Teaching Physics with Physmatics
Enseñando Física con Fismática

J. F. G. H.[1]

[1]Space-time Foundation, Eccentric Multiverse of Madness
Quantum TimeLord Virtual Academy

2022, July 11th
XXXVIII Biennial of Physics of the Spanish Royal Physics Society (R.S.E.F.) (Murcia, 11-15 July 2022)
XXXVIII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física (Murcia, del 11 al 15 de julio de 2022), Earth planet Milky Way Galaxy, Laniakea, Known Universe (The Multiverse)

Contenido

1. What is Physmatics? ¿Qué es la Fismática?
2. Teaching with Physmatics/Enseñando con Fismática
   - Matemáticas (Mathematics)
   - Gravedad y campos (Gravity and fields)
   - Ondas y MAS (Waves and SHM)
   - Cosmología y Cosmografía (Cosmology and Cosmography)
3. Bibliografía

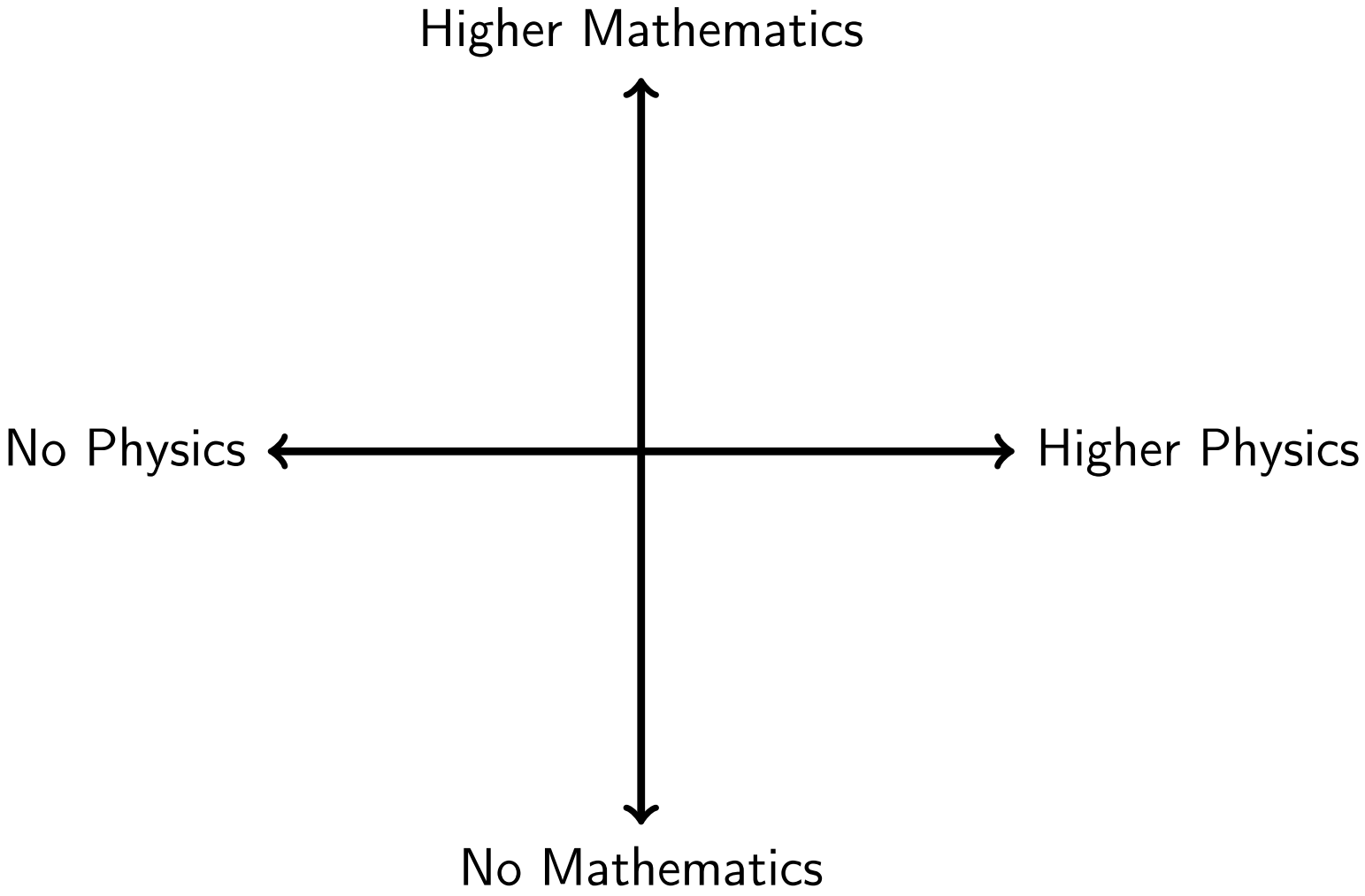
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .

