co}\tanh^2(X) - \mathrm{cosech}^2(X) = 1 \tag{122}$$

$$\sinh(X \pm Y) = \sinh(X)\cosh(Y) \pm \cosh(X)\sinh(Y) \tag{123}$$

$$\cosh(X \pm Y) = \cosh(X)\cosh(Y) \pm \sinh(X)\sinh(Y) \tag{124}$$

$$\tanh(X \pm Y) = \frac{\tanh(X) + \tanh(Y)}{1 \pm \tanh(X)\tanh(Y)} \tag{125}$$

$$\mathrm{co}\tanh(X \pm Y) = \frac{\mathrm{co}\tanh(X)\mathrm{co}\tanh(Y) \pm 1}{\mathrm{co}\tanh(Y) \pm \mathrm{co}\tanh(X)} \tag{126}$$

Trigonometría hiperbólica(III)

Funciones hiperbólicas inversas

$$\sinh^{-1} X = \operatorname{Arg}\sinh(X) = \ln\left(X + \sqrt{1 + X^2}\right) \quad (127)$$

$$\cosh^{-1} X = \operatorname{Arg}\cosh(X) = \ln\left(X + \sqrt{-1 + X^2}\right) \quad (128)$$

$$\tanh^{-1} X = \operatorname{Arg}\tanh(X) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + X}{1 - X} \quad (129)$$

$$(130)$$

Números complejos(I)

Números complejos: $Z = x + yi$, con $i = \sqrt{-1}$. Propiedades:

$$|Z|^2 = \overline{Z}Z = Z^*Z = (X^2 + Y^2) \tag{131}$$

$$\overline{Z} = Z^* = X - Yi \tag{132}$$

$$|Z| = +\sqrt{X^2 + Y^2} \tag{133}$$

$$\varphi = \text{Arg Z} = \tan^{-1}\frac{Y}{X} \tag{134}$$

$$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \overline{Z_1} \pm \overline{Z_2} \tag{135}$$

$$|\overline{Z}| = |Z| \tag{136}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad |z_2| \neq 0 \tag{137}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{138}$$

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \tag{139}$$

Números complejos(II)

Forma polar de un número complejo

$$Z = X + Yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{140}$$

$$Z = re^{i\theta} \tag{141}$$

$$Z^n = r^n e^{in\theta} \tag{142}$$

Potencias y raíces de un número complejo

$$Z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Si $w^n = z$, entonces la raíz n-ésima de un número complejo es

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right],$$

$$\forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Números complejos(III)

Logaritmo de un número complejo

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = r + i\theta + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \tag{143}$$

Límites y derivadas(I)

Límite

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite: versión métrica. Limit: metric definition

Let $M_1 = (A_1, d_1)$ and $M_2 = (A_2, d_2)$ be metric spaces.
Let c be a limit point of M_1. Let $f : A_1 \to A_2$ be a mapping from A_1 to A_2 defined everywhere on A_1 "except possibly" at c. Let $L \in M_2$. $f(x)$ is said to tend to the limit L as x tends to c and is written $f(x) \to L$ as $x \to c$ or $\lim_{x \to c} f(x) = L$ with the following definition. Definition:$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : 0 < d_1(x, c) < \delta \implies d_2(f(x), L) < \epsilon$. That is, for every real positive ϵ there exists a real positive δ such that "every" point in the domain of f within δ of c has an image within ϵ of some point L in the codomain of $f(x)$.

Derivadas(I)

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ se define como

$$TVM(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivada

La derivada de la función es el límite cuando el intervalo de variación independiente se hace infinitesimal:

$$Df = \frac{df}{dx} = \partial_x f = \dot{f} = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si $f = g(x)^{h(x)}$, entonces:

1. Se toma logaritmos (e.g. en base neperiana).
2. Se derivan los dos lados.
3. Se despeja la derivada f'.
4. Se sustituye f por su valor.

Derivadas(II)

Así, se tiene que:

$$(f^g)' = \frac{df(x)^{g(x)}}{dx} = g(x)f(x)^{g(x)-1}f(x)' + f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x)$$

Si $f = g = x$, se tiene que la derivada es $(f^g)' = x^x(1+\ln(x))$. La derivada implícita de una función $F(x,y)$, donde $y = f(x)$. Se deriva de izquierda a derecha, teniendo en cuenta que $y = f(x)$ y $y' = df(x)/dx$. Se despeja y'. Fórmula para el caso de funciones inversas:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivadas(III)

$$f(x) = k = constante \to Df = 0 \tag{144}$$

$$D(f+g) \to D(f+g) = Df + Dg \tag{145}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \to D(\lambda f) = \lambda Df \tag{146}$$

$$f(x) = g(x)h(x) \to Df = Dg \cdot h + g \cdot Dh \tag{147}$$

$$f(x) = g(h(x)) \to Df = Dg(h(x))Dh \text{ (Regla de la cadena)} \tag{148}$$

$$f = \frac{g}{h} \to Df = \frac{Dg \cdot h - g \cdot Dh}{h^2} \tag{149}$$

$$f = x^n \to Df = nx^{n-1} \tag{150}$$

$$f = e^x \to Df = e^x \tag{151}$$

$$f = a^x \to Df = a^x \ln a \tag{152}$$

Si las funciones en la lista anterior son compuestas, i.e. $x = g(x)$, basta sustituir $x = g(x)$ y multiplicar al final por la derivada de $g(x)$ en acuerdo con la regla de la cadena.

Derivadas(IV)

$$f = \log_a x \to Df = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a} \quad (153)$$

$$f = \sin(x) \to Df = \cos(x) \quad (154)$$

$$f = \cos(x) \to Df = -\sin(x) \quad (155)$$

$$f = \tan(x) \to Df = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (156)$$

$$f = \cot(x) \to Df = -(1 + \cot^2 x) = -\mathrm{co}\sec^2 x \quad (157)$$

$$f = \sin^{-1} x \to Df = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (158)$$

$$f = \cos^{-1} x \to Df = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (159)$$

$$f = \tan^{-1} x = \to Df = \frac{1}{1 + x^2} \quad (160)$$

Si las funciones en la lista anterior son compuestas, i.e. $x = g(x)$, basta sustituir $x = g(x)$ y multiplicar al final por la derivada de $g(x)$ en acuerdo con la regla de la cadena.

Derivadas(V)

$$f = \sinh(x) \rightarrow Df = \cosh(x) \tag{161}$$
$$f = \cosh(x) \rightarrow Df = \sinh(x) \tag{162}$$
$$f = \tanh(x) \rightarrow Df = 1 - \tanh^2 x \tag{163}$$
$$f = \mathrm{co}\tanh(x) \rightarrow Df = 1 - \mathrm{co}\tanh^2(x) \tag{164}$$
$$f = \sinh^{-1}(x) \rightarrow Df = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{165}$$
$$f = \cosh^{-1} x \rightarrow Df = \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}} \tag{166}$$
$$f = \tanh^{-1}(x) \rightarrow Df = \frac{1}{1-x^2} \tag{167}$$

Si las funciones en la lista anterior son compuestas, i.e. $x = g(x)$, basta sustituir $x = g(x)$ y multiplicar al final por la derivada de $g(x)$ en acuerdo con la regla de la cadena.

Primitiva de una función

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si y sólo si $DF = f$. Se dice que F es la integral indefinida de f, salvo una constante. Matemáticamente

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Regla de Barrow

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$. Se llama integral indefinida entre $x = a$ y $x = b$, al área bajo la curva de $F(x)$, que se simboliza como

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Regla de Barrow generalizada

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$, y dos funciones $G(x)$ y $H(x)$ suficientemente diferenciables. Entonces:

$$J(x) = \int_{G(x)}^{H(x)} F(t)dt \rightarrow J'(x) = F'(H(x))H'(x) - F'(G(x))G'(x)$$

Integración elemental(III)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{168}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{169}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{170}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{171}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \tag{172}$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \tag{173}$$

Integración elemental(IV)

$$\int \sec^2 x dx = \tan(x) + C \tag{174}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C \tag{175}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C = -\cos^{-1}(x) + C \tag{176}$$

- Sustitución: $x = f(t)$, luego $dx = f'dt$ y $\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt$.
- Por partes: $\int udv = uv - \int vdu$. Regla ALPES: arcos, logaritmos, potencias, exponenciales y senos/cosenos para la elección primordial de u. Equivalentemente, la prioridad es (por este orden): funciones trascendentes, polinomios, exponenciales, trigonométricas.

La integración de funciones racionales es más complicada. Si

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

En general los grados de P, Q son distintos. Primero se logra tener el cociente más racional con grado menor, esto es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una vez con raíces menores, si las raíces son reales y distintas, del denominador $Q(x)$, siendo $Q(x) = 0$ para $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la descomposición en fracciones simples:

Métodos de integración(II)

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

produce integrales de tipo logaritmo neperiano. Si las raíces son múltiples, la descomposición para cada raíz múltiple del tipo

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)^n}$$

produce logaritmos y potencias. Finalmente, si hay raíces complejas, la descomposición para cada término complejo $Ax^2 + Bx + C = q(x)$ producirá

$$\frac{P}{Q} = \sum_j \frac{M_j x + N_j}{A_j x^2 + B_j x + C_j}$$

$$I(x) = \int \frac{(Mx + N)dx}{Ax^2 + Bx + C}$$

es una integral que se descompondrá en un logaritmo más una arcotangente.

Métodos de integración(II)b

En el caso de integrales de funciones trigonométricas hay también algunas recetas:

- Aplicar fórmulas trigonométricas e identidades trigonométricas.
- Para funciones impares en el seno, se sustituye el coseno, para funciones impares en el coseno, se sustituye el seno. Para funciones pares en el seno y el coseno, se sustituye la tangente. En cualquier otro caso, se busca un cambio de tipo $t = \tan(x/2)$, de forma que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Métodos de integración(III)

Como el área de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es precisamente $A = \int_a^b fdx$, también, si $a \leq c \leq b$ se tiene que

$$\int_c^c fdx = 0$$

$$\int_a^c fdx + \int_c^b fdx = \int_a^b fdx$$

$$\int_a^b fdx = -\int_b^a fdx$$

Si $f \leq g$ entonces

$$\int_a^b fdx \leq \int_a^b gdx \quad |\int_a^b fdx| \leq \int_a^b |f|dx$$

y también, si $m \leq f(x) \leq M$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Métodos de integración(IV)

- Cálculo del volumen por secciones. Si $A(x)$ es el área transversal de un volumen V, éste será
$$V = \int_a^b A(x)dx$$
- Área de la superficie de un cuerpo de revolución. Si $y = f(x)$ es diferenciable, entonces el área del cuerpo obtenido al girar la curva entre a y b alrededor del eje X será
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2}dx$$

Métodos de integración(V)

- Volúmenes de revolución. Si f es una función de x no negativa, el volumen al girar la función entre a y b alrededor del eje X viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

- Volúmenes por método de capas. Sea $f(x)$ una función entre a y b que genera un área sobre el eje X. Entonces, el volumen generado al girar dicha área en torno al eje Y viene dado por

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

- Cálculo de longitudes de curvas. Si $f(x)$ es diferenciable en $[a, b]$, entonces la longitud de la curva desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$$

Desarrollos de Taylor(I)

Toda función diferenciable puede desarrollarse según la expresión de Taylor

Desarrollo de Taylor

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

Al truncar el desarrollo de Taylor a orden n, el término del resto se puede escribir de dos formas:

- Resto de Lagrange: $R_n(x, a) = \dfrac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ con $t \in (x_0, x)$.
- Resto de Cauchy: $R_n(x, a) = \dfrac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - t)^n$ con $t \in (x_0, x)$.

Desarrollos de Taylor(II)

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$a^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^j}{j!} = 1 + x + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{15} + \frac{17x^5}{315} + \cdots$$

Desarrollos de Taylor(III)

$$\sin^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdots\right)$$

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Desarrollos de Taylor(IV)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^j = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{3x^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2\cdot 4} - \frac{3\cdot 5x^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{x^n}{n}$$

Indeterminaciones

Indeterminaciones en los límites:

$$\frac{k}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Trigonometría en una cáscara de nuez

Teorema fundamental:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Algunas propiedades útiles de la Trigonometría:

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \tag{177}$$

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \tag{178}$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi \tag{179}$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi \tag{180}$$

$$\tan(-\varphi) = -\tan\varphi \tag{181}$$

Trigonometría en una cáscara de nuez(II)

Teorema fundamental

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \mathrm{co}\sec^2 x$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{182}$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{183}$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{184}$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{185}$$

Trigonometría en una cáscara de nuez(II)

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{186}$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{187}$$

$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1-\tan^2(X)} \tag{188}$$

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(X)}{2}} \qquad \cos(X/2) = \sqrt{\frac{1+\cos(X)}{2}} \tag{189}$$

$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(X)}{1+\cos(X)}} \tag{190}$$

Trigonometría en una cáscara de nuez(IV)

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1-\cos(2X)}{2} \tag{191}$$

$$\cos^2 X = \frac{1+\cos(2X)}{2} \tag{192}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{193}$$

$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{194}$$

$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{195}$$

Identidades útiles(III)

$$\sin(X) - \sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{196}$$

$$\cos(X) + \cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{197}$$

$$\cos(X) - \cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{198}$$

Identidad de Euler y fórmula de Moivre

$$e^{iX} = \cos(X) + i\sin(X) \tag{199}$$

$$e^{inX} = \cos(nX) + i\sin(nX) = (\cos(X) + i\sin(X))^n \tag{200}$$

Producto escalar y aplicaciones

El producto escalar tiene una serie de aplicaciones:

- Determinar la ortogonalidad o más generalmente el ángulo formado entre 2 vectores.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{201}$$

- Determinar la longitud o módulo de un vector.

$$L(\vec{v}) = |\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \tag{202}$$

- Calcular la proyección de un vector sobre otro.

$$\text{proy}(a \rightarrow b) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{203}$$

- Calcular un vector unitario a uno dado.

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{204}$$

Circunferencia y círculo

Circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan una distancia R (radio) de un punto llamado centro C. El diámetro es la mayor cuerda de una circunferencia $D = 2R$, y el perímetro de la circunferencia vale $2\pi R = \pi D = L_C$. Círculo es el espacio interior de una circunferencia y tiene un área igual a $A = \pi R^2$. La ecuación cartesiana de una circunferencia de radio R en el plano, con centro $C(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2} \tag{205}$$

y la ecuación polar es

$$x = R\cos\varphi \quad y = R\sin\varphi \tag{206}$$

Cónicas(II)

Otra forma de escribir la ecuación es:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \quad R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} \tag{207}$$

Además de la circunferencia, hay otras cónicas: la elipse la hipérbola y la parábola.

La elipse

Lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. La ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{208}$$

donde a es el semieje mayor de la elipse, b es el semieje menor de la elipse, y c la llamada semidistancia focal $c = (a+b)/2$. La excentricidad de una elipse es la cantidad $e = c/a$, y se cumple también que $b^2 + c^2 = a^2$. $0 < e < 1$.

La hipérbola

Lugar geométrico de todos los puntos en un plano cuya diferencia de distancias, a dos puntos fijos llamados focos, es constante. La ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{209}$$

donde si definimos ahora la distancia semifocal $c = (a+b)/2$, entonces $e = c/a$ es de nuevo la excentricidad $e > 1$, y $b^2 + c^2 = a^2$.

La parábola

Lugar geométreico de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija, llamada directriz. La ecuación cartesiana es

$$y = 2px \tag{210}$$

donde ahora p es la llamada distancia focal a la directriz.

Todas las cónicas pueden escribirse mediante una sucinta ecuación general, llamada ecuación focal de las cónicas:

Ecuación focal de las cónicas

$$\boxed{r = r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}} \tag{211}$$

y donde si $0 < e < 1$ es una elipse de excentricidad $e = c/a$ ($e = 0$ es una circunferencia), si $e = 1$ tenemos una parábola con $p = b^2/a$, y si $e > 1$ se tiene una hipérbola con $e = c/a$.

Cuadráticas(I)

- Elipsoide. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{212}$$

- Elipsoide imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \tag{213}$$

- Hiperboloide de una hoja. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{214}$$

- Hiperboloide de dos hojas. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \tag{215}$$

- Cono de segundo orden. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{216}$$

- Cono de segundo orden imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{217}$$

- Paraboloide elíptico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cx = 0 \tag{218}$$

- Paraboloide hiperbólico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2cx = 0 \tag{219}$$

- Cilindro elíptico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{220}$$

- Cilindro elíptico imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \tag{221}$$

Cuadráticas(III)

- Par de planos imaginarios que se cortan. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{222}$$

- Cilindro hiperbólico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{223}$$

- Par de planos que se cortan. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{224}$$

- Cilindro parabólico. Ecuación:

$$y^2 - 2px = 0 \tag{225}$$

- Par de planos paralelos. Ecuación:

$$x^2 - a^2 = 0 \tag{226}$$

Cuadráticas(IV)

- Par de planos paralelos imaginarios. Ecuación:

$$x^2 + a^2 = 0 \tag{227}$$

- Par de planos coincidentes. Ecuación:

$$x^2 = 0 \tag{228}$$

En total, como se ve, hay 17 tipos de cuadráticas.

Subespacios vectoriales

Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial, y $V \subset E$ un subconjunto de E. Se dice que V es subespacio vectorial si y sólo si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Independencia lineal

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto linealmente independiente de vectores en E, entonces

$$\sum_i^n \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \leftrightarrow \lambda_i = 0 \qquad (229)$$

Generadores

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto V de vectores en E, entonces son un generador de vectores $\vec{u}$ si puedo encontrar siempre combinaciones lineales tales que puedo expresar en componentes del conjunto generador de vectores a $\vec{u}$

$$\vec{u} = \sum_{i}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_n \vec{v}_n \tag{230}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ serían las componentes de $\vec{u}$ en G. Equivalentmente, el generador de un conjunto de m vectores en E es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de G, y se denota como $Span(G) = G_V$.