No Physics $\longleftrightarrow$ Higher Physics

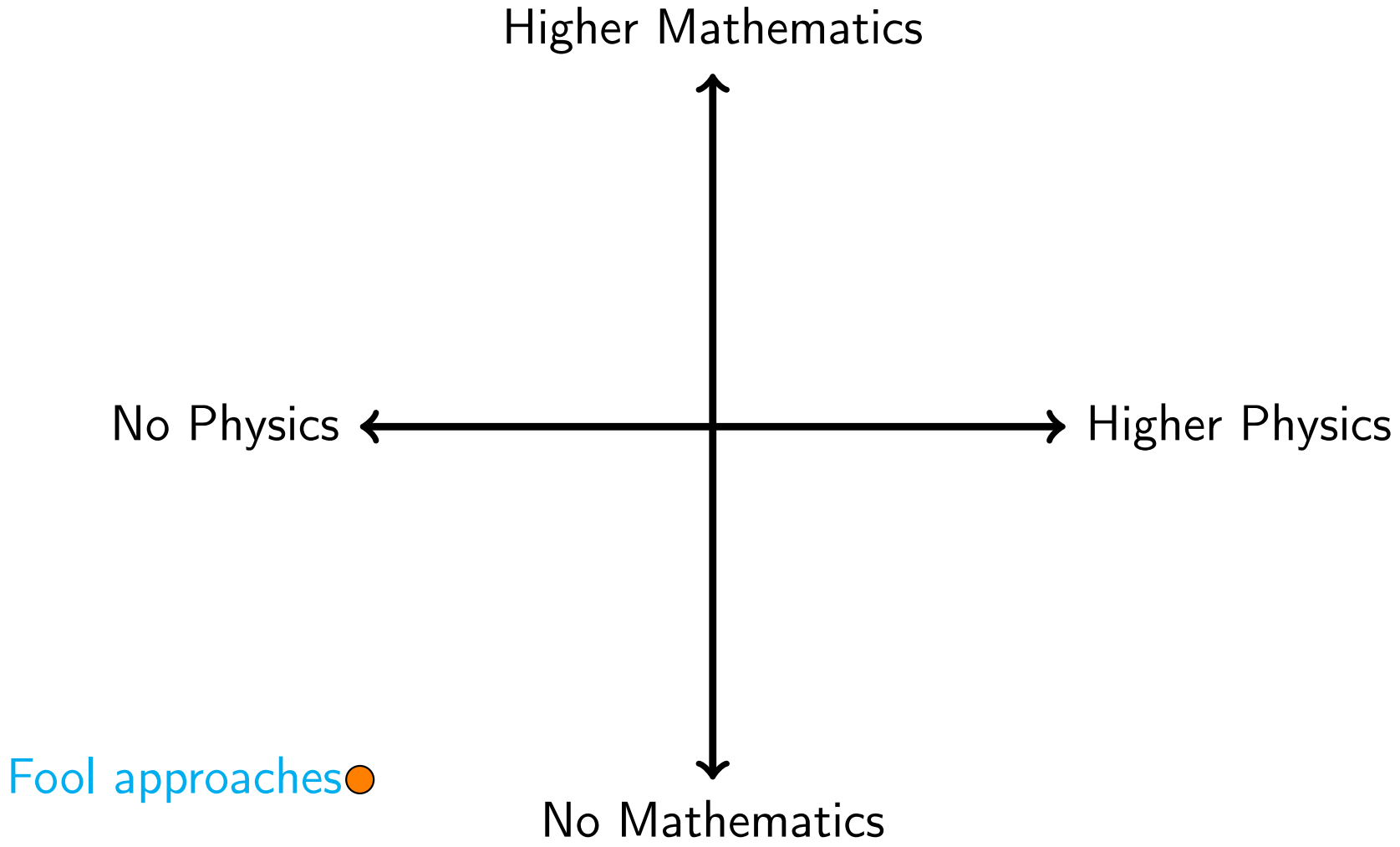
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



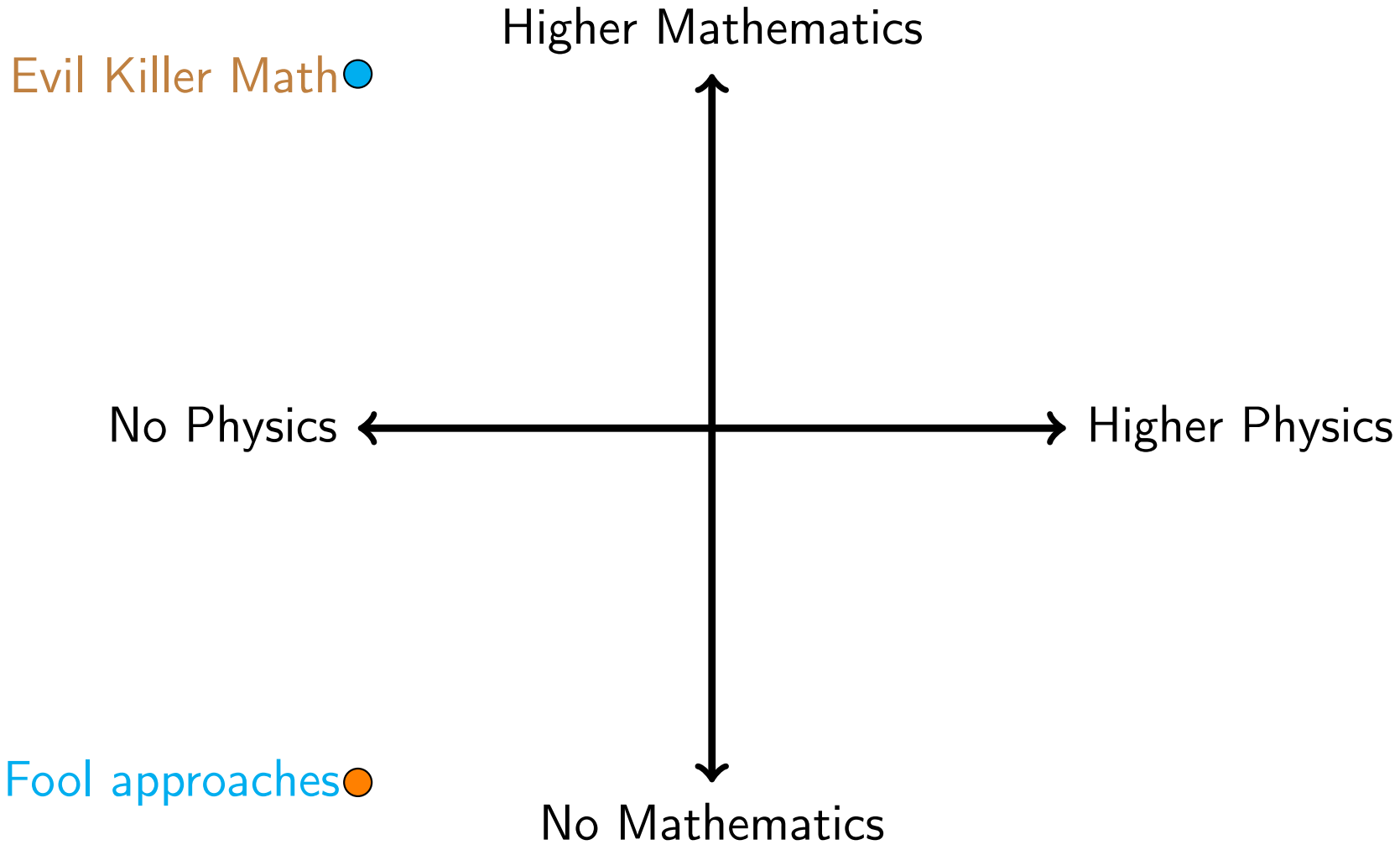
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