Bases

Un conjunto de un espacio vectorial que es a la vez linealmente independiente y generador del espacio vectorial, se denomina habitualmente **base** de V. La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores de su base, o el mínimo número posible de vectores generadores. La base canónica de un espacio vectorial está caracterizada por vectores que tienen un 1 en una sola componente, y son cero las demás componentes. En el caso del espacio vectorial de vectores en $\mathbb{R}^D$, la base canónica es:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad \vec{e}_D = (0, \ldots, 1) \tag{231}$$

Las aplicaciones lineales o 1-formas en un espacio vectorial son entes matemáticos abstractos. Si J e Y son espacios vectoriales, la aplicación $f : J \rightarrow Y$, donde J, Y son espacios vectoriales se dice lineal si y sólo si:

- $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$, donde $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores de J, y $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ vectores de Y. Esto se debe cumplir para cualesquiera vectores de J, Y.

Conjuntos especiales

Conjuntos interesantes de aplicaciones lineales:

- Núcleo o kernel. Es el conjunto $ker(f) = \{\vec{v} \in J / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
- Imagen, recorrido o conúcleo. Es el conjunto $Im(g) = \{f(J), \vec{u} \in Y / \exists \vec{v} \in J, f(\vec{v}) = \vec{u}$.
- Rango es generalmente la dimensión de la imagen de f, i.e., $Rang(f) = \dim(\mathrm{Im(f)})$.
- Teorema de la dimensión: $\dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(J)$.
- Autovector o vector propio de una aplicación. Si A es un operador lineal asociado a una aplicación lineal f, se dice que $\vec{v}$ es eun autovector o vector propio con autovalor o valor propio λ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El conjunto de todos los valores propios (con matices en espacios de dimensión infinita), se denomina espectro de un operador lineal $\sigma(A)$. En espacios de dimensión finita, el espectro es discreto en general, y se llama espectro puntual. En dimensión infinita el espectro en general se divide en espectro puntual, espectro residual y espectro continuo.

El producto vectorial y sus aplicaciones

El producto vectorial tridimensional tiene algunas aplicaciones:

- El módulo del producto vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es el área del paralelogramo generado por $\vec{a}, \vec{b}$.
- El producto vectorial mide paralelismo entre vectores.
- El producto vectorial tridimensional con una orientación o quiralidad particular, por lo que se le denomida pseudovector.
- El producto vectorial está relacionado con el producto escalar mediante la identidad de Lagrange

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

- El producto mixto de tres vectores es, en módulo, el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores

$$Vol(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}| \; ; \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

El producto vectorial es siempre un vector perpendicular al plano que generan los vectores factores, y tiene sentido dado por la regla de Maxwell, del tornillo o sacacorchos: el sentido el del avance de un tornillo o sacacorchos desde el primer factor al segundo por el camino más corto (regla de la mano derecha). El módulo del producto vectorial puede escribirse como sigue:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{232}$$

y, además, es el área del paralelogramo que generan los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, i.e., $|\vec{a}\times\vec{b}| = A_{\square}(\vec{a},\vec{b})$. Por otra parte, el producto vectorial no es ni conmutativo ni asociativo. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (es anticonmutativo), y $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o proporcionales es nulo. Por tanto, el producto vectorial: mide paralelismo, áreas, y representa giros en el espacio.

Matriz/Matrix

Una matriz A es una tabla ordenada de números con filas y columnas $A=(a_{ij})$. La dimensión de una matriz es el número de fijas por el número de columnas, i.e., $n\times m$. Si tiene n filas y m columnas, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$. La suma de 2 matrices de igual dimensión $M_{n\times m}$ se realiza sumando cada término análogo, mediante la regla $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij},\ \ \forall i,j$. El producto de 2 matrices de tamaños $n\times r$ y $r\times m$ se realiza mediante la expresión formal:

$$C_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj} \tag{233}$$

La matriz de una aplicación lineal es la matriz que tiene por columna j-ésima las componentes del vector $f(e_j)$.

Determinante

Para matrices cuadradas, $n \times n$ (orden n), existe una función interesante denominada determinante. $det(a_{ij}) = \prod \varepsilon_{ij} a_{ij}$.

$$\left|A_{2\times 2}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \left|A_{3\times 3}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{234}$$

$$\begin{aligned} \left|A_3\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} \tag{235}$$

Matrices(III)

Una matriz arbitraria se escribe así:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades de los determinantes de matrices cuadradas: son funciones multilineales, en el sentido siguiente:

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, para una matriz de orden n.
- $\det(AB) = \det A \det B$.
- $\dfrac{d}{dx}|A(x)_{ij}| = \sum_i |\dfrac{d}{dx}A(x)_{ij}|$.
- Una matriz es invertible si y sólo si su determinante es no nulo (aunque existen inversas generalizadas de matrices singulares con determinante nulo y similares).

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,q} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,q} \end{bmatrix}$$

$$= C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = AB$$

Tipos de matrices

- Traspuesta: es la matriz obtenida de intercambiar la fija i y la columna j. $a^t_{ij} = a_{ji}$.
- Matriz adjunta o de cofactores: es la matriz obtenida al sustituir cada elemento por su adjunto. $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$.
- Matriz identidad: es la matriz que se obtiene con todos las componentes igual a 1 es la diagonal principal (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo), y el resto son elementos nulos, i.e., $I_{ij}/a_{ij} = 1(i = j), a_{ij} = 0(i \neq j)$.
- Matriz inversa: es aquella matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Matriz ortogonal: matrices tales que $AA^t = A^tA = I$.
- Matriz unitaria: matrices tales que $A^+A = AA^+ = I$.

Tipos de matrices(II)

- Matrix simétrica: aquella que es igual a su traspuesta.
- Matrix antisimétrica o hemisimétrica: si es igual a su traspuesta cambiada de signo.
- Matrix nilpotente: matriz cuyo cuadrado (o en general una potencia mayor que uno) es igual a cero.
- Matrix idempotente: matriz que cumple $A^2 = I$.
- Matriz adjunta compleja o conjugada hermítica: $A^+ = (A^\star)^t = (A^t)^\star$.
- Rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes, y coincide con el orden del mayor menor o determinante no nulo que puedo formar en la matriz.
- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Adj})^t$.

Sistema de ecuaciones inhomogéneos

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es una expresión formal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \quad + \vdots \quad + \cdots \quad + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_m + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \tag{236}$$

Sistemas lineales y matrices(I)b

Matricialmente, este sistema se escribe $AX = Y$ donde $A = a_{ij}$ y $Y = Y_k$ son las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{237}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{238}$$

Sistemas lineales y matrices(II)

Clasificación general de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales (caso no homogéneo $AX = Y$ con $Y \neq 0$) mediante el teorema de Rouché-Frobenius:

- Sistemas incompatibles (sistemas sin solución). Ocurre cuando el rango de la matriz A y la de la ampliada con las columnas de Y, $A|Y$, son diferentes.
- Sistemas compatibles (sistemas con solución). Si la solución es única, se dice que el sistema es compatible determinado. Para ello se debe cumplir que $R(A) = R(A|Y) = n$, donde n es el número de incógnitas. Si la solución es múltiple (infinitas soluciones), el sistema se dice que es compatible indeterminado. Para eso se tiene que cumplir que $R(A) = R(A|Y) < n$.

En el caso de sistemas homogéneos con $B=0$, como el $R(A)=R(A|Y)$ siempre, el sistema es siempre compatible. Si $R(A)=n$, la solución es única pero igual a la solución trivial $x_i=0\forall i$. Si $R(A)<n$, hay infinitas soluciones no triviales. Se denomina grado de libertad de un sistema de ecuaciones lineales a la cantidad $N=n-R(A)=n-r$, donde $R(A)=r$ es el rango de la matriz A. El número de grados de libertad es el número de parámetros lineales que espefican la solución de un sistema compatible indeterminado.
Un sistema se puede resolver mediante el denominado método de Gauss y operaciones elementales por filas, o también por el denominado método de Cramer. En este método, se puede escribir que la solución en caso compatible determinado es

$$x_p=\frac{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{y}_p,\cdots,\vec{a}_n)}{\det A} \tag{239}$$

Producto escalar generalizado

El producto escalar generalizado $\vec{a}\cdot\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$, si hay una base $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ es igual a un número basado obtenido de los dos vectores en dicha base con la expresión formal siguiente:

Producto escalar generalizado

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle\vec{a}|\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_n\\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_n\cdot\vec{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix} \tag{240}$$

Matricialmente, se puede escribir como $A\cdot B = G_{ij}A^iB^j = A^tGB$, donde G es la matriz de productos escalares de la base, o métrica, de dichos vectores.

Producto escalar generalizado(II)

Si el producto escalar se calcula en la base canónica, el resultado es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{241}$$

En forma intrínseca, el producto escalar es también igual a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi \tag{242}$$

y donde $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ es el módulo o longitud de $\vec{v}$, y φ es el ángulo formado por los dos vectores. El producto escalar permite calcular proyecciones sobre vectores, módulos o longitudes, estudiar la ortogonalidad y también permite calcular vectores unitarios a uno dado $\vec{v}$. $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

Producto escalar generalizado(III)

El producto escalar es una aplicación lineal que forma un número con dos vectores. Para un producto escalar definido positivo y no degenerado sobre los reales, se tiene que:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$.
- $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

El producto escalar es sesquilineal sobre los complejos($XY=\sum_i \overline{X_i}Y_i$):

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\overline{\vec{b}\cdot\vec{a}}$.
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$.
- $\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot(\vec{b})=(\overline{\lambda}\vec{a})\cdot\vec{b}$.

Producto vectorial en 3d

Se llama producto vectorial de dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ al vector

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \tag{243}$$

y donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^3$. En componentes:

$$XYZZY = \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \tag{244}$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{\lambda a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{\lambda b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Producto vectorial en 3d(II)

- El producto vectorial es siempre un vector perpendicular al plano que generan los vectores factores, y tiene sentido dado por la regla de Maxwell, del tornillo o sacacorchos: el sentido el del avance de un tornillo o sacacorchos desde el primer factor al segundo por el camino más corto (regla de la mano derecha).
- El módulo del producto vectorial puede escribirse como sigue:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{245}$$

- Además, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que generan los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, i.e., $|\vec{a}\times\vec{b}| = A_{\square}(\vec{a},\vec{b})$.
- Por otra parte, el producto vectorial no es ni conmutativo ni asociativo. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (es anticonmutativo), y $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.
- El producto vectorial de dos vectores paralelos o proporcionales es nulo.
- Por tanto, el producto vectorial: mide paralelismo, áreas, y representa giros en el espacio.

El producto vectorial cumple sin embargo las identidades de Lagrange y Jacobi:

Identidad de Lagrange

Se puede probar que:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 \tag{246}$$

Producto vectorial en 3d(IV)

Identidad de Jacobi

Se puede probar que aunque el producto vectorial en 3d no es asociativo, satisface la identidad

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0} \tag{247}$$

o bien, la equivalente

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \tag{248}$$

Derivadas e integrales elementales(I)

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ se define como

$$TVM(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivada de una función univariable

La derivada de la función es el límite cuando el intervalo de variación independiente se hace infinitesimal:

$$Df = \frac{df}{dx} = \partial_x f = \dot{f} = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica de la derivada en un punto $f'(x_0)$: la derivada de una función de una variable en $x = x_0$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en dicho punto.

Algunas derivadas de funciones elementales:

$$f(x) = k = constante \to Df = 0 \tag{249}$$

$$D(f+g) \to D(f+g) = Df + Dg \tag{250}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \to D(\lambda f) = \lambda Df \tag{251}$$

$$f(x) = g(x)h(x) \to Df = Dg \cdot h + g \cdot Dh \tag{252}$$

$$f(x) = g(h(x)) \to Df = Dg(h(x))Dh \text{ (Regla de la cadena)} \tag{253}$$

$$f = \frac{g}{h} \to Df = \frac{Dg \cdot h - g \cdot Dh}{h^2} \tag{254}$$

$$f = x^n \to Df = nx^{n-1} \tag{255}$$

$$f = e^x \to Df = e^x \tag{256}$$

$$f = a^x \to Df = a^x \ln a \tag{257}$$

$$f = \log_a x \to Df = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a} \tag{258}$$

$$f = \sin(x) \to Df = \cos(x), \quad f = \cos(x) \to Df = -\sin(x) \tag{259}$$

$$f = \tan(x) \to Df = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{260}$$

$$f = \cot(x) \to Df = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{co}\sec^2 x \tag{261}$$

$$f = \sin^{-1} x \to Df = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{262}$$

$$f = \cos^{-1} x \to Df = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad f = \tan^{-1} x = \to Df = \frac{1}{1 + x^2} \tag{263}$$

$$f = \sinh(x) \to Df = \cosh(x), \quad f = \cosh(x) \to Df = \sinh(x) \tag{264}$$

$$f = \tanh(x) \to Df = 1 - \tanh^2 x \tag{265}$$

$$f = \operatorname{co}\tanh(x) \to Df = 1 - \operatorname{co}\tanh^2(x) \tag{266}$$

$$f = \sinh^{-1}(x) \to Df = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad f = \cosh^{-1} x \to Df = \frac{1}{\sqrt{-1 + x^2}} \tag{267}$$

$$f = \tanh^{-1}(x) \to Df = \frac{1}{1 - x^2} \tag{268}$$

Derivadas e integrales elementales(IV)

Si las funciones en la lista anterior son compuestas, i.e. $x = g(x)$, basta sustituir $x = g(x)$ y multiplicar por $g'(x)$,regla de la cadena.

Primitiva de una función

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si y sólo si $DF = f$. Se dice que F es la integral indefinida de f, salvo una constante. Matemáticamente

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Regla de Barrow

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$. Se llama integral definida entre $x = a$ y $x = b$, al área bajo la curva de $F(x)$, que se simboliza como

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Regla de Barrow generalizada

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$, y dos funciones $G(x)$ y $H(x)$ suficientemente diferenciables. Entonces:

$$J(x) = \int_{G(x)}^{H(x)} F(t)dt \rightarrow J'(x) = F'(H(x))H'(x) - F'(G(x))G'(x)$$

Las siguientes integrales indefinidas son útiles:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{269}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \tag{270}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{271}$$

Derivadas e integrales elementales(VI)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{272}$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C \tag{273}$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C \tag{274}$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan(x) + C \tag{275}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C \tag{276}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C = -\cos^{-1}(x) + C \tag{277}$$

Y las correspondientes integrales indefinidas compuestas similarmente se obtienen de ahí.

Métodos de integración elemental:

- Sustitución: $x = f(t)$, luego $dx = f'dt$ y $\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt$.
- Por partes: $\int udv = uv - \int vdu$. Regla ALPES: arcos, logaritmos, potencias, exponenciales y senos/cosenos para la elección primordial de u. Equivalentemente, la prioridad es (por este orden): funciones trascendentes, polinomios, exponenciales, trigonométricas.

La integración de funciones racionales es más complicada. Si

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

En general los grados de P, Q son distintos. Primero se logra tener el cociente más racional con grado menor, esto es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Métodos de integración elementales(II)

Una vez con raíces menores, si las raíces son reales y distintas, del denominador $Q(x)$, siendo $Q(x) = 0$ para $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la descomposición

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

produce integrales de tipo logaritmo neperiano. Si las raíces son múltiples

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)^n}$$

produce logaritmos y potencias. Finalmente, si hay raíces complejas, la descomposición para cada término complejo $Ax^2 + Bx + C = q(x)$

$$\frac{P}{Q} = \sum_j \frac{M_j x + N_j}{A_j x^2 + B_j x + C_j}$$

$$I(x) = \int \frac{(Mx + N)dx}{Ax^2 + Bx + C}$$

es una integral que se descompondrá en un logaritmo más una arcotangente.

Métodos de integración elementales(IV)

Uno puede usar álgebra para simplificar todo esto en los números complejos, y la integral por fracciones simples dará en general una fórmula cerrada preciosa para un polinomio de grado n en los complejos $f(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$:

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(a_k)(x - a_k)}.$$

Y la integral o antiderivada es

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(x - a_k)}{f'(a_k)} + C.$$

Métodos de integración elementales(V)

En el caso de integrales de funciones trigonométricas hay también algunas recetas:

- Aplicar fórmulas trigonométricas e identidades trigonométricas.
- Para funciones impares en el seno, se sustituye el coseno, para funciones impares en el coseno, se sustituye el seno. Para funciones pares en el seno y el coseno, se sustituye la tangente. En cualquier otro caso, se busca un cambio de tipo $t = \tan(x/2)$, de forma que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Como el área de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es precisamente $A = \int_a^b f dx$, también, si $a \leq c \leq b$ se tiene que

$$\int_c^c f dx = 0, \quad \int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx, \quad \int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$$

Métodos de integración elementales(VI)

Si $f \leq g$ entonces

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

Además

$$|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$$

y también, si $m \leq f(x) \leq M$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Geometría del espacio(I)

En el espacio 3d, una recta tiene las siguientes expresiones formales para sus ecuaciones:

- Ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$$

- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a + \lambda v_x \\ y = b + \lambda v_y \\ z = c + \lambda v_z \end{cases}$$

- Ecuación contínua:

$$\frac{x-a}{v_x} = \frac{x-b}{v_y} = \frac{x-c}{v_z}$$

- Intersección de dos planos:

$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

En el espacio 3d, las ecuaciones de un plano son las siguientes:

- Ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda_1(u_x, u_y, u_z) + \lambda_2(v_x, v_y, v_z)$$

- Ecuaciones paramétricas:

$$\Pi : \begin{cases} x = a + \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x \\ y = b + \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y \\ z = c + \lambda_1 u_z + \lambda_2 v_z \end{cases}$$

- Ecuación implícita y general:

$$\begin{vmatrix} (x-a) & (y-b) & (z-c) \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

donde $(A, B, C) = \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ es un vector ortogonal o perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Recta/Recta

Dos rectas r, s son paralelas si y sólo si

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z} \tag{278}$$

Dos rectas serán perpendiculares si y sólo si $\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0$, i.e., si y sólo si

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \tag{279}$$

Recta/Plano

Un plano Π y una recta r son paralelos si y sólo si

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0 = Au_x + Bu_y + Cu_z = 0 \tag{280}$$

Serán perpendiculares si y sólo si

$$\frac{A}{u_x} = \frac{B}{u_y} = \frac{C}{u_z} \tag{281}$$

Plano/Plano

Dos planos Π, Π' son paralelos si y sólo si

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{282}$$

Serán perpendiculares si y sólo si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$, i.e., si y sólo si:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \tag{283}$$

Recta/Recta

El ángulo que forman dos rectas se calcula mediante la expresión

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_r\,\vec{v}_s}{|\vec{u}_r||\vec{v}_s|} \qquad (284)$$

Recta/Plano

El ángulo que forman una recta y un plano se calcula mediante la expresión

$$\sin\varphi = \frac{\vec{u}_r\,\vec{n}_\pi}{|\vec{u}_r||\vec{n}_\pi|} \qquad (285)$$

Plano/Plano

El ángulo que forman dos planos se calcula mediante la expresión

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_{\pi}\vec{n}_{\pi'}}{|\vec{n}_{\pi}||\vec{n}_{\pi'}|} \qquad (286)$$

Sean un punto $P(a_x, a_y, a_z)$, un punto $Q(b_x, b_y, b_z)$, una recta $r : \vec{r} = \vec{y} + \lambda\vec{u}_r$, y un plano $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$, entonces:

Distancia entre dos puntos

$$D(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

Distancia entre punto y recta

$$D(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{YP}|}{|\vec{u}_r|}$$

Distancia entre recta y recta

$$D(r, r') = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{u}_{r'} \cdot \overrightarrow{YY'}|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_{r'}|}$$

Distancia entre punto y plano

$$D(P, \Pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Esta fórmula también puede usarse para hallar la distancia entre recta y plano, y entre dos planos.

Área del triángulo en el plano y el espacio

En el plano:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{287}$$

En el espacio, si los vértices son los puntos $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$, entonces:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}||\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}|| \tag{288}$$

o también:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2} \tag{289}$$

Volumen del tetraedro

Un tetraedro generado por 4 puntos X, Y, Z, W, con vértices $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$, $W(w_1, w_2, w_3, w_4)$ en el espacio, tiene un volumen dado por:

$$V_T = \frac{1}{3!}|\left(\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}\right) \cdot \overrightarrow{XW}| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{290}$$

Geometría del espacio(XII)

Ecuación del círculo que pasa por 2 puntos:

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación de la esfera que pasa por 4 puntos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sean dos rectas r, s con matrices $M, \overline{M}$ de tamaños 4×3 y 4×4. Además, $\vec{d} = (a, b, c) - (a', b', c')$. Entonces:

- r, s se cortan en un punto si $R(M) = R(\overline{M}) = 3$. Vectorialmente $\det(\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{d} = 0$ con $\vec{u}, \vec{v}$ no paralelos.
- r, s se cruzan si $R(M) \neq R(\overline{M})$ $(R(M) = 3, R(\overline{M}) = 4)$. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}) \neq 0$.
- $r||s$ si $R(M) = 2 \neq R(\overline{M}) = 3$, $\vec{u}||\vec{v}$.
- r, s son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$, y $\vec{u}||\vec{v}||\vec{d}$.

Sean Π, r un plano y una recta en el espacio. Sean M y $\overline{M}$ matrices de tamaños 3×3 y 3×4. Entonces:

- Recta y plano se cortan en un punto si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 3$, y además tenemos $\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = Au_x + Bu_y + Cu_z \neq 0$.
- Recta y plano son paralelos si y sólo si $R(M) = 2 \neq R(\overline{M}) = 3$, y además tenemos $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = Au_x + Bu_y + Cu_z = 0$, con $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$.
- Recta y plano son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$, y además tenemos que $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0$ y $Aa + Bb + Cc + D = 0$.

Geometría del espacio(XV)

Sean dos planos Π, Π', con ecuaciones $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Sean $M, \overline{M}$ matrices de tamaños 2×3 y 2×4. Entonces:

- Dos planos se cortan en una recta si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$ y además se tiene que $A/A' \neq B/B'$ ó $A/A' \neq C/C'$ ó $B/B' \neq C/C'$.
- Dos planos son paralelos si y sólo si $R(M) = 1 \neq R(\overline{M}) = 2$, y donde tenemos $A/A' = B/B' = C/C' \neq D/D'$.
- Dos planos son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 1$, y además se tiene que $A/A' = B/B' = C/C' = D/D'$.

Movimiento

Un movimiento es una ecuación formal de tipo

$$\boxed{\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{t}} \tag{291}$$

donde A es una matriz ortogonal $AA^t = I$.

Homotecias

Una homotecia (dilatación, contracción) es una transformación general de tip

$$\boxed{\vec{r}' = k\vec{r}} \tag{292}$$

donde k es la razón.

Semejanza

Una semejanza es una transformación del tipo siguiente

$$\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{t} \tag{293}$$

donde $A = kB$ es tal que B es una matriz ortogonal y $\vec{t}$ es una traslación. Una semejanza es una composición de homotecia y un movimiento de rotación con traslación.

Transformaciones del espacio(I)

Las ecuaciones de transformación del espacio más usuales son:

- Traslación con vector $\vec{t}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

- Giro o rotación de ángulo φ alrededor del eje Z:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría axial: el eje es una recta del plano XY, por el origen y con un ángulo φ respecto al eje X:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformaciones del espacio(II)

Movimiento helicoidal: ángulo φ, eje Z y traslación $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Transformaciones del espacio(III)

- Simetría central, con centro el origen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría especular: plano que contiene al eje Z, ángulo φ respecto al eje X

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría rotatoria: plano XY, giro de ángulo φ en torno al eje Z

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría con deslizamiento: plano XY, traslación con vector $\vec{t} = (t_1, t_2, 0)$ en el plano

Transformaciones del espacio(IV)

Otras transformaciones:

- Boosts galileanos: $\vec{r}' = \vec{V}(t - t_0) + \vec{t}$.
- Transformaciones fraccionales lineales:

$$X' = \frac{AX + B}{CX + D}$$

- Transformaciones conformes.
- Transformaciones afines.
- Transformaciones proyectivas.
- Transformaciones simplécticas.
- Transformaciones unitarias.
- Transformaciones lineales generales y lineales especiales.
- Transformaciones difeomorfas o difeomorfismos.
- Transformaciones homeomorfas y homeomorfismos.

Transformaciones del espacio(V)

- Transformaciones conformes especiales.
- Transformaciones métricas.
- Transformaciones metriplécticas.
- Transformaciones de dualidad.
- Transformaciones de reciprocidad de Born.
- Transformaciones de Clifford.
- Transformaciones modulares.
- Transformaciones de (relatividad de) escala.
- Transformaciones supersimétricas.
- Transformaciones hipersupersimétricas.
- Transformaciones BMS y generalizaciones: supertraslaciones, super-rotaciones, superboosts y transformaciones (super)conformes (especiales).
- ...

En el tratamiento estadístico de datos intervierne la Matemática de la Teoría de la Probabilidad. Algunas definiciones útiles previas (aunque las veremos más tarde en inglés):

Media

Se llama media aritmética (existen otros tipos de media) a la cantidad:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_if_i}{N}\tag{294}$$

donde f_i es la frecuencia de x_i. Se llama frecuencia relativa a $F_i=f_i/N$, donde N es el número de experimentos o tamaño de la muestra. Se llama **moda** al dato de mayor frecuencia.

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 f_i}{N-1} \qquad (295)$$

Se llama **desviación típica** σ a la raíz cuadrada de la varianza, i.e.,

Desviación típica o estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 f_i}{N-1}}$$

Estadística y probabilidad(III)

En el caso de distribuciones de probabilidad bidimensionales, se define

Covariancia

$$\sigma_{xy} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \overline{xy})$$

El coeficiente de correlación r es

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- Si $r = 0$ la correlación de las variables es nula.
- Si $r > 0$ la correlación es directa.
- Si $r < 0$ la correlación es inversa o indirecta.
- Si $r = \pm 1$ la correlación implica dependencia funcional.

Hay dos rectas denominadas de *regresión lineal* entre variables X, Y aleatorias. Las expresiones son las siguientes:

Recta de regresión lineal de Y sobre X

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}) \tag{296}$$

Recta de regresión lineal de X sobre Y

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y_i - \overline{y}) \tag{297}$$

Estadística y probabilidad(V)

- En Teoría de la probabilidad y del error, toman especial consideración las funciones de variable aleatoria.
- Una función de variable aleatoria es cualquier función $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Una función de variable aleatoria es discreta cuando $X(\Omega)$ es un número finito.
- Cuando $X(\Omega)$ es una función sobre un intervalo $[a, b]$ o incluso $(-\infty, \infty)$, la función de variable aleatoria se dice que es una función contínua.

En el caso de funciones de variables aleatorias discretas, se tienen los siguientes conceptos y definiciones:

Función de probabilidad

$$p(x_i) = P[X^{-1}(x_i)] \forall x_i \in X(\Omega) \tag{298}$$

Función de distribución

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \tag{299}$$

Esperanza o valor medio

$$\mu = E(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i) \tag{300}$$

Varianza y desviación estándar o típica

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 p(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p(x_i) - \mu^2 \tag{301}$$

En el caso de funciones de variables aleatorias continuas, se tienen los siguientes conceptos y definiciones:

Función de distribución

$$F(x_i) = P(X \leq x) = P[X^{-1}([a, x])] \tag{302}$$

Función densidad

$$f(x) = F'(x) \to P(x \leq x \leq d) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)dt \tag{303}$$

Esperanza o valor medio

$$\mu = E(x) = \int_a^b xf(x)dx \tag{304}$$

Varianza y desviación estándar o típica

$$\sigma_x^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{305}$$

Distribución binomial

Es una función de variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

donde n es el número de repeticiones u observaciones(experimentos), que tienen una probabilidad p de éxito y una probabilidad $q = 1 - p$ de fracaso. La media o esperanza y la desviación típica de esta distribución son

$$\mu = E(X) = np = n(1-q)$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$$

Distribución normal o gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La llamada distribución normal o gaussiana tipificada, distribución normal de media nula y desviación típica unidad es:

$$N(0,1) \to f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Para tipificar una distribución normal o gaussiana se hace mediante la transformación

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Distribución de Cauchy(I)

La distribución de Cauchy se conoce en el ámbito de la Física como la distribución de Lorentz, la función Lorentziana o la distribución de Breit-Wigner. Su importancia en la Física es dada por ser la solución de la ecuación diferencial que describe la resonancia forzada. En espectroscopia describe la forma de las líneas espectrales que son ampliadas por diversos mecanismos, en particular, el mecanismo de ensanchamiento por colisión. Se trata de una distribución de probabilidad continua cuya función de densidad es

$$\begin{aligned} f(x; x_0, \Gamma) &= \frac{1}{\pi\Gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\Gamma}\right)^2\right]} && (306) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Gamma}{(x-x_0)^2 + \Gamma^2}\right] && (307) \end{aligned}$$

Distribución de Cauchy(II)

y donde x_0 es el parámetro de corrimiento que específica la ubicación del pico de la distribución, Γ es el parámetro de escala que específica el ancho medio al máximo medio (*half-width at half-maximum, HWHM*). En el caso especial donde $x_0 = 0$ y $\Gamma = 1$ es denominado la distribución estándar de Cauchy con la función de densidad de probabilidad

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

En general la distribución de Cauchy no tiene valor esperado ni varianza. Sin embargo, la moda y la mediana son x_0. En la hidrología, se utiliza la distribución de Cauchy para analizar variables aleatorias como valores máximos de la precipitación y la descarga de ríos, y además para describir épocas de sequía.

Distribución exponencial(I)

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$ cuya función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Su función de distribución acumulada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Distribución exponencial(II)

Donde e representa el número e. De forma adicional esta distribución presenta una función adicional que es función Supervivencia (S), que representa el complemento de función de distribución

$$S(x) = P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial son:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución exponencial(III)

La distribución exponencial es un caso particular de la llamada distribución gamma con $k = 1$. Además la suma de variables aleatorias que siguen una misma distribución exponencial es una variable aleatoria expresable en términos de la distribución gamma.

Ejemplos para la distribución exponencial:

- La distribución de la longitud de los intervalos de una variable continua que transcurren entre dos sucesos, que se distribuyen según la distribución de Poisson.
- El tiempo transcurrido en un centreo de llamadas hasta recibir la primera llamada del día se podría modelar como una exponencial.
- El intervalo de tiempo entre terremotos (de una determinada magnitud) sigue una distribución exponencial.
- Supongamos una máquina que produce hilo de alambre, la cantidad de metros de alambre hasta encontrar un fallo en el alambre se podría modelar como una exponencial.
- En fiabilidad de sistemas, un dispositivo con tasa de fallo constante sigue una distribución exponencial.

Distribución de Poison(I)

The Poisson distribution is popular for modeling the **number of times an event occurs in an interval of time or space**. A discrete random variable X is said to have a Poisson distribution with parameter $\lambda > 0$ if, for $k > 1, 2, \ldots$ the probability (mass) function of X is given by

$$f(k; \lambda) = \Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

where $e = 2{,}71828\ldots$, k is the number of occurrences and $k!$ is the factorial of k. The positive real number λ is equal to the expected value of X and also to its variance

Distribución de Poison(II)

$\lambda = \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X)$. $\mu = \sigma = \lambda$ for a Poisson p.d.f. The Poisson distribution can be applied to systems with a large number of rare events|large number of possible events, each of which is rare. The number of such events that occur during a fixed time interval is, under the right circumstances, a random number with a Poisson distribution. The equation can be adapted if, instead of the average number of events λ, we are given a time rate for the number of event sr to happen. Then $\lambda = rt$ (showing r number of events per unit of time), and

$$P(k \text{ events in interval } t) = \frac{(rt)^k e^{-rt}}{k!}$$

The Poisson distribution may be useful to model events such as

- The number of meteorites greater than 1 meter diameter that strike Earth in a year.
- The number of patients arriving in an emergency room between 10 and 11 pm. The number of laser photons hitting a detector in a particular time interval.

Distribución de Poison(III)

The Poisson distribution is an appropriate model if the following assumptions are true:

- k is the number of times an event occurs in an interval and k can take values $0, 1, 2, \ldots$
- The occurrence of one event does not affect the probability that a second event will occur. That is, events occur independently. The average rate at which events occur is independent of any occurrences. For simplicity, this is usually assumed to be constant, but may in practice vary with time.
- Two events cannot occur at exactly the same instant; instead, at each very small sub-interval exactly one event either occurs or does not occur.

If these conditions are true, then k is a Poisson random variable, and the distribution of k is a Poisson distribution.

Distribución de Poison(IV)

- If for every $t > 0$ the number of arrivals in the time interval $[0, t]$ follows the Poisson distribution with mean λt, then the sequence of inter-arrival times are independent and identically distributed exponential random variables having mean $1/\lambda$.
- The Poisson distribution can be derived as a limiting case to the binomial distribution as the number of trials goes to infinity and the expected number of successes remains fixed.
- Therefore, it can be used as an approximation of the binomial distribution if n is sufficiently large and p is sufficiently small.
- There is a rule of thumb stating that the Poisson distribution is a good approximation of the binomial distribution if n is at least 20 and p is smaller than or equal to 0,05, and an excellent approximation if $n \geq 100$ and $np \leq 10$.

Otros resultados(I)

Otros resultados:

- Cálculo del volumen por secciones. Si $A(x)$ es el área transversal de un volumen V, éste será

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

- Área de la superficie de un cuerpo de revolución. Si $y = f(x)$ es diferenciable, entonces el área del cuerpo obtenido al girar la curva entre a y b alrededor del eje X será

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f')^2}dx$$

- Volúmenes de revolución. Si f es una función de x no negativa, el volumen al girar la función entre a y b alrededor del eje X viene dado por

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Otros resultados(II)

- Volúmenes por método de capas. Sea $f(x)$ una función entre a y b que genera un área sobre el eje X. Entonces, el volumen generado al girar dicha área en torno al eje Y viene dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

- Cálculo de longitudes de curvas. Si $f(x)$ es diferenciable en $[a, b]$, entonces la longitud de la curva desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$$

Otros resultados(III)

Toda función diferenciable puede desarrollarse según la expresión de Taylor

Desarrollo de Taylor

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}|_{x=x_0}(x-x_0)^n$$

Aproximación binomial

$$(1+x)^n\approx 1+nx,\quad x<<1,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Indeterminaciones en los límites:

$$\frac{k}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad \frac{0}{0},\quad 0\cdot\infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^0,\quad 0^0$$

✍ **Ejercicio 1**. Sean los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$, $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$. Calcular:

a) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - 2\vec{d}$, $\vec{a} + 3\vec{c}$, $\vec{a} - 2\vec{c}$,$\vec{a} + \vec{d}$, $\vec{a} - \vec{d}$, $-\vec{a} + \vec{d}$.

b) $3\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $-\frac{1}{3}\vec{c}$, $4\vec{d}$, $-3\vec{a} + 5\vec{c}$.

c) El módulo de los cuatro vectores: $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, |\vec{d}|$.

d) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot d$, $\vec{c} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}$.

e) El ángulo que forman entre sí cada par de vectores.

f) Un vector perpendicular a cada uno de los 4 vectores dados.

g) Un vector unitario a cada uno de los 4 vectores dados.

h) Un vector unitario perpendicular a cada vector dado.