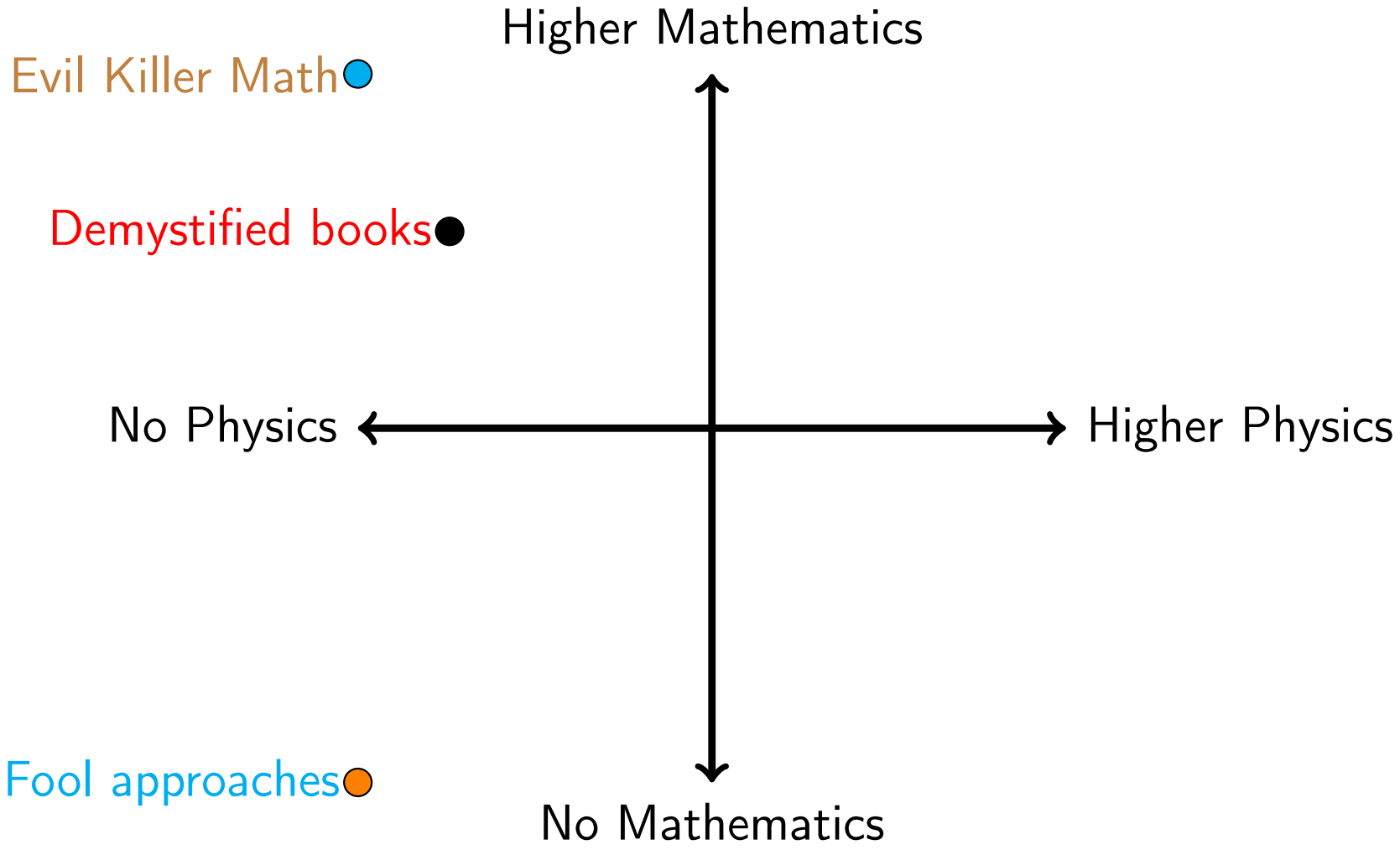
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



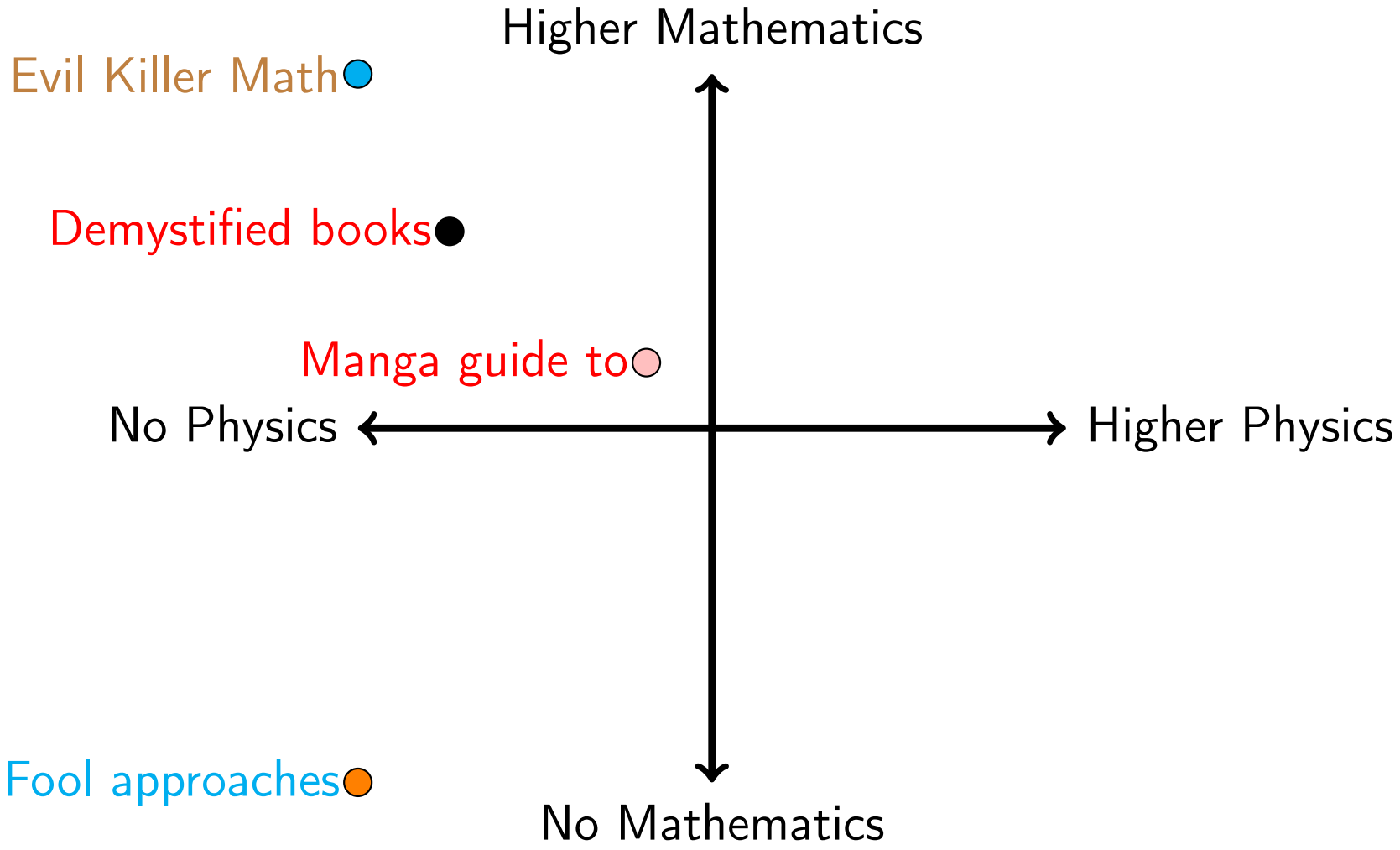
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