✍**Ejercicio 2**. Practica derivadas. Calcula la derivada de las funciones siguientes:

$f(t) = 8 + \pi$, $f(t) = 8t$, $f(t) = -\frac{t}{2}$

$f(t) = -\frac{\pi}{3}t^2$, $f(t) = \dfrac{3\sqrt{14}t}{2}$

$f(t) = (8+t)^2$, $f(t) = (8+2t)^3$

$f(t) = (4-3t)^4$, $f(t) = (-1-3t^3)^{-2}$

$f(t) = \sin(3t+4)$, $f(t) = \cos(10t)$

$f(t) = 3 + \pi^8 - e - \sqrt{10} + 100$, $f(t) = -10^{100}t$

$f(t) = t^2 + 5$, $f(t) = \frac{1}{t+8}$, $f(t) = 8t^3 - 5$

$f(t) = -10t^2 - 6t$, $f(t) = \frac{t^{11}}{10} - 3t^5$

$f(t) = -\frac{8}{3}t$

Contenido

Errors

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.
Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.
2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

Errors(II)

There is also a distinction of accuracy and precision:
1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.
2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.

1. Statistical estimators.

Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{308}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{309}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{310}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{311}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} \tag{312}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.
Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}} \tag{313}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1\rightarrow n$:

$$\boxed{\sigma_n\equiv\sqrt{\sigma^2_{x,n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}=s_n} \tag{314}$$

Errors(V)

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}}} \tag{315}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}{n}} \tag{316}$$

Errors(VI)

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right) = \sigma^2_{\sigma^2} = \sigma^2\left(\sigma^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{317}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right) = \sqrt{\sigma^2_{\sigma^2}} = \sigma\left(\sigma^2\right) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{318}$$

Standard deviation of the standard deviation of the mean (error of error)

$$\sigma(\sigma) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2} - 1} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{319}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$. Note that also, we could know how many observations we would need to accomplish certain number of sigmas.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma] \longrightarrow P \approx 68{,}3\,\% \sim \frac{1}{3} \tag{320}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma] \longrightarrow P \approx 95{,}4\,\% \sim \frac{1}{22} \tag{321}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}7\,\% \sim \frac{1}{370} \tag{322}$$

Errors(VIII)

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x} - 4\sigma, \overline{x} + 4\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}994\,\% \sim \frac{1}{15787} \tag{323}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x} - 5\sigma, \overline{x} + 5\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}99994\,\% \sim \frac{1}{1744278} \tag{324}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x} - 6\sigma, \overline{x} + 6\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}9999998\,\% \sim \frac{1}{506797346} \tag{325}$$

For a given confidence level $C.L.$ (generally 90 %, 95 %, 98 %, 99 %), the interval width will be:
$1{,}645\sigma, 1{,}96\sigma, 2{,}326\sigma, 2{,}576\sigma$.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{326}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:
$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.
$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.
$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{327}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:
$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.
$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.
$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \pm \delta x = x \left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$y \pm \delta y = y \left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{328}$$

If $q = x/y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{329}$$

3C. Error in powers.

With $x \pm \delta x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|} = |n||x^{n-1}|\delta x \tag{330}$$

and if $g = f(x)$, with the error of x being δx, you get

$$\boxed{\delta f = |\frac{df}{dx}|\delta x} \tag{331}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}} \tag{332}$$

or:

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta^2 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta^2 x_n}} \tag{333}$$

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{334}$$

for independent random errors (no correlations). Examples:

1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = k\delta x}$.

2nd. $q = \pm x \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \delta y + \cdots}$.

3rd. $q = kx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1| \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n| \frac{\delta x_n|}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided

$$\overline{X}_{best} = \frac{\displaystyle\sum_{i=n}^{n} \frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{335}$$

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{336}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. The standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{337}$$

Errors(XV)

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let (X_i, Y_i) from $i = 1, \ldots, n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with
$Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.
We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

Errors(XVI)

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{2}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i=y_i-\alpha-\beta x_i$$

Writing $y=\alpha+\beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x} \tag{338}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=i}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{s_{x,y}}{s_x^2}=r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{339}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}} \tag{340}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}} \tag{341}$$

Errors(XVIII)

$$s_\alpha^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\right] \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{342}$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{343}$$

Alternatively, define

$$S_x = \sum x_i \tag{344}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{345}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{346}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{347}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{348}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \hat{\varepsilon}$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} \hat{\alpha} = \frac{1}{n} S_y - \hat{\beta} \frac{1}{n} S_x \tag{349}$$

$$s_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n(n-2)} \left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2 (nS_{xx} - S_x^2) \right] \tag{350}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{ns_{\varepsilon}^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{351}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2 \frac{1}{n} S_{xx} \tag{352}$$

$$r = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nS_{xx} - S_x^2)(nS_{yy} - S_y^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1) s_x s_y} \tag{353}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \left[n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}} \tag{354}$$

We note that the sample mean vector $\bar{x}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, K.$$

Errors(XXI)

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_K \end{bmatrix} \quad (355)$$

The sample covariance matrix is a "K"-by-"K" matrix

$$Q = [q_{jk}]$$

$$q_{jk} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

Errors(XXII)

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$Q = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_{i}. - \bar{x})(x_{i}. - \bar{x})^T$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ are.

The t-value has a Student's t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for $\hat{\beta}$:

$$\beta \in \left[\widehat{\beta} - s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2},\ \widehat{\beta} + s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where t^*_{n-2} is the $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\gamma = 0{,}05$, then the C.L. is 95 %. Similarly, the confidence interval for the intercept coefficient $\hat{\alpha}$ is given by

$$\alpha \in \left[\widehat{\alpha} - s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2},\ \widehat{\alpha} + s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where as before above

$$s_{\widehat{\alpha}} = s_{\widehat{\beta}} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^{\,2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

Las ecuaciones lineales de variable real y compleja se resuelven de forma sencilla.
Ecuaciones lineales: $ax+b=c$. Si $a\neq 0\rightarrow x=\dfrac{c-b}{a}$. Ecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c=0$. La resolución es mediante la conocida fórmula:

$$x_{\pm}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad \Delta=b^2-4ac \text{ es el discriminante.}$$

Si $\Delta>0$, las soluciones son simples y diferente $x_{\pm}$. Si $\Delta=0$, las soluciones son iguales $x_{\pm}=x_{+}=x_{-}=-\dfrac{b}{2a}$. Si $\Delta<0$, las soluciones son simples pero complejas conjugadas (en los complejos). La suma de las dos soluciones de una ecuación cuadrática da siempre $S=-b/a$, y el producto de las dos soluciones es siempre $P=c/a$. Además, una ecuación cuadrática se puede reescribir de la forma siguiente $x^2-Sx+P=0$.

Ecuaciones y funciones(II)

- Una ecuación bicuadrática $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se resuelve mediante el cambio $z = x^2$. Hay 4 soluciones en general.
- Hay fórmulas complicadas para la resolución de las ecuaciones de cuarto y tercer grado.
- Para las de grado quinto o superior, no se puede hacer mediante funciones "elementales".

Una función es una aplicación de números reales en números reales con solamente una imagen.

Ecuaciones y funciones(III)

Para representar una función $f(x)$ de variable real, se estudia:

- Dominio y rango (o recorrido/imagen/codominio).
- Signo de la función.
- Simetrías (paridad) de la función: $f(-x) = f(x)$ es par, $f(-x) = -f(x)$ es impar.
- Puntos de corte con el eje X ($y = 0$) y el eje Y ($y_c = f(0)$).
- Asíntotas: verticales, horizontales y oblícuas.
  - Asíntotas horizontales $y = b$ cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.
  - Asíntotas verticales $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} = \pm\infty$.
  - Asíntotas oblícuas $y = mx + n$ cuando $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n$.
- Máximos, mínimos y puntos de inflexión. Máximos y mínimos son puntos con o bien $f' = 0$, o bien puntos cuya primera derivada el punto crítico no nula es de orden par. Puntos de inflexión son puntos con o bien $f'' = 0$, o bien puntos cuya primera derivada no nula es de orden impar.

Ecuaciones y funciones(IV)

- Crecimiento y decrecimiento de la función. Una función es creciente en un intervalo si la derivada es positiva en ese intervalo. Una función es decriente en un intervalo si la derivada es negativa en ese intervalo.
- Curvatura de la función (concavidad-convexidad). Una función tiene gráfica cóncava $\cup$ en un intervalo, si la segunda derivada es positiva en ese intervalo. Una función es convexa $\cap$ en un intervalo si la segunda derivada es negativa en ese intervalo.

1. Las funciones de varias variables necesitan una dimensión más para ser representadas que las funciones de variables real. Así, una función $z = f(x, y)$ se representa mediante superficies en el espacio.
2. Los campos (espinoriales, escalares, vectoriales, tensoriales,. . .) son generalizaciones del concepto de función a un espacio multidimensional o con tipos exóticos de variables numéricas.
3. La idea de número (real, complejo, hipercomplejo, de Grassmann, . . .) forma parte intrínseca del concepto de función. Es importante saber qué "valores" o "números" toma una función o campo.

Continuidad de una función en un punto

Se dice que una función es contínua en un punto x_0 (en un intervalo abierto o cerrado) si solo si:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{356}$$

Si f y g son funciones contínuas, también lo son $\lambda f, \lambda g, f \pm g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$, la última si $g(a) \neq 0$. Si f es continua en $x = a$, y g es continua en $f(a)$, entonces $f \circ g = g(f(x))$ es continua en $x = a$. Hay varios tipos :

- Evitable: si $\lim\limits_{x\to x_0} = L$, pero $f(x_0) \neq L$ o bien $f(x_0)$ no está bien definido.
- De salto: si existen límites laterales finitos, pero son diferentes.
- Asintóticos: si $\lim\limits_{x\to x_0} f = \pm\infty$.

Límites asintóticos de cocientes entre dos polinomios:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n} \text{ si } m=n\\ \pm\infty, \text{ si } n>m\\ 0 \text{ si } n<m\end{cases}$$

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a,b]$, y la función cambia de signo en los extremos, i.e., signo$[f(a)]\neq$ signo$[f(b)]$, entonces $\exists x_0\in(a,b)$ tal que $f(x_0)=0$.

Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a, b]$, y $f(a) \leq A \leq f(b)$, entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = A$. Como corolarios, con la hipótesis de continuidad en el cerrado, se sigue que:

- $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(x_0) \forall x$.
- $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, y derivables en (a, b), con $g'(x)$ no nula en (a, b). Entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(b)}{g(b) - g(a)}$$

Regla de L'Hôspital

Sean $f(x), g(x)$ dos funciones continuas y derivables en un entorno reducido del punto x_0. Si en el entorno de x_0, $g'(x_0) = 0$, de forma que, o bien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to} g(x) = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to} g(x) = \infty$$

Entonces existe el límite (incluso si es cero o infinito):

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el último límite existe.

Contenido

Números elementales

Los números elementales son los números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y los números complejos. Se suelen simbolizar por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Existen otros números más allá de estos. El valor absoluto de un número es el número definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{si} \quad x > 0 \\ -x, \text{si} \quad x < 0 \\ 0, \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{357}$$

Las sumas de varios números definen la multiplicación, y la multiplicación de varios números la potenciación:

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{n-veces} = n \cdot a = na \tag{358}$$

$$\underbrace{a \cdots a}_{n-veces} = a^n \tag{359}$$

Números elementales(II)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{360}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{361}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{362}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{363}$$
$$a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{364}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{365}$$
$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{366}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{367}$$

Números elementales(III)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$\text{Si } \frac{a}{n} = c + \frac{r}{n} \rightarrow \sqrt[n]{x^a} = x^c\sqrt[n]{x^r}$$

Números elementales(IV)

$$a + b = b + a \tag{368}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{369}$$

$$a + 0 = 0 + a = a \tag{370}$$

$$a + (-a) = 0 \tag{371}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{372}$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{373}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{374}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{375}$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{376}$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \tag{377}$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \tag{378}$$

Números elementales(IV)b

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \tag{379}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \tag{380}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \tag{381}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c} \tag{382}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \tag{383}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}=\cdots \tag{384}$$

Números elementales(V)

Para obtener la *fracción irreducible* se usa el máximo común divisor (M.C.D.). Para dividir fracciones con diferente denominador, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) para lograr el **común denominador**. Un número primo es un número que solamente es divisible entre sí mismo y el 1. El número 1 generalmente NO se considera primo. Los números primos más pequeños son los siguientes:

$$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots \qquad (385)$$

Máximo común divisor

El máximo común divisor de una serie de números $a, b, c, \ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes elevados al menor exponente. Se representa como $M.C.D.(a, b, c, \ldots)$.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de una serie de números $a, b, c, \ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes y no comunes elevados a su correspondient mayor exponente. Se representa como $m.c.m.(a, b, c, \ldots)$.

Fracciones generatriz

- Números enteros no decimales: $\dfrac{\text{número}}{1}$. Ejemplo: $4 = \dfrac{4}{1}, -7 = \dfrac{-7}{1}$.
- Números enteros decimales exactos: $\dfrac{\text{número sin decimal}}{10\cdots}$, donde hay tantos ceros como cifras decimales. Ejemplos: $3{,}5 = \dfrac{35}{10}$, $-0{,}75 = -\dfrac{75}{100}$, $88{,}976 = \dfrac{88976}{1000}$. Es decir, la fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y decimal) sin coma, y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Nótese que esto incluye el caso anterior.

$$a, x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{a x_1 x_2 \cdots x_n}{1\underbrace{0\cdots 0}_{n}}$$

Fracciones generatriz(II)

- Números decimales periódicos puros: $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0.\overline{25} = \frac{25}{99}$, $1.\overline{58} = \frac{157}{99}$, $11.\overline{314} = \frac{11303}{999}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y periodo sin coma) menos la parte entera, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo.

$$a, \overline{x_1 \cdots x_n} = \frac{ax_1 \cdots x_n - a}{\underbrace{9 \cdots 9}_{n}}$$

- Números decimales periódicos mixtos. Ejemplo: $5, 17\overline{54} \ldots = \frac{(51754 - 517)}{9900} = \frac{51237}{9900}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera, anteperiodo y periodo sin coma) menos la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras diferentes tenga el anteperiodo.

Polinomios(I)

Polinomio

Un polinomio de grado n es una expresión algebraica del siguiente tipo:

$$\boxed{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \tag{386}$$

Teorema de la raíz

Si $x = a$ es en una raíz del polinomio, entonces $P(a) = 0$.

Teorema del resto

El resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ es $P(a)$. Si $x = a$ es en una raíz del polinomio, entonces $P(a) = 0$, y por el teorema del resto, entonces es divisible por $(x - a)$.

Teorema del fundamental del álgebra polinómica

Todo polinomio (ecuación) de grado n tiene, por lo general, n raíces complejas.

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \tag{387}$$

- Funciones constantes: $F(x) = k$. Son polinomios de grado 0 cuya gráfica son rectas paralelas al Eje X, que pasan por el punto $(0, k)$.
- Funciones lineales: $F(x) = ax + b$. Son polinomios de grado uno cuya gráfica son rectas que pasan por $(0, b)$ y tienen pendiente a.
- Funciones cuadráticas: $F(x) = ax^2 + bx + c$. Son polinomios de grado dos cuya gráfica son parábolas de vértice el punto P:

$$P_V(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Combinatoria(I)

	Los elementos se repiten	Orden	Identificación	Grupos
Var.	No $(n < m)$	Sí	$V(n,m)$	$\dfrac{m!}{(m-n)!}$
Per.	No $(n = m)$	Sí	$P(m)$	$m!$
Comb.	No $(n \leq m)$	No	$C(m,n)$	$\dfrac{m!}{(m-n)!n!}$
Comb. con rep.	Sí $(n \leq m)$	No	$CR(m,n)$	$\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$
Var con rep.	Sí, pueden	Sí	$VR(m,n)$	m^n
Per. con rep.	Sí, pueden	Sí	$PR(p,q,r)$	$\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

Combinatoria(II)

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{388}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{389}$$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{390}$$

Combinatoria(III)

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lc}
(x + y)^0 & 1 \\
(x + y)^1 & 1x + 1y \\
(x + y)^2 & 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
(x + y)^3 & 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
(x + y)^4 & 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \\
(x + y)^5 & 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5
\end{array}
$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Combinatoria(V)

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Aplicaciones

Aplicación y función

Un objeto $f : A \to B$ es una aplicación o función si para todo elemento $a \in A$ le corresponde un único valor $f(a) = b \in B$. a se llama elemento original o antiimagen. b es la imagen. A es el dominio, $f(A) = B$ es el recorrido o rango de A. f es la aplicación, función o functor (teoría de categorías).

Existen varios tipos de aplicaciones:

- Inyectiva: si $f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$. Elementos distintos tienen imágenes distintas.
- Exhaustiva(sobreyectiva): si todo $b \in B$ tiene por lo menos una antiimagen $f(A) = B$.
- Biyectiva. Cuando f es a la vez inyectiva y exhaustiva.

Aplicaciones(II)

¿Cuántas aplicaciones pueden establecerse entre dos conjuntos A, B?
Supongamos que hay n elementos en A y m elementos en B. Entonces:

- Número de aplicaciones inyectivas: $N_I = V(m, n)$.
- Número de aplicaciones exhaustivas: $N_E = PR(p, q, r)$, donde $(p + q + r) = n$.
- Número de aplicaciones biyectivas: $N_B = P(m) = P(n) = n!$.
- Número de aplicaciones cualesquiera: $VR(m, n)$.

Si C es un conjunto, y denotamos por $(+, \cdot)$ dos operaciones en el conjunto. Hay varias estructuras algebraicas básicas:

Estructuras algebraicas(I)

- Grupo $G(C,+)$. Suponiendo que $+$ es una operación asociativa, con elemento neutro y simétrico.
- Grupo abeliano. Cuando además de ser grupo, $+$ es una operación conmutativa.
- Cuerpo $(C,+,\cdot)$. Si $(C,+)$ es un grupo abeliano, y además $(C-\{0\},\cdot)$ es un grupo, y $\cdot$ es distributivo respecto de la operación $+$.
- Anillo $(C,+,\cdot)$. Si $(C,+)$ es grupo abeliano, $\cdot$ es asociativo, $\cdot$ es distributivo respecto de la operación $+$.
- Espacio vectorial sobre K, donde $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ son los números reales o complejos. Entonces, $V(+,\cdot)$ es espacio vectorial si y sólo si: $(V,+)$ es grupo abeliano, y además:
  - $(\alpha+\beta)\cdot\vec{v}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{v}$.
  - $\alpha\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\alpha\cdot\vec{v})+(\alpha\cdot\vec{w})$.
  - $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v}$.
  - $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$.

  y donde $\vec{v},\vec{w}$ son vectores en V, y α,β son escalares en K.

Probabilidad(I)

Espacio muestral

Un conjunto de sucesos o resultados es un conjunto de valores $\Omega = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de forma que

$$p : \Omega \to [0, 1] \tag{391}$$

tal que $\sum_i p(x_i) = 1$. Un suceso es un $T \subset \Omega$. $p(T) = \sum_i p(x_i)$ para todo $x_i \in T$.

Probabilidad(II)

$$p(\Omega) = 1 \tag{392}$$

$$p(\emptyset) = 0 \tag{393}$$

$$p(T \cup S) = p(T) + p(S) \tag{394}$$

cuando $T \cap S = \emptyset$ (incompatibles). Además, el suceso contrario u opuesto o complementario a T, denotado por $\overline{T}$ es aquel que verifica

$$\overline{T} = \Omega - T, \quad p(\overline{T}) = 1 - p(T) \tag{395}$$

La regla de la suma dice que:

$$p(T \cup S) = p(T) + p(S) - p(T \cap S) \tag{396}$$

Si dos sucesos son independientes, entonces $p(T \cap S) = p(T)p(S)$.

Regla de Laplace

Para resultados repetidos y equiprobables, la regla de Laplace señala que la probabilidad de un suceso T es el cociente de casos favorables entre los casos posibles:

$$p(T) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \tag{397}$$

Probabilidad condicionada y teorema de Bayes

La probabilidad condicionada de un suceso D por un suceso Y, es la probabilidad:

$$p(D|Y) = \frac{p(D \cap Y)}{p(Y)} \tag{398}$$

El teorema de Bayes, afirma que la probabilidad de un suceso D_i de una serie de sucesos $D_i = (D_1, \ldots, D_n)$ condicionada por un suceso Y se calcula mediante la expresión:

$$p(D_i|Y) = \frac{p(D_i)p(Y|D_i)}{p(D_1)p(Y|D_1) + \cdots + p(D_n)p(Y|D_n)} \tag{399}$$

Nótese que $p(D|Y) \neq p(Y|D)$ en general.

Progresiones aritméticas

Término general: $a_n = nd + b$. $d = a_{n+1} - a_n$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{400}$$

$$a_n = a_m + (n-m)d \tag{401}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{402}$$

El producto de n términos de una sucesión o progresión aritmética es

$$P = \prod_{i=1}^{n} a_i = d^n \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{d} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)} \tag{403}$$

Progresiones geométricas

Término general: $a_n = a_1 r^{n-1}$. $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es la razón de dos términos consecutivos. Además, si $r > 1$ la progresión es creciente, si $0 < r < 1$, la progresión es decreciente, supuesto $a_1 > 0$. Si, por el contrario, $a_1 < 0$, entonces si $r > 1$ la progresión es decreciente, si $0 < r < 1$ es decreciente. Para cualquier signo de a_1, si $r = 1$ la progresión es constante, y si $r < 0$, entonces la sucesión es alternada.

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \tag{404}$$

El producto de n términos de una sucesión o progresión geométrica es

$$P = \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n \tag{405}$$

Progresiones y sucesiones(III)

Sucesión

Una sucesión es una aplicación $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde $a_n = S(n)$ es el término general. Una sucesión se dice que es creciente si $a_n \leq a_{n+1} \forall n$. Se dice que es decreciente si $a_n \geq a_{n+1} \forall n$. Se dice monótona si es creciente o decreciente. Una sucesión está acotada inferiormente si y sólo si $a_i \geq m \forall i$, siendo m la cota inferior. Una sucesión está acotada superiormente si y sólo si $a_i \leq M \forall i$, siendo M la cota superior. Una sucesión se dice tiene límite en el infinito si $\lim_{n\to\infty} = L$. Entonces la sucesión tiene límite único y está acotada.

Progresiones y sucesiones(IV)

Las sucesiones se pueden clasificar en convergentes (acotadas con límite), oscilantes (acotadas sin límite), o divergentes (no acotadas sin límite finito. El número e es el límite de la sucesión natural

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\cdots$$

Interés simple y compuesto

Sea C un capital inicial. Y sea C_n es capital final con un interés r en tanto por uno. Entonces, el interés simple produce un capital

$$C_n = C(1+nr) \tag{406}$$

y el interés compuesto

$$C_n = C(1+r)^n \tag{407}$$

Anualidades de capitalización y amortización

Las anualidades de capitalización A son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de n años.

$$A = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)-1\right]} \tag{408}$$

Las anualidades de amortización a son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, n de años.

$$a = \frac{Dr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \tag{409}$$

Geometría plana(I)

Vector: $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.
Vector AB desplazamiento entre A y B:
$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j}$.
Combinación lineal de vectores: $\vec{\omega} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$.
Una base de vectores es un conjunto linealmente independiente de vectores tales que cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de vectores. En el plano, una base cualquiera son dos vectores no paralelos. Si la base es de vectores ortogonales (perpendiculares) y unitarios(módulo o longitud uno), se dice entonces que la base es ortonormal.
La pendiente de una recta en el plano es la cantidad:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Una recta horizontal en el plano tiene pendiente $m = 0$. Una recta de pendiente $m = 1$ es bisectriz del primer y tercer cuadrante. Una recta de pendiente $m = -1$ es bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

Geometría plana(II)

Sean dos rectas en el plano: $r : AX + By + C = 0$, $s : A'x + B'y + C' = 0$, entonces:

- Las rectas son paralelas si y sólo si $m = m' = A/A' = B/B'$. Si además, $C/C' = m$, son coincidentes.
- Las rectas son secantes en un punto si $m \neq m'$, i.e., $A/A' \neq B/B'$.

Producto escalar en el plano: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, donde φ es el ángulo formado entre los dos vectores. El módulo es la longitud del vector: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Componentes de un vector $v_x = v\cos\varphi$, $v_y \sin\varphi$, donde v es el módulo del vector.

$$p(\vec{a} \to \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

- Distancia entre dos puntos:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

- Distancia entre punto y una recta:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Distancia entre dos rectas. Si no son paralelas y se cortan $d(P,r) = 0$ por convención. Si son paralelas, $d(r,r') = d(P,r')$, con $P \in r$.
- Ángulo entre dos rectas: $r: Ax + By + C = 0$, $s: A'x + B'y + C' = 0$,

$$\cos\alpha = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \quad \tan\alpha = \frac{m - m'}{1 - mm'}$$

- Rectas perpendiculares en el plano si y sólo si: $AA' + BB' = 0$, $mm' = -1$, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0$. Rectas perpendiculares por un punto (x_p, y_p): $B(x - x_p) - A(y - y_p) = 0$

Distribuciones y funciones especiales(I)

La función delta de Dirac es una función generalizada o distribución:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

y también está ligada a satisfacer la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Esto es meramente heurístico. La delta de Dirac no es una función en el sentido usual La función delta de Dirac solamente puede ser definida en el sentido de las distribuciones como una medida (densidad). Si como medida, conceptualizamos la función delta como un punto ideal de masa o carga en el origen, $\delta(A)$ representa la masa o carga contenida en el conjunto A. Una función delta se define entonces más bien como una convolución o su integración frente a una función de prueba. Formalmente, se necesita la maquinaria de la integral de Lebesgue para justificar su existencia.

Distribuciones y funciones especiales(II)

La integral de Lebesgue con respecto a una medida δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\{dx\} = f(0)$$

para toda funcion continua y *de soporte compacto*. La medida δ no es absolutamente continua con respecto a la medida Lebesgue (no tiene derivada de Radon-Nikodym), luego no hay realmente una función usual con la propiedad formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

Por ende, este resultado es un abuso de notación o formalidad. Como medida sobre $\mathbb{R}$, la medida delta es una probabilidad con función cumulativa igual a la función paso de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Distribuciones y funciones especiales(III)

La integral de una función delta frente a una función continua puede ser entendida como una integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\{dx\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dH(x)$$

Todos los momentos de la función delta superiores al primero son nulos. En particular, la función característica de probabilidad y generatriz de momentos son ambos igual a la unidad.
Otras definiciones equivalentes de la función delta:

$$\delta[\varphi] = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)H(x)\, dx.$$

Intuitivamente, la integración por partes produce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)H'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\, dx,\ -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)H\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dH$$

Generalizaciones:

- La función delta en el espacio euclidiano N-dimensional

$$\int_{R^n} f(x)\delta\{dx\} = f(0)$$

- Como medida multidimensional

$$\delta(\vec{x}) = \delta^N(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_N)$$

- Scaling:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, \frac{du}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$$

- Simetría:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

que es una función homogénea de grado -1.

Distribuciones y funciones especiales(IV)b

- Traslación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-T)\,dt = f(T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x)\delta(x-\eta)\,dx = \delta(\eta-\xi)$$

- Composición:

$$\int_R \delta\big(g(x)\big)f\big(g(x)\big)|g'(x)|\,dx = \int_{g(R)} \delta(u)f(u)\,du$$

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

y donde la suma se extiende a todas las raíces de $g(x)$, asumidas simples por simplicidad.

Distribuciones y funciones especiales(V)

$$\delta(\alpha x) = |\alpha|^{-n}\delta(x)$$

$$\delta(\rho x) = \delta(x)$$

$$\int_{R^n} \delta(g(x))\, f(g(x))\, \left|\det g'(x)\right| \, dx = \int_{g(R^n)} \delta(u) f(u)\, du$$

$$\int_{R^n} f(x)\, \delta(g(x))\, dx = \int_{g^{-1}(0)} \frac{f(x)}{|\nabla g|}\, d\sigma(x)$$

$$\delta_S[g] = \int_S g(s)\, d\sigma(s)$$

$$-\int_{R^n} g(x)\, \frac{\partial 1_D(x)}{\partial n}\, dx = \int_S g(s)\, d\sigma(s),$$

Distribuciones y funciones especiales(VI)

- Transformada de Fourier

$$\widehat{\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} \delta(x)\, dx = 1$$

- Derivadas distribucionales

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0)$$

y para la derivada k-ésima

$$\delta^{(k)}[\varphi] = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\delta(-x) = \frac{d}{dx}\delta(x) \tag{410}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{411}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \tag{412}$$

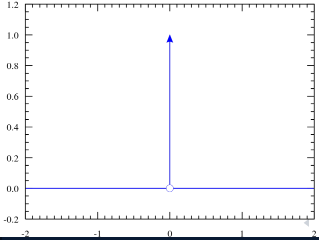
- Derivadas parciales: sobre un conjunto abierto n-dimensional, por ejemplo en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, la disdistribución delta centrada en el punto a

$$\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$$

y en el espacio de todas las funciones de soporte compacto en U, si α denota un multiíndice de derivadas parciales, el operador ∂^α actuando sobre δ_a, i.e., $\partial^\alpha \delta_a$ resulta

$$\langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_a, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) \Big|_{x=a} \text{ for all } \varphi \in S(U)$$

Esto es, la derivada α-ésima de δ_a es la distribución cuyo valor sobre cualquier función de prueba φ es la derivada α-ésima con un signo apropiado positivo o negativo. Las primeras derivadas parciales de la función delta se pueden imaginar como potenciales de doble capa a lo largo de los planos de coordenadas. Más generalmente, la derivada normal de una simple capa sobre una superficie es una doble capa sobre la superficie, y representa un monopolo magnético. Derivadas de alto orden de la función delta se conocen en Física como multipolos. En Matemáticas, son los bloques naturales de distribuciones con soporte puntual de funciones continuas.



La función zeta de Riemann es la función compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p=prime} (1 - p^{-s})^{-1}$$

La función $W(x)$ de Lambert es la función inversa de

$$f(x) = xe^x = y$$

Test del cociente

(Ratio test, criterio de D'Alembert). Supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \tag{413}$$

si $r < 1$ la serie es absolutamente convergente. Si $r > 1$ la serie diverge. Si $r = 1$ este test no puede decidir la convergencia.

Test de la raíz

El criterio de la raíz (o criterio de la raíz n-ésima de Cauchy) es el siguiente: sea

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

donde ($\limsup$) denota el límte superior (posiblemente infinito), si el límite existe, entonces tiene el mismo valor. No obstante, si $r < 1$, la serie converge, si $r > 1$ la serie diverge, y si $r = 1$, este test también no permite decidir. Este test es más fuerte que el criterio del cociente. Si el criterio del cociente determina la convergencia o divergencia de una serie infinita, también lo hará el criterio de la raíz pero no al revés.

$$1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}125 + ... = 4$$

converge según el test de la raíz pero no con el test del cociente.

Test integral

Una serie puede ser comparada con una integral para establecer la convergencia o divergencia. Sea$f : [1, \infty) \rightarrow R_+$ una función no negativa monótonamente decreciente tal que $f(n) = a_n$, entonces, si:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx < \infty$$

entonces la serie converge. Pero si la integral diverge, la serie también. En otras palabras, la serie a_n converge si y solo si la integral converge.

Criterios de convergencia(IV)

Test de comparación

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente y $|a_n| \leq |b_n|$ para n suficientemente grande, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Criterio del límite

Si $\{a_n\}, \{b_n\} > 0$, i.e., cada elemento de dos series es positivo, y el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y es finito, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Criterios de convergencia(V)

Criterio de condensación de Cauchy

Sea $\{a_n\}$ una sucesión positiva no creciente. Entonces la suma $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la suma $A^* = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge. Además, si converge, entonces se tiene que $A \leq A^* \leq 2A$.

Test de convergencia absoluta

Sean las hipótesis verdaderas:

- $\sum a_n$ es una serie convergente.
- $\{b_n\}$ es una sucesión monótona.
- $\{b_n\}$ está acotada.

Entonces $\sum a_n b_n$ es también convergente. Nota: toda serie absolutamente convergente converge.

Test de series alternadas

También llamado criterio de Leibniz, supongamos que las siguientes condiciones son dadas:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$.

Entonces, $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n a_n$ y $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ son series convergentes.

Criterio de Dirichlet

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y b_n es una sucesión de números complejos que satisfacen las condiciones:

- $a_n \geq a_{n+1}$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M$, donde M es alguna constante.

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Criterio de Raabe-Duhamel

Sea $b_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Si

$$L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

existe, entonces:

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no podemos decidir la convergencia.

Si una serie a_n de números reales, y $b > 1$, con $K \in \mathbb{N}$ existente tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{b}{n} \forall n > K$$

entonces la serie es convergente.

Criterio de Bertrand

Sea a_n una sucesión de números positivos. Definamos

$$b_n = \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right)$$

Si existe

$$L = \lim_{n \to \infty} b_n$$

entonces:

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no podemos decidir la convergencia.

Convergencia de productos

Mientras los tests anteriores enfrentan series infinitas, también pueden usarse para mostrar convergencia o divergencia de productos infinitos. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos. El producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Similarmente, si $0 < a_n < 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ se acerca a un límite no cero si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Esto puede demostrarse tomando logaritmos del producto, y usando el límite o criterio de comparación.

Contenido

El movimiento(I)

El modelo de la partícula o punto material, el que se toma o aproxima la descripción de un cuerpo o sistema por un punto matemático abstracto, con dimensión cero, es habitual. La descripción de un punto material viene dada por un vector de posición:

Vector de posición 2d y 3d

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{en el espacio 3d}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \text{en el plano 2d}$$

El vector de posición con una dimensión del tiempo en *nD*, es

Vector de posición nD

$$\overrightarrow{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n$$

El movimiento(II)

Para el caso en el que el número de dimensiones espaciales es infinita $D = \infty$:

Vector de posición dD y ∞D

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i |i\rangle = c^0 |0\rangle + \ldots + c^{d-1} |d-1\rangle \quad \text{(qdit, d-level q-state)}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |i\rangle = c^0 |0\rangle + \ldots + c^d |d\rangle + \cdots \quad \text{(q}\infty\text{it, quantum field)}$$

Estas representaciones son útiles en Mecánica Cuántica(con la condición de normalización para conservación de probabilidad), redes neuronales ($y = \sum_i \omega_i x_i$) o sistemas generales arbitrarios de tipo vectorial.