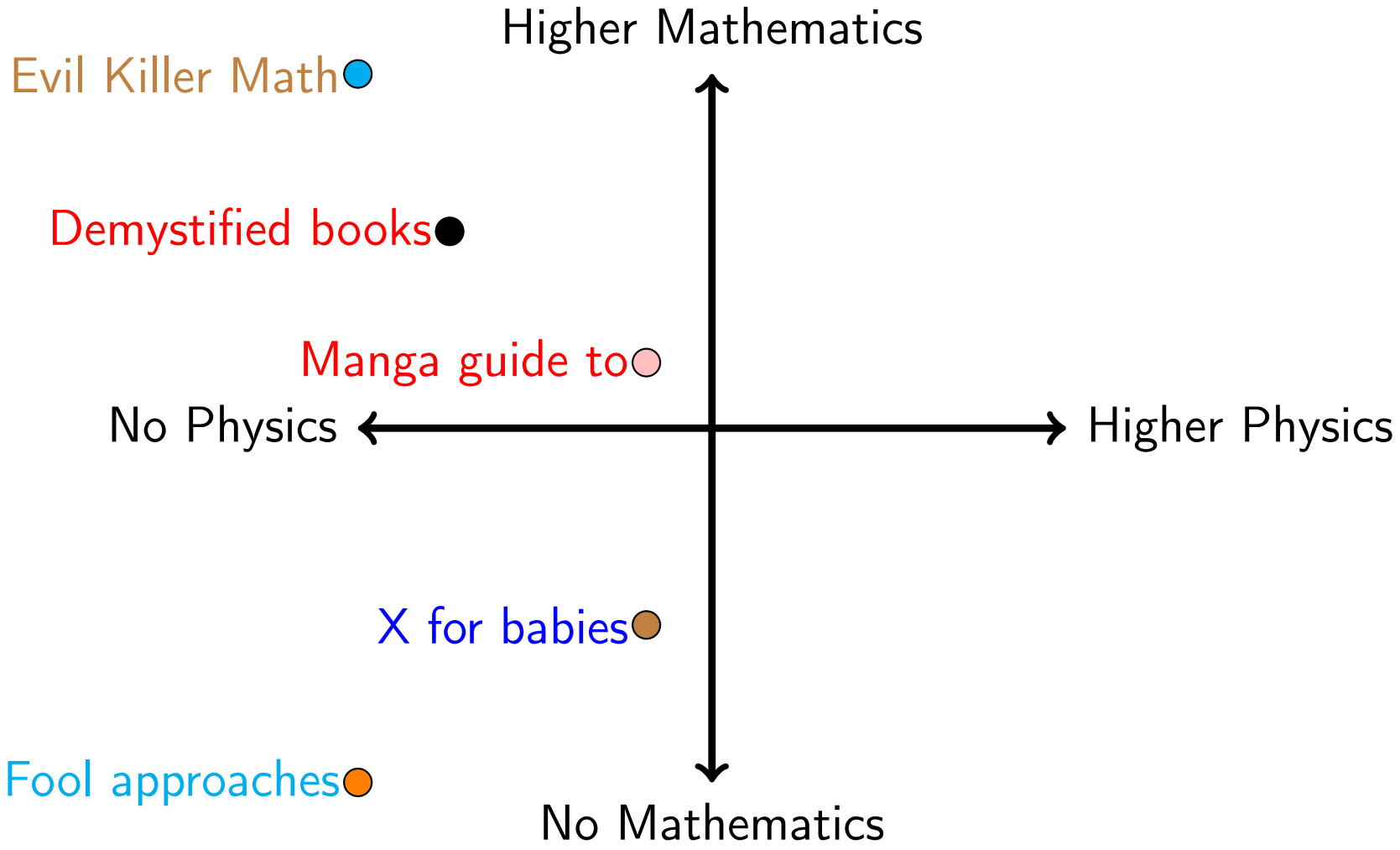
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



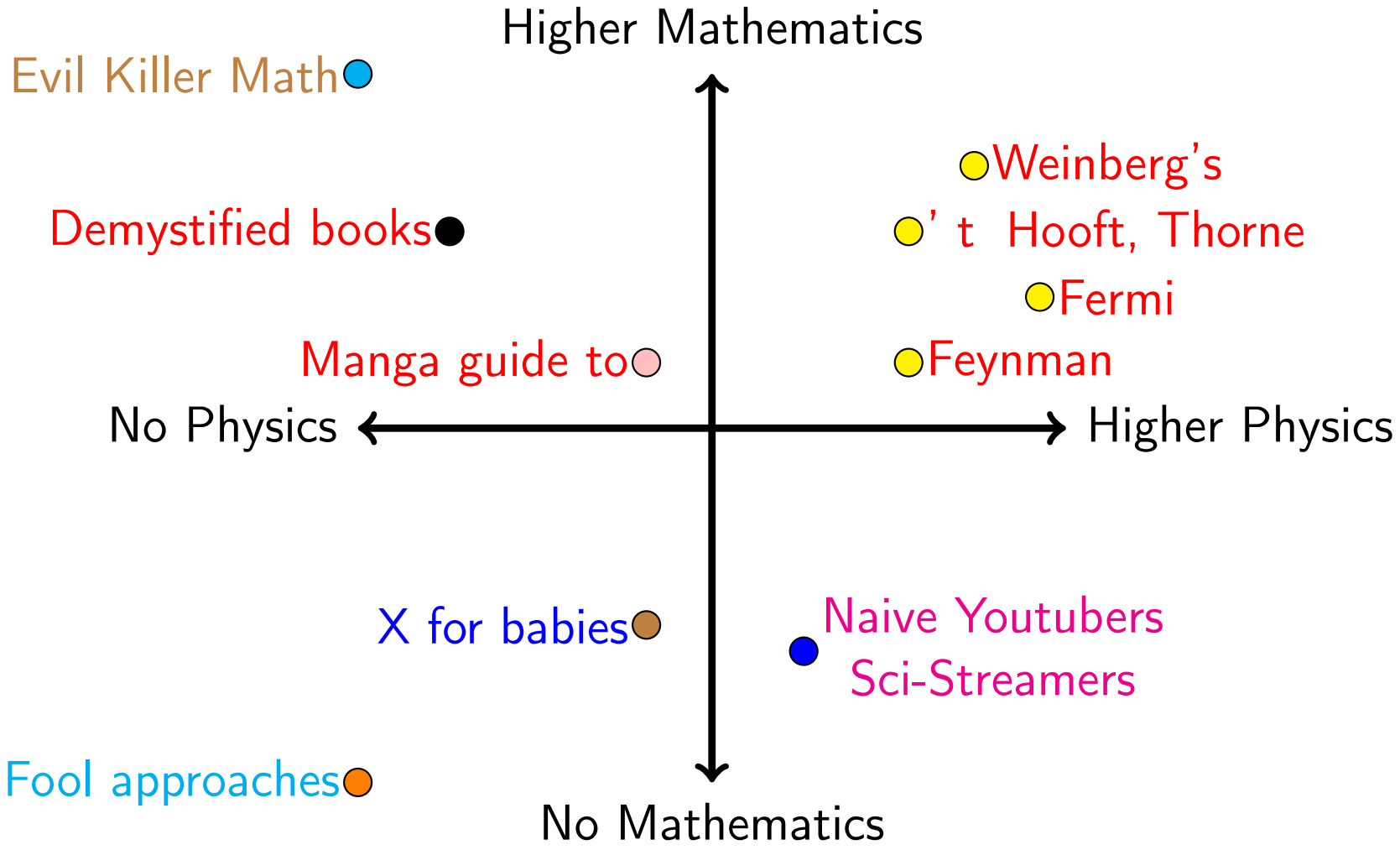
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



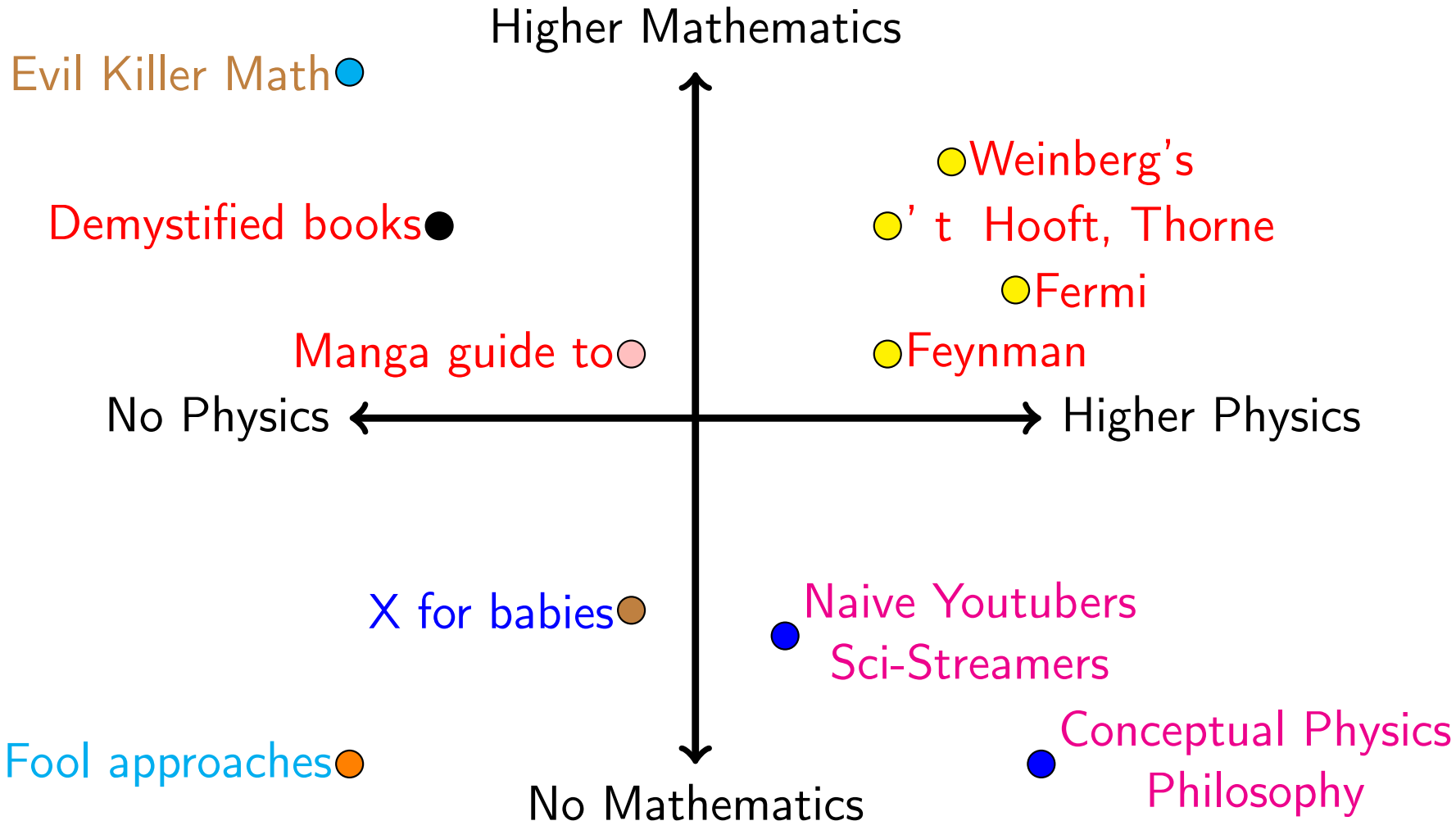
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .



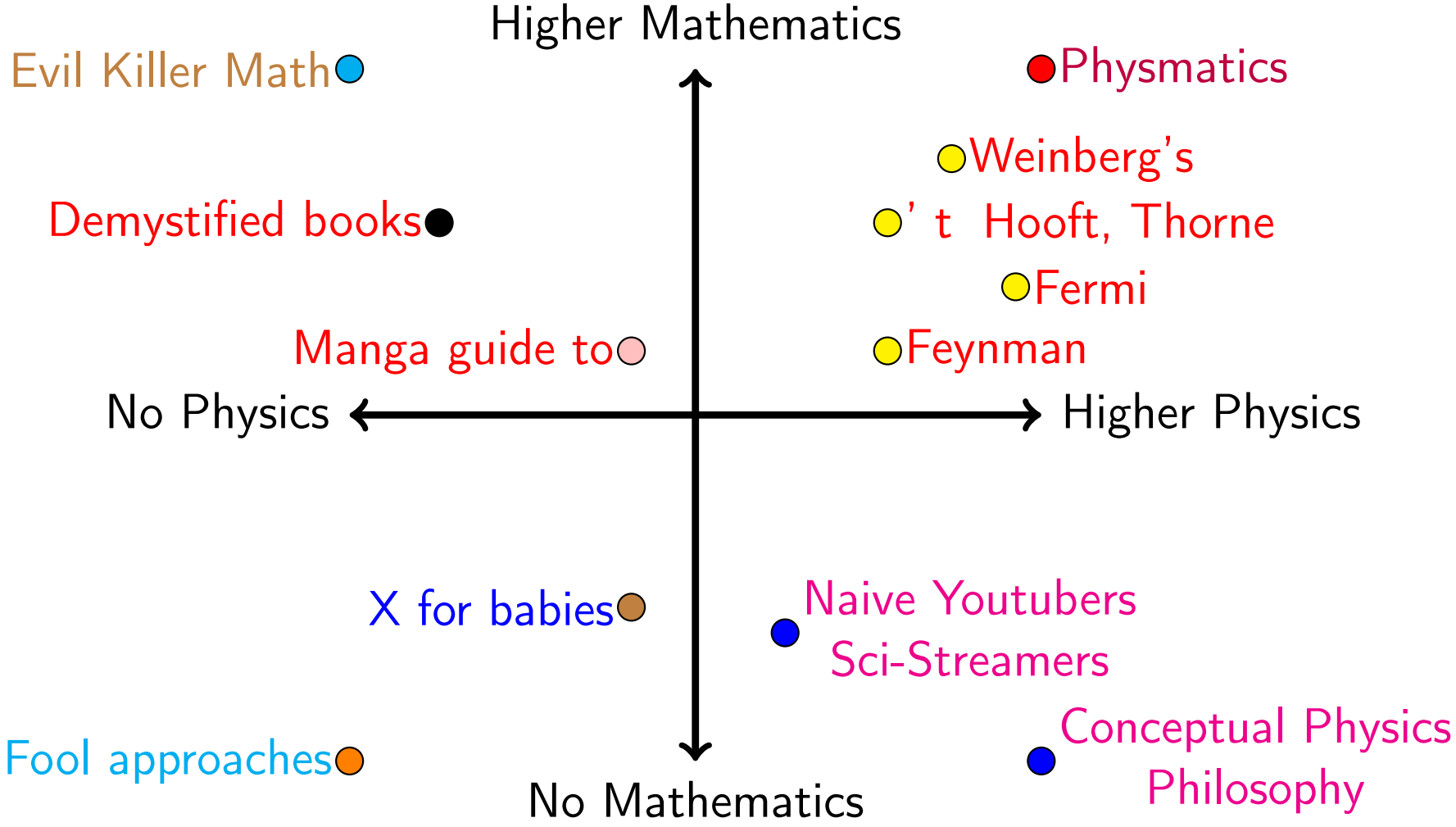
What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches...



What Physmatics IS/Lo que es la Fismática

Gráfica de lo que es la Ciencia de la Fismática en comparación a otros enfoques/Plot of what Physmatics is compared to other approaches. . .



Contenido

1. What is Physmatics? ¿Qué es la Fismática?
2. Teaching with Physmatics/Enseñando con Fismática
   - Matemáticas (Mathematics)
   - Gravedad y campos (Gravity and fields)
   - Ondas y MAS (Waves and SHM)
   - Cosmología y Cosmografía (Cosmology and Cosmography)
3. Bibliografía

The hypersphere(I)/la hiperesfera(I)

Hiperesfera

Hiperesfera(euclidiana) o n-esfera es el lugar geométrico S^n (n-1)-dimensional asociado a la ligadura $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$.

Hipervolumen e hipersuperficie de la hiperesfera de radio R

El hipervolumen $V(S^n)$ y la hipersuperficie $\Sigma(S^n)$ se calcula con:

$$V_n = \frac{\Gamma(1/2)^n R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \Sigma_{n-1} = \frac{dV_n}{dR} = \frac{n\Gamma^n(1/2)R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{1}$$

y donde $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = (-1/2)!$. Interesante: $V(S^\infty) = 0$, y el volumen de la 23-esfera unidad es igual a la densidad del retículo de Leech $\Lambda_{24} = \pi^{12}/12!$ que subyace a la simetría del grupo monstruo M.

Recurrencia dimensional $N = n$: $V_n = \dfrac{R\Sigma_{n-1}}{n}$.

The hypersphere/La hiperesfera(I)

Hiperesfera

Hiperesfera(euclidiana) o n-esfera es el lugar geométrico S^n (n-1)-dimensional asociado a la ligadura $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$.

Hipervolumen e hipersuperficie de la hiperesfera de radio R

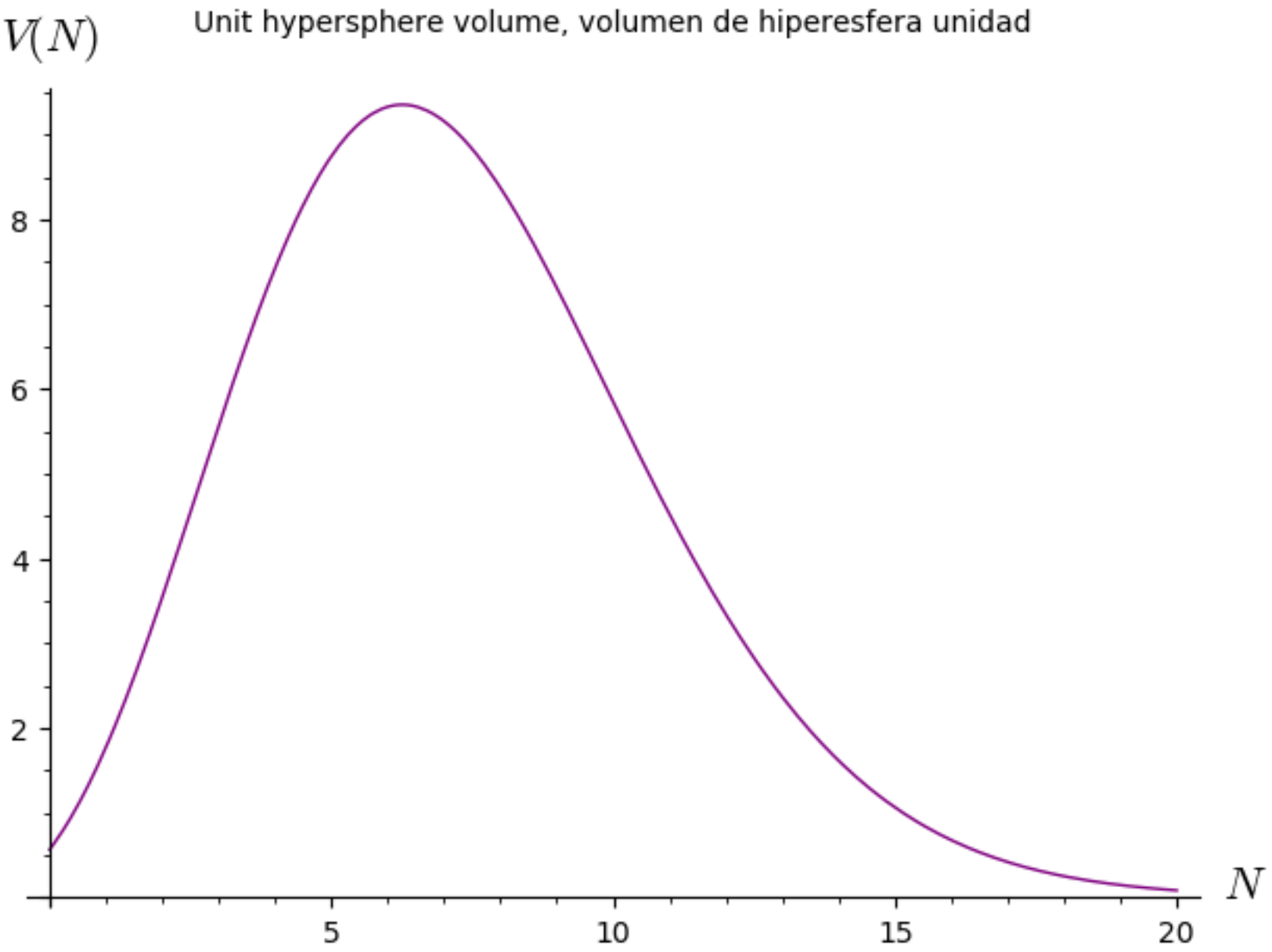
El hipervolumen $V(S^n)$ y la hipersuperficie $\Sigma(S^n)$ se calcula con:

$$V_n = \frac{\Gamma(1/2)^n R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad \Sigma_{n-1} = \frac{dV_n}{dR} = \frac{n\Gamma(1/2)^n R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{2}$$

y donde $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = (-1/2)!$. Interesante: $V(S^\infty) = 0$, y el volumen de la 23-esfera unidad es igual a la densidad del retículo de Leech $\Lambda_{24} = \pi^{12}/12!$ que subyace a la simetría del grupo monstruo M.

Si $\Sigma_{N-1} = 2\pi R V(N-2)$, $V_N = \dfrac{\Sigma_{N-1} R}{N}$, $V(N) = 2\pi R^2 V(N-2)/N$.

Gráfica/Graphics



Special functions/Funciones especiales

Solve, exactly, the following equations/Resolver, exactamente, las siguientes ecuaciones:

Special functions/Funciones especiales

Solve, exactly, the following equations/Resolver, exactamente, las siguientes ecuaciones:

- $xe^x = z$
- $xa^x = Y$
- $x^n e^{x^n} = Z$
- $x^n a^{x^n} = Y$
- $\ln(A + BX) + CX = \ln(D)$
- $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$
- $A^x = Bx + c$

Special functions/Funciones especiales

Solve, exactly, the following equations/Resolver, exactamente, las siguientes ecuaciones:

- $xe^x = z$
- $xa^x = Y$
- $x^n e^{x^n} = Z$
- $x^n a^{x^n} = Y$
- $\ln(A + BX) + CX = \ln(D)$
- $x^{x^{x^{\cdots}}} = y$
- $A^x = Bx + c$

Hint: Use Lambert W-function! Should we teach it at (high)-school/University?
Pista: Usar la función W de Lambert. ¿Deberíamos enseñarla en la Universidad o en el IES?

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?Take these/Tomad éstas. . .

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?Take these/Tomad éstas. . .

$$D_{p,q}f = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?Take these/Tomad éstas...

$$D_{p,q}f = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

y en el espacio de funciones analíticas si $\gamma/\alpha \in \mathbb{Z}$

$$D_{p,q}^{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = \frac{f(p^{-\alpha}z)p^{-\beta} - f(q^{\alpha})q^{\beta}}{(p^{-\gamma} - q^{\gamma})z^{\gamma/\alpha}} \tag{4}$$

También, la derivada fraccional de Riemann-Liouville

$${}_aD_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{5}$$

There are more, but...

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?Take these/Tomad éstas...

$$D_{p,q}f = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

y en el espacio de funciones analíticas si $\gamma/\alpha \in \mathbb{Z}$

$$D_{p,q}^{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = \frac{f(p^{-\alpha}z)p^{-\beta} - f(q^{\alpha})q^{\beta}}{(p^{-\gamma} - q^{\gamma})z^{\gamma/\alpha}} \tag{4}$$

También, la derivada fraccional de Riemann-Liouville

$${}_aD_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{5}$$

There are more, but...I will not talk here of fractional calculus.

Deformed calculus/Cálculo deformado

Todo el mundo sabe lo que es una derivada

$$Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

¿Estáis seguros? Sure?Take these/Tomad éstas...

$$D_{p,q}f = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

y en el espacio de funciones analíticas si $\gamma/\alpha \in \mathbb{Z}$

$$D_{p,q}^{\alpha,\beta,\gamma}f(z) = \frac{f(p^{-\alpha}z)p^{-\beta} - f(q^{\alpha})q^{\beta}}{(p^{-\gamma} - q^{\gamma})z^{\gamma/\alpha}} \tag{4}$$