El movimiento(III)

El módulo del vector de posición es

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{en el plano}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{en el espacio}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{\sum_i^d x_i^2}, \quad \text{en el espacio de d-dimensiones}$$

Se denomina *trayectoria* al conjunto de puntos por los que pasa un móvil u objeto/punto durante su movimiento. Se denomina *hodógrafo* a la trayectoria que sigue el vector velocidad $\vec{v}$ en su movimiento. En coordenadas polares (en el plano):

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi$$

$$\vec{r} = R\cos\varphi(t)\vec{i} + R\sin\varphi(t)\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

El movimiento(IV)

El vector desplazamiento es:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$$

o infinitesimalmente

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2 + dx^3\vec{e}_3 + \cdots + dx^n\vec{e}_n$$

Ahora podemos definir la velocidad, la aceleración y jerk medios:

Vector velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta x^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Vector aceleración media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta v^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Vector jerk medio

$$\vec{j}_m = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{\Delta a^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta a^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

También podemos definir los vectores velocidad, aceleración y jerk instantáneos:

El movimiento(VI)

Vector velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dx^n}{dt}\vec{e}_n = v^1\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n$$

Vector aceleración instantánea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dv^n}{dt}\vec{e}_n = a^1\vec{e}_1 + \cdots + a^n\vec{e}_n$$

Vector jerk instantáneo

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{da^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{da^n}{dt}\vec{e}_n = j^1\vec{e}_1 + \cdots + j^n\vec{e}_n$$

El movimiento(VII)a

Las unidades de la velocidad son m/s, de la aceleración m/s^2, y del jerk m/s^3. Pueden seguirse definiendo las sucesivas derivadas temporales también para el jerk, siempre y cuando estén matemáticamente bien definidas. También podemos definir el denominado "absement":

$$\mathcal{A}(t) = \int \vec{r}(t)dt$$

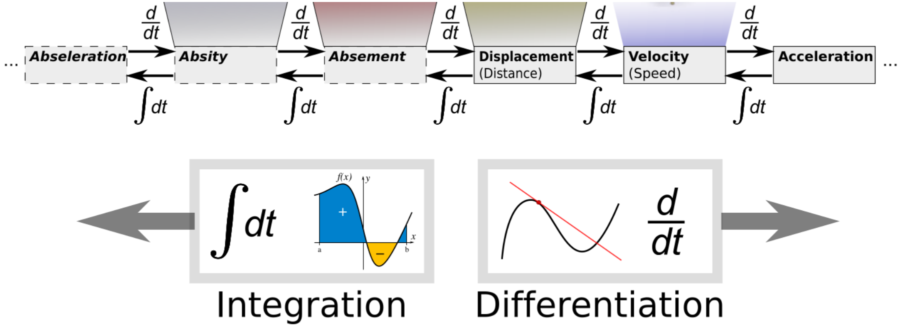
$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_2 = \int \mathcal{A}dt = \iint \vec{r}(t)d^2t$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}_3 = \int \mathcal{B}dt = \iiint \vec{r}(t)d^3t$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_4 = \int \mathcal{C}dt = \iiiint \vec{r}(t)d^4t$$

$$\mathcal{A}_n = \int \cdots \int \vec{r}(t)d^nt$$

El movimiento(VII)b



Para $\vec{r}(t) = constante$, se tiene

$$\mathcal{A} = \vec{r} \cdot \Delta t = \vec{r} \cdot (t - t_0)$$

Las unidades de $\mathcal{A}_n$ son $m \cdot s^n$. La generalización del modelo de la partícula puntual a múltiples dimensiones es como sigue:

Vector de posición multitemporal

$$\vec{r}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{t}) = X^i(t_k), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

Campo multitemporal

$$\phi(X^i, T^k) = \phi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{t}), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

El movimiento(VIII)

Se puede hoy día también generalizar el modelo de la partícula puntual a objetos extensos denominados p-branas (o membranas de dimensión p). Para $p = 1$ tenemos una cuerda ($p = 0$ es la partícula por supuesto), para $p = 2$ una membrana bidimensional, etcétera.

Campo de la p-brana 1T

$$X^{\mu}(\Sigma, \tau) = X^{\mu}(\sigma^0, \ldots, \sigma^{p-1}, \tau)$$

Campo de la p-brana multitemporal NT

$$X^{\mu}(\overrightarrow{\Sigma}, \overrightarrow{\tau}) = X^{\mu}(\sigma^0, \ldots, \sigma^{p-1}, \tau^0, \ldots, \tau^{N-1})$$

También se podría pensar en otra generalización, denominada multivectorial, para los grados de libertad de las p-branas. En ese caso se define $X^{\mu_1 \cdots \mu_p} = X^{\overline{\mu}}(\Sigma, \tau)$. Esto lleva a cierta generalación "tensorial" (multivectorial, polivectorial) o "multiforma" de las magnitudes físicas.

Movimiento

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r}=0\rightarrow\vec{r}(t_B)=\vec{r}(t_A),\quad \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r}\neq 0\rightarrow\vec{r}(t_B)\neq\vec{r}(t_A),\quad \text{movimiento}$$

Esta definición es extrapolable a un conjunto arbitrario de puntos materiales $\vec{r}_i$. Extendida a múltiples dimensiones del tiempo, es posible que las diferentes proyecciones sobre los diferentes vectores del tiempo puedan diferir. En tal caso, el concepto de reposo está restringido a subvariedades de tiempo o "ciertas ventanas" o ejes del tiempo.

Movimiento multitemporal

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) = \vec{r}(\vec{t}_A) \leftrightarrow \vec{r}(t_{A1},\ldots,t_{AN}) = \vec{r}(t_{B1},\ldots,t_{BN}),\quad \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r} \neq 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) \neq \vec{r}(\vec{t}_A),\quad \text{movimiento}$$

El movimiento(XI)

- La extensión de este concepto de movimiento a partículas u objetos extensos, lleva a también considerar la variación o fluctuación de las dimensiones espaciales.
- Es importante notar que la noción de velocidad es sutil con dimensiones múltiples o sin ella. De hecho hay generalizaciones en el cálculo del concepto de derivada como la diferenciación fraccional o la diferentegración que hacen tal concepto más complicado y sofisticado, además de que para cierta clase de números importa el tipo de "número" que soportan las magnitudes.
- Así, aunque consideramos el tiempo "real", éste podría ser complejo o hipercomplejo en general, o incluso ser multivectorial.
- En general, el ritmo de cambio del desplazamiento respecto del tiempo es la velocidad, el ritmo de cambio de la variación de la velocidad es la aceleración y así sucesivamente.
- La posición puede considerarse el ritmo de cambio del "absement" o "ausición" respecto del tiempo.

Otras formas de dar las coordenadas adaptadas a ciertas simetrías en el espacio son las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y las coordenadas esféricas (r, θ, ψ):

Coordenadas cilíndricas

Sean $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $-\infty < z < \infty$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r\cos\theta \tag{414}$$

$$Y = r\sin\theta \tag{415}$$

$$Z = z \tag{416}$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y $z = Z$.

Coordenadas esféricas

Sean $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r \sin\theta \cos\varphi \tag{417}$$
$$Y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{418}$$
$$Z = r \cos\theta \tag{419}$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$ y $\varphi = \tan^{-1} \dfrac{Y}{X}$.

El movimiento(XII)

Otras formas de dar las coordenadas de un punto en el espacio que hemos mencionado en cuadros antes involucran otros vectores unitarios (en el plano tenemos las cartesianas y polares) son las coordenadas cilíndricas y las esféricas. Para las coordenadas cilíndricas:

$$R : 0 \leq R < \infty \tag{420}$$

$$\varphi : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{421}$$

$$z : -\infty < z < \infty \tag{422}$$

donde

$$\vec{r}(t) = R\cos\varphi\vec{e}_r + R\sin\varphi\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z$$

Para coordenadas esféricas tendremos:

$$R : 0 \leq R < \infty \tag{423}$$

$$\theta : 0 \leq \theta \leq \pi \tag{424}$$

$$\varphi : 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{425}$$

$$\vec{r}(t) = R\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_r + R\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_\theta + R\cos\theta\vec{e}_\varphi$$

Interludio

- Las dimensiones físicas de la velocidad son LT^{-1}.
- En general no vale dividir un vector entre otro vector (hay sin embargo una generalización del álgebra vectorial que permite dividir en algunas dimensiones).
- Además,
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$
y donde la velocidad en el plano se obtiene con $v_z = 0$. Ahora unas propuestas de ejercicios.

Ejercicios(I)

1. Busca ejemplos de relaciones funcionales entre magnitudes físicas y químicas. Por ejemplo, $PV = nRT$, $E = mc^2$ ó $E = hf$.
2. Busca las definiciones de los siguientes tipos de magnitudes o clases de objetos matemáticos: pseudovector, pseudoescalar, multivector, polivector, espinor, multiespinor, twistor, hipertwistor, supervector, hipersupervector, número real (complejo, cuaterniónico, octoniónico), número de Clifford, supernúmero, matriz, tensor, pseudotensor, supermatriz, hipermatriz.
3. ¿Qué gráfica poseen las ecuaciones siguientes? $PV = const.$, $v = v_0 + at$, $x = \frac{1}{2}at^2$, $v = gt$, $x = x_0 - vt$, $y = y_0 + v_0 t - 1/2gt^2$.

Ejercicios(II)

1. Busca la historia y origen de los radianes, grados sexagesimales y los gradianes (o grados centesimales, gones).
2. Si $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = \hat{ab} = 60^\circ$, halla el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
3. Sean los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcula: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$.
4. Sean los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Calcula: la suma de los vectores y el ángulo que forman.
5. Para los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{j} + 4\vec{k}$, determina el valor de $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{\omega} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{v}$, $\vec{a} \cdot \vec{\omega}$.

Ejercicios(III)

1. Sean las funciones:

$$y_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$y_2(t) = 3t^4 - 2t^2 + t$$

$$y_3(t) = 10\cos(2t)$$

$$y_4(t) = 5\sin(t/2 + \pi/3)$$

   Calcula la derivada de cada una de ellas y', así como las derivadas sucesivas y'' e y'''.

2. Si una fuerza tiene un valor de 100N, formando un ángulo φ con el eje X, ¿cuánto valen las componentes de la fuerza F_x, F_y?

Ejercicios(IV)

1. Busca información sobre los posibles significados geométricos de la derivada de una función. Comenta los hallazgos.
2. Para el vector $\vec{r} = (3t^2 - 2t)\vec{i} + (5t^3/3 - 5t)\vec{j}$m, determina su derivada primera y segunda.
3. Para los vectores:

$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j} + kt\vec{k}$$

   determina su velocidad, aceleración y jerk.
4. Define radián e investiga las variantes del concepto de movimiento, espacio y tiempo a través de la historia de la Física y la Filosofía. ¿Cuáles son los prerrequisitos para una definición de movimiento en el espacio-tiempo? Indicación: $s = \varphi R$.

✍*Ejercicio 1*. Si me desplazo del punto A(2,1) al B(5,7), halla el desplazamiento y el espacio recorrido supuesto rectilíneo el movimiento.

✍*Ejercicio 2*. Sea el vector $\vec{r} = 5t\vec{i} + 2t\vec{j}$. Escribe las ecuaciones paramétricas del movimiento. Halla la velocidad media en el intervalo de 0 a 5 segundos, y en el intervalo de 0 a 10 segundos. Finalmente, halla la velocidad media en el intervalo de 5 a 10 segundos. ¿Qué concluyes?

✍*Ejercicio 3*. Sea $\vec{r} = (2t^2 + 2)\vec{i} + 3\vec{j}$. Halla el desplazamiento entre 0 y 10 segundos, y la velocidad media en el intervalo de 0 a 10 segundos. ¿Es constante?

✍*Ejercicio 4*. Sean las siguientes gráficas, en la figura 1, indica si piensas representan movimientos.

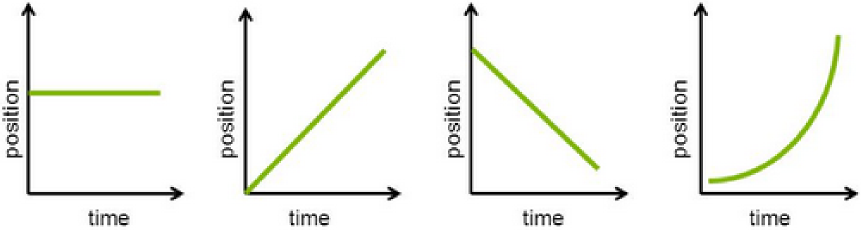


Figura: Diagramas espacio vs. tiempo.

Velocidad(I)

- La idea de velocidad media conlleva un promedio.
- Pero la velocidad puede cambiar en cada instante, supuesto que podemos dividir infinitesimalmente el tiempo. Esto es el origen del cálculo infinitesimal (diferencial e integral) de Newton y Leibniz.
- Newton llamó al cálculo de derivadas cálculo de fluxiones de fluentes. Así, la derivada es el cociente de las razones últimas evanescentes o gradiente/cociente de dos cantidades infinitesimales, esto es, el cambio instantáneo de dos números que tienden a cero.
- Leibniz usó un lenguaje más transparente que es el que usamos hoy día.
- También, existe la pregunta de si este cociente puede ser arbitrariamente pequeño realmente, y si la velocidad (o la posición) pueden realmente tomar cualquier valor grande o pequeño arbitrario.
- Clásicamente, la celeridad o valor del módulo de la velocidad puede ser arbitrario.
- En Física Relativista Especial tenemos la limitación de la velocidad de la luz (o del espacio-tiempo).

Velocidad(II)

- Finalmente, en cuántica, es posible que debido a las fluctuaciones cuánticas el valor cero de la velocidad carezca de significado debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.
- Además, consideraciones generales, que funden gravedad con la relatividad y la física cuántica, llevan generalmente a pensar que existe una longitud última fundamental denominada longitud de Planck $L_p \sim 10^{-35} m$ y un tiempo mínimo fundamental análogo llamado tiempo de Planck $t_p \sim 10^{-43} s$.
- Las desigualdades $\Delta x \geq L_p$ y $\Delta t \geq t_p$ llevan asociada cierta carga de misterio, pues se piensa que por debajo de esas escalas carece de significado el propio concepto de espacio y de tiempo.

Velocidad(III)

- Por ende, aunque son muy pequeños, cabe preguntarse qué significado tendría el propio "espacio" o "tiempo" por debajo de esas escalas, y si no puede definirse, entender cómo emerge la estructura causal espacio-temporal a dichas escalas o superiores (si acaso) donde los efectos cuánticos del espacio-tiempo se manifiesten.
- Es el borde o frontera de la física cuántica espacio-temporal. Tengamos en cuenta que $L_p^2 = G\hbar/c^3$ y que $t_p = L_p/c = \sqrt{G\hbar/c^5}$.
- Sin embargo, dada la pequeñez de estas cantidades, podemos considerarlas cero para todos los propósitos prácticos en la descripción del movimiento convencial y ordinaria.
- La longitud de Planck solamente es relevante para objetos pesados y muy densos, para los que la longitud $L_Q = \hbar/Mc$ y $L_G = GM/c^2$ son iguales a L_p.

Velocidad(IV)

La velocidad como vector tiene propiedades interesantes:

- Es un vector $\vec{v}$ tangente a $\vec{r}$ en cada punto de la trayectoria.
- La velocidad media solamente es igual a la velocidad instantánea en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme. Eso implica trayectoria recta y velocidad constante en todos los puntos.
- Los tipos de movimiento pueden ser clasificados de acuerdo a la constancia del vector velocidad o no. Si la velocidad instantánea es constante, el movimiento se dice uniforme. Si la velocidad instantánea cambia, el movimiento se dice que es acelerado.

Según la trayectoria, los movimientos pueden ser:

- Rectilíneos. La trayectoria es recta.
- Curvilíneos. La trayectoria es una curva. Movimientos curvilíneos importantes usuales: circular, hiperbólico, parabólico, elíptico, sinusoidal o armónico simple, helicoidal, lemniscático,...

✍**Ejercicio**. Sea $\vec{r} = (5t+2)\vec{i} - t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ metros, determina: a) la velocidad instantánea, b) la velocidad en t=2 segundos, c) la velocidad media en el intervalo d 1 a 2 s, y en el intervalo 0 a 2 segundos, d) la velocidad inicial, e) la aceleración instantánea, f) el módulo de la velocidad para cualquier valor del tiempo.

Sistema intrínseco

La aceleración en un plano se puede escribir generalmente como la suma de dos componentes denominadas tangencial y normal o centrípeta:

$$\vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau}$$

y donde $\vec{n}, \vec{\tau}$ son vectores unitarios ortogonales entre sí, en la dirección tangente y normal a la trayectoria. Para curvas planas, se tien que

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \leftrightarrow a^2 = a_c^2 + a_t^2$$

La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad:

$$a_t = a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

La aceleración normal o centrípeta se define como

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{R}$$

donde v es el módulo de la velocidad y R es el radio de curvatura de la trayectoria.

Ejercicio práctico(II)

1. Analiza el movimiento del objeto cuya gráfica espacio-tiempo viene dada por la figura 2 (arriba).

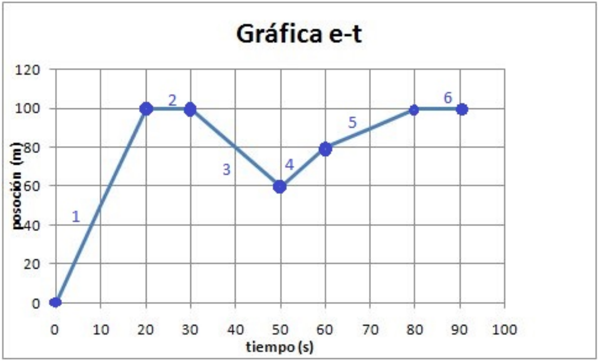


Figura: Espacio vs. tiempo.

Ejercicio práctico(II)bis

1. Para el vector $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, a) describe el movimiento, b) determina la trayectoria, c) halla la velocidad media entre 0 y 10 s, 5 y 10 s y entre 0 y 5 segundos, d) el valor de la velocidad instantánea en t=5s, e) halla la aceleración instantánea.
2. A y B son dos puntos separados 200 km. Un móvil parte desde A con velocidad de 60km/h, y otro desde B con 80km/h. Determina dónde se encuentran si salen simultáneamente, y cuando el coche en A sale cuarto de hora después de que B salga. Considera las velocidades constantes.
3. Sea $\vec{r}(t) = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$, describe su movimiento y halla la velocidad, la aceleración, el jerk, y su absement, para una partícula de masa m. Calcula la fuerza que actúa sobre dicha partícula.

Contenido

Cinemática(I)

La Cinemática es la parte de la Mecánica, ciencia del movimiento, que estudia el movimiento sin atender a la causa que producen dicho movimiento.

Problema: Aprender a plantear ecuaciones de movimiento y/o deducir las magnitudes y significado de las ecuaciones.

Ecuaciones: Es un código o lenguaje a interpretar.

Magnitudes: posición y desplazamiento, velocidad, aceleración, jerk, absement (ausición), celeridad, snap (jounce), crackle, pop,...

Según la aceleración, los movimientos se clasifican en:

- Acelerados si $\vec{a} \neq \vec{0} m/s^2$. Si la aceleración es constante, son movimientos uniformemente acelerados. Si la aceleración no es constante se denominan movimientos variados.
- No acelerados o uniformes si $\vec{a} = \vec{0} m/s^2$.

Cinemática(II)

Según la trayectoria los movimientos pueden ser:

- Rectilíneos.
- Curvilíneos (circulares, sinusoidales o armónicos simples, parabólicos, hiperbólicos, elípticos, lemniscáticos, cardioides, helicoidales,...)

Los movimientos no planos son más complicados en general. Estudiaremos ahora unos cuantos casos de movimientos simples y compuestos. **M.R.U.:** Movimiento Rectilíneo Uniforme. Movimiento de aceleración nula y trayectoria recta o lineal.

Características: $\vec{a} = 0, \quad \vec{v} = constant$. La velocidad media coincide con la velocidad instantánea y se define como

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Las ecuaciones de movimiento del M.R.U. son 3:

Ecuaciones del M.R.U.

$$\vec{a} = \vec{0}\ m/s^2 \tag{426}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n = \frac{d\vec{r}}{dt}\ m/s \tag{427}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t\ m \tag{428}$$

En el plano $2d$, se tiene que $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, y que también, en $3d$, es $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. En ecuaciones paramétricas, para $\vec{r} = (x, y, z, \ldots)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0) \\ y = y_0 + v_y(t - t_0) \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \\ \ldots \end{cases}$$

Cinemática(IV)

Si la velocidad fuera igual a cero, entonces se dice que objeto, cuerpo o sistema está en reposo. Si tuviésemos que estudiar un movimiento uniforme en diversas dimensiones del tiempo, caso multitemporal, si $D = d_s + d_t$ es el número de dimensiones totales del espacio y del tiempo, con d_s las dimensiones de género espacio y d_t las dimensiones de género tiempo, con

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{D} v^i \vec{e}_i = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \cdots + v^D \vec{e}_D = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

entonces habría que definir una ecuación de tipo tensorial/multivectorial de clase

$$[r] = [V]\,[\Delta t] \leftrightarrow \overrightarrow{r} = \overrightarrow{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{\Delta t}$$

donde

$$\overrightarrow{\overrightarrow{v}} = v^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{dX^{\alpha}}{dt^{\beta}}$$

y que mediría las diferentes velocidades a lo largo de los vectores del tiempo $\overrightarrow{t} = t^{\beta} u_{\beta}$.

Cinemática(V)

La última generalización de la definición de velocidad consiste en cambiar el operator diferenciación traslacional por una derivada fraccional o integrodiferencial...O cambiar la derivada y su definición por un cálculo q-deformado o de incrementos finitos. En el caso de la diferenciación fraccional, tenemos:

$$ {}^{\gamma}\mathcal{V}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{d^{\gamma}X^{\alpha}}{dt^{\beta}} $$

M.R.U.A.: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.
Características: $\vec{a} = constant = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ m/s^2$.

Ecuaciones del M.R.U.A.

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{constante} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k} \neq 0\ m/s^2 \quad (429)$$

$$\overrightarrow{v} = v^1\overrightarrow{e}_1 + v^2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + v^n\overrightarrow{e}_n = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}\Delta t\ m/s \quad (430)$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\Delta t^2\ m \quad (431)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\overrightarrow{a}\overrightarrow{\Delta r} \quad (432)$$

La última ecuación del cuadro anterior se obtiene despejando el tiempo de la segunda, y sustituyendo en la primera ecuación. Otra observación útil recibe el nombre de *Teorema de Merton* sobre la velocidad media del M.R.U.A.: "Si $v(t)t = Vt$, cuando la velocidad cambia de modo uniforme (con aceleración constante), desde v_0 hasta v_f, entonces el espacio recorrido es el mismo que recorrería de forma uniforme con la velocidad promedio o media v_m". Este teorema solamente es válido en el M.R.U.A., y falla en los movimientos variados (cuando $\vec{a}$ no es constante). Demostración gráfica en la figura 3 siguiente.

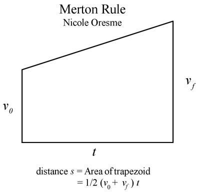


Figura: Teorema de Merton (Oresme) sobre la velocidad media en el MRUA.

MRUA(III)

El teorema de Merton permite obtener las ecuaciones del MRUA desde un MRU de la forma siguiente

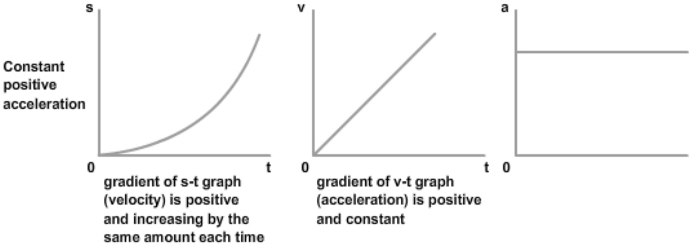
$$\begin{cases} \Delta x = v_m \Delta t \rightarrow \Delta x = \dfrac{v + v_0}{2} \Delta t \\ \\ v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta x = \left(\dfrac{v_0 + a\Delta t + v_0}{2} \right) \Delta t \rightarrow \Delta x = v_0 \Delta t + \dfrac{1}{2} a \Delta t^2 \end{cases}$$

Si la aceleración no fuera constante, las ecuaciones de movimiento de la velocidad y la posición deben obtenerse usando el cálculo infinitesimal de Leibniz y Newton (fluxiones). Así, se tendría que

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}\, dt$$

MRUA(IV)


Constant
positive
acceleration
s
0
t
gradient of s-t graph
(velocity) is positive
and increasing by the
same amount each time
v
0
t
gradient of v-t graph
(acceleration) is positive
and constant
a
0

MRUA(IV)bis

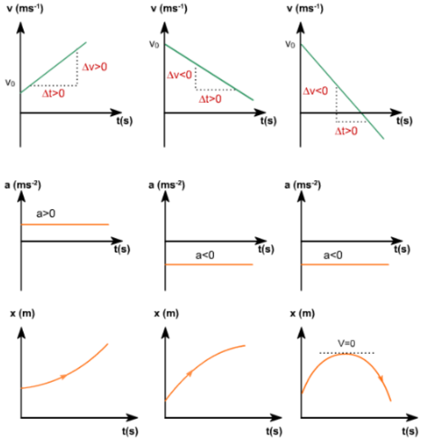


Figura: Versión más general de las gráficas posibles del MRUA.

Observación: sabiendo las ecuaciones del MRUA, se obtienen las del MRU si ponemos $a = 0$ y $v_0 = v = constante$.
Tipos simple de MRUA: caída libre y el lanzamiento vertical.
Caída libre: En el campo gravitacional terrestre, supuesto $a = -g = -9,8m/s^2$, que es una aproximación de baja altura al caso más general posible de una teoría de campos, se puede resolver el problema del tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo desde una altura $H = h_0 = y_0$ arbitraria, dejándose caer (con velocidad inicial cero, $v_0 = 0$). Ecuaciones (Sistema de referencia en el suelo): $a = -g \ m/s^2$.

$$v = v_0 - gt = -gt, \quad h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiempo en llegar al suelo t_s (en $h = 0$, $t = t_s$): $\boxed{t_s = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$ La velocidad cuando llega al suelo es $\boxed{v_s = -gt_s = -\sqrt{2h_0 g}}$

Lanzamiento vertical:
La velocidad cuando llega al suelo es

$$\boxed{v_s = -g t_s = -\sqrt{2h_0 g}}$$

Notad que si hubiera inicialmente una velocidad inicial hacia abajo, hay que cambiar un par de ecuaciones y resolver:

$$a = -g, \quad v = -v_0 - gt, \quad y = H_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

mediante

$$-\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + H_0 = 0$$

Si lanzamos un objeto desde el suelo ($h_0 = 0$) con velocidad inicial v_0, podemos calcular su altura máxima h_{max}, el tiempo en alcanzar dicha altura máxima t_m, y el tiempo que tarda en volver al suelo $t_s = 2t_m$ (que será el doble por simetría de t_m y despreciando el efecto de rozamientos y otros detalles).

MRUA(VII)

En la altura máxima h_m, la velocidad es nula, por lo que tardará

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

Sustituyendo y operando en la ecuación de la altura proporciona la altura máxima

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

El tiempo que tarda en volver al suelo es

$$t_s = 2t_m = \frac{2v_0}{g}$$

Este tiempo puede obtenerse o bien de la ecuación del tiempo o del análisis por simetría del problema. Esto proporciona una velocidad al llegar al suelo igual y de sentido opuesto que la inicial

$$v_s = -v_0$$

MRUA(VIII)

El espacio recorrido es por tanto $s = 2h_m$. Si la altura inicial es h_0, se rompe la simetría y debemos calcular para el tiempo de llegada al suelo:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 = 0$$

cuyas soluciones son

$$t_\pm = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{-g} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$$

Para la altura máxima con altura inicial no nula, se sigue teniendo que

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

Pero ahora, por la nueva ecuación, se tiene que

$$h_m = h(t_m) = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Problema tipo: un nadador en un río, o un móvil con velocidad en dos direcciones (sentidos).
Características: Tomamor de referencia el punto de salida del nadador o móvil del río. La velocidad del río la podemos elegir perpendicular al nadador pero éste puede empezar con la velocidad en cualquier dirección arbitraria, pero son en cualquier caso velocidades constantes en todo momento (2 MRU).

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{v}_{corriente} + \overrightarrow{v}_n = v_c\vec{i} + v_n\vec{j}$$

Composición de 2 MRU(II)

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_c \quad m/s \\ x = v_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = 0 \quad m/s^2 \\ v_y = const. = v_n \quad m/s \\ x = v_n t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores:} \\ \vec{a} = \overrightarrow{0} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = \overrightarrow{v}_c + \overrightarrow{v}_n = v_c \vec{i} + v_n \vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = v_c t \vec{i} + v_n t \vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

Composición de 2MRU(II)

Si el ancho del río es D, entonces el tiempo en cruzar será:

$$t_{cruzar} = \frac{D}{v_n}$$

Y tras este tiempo, en $y = D$, el punto donde llega en el eje X será

$$x = \frac{v_c D}{v_n}$$

luego

$$\vec{r}(t_c) = \frac{v_c D}{v_n}\vec{i} + D\vec{j} \quad m$$

Tiro parabólico horizontal(I)

La composición de un MRU y un MRUA da un movimiento parabólico. Imaginad un avión en vuelo a una determinada altura y una velocidad constante, que deja caer una carga. En este primer caso, denominado tiro horizontal, tenemos las siguientes características:

1. MRU en el eje X, con velocidad constante $v_x = v_{ox}$.
2. MRUA en el eje Y, con aceleración constante $a_y = -g$, $\vec{a}_y = -g\vec{j} m/s^2$. No hay velocidad inicial en el eje Y, y se deja caer el cuerpo.
3. La altura inicial es $h_0 = H$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} \text{Eje X}: \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = V \quad m/s \\ x = v_x t = Vt \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Eje Y}: \\ a_y = -g, \quad g = 9{,}8 m/s^2 (Earth) \\ v_y = -gt \quad m/s \\ y = H - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Tiro parabólico horizontal(II)

$$\begin{cases} \text{Vectores :} \\ \vec{a} = -g\vec{j} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = v_x\vec{i} - gt\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = Vt\vec{i} + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

El alcance máximo se logra cuando llega al suelo $Y = 0m$. Resolviendo la ecuación $0 = H - gt^2/2$, se obtiene que:

$$\boxed{t(X_m) = \sqrt{\frac{2H}{g}}}, \quad \boxed{X_m = V\sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

Tiro parabólico horizontal(III)

La velocidad justo en el instante de llegada al suelo del objeto lanzado es

$$\overrightarrow{V}_s = V\vec{i} - gt(X_m)\vec{j} = v_x\vec{i} - \sqrt{2gH}\vec{j} \quad m/s$$

cuyo módulo es

$$v = \sqrt{v_x^2 + 2gH}$$

y forma un ángulo de entrada en el suelo de

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sqrt{2gH}}{V} \to \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2gH}}{V}\right)}$$

Tiro parabólico oblícuo(I)

Es una composición de movimientos de MRU y MRUA. A diferencia del caso anterior, se lanza un proyectil desde una altura y_0, que podemos tomar como nula por simplicidad, una velocidad en módulo v_0 pero con una inclinación horizontal de valor φ respecto de la horizontal, y ascendente. Entonces, las características de este lanzamiento son:

1. Aceleración $a_y = -g \quad m/s^2$, en el eje Y.
2. Velocidad inicial constante con valor v_0 de módulo e inclinación φ respecto la horizontal (positiva).
3. Altura inicial h_0, que podemos tomar nula por simplicidad en un análisis desde el punto de lanzamiento (suelo).

$$\begin{cases} \text{Eje X}: \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_x \cos\varphi \quad m/s \\ x = v_x t = v_0 t \cos\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{Eje Y}: \\ a_y = -g, \quad g = 9{,}8 m/s^2 (Earth) \\ v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin\varphi - gt \quad m/s \\ y = h_0 + v_0 \sin\varphi t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Tiro parabólico oblícuo(II)

Es una composición de movimientos de MRU y MRUA. A diferencia del caso anterior, se lanza un proyectil desde una altura y_0, que podemos tomar como nula por simplicidad, una velocidad en módulo v_0 pero con una inclinación horizontal de valor φ respecto de la horizontal, y ascendente. Entonces, las caracterísctica de este lanzamiento son:

1. Aceleración $a_y = -g \quad m/s^2$, en el eje Y.
2. Velocidad inicial constante con valor v_0 de módulo e inclinación φ respecto la horizontal (positiva).
3. Altura inicial h_0, que podemos tomar nula por simplicidad en un análisis desde el punto de lanzamiento (suelo).

$$\begin{cases} \text{Eje X}: \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_x \cos\varphi \quad m/s \\ x = v_x t = v_0 t \cos\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{Eje Y}: \\ a_y = -g, \quad g = 9{,}8 m/s^2 (Earth) \\ v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin\varphi - gt \quad m/s \\ y = h_0 + v_0 \sin\varphi t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Tiro parabólico oblícuo(II)

$$\begin{cases} \text{Vectores}: \\ \vec{a} = -g\vec{j} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_0 \cos\varphi\vec{i} + (v_0 \sin\varphi - gt)\,\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = v_0 t \cos\varphi\vec{i} + \left(y_0 + v_0 t \sin\varphi - \dfrac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

Podemos calcular la altura máxima, si h_m $(v_y = 0)$:

$$v_y = 0 \to t(h_m) = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

Si la altura inicial es cero, el tiempo del alcance máximo X_m es el doble de éste (y solamente si la altura inicial es cero):

$$t(X_m, y_0 = 0) = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = 2t(Y_m)$$

Tiro parabólico oblícuo(III)

Si la altura inicial no es cero, el tiempo del alcance máximo se calcula con

$$\left(y_0 + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2\right) = 0, \text{es decir}, \quad \frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\varphi t - y_0 = 0$$

$$\boxed{t(X_m, y_0) = \frac{v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}}$$

El alcance máximo y la altura máxima para $y_0 = 0$ resultan ser:

$$\boxed{X_m = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}}, \boxed{Y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}}$$

de donde se obtiene que el alcance máximo para v_0 fija se da para $\varphi = 45^\circ = \pi/4\ rad$, y si $h_0 = 0$:

$$\vec{V}_s = v_x(t(X_m))\vec{i} + v_y(t(X_m))\vec{j} = v_0 \cos\varphi \vec{i} - v_0 \sin\varphi \vec{j} \quad m/s$$

Tiro parabólico oblícuo(IV)

El ángulo de entrada en el suelo es igual y de sentido opuesto al de salida

$$\tan\theta_s = \tan\frac{v_y}{v_x} = \tan(-\varphi) = \tan(-\varphi) \to \theta_s = -\varphi$$

Si la altura inicial no es cero, el alcance y altura máximos son iguales a

$$X_m(y_0) = v_0\cos\varphi t_\pm = \frac{v_0^2\cos\varphi\sin\varphi \pm v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}$$

$$Y_m(y_0) = y_0 + \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g}$$

La ecuación de la trayectoria de este movimiento es:

$$y = y_0 + x\tan\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}$$

Tiro parabólico oblícuo(V)

El ángulo de entrada en el suelo es igual y de sentido opuesto al de salida

$$\tan\theta_s = \tan\frac{v_y}{v_x} = \tan(-\varphi) = \tan(-\varphi) \rightarrow \theta_s = -\varphi$$

Si la altura inicial no es cero, el alcance y altura máximos son iguales a

$$X_m(y_0) = v_0\cos\varphi t_{\pm} = \frac{v_0^2\cos\varphi\sin\varphi \pm v_0\cos\varphi\sqrt{v_0^2\sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}$$

$$Y_m(y_0) = y_0 + \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g}$$

La ecuación de la trayectoria de este movimiento es:

$$y = y_0 + x\tan\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}$$

Composición de 2-3MRUA

Si tenemos dos MRU en dimensión $d = 2$ (plano), en el espacio $d = 3$, o más generalmente en D dimensiones, el problema es descriptible de forma sencilla en forma vectorial (más laboriosa en forma paramétrica según el número de dimensiones por tener que escribir más)

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad m/s^2$$

Integrando la aceleración y la velocidad se tienen las velocidades y posición instantáneas:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}dt = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \int \vec{v}_0 dt + \iint \vec{a}dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2$$

o equivalentemente

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_m\Delta t = \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2}\right)\Delta t$$

En paramétricas:

$$\text{Aceleración}\begin{cases} a_x = constant. \\ a_y = constant'. \\ a_z = constant''. \end{cases}, \quad \text{Velocidad}\begin{cases} v_x = v_{ox} + a_x \Delta t \\ v_y = v_{oy} + a_y \Delta t \\ v_z = v_{oz} + a_z \Delta t \end{cases}$$

$$\text{Posición}\begin{cases} x = x_0 + v_{ox}\Delta t + \dfrac{1}{2} a_x \Delta t^2 \\ y = y_0 + v_{oy}\Delta + \dfrac{1}{2} a_y \Delta t^2 \\ z = z_0 + v_{oz}\Delta t + \dfrac{1}{2} a_z \Delta t^2 \end{cases}$$

El módulo de la velocidad, posición y aceleración se calculan como habitualmente:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

MCU

Se trata de un movimiento plano, con unas características especiales. Hay que definir unas nuevas magnitudes angulares análogas a las lineales.

Velocidad angular media e instantánea

Se definen la velocidad angular media e instantánea como el cambio del ángulo en un intervalo de tiempo, y el ritmo de cambio instantáneo del desplazamiento angular respecto del tiempo. Matemática y respectivamente son:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad rad/s \tag{433}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad rad/s \tag{434}$$

MCU(II)

Generalmente, se usan los grados sexagesimales o los radianes en Física para magnitudes angulares. En casos excepcionales, se definen también los grados centesimales o gradianes(gones). La equivalencia entre estas escalas es la siguiente:

$$\boxed{2\pi \quad rad = 360^{\circ} = 400^{g}}$$

Aceleración angular media e instantánea

Se definen la aceleración angular media e instantánea como el cambio de la velocidad angular en un intervalo de tiempo, y el ritmo de cambio instantáneo de la velocidad angular respecto del tiempo. Matemática y respectivamente son:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad rad/s^2 \qquad (435)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad rad/s^2 \qquad (436)$$

MCU(III)

Habitualmente se usan las unidades de las revoluciones por minuto (r.p.m.) o también los ciclos (vueltas) por segundo (c.p.s.) para la velocidad angular:

$$1 r.p.m. = \frac{2\pi\ rad}{60 s}$$

$$1 c.p.s. = \frac{2\pi\ rad}{s}$$

Los ángulos son adimensionales en general, mientras que las dimensiones de ω, α son T^{-1}, T^{-2}, respectivamente. Las relaciones entre magnitudes angulares y lineales son como sigue. Si para una circunferencia $s = \theta R$, infinitesimalmente $ds = R d\theta$ y a nivel incremental:

$$\Delta s = \Delta\theta R \leftrightarrow \text{Arco} = (\text{Radio})(\text{Ángulo})$$

$$\boxed{v = \omega R}$$

MCU(IV)

A nivel diferencial en la circunferencia, $dv = d\omega R$, luego a nivel incremental

$$\Delta v = \Delta\omega R$$

de donde dividiendo por ΔT:

$$\boxed{a = a_t = \alpha R}$$

En un MCU no hay aceleración tangencial pero sí una aceleración ligada al hecho de la variación de la dirección de la velocidad lineal: la aceleración centrípeta $a_c = v^2/R = \omega^2 R$. Las ecuaciones del MCU serán pues:

- Aceleraciones: $a_t = 0m/s^2$, $\alpha = 0rad/s^2$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.
- $\omega = constant$.
- $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t \leftrightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t$.

En el plano, se puede escribir la ecuación del MCU en forma vectorial como sigue:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m$$

La velocidad lineal y la aceleración resultan ser:

$$\vec{v} = -R\omega\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\omega\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} - R\omega^2\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s^2 = -\omega^2\vec{r}$$

En el MCU también se definen los siguientes conceptos:

1. **Período** T: Tiempo que tarda en dar una vuelta completa u oscilación. $\boxed{T = 2\pi/\omega = 1/f}$.
2. **Frecuencia** f: Número de vueltas dadas en cada segundo.$\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$. Las unidades de la frecuencia (no confundir con frecuencia angular ω) son los s^{-1} o hertzios (Hz).
3. **Número de vueltas** N general. $N = \Delta\varphi/2\pi$.
4. **Número de onda** (variable de movimiento armónico simple, proyección sobre una línea del MCU): $k = 2\pi/\lambda$ (unidades m^{-1}). La longitud de onda λ es el **período espacial** de un MCU que sea periódico en el espacio y no solamente en el tiempo como el MCU (movimiento ondulatorio sinusoidal o armónico). También se define $\overline{k} = \overline{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$, como el recíproco de la longitud de onda, o el número de vueltas u oscilaciones por metro (no angulares).

MCUA(I)

Características: trayectoria circular, $\alpha = constant.rad/s^2$, y aceleraciones tangencial y centrípeta no nulas, con valores dados por las relaciones usuales $a_t = \alpha R = constant \neq 0$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.

Ecuaciones del MCUA

$$\alpha = constant \quad rad/s^2, \quad \text{y si} \quad \Delta t = (t - t_0) \;\; s \tag{437}$$

$$\Delta\omega = \alpha\Delta t \;\; rad/s \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t \;\; rad/s \tag{438}$$

$$\Delta\theta = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \tag{439}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \tag{440}$$

MCUA(II)

Para el MCUA, las componentes intrínsecas y la aceleración total resultan ser igual a

Aceleraciones del MCUA

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \leftrightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \tag{441}$$

$$a_c = \omega^2 R \quad \text{no constante} \tag{442}$$

$$a_t = \alpha R \quad \text{constante} \tag{443}$$

$$\alpha = constante \quad rad/s^2 \tag{444}$$

$$a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha R)^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{445}$$

En cualquier movimiento plano, podemos escribir el vector de posición como sigue:

$$\boxed{\vec{r} = r\vec{u}_r = |\vec{r}|\vec{u}_r} \tag{446}$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario radial. Si el movimiento sigue una curva, en coordenadas polares (r, θ) podemos escribir el vector anterior de otra forma

$$\boxed{\vec{r}(r,\theta) = r\vec{u}_r = r\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) = r\cos\theta\vec{i} + r\cos\theta\vec{j}} \tag{447}$$

y de aquí se tiene que $\vec{r}$ es una función de dos variables (r, θ), y que el vector unitario es

$$\boxed{\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} = \vec{u}_r(\theta)} \tag{448}$$

De este vector, derivando respecto del ángulo, se obtiene el vector tangente $\vec{u}_\theta$ por diferenciación respecto del ángulo:

$$\boxed{\vec{u}_\theta = \vec{u}_t = \vec{u}_\tau = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} = \vec{u}_\theta(\theta)} \tag{449}$$

Por necesidad del cálculo posterior, podemos calcular también la derivada segunda de $\vec{u}_r$ respecto del ángulo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}_r}{\partial \theta^2} = \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j} = -\vec{u}_r(\theta)} \tag{450}$$

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ en 2d y más allá(III)

A partir del vector $\vec{r} = r\vec{u}_r$, por derivación respecto de la componente temporal, deducimos que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \tag{451}$$

Usando los resultados anteriores, tendremos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \tag{452}$$

es decir

$$\boxed{\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta} \tag{453}$$

que es lógico y natural.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ en 2d y más allá(IV)

- Un movimiento 2d tendrá componente radial y tangencial de la velocidad.
- Podemos identificar en la fórmula anterior la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$, y la velocidad tangencial $v_\theta = \omega r$, como sabemos de cursos elementales.
- Derivando de nuevo esta expresión, nos permitirá deducir la expresión de la aceleración 2d y sus componentes.
- También calcularemos como curiosidad final el jerk o sobreaceleración.

Derivando de nuevo respecto del tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) \tag{454}$$

se obtiene que

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \tag{455}$$

o bien

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{456}$$

esto es

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2}\vec{u}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}(-\vec{u}_r) \tag{457}$$

o también

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta \tag{458}$$

Equivalentemente

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta \tag{459}$$

1. Esta expresión es la generalización 2d de la relación habitual $\vec{a} = a_n\vec{u}_n + a_\tau\vec{u}_\tau = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ para el MCU y MCUA, ya que incluye estos casos como límites $r = constante$.
2. Observamos que en el caso más general de un movimiento plano, la componente radial (o normal) es la diferencia de la aceleración radial hacia el exterior y la aceleración centrípeta o normal $a_c = -r\omega^2$, donde el signo significa que la aceleración normal va dirigida hacia el centro u origen del vector de posición (o del círculo osculador en el caso curvo general).

La componente tangencial tiene un término adicional en el caso de que el movimiento tenga un r no constante, además del término de aceleración tangencial usual $a_t = \alpha r$. El término adicional se llama aceleración de Coriolis, y vale como vemos $a_{Cor} = 2(dr/dt)(d\theta/dt) = 2\dot{r}\dot{\theta}$. Este término es nulo para el MCU y MCUA, pero no para movimientos arbitrarios generales. La última ecuación puede escribirse en términos vectoriales abstractos de la siguiente manera

$$\boxed{\vec{a}(total) = \vec{a}_r - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{r} - \vec{\alpha}\times\vec{r}} \tag{460}$$

cuyas componentes se denominan aceleración inercial, aceleración centrípeta, aceleración de Coriolis y aceleración de Euler o tangencial.

La derivada angular tercera del vector radial reza

$$\frac{\partial^3 \vec{u}_r}{\partial \theta^3} = -\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \sin\theta \vec{i} - \cos\theta \vec{j} = -\vec{u}_\theta \qquad (461)$$

Se puede demostrar, por diferenciación directa, que el jerk del movimiento plano resulta ser igual a la expresión siguiente:

$$\boxed{\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = j_r \vec{u}_r + j_\theta \vec{u}_\theta} \qquad (462)$$

donde

$$\boxed{j_r = \frac{d^3 r}{dt^3} - 3\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 3r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \dddot{r} - 3\dot{r}\dot{\theta}^2 - 3r\dot{\theta}\ddot{\theta}} \qquad (463)$$

y

$$\boxed{j_\theta = 3\frac{d^2r}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} + 3\frac{dr}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d^3\theta}{dt^3} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 = 3\ddot{r}\dot{\theta} + 3\dot{r}\ddot{\theta} + r\dddot{\theta} - r\dot{\theta}^3} \tag{464}$$

que es la ecuación del jerk en coordenadas radial-tangencial.

En la geometría diferencial de curvas y superficies se definen en general los vectores unitarios tangente, normal (para curvas) y tangente, normal y binormal (para superficies). En el caso de curvas, se tienen las relaciones elementales

$$\vec{v} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{v}|\vec{u}_t = v\vec{e}_t \tag{465}$$

donde $\vec{u}_t = \vec{e}_t = \vec{\tau}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria de $\vec{r}(t)$.

Al derivar en función de s, el parámetro de arco o curva, con $v = \dot{s} = |\vec{v}|$, se define un referencial o sistema intrínseco plano con los vectores unitarios tangente y normal $\vec{e}_t, \vec{e}_n$. La curvatura se define como:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3} \tag{466}$$

Aquí, $\vec{e}_n = \vec{n} = \vec{u}_n$ es un vector unitario normal(ortogonal) al círculo osculador o la curva en un punto. La torsión se define como la cantidad:

$$T = \frac{1}{R_T} = \frac{\det\left(\vec{v}, \vec{a}, \dot{\vec{a}}\right)}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} \tag{467}$$

Se prueba de forma sencilla, dado que $\vec{\tau}=\vec{\tau}(\theta(s(t)))$, $ds=Rd\theta$,$\dot{\vec{\tau}}=\vec{n}$, $v=ds/dt$, que:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n} \tag{468}$$

De esta ecuación, derivando una vez más, usando que $\dot{\vec{n}}=-\frac{v}{R}\vec{\tau}$, $\dot{\vec{\tau}}=\frac{v}{R}\vec{n}$ se puede demostrar la ecuación del jerk siguiente:

$$\vec{j}=\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n}\right) \tag{469}$$

que operando queda

$$\vec{j}(t)=\left(\ddot{v}-\frac{v^3}{R}\right)\vec{\tau}+\frac{v}{R}\left(3\dot{v}-\frac{v\dot{R}}{R}\right)\vec{n} \tag{470}$$

O bien, compactamente,

$$\boxed{\vec{j}(t) = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{R}\right)\vec{\tau} + \frac{1}{v}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{R}\right)\right]\vec{n} = j_\tau\vec{\tau} + j_n\vec{n}} \tag{471}$$

que es la expresión del jerk en coordenadas tangencial-normal.

♡ Para una curva C se puede definir un triedro intrínseco llamado triedro o referencial de Frenet-Serret con los vectores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, donde $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

♡ Aquí es importante señalar que como sabemos $s(t)$, podemos calcular $t(s)$, y entonces calcular $\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$.

♡ Como sabemos que $\dot{\tau} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$, entonces:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \tag{472}$$

Para el vector normal, se define

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right|} \tag{473}$$

Definido el vector binormal $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, pueden calcularse también las cantidades:

$$\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \frac{d\vec{n}}{ds}, \frac{d\vec{b}}{ds}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} \end{pmatrix} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \tag{474}$$

♡ Se puede demostrar que las definiciones de los vectores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ implican las ecuaciones siguientes, denominadas ecuaciones de Frenet-Serret:

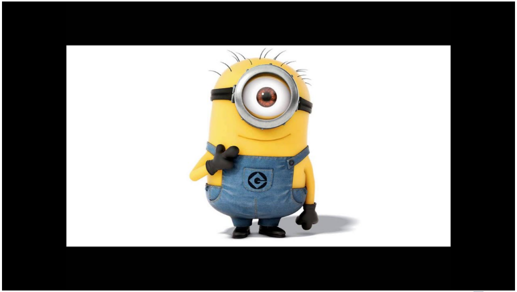
$$\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{\tau} + T\vec{b} \\ \dot{\vec{b}} = -T\vec{n} \end{cases} \tag{475}$$

♡ La versión multidimensional de estas ecuaciones se escribe a continuación en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = |\vec{r}'(s)| \cdot \begin{pmatrix} 0 & \chi_1(s) & & 0 \\ -\chi_1(s) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \chi_{n-1}(s) \\ 0 & & -\chi_{n-1}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{476}$$

Cálculo y geometría diferencial de curvas y superficies(VII)

- Tanto para curvas como para superficies, es posible tener curvatura no nula, y torsión nula.
- Lo contrario no es posible: una torsión no nula implica necesariamente una curvatura no nula.
- La existencia de torsión implica que la curva no es plana y tiene otra dimensión.
- La torsión (curvaturas de alto orden) implica generalmente hiperdimensionalidad.



La curvatura K y el radio de curvatura R de una curva parametrizada por un elemento de arco ds mediante $\vec{r}(s)$ se calcula con la expresión:

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$$

También puede calcularse si parametrizamos con el tiempo mediante el tiempo $\vec{r}(t)$ con la fórmula equivalente:

Curvatura y radio de curvatura para $\vec{r}(t)$

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{v}\right|^3} = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}$$

Recuerda: Cálculo de la torsión en 3d(2d)

La torsión T y el radio de torsión τ de una curva parametrizada por un elemento de arco ds mediante $\vec{r}(s)$ se calcula con la expresión:

$$T = \frac{1}{\tau} = R^2 \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right| = R^2 \det(\vec{r'}(s), \vec{r''}(s), \vec{r'''}(s))$$

También puede calcularse si parametrizamos con el tiempo mediante el tiempo $\vec{r}(t)$ con la fórmula equivalente:

Torsión y radio de torsión para $\vec{r}(t)$

$$T = \frac{1}{\tau} = \frac{\det(\vec{v}, \vec{a}, \vec{j})}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|^2} = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right|}{\left|\vec{v} \times \vec{a}\right|^2}$$

Doctor Strange in the Multiverse of Madness!

Licenciamiento

Licencia copy-left. La única condición es que se indique su origen para poder usarse. Documento escrito por

Doctor Who?

$$\varrho\Delta\Xi\Theta\Sigma\text{ШЖЮ}$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\blacklozenge\blacklozenge\rangle\right) \quad \oint_{\partial\Sigma}\Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$

Doctor Who?