También, la derivada fraccional de Riemann-Liouville

$${}_aD_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{5}$$

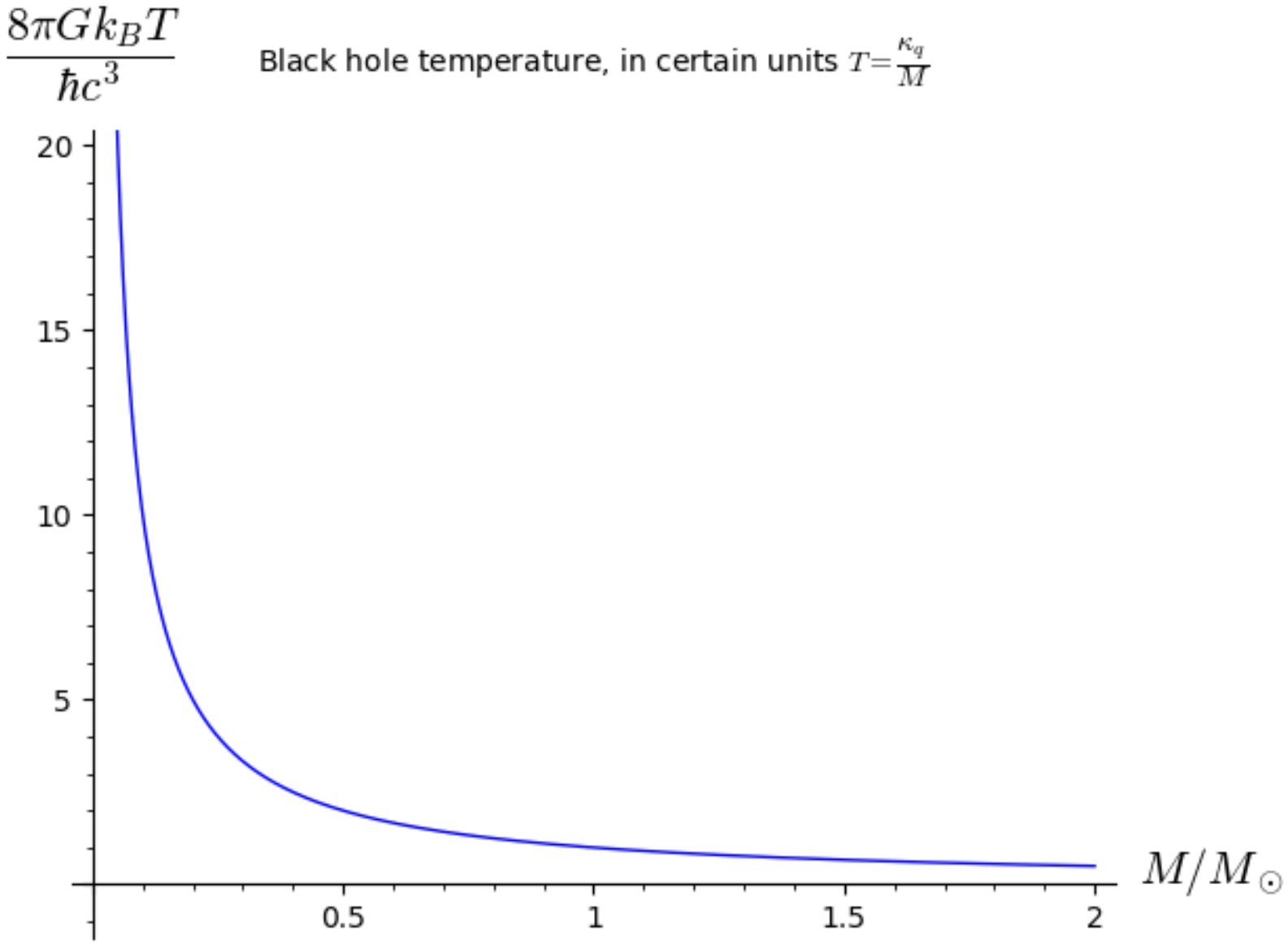
There are more, but...I will not talk here of fractional calculus.NOT TODAY!

Proporción y análisis dimensional

El análisis dimensional y las proporciones o leyes de potencias son útiles para la didáctica de gráficas de datos. ¿Dónde encontramos ejemplos interesantes? ¡Física y Química de agujeros negros!

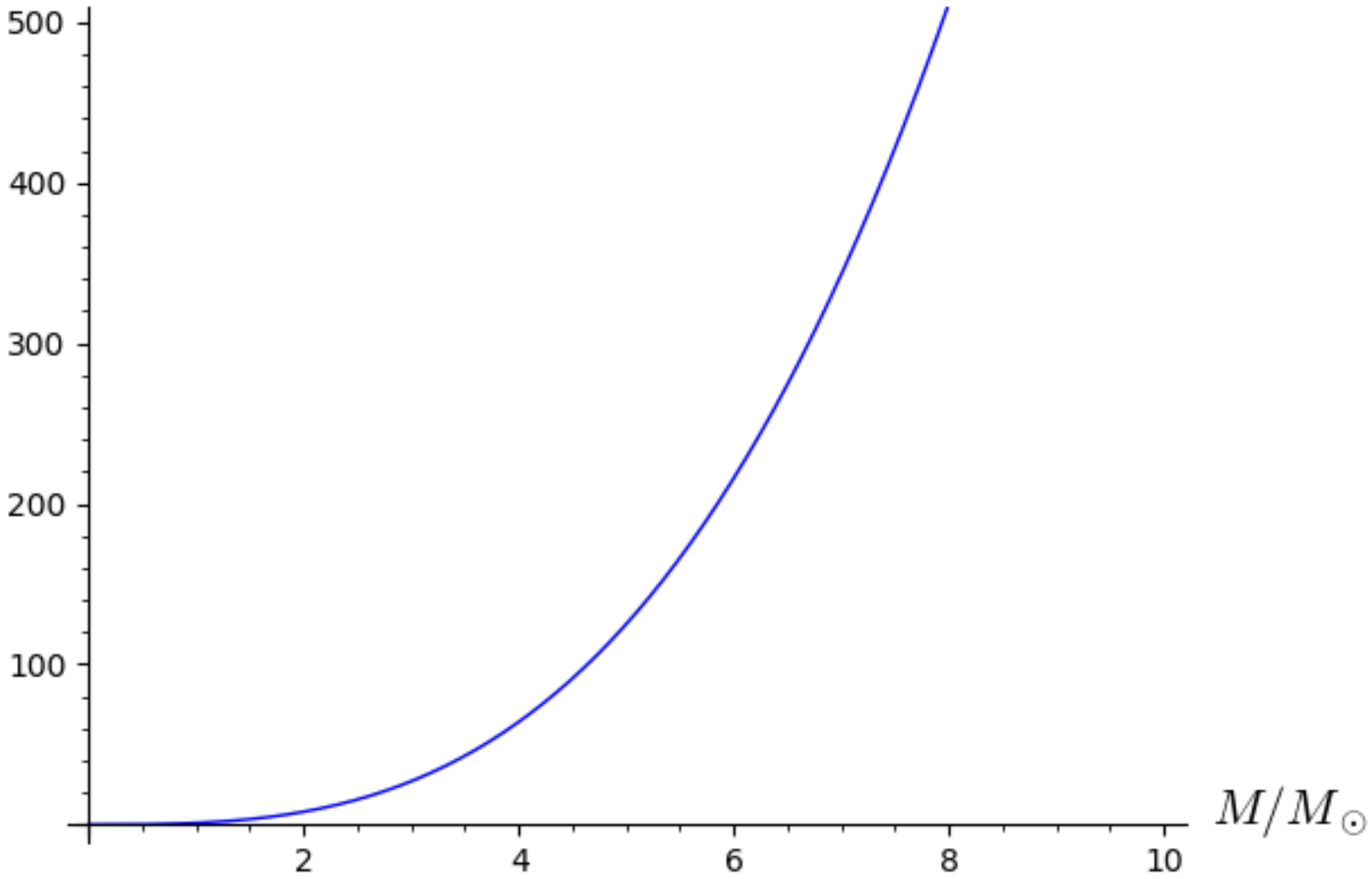
- Black hole Chemistry? ¿Química de agujeros negros?
- Via power laws (cf. ideal gas laws)/Via leyes de potencias (cf. leyes de los gases ideales) ...

Proporción y análisis dimensional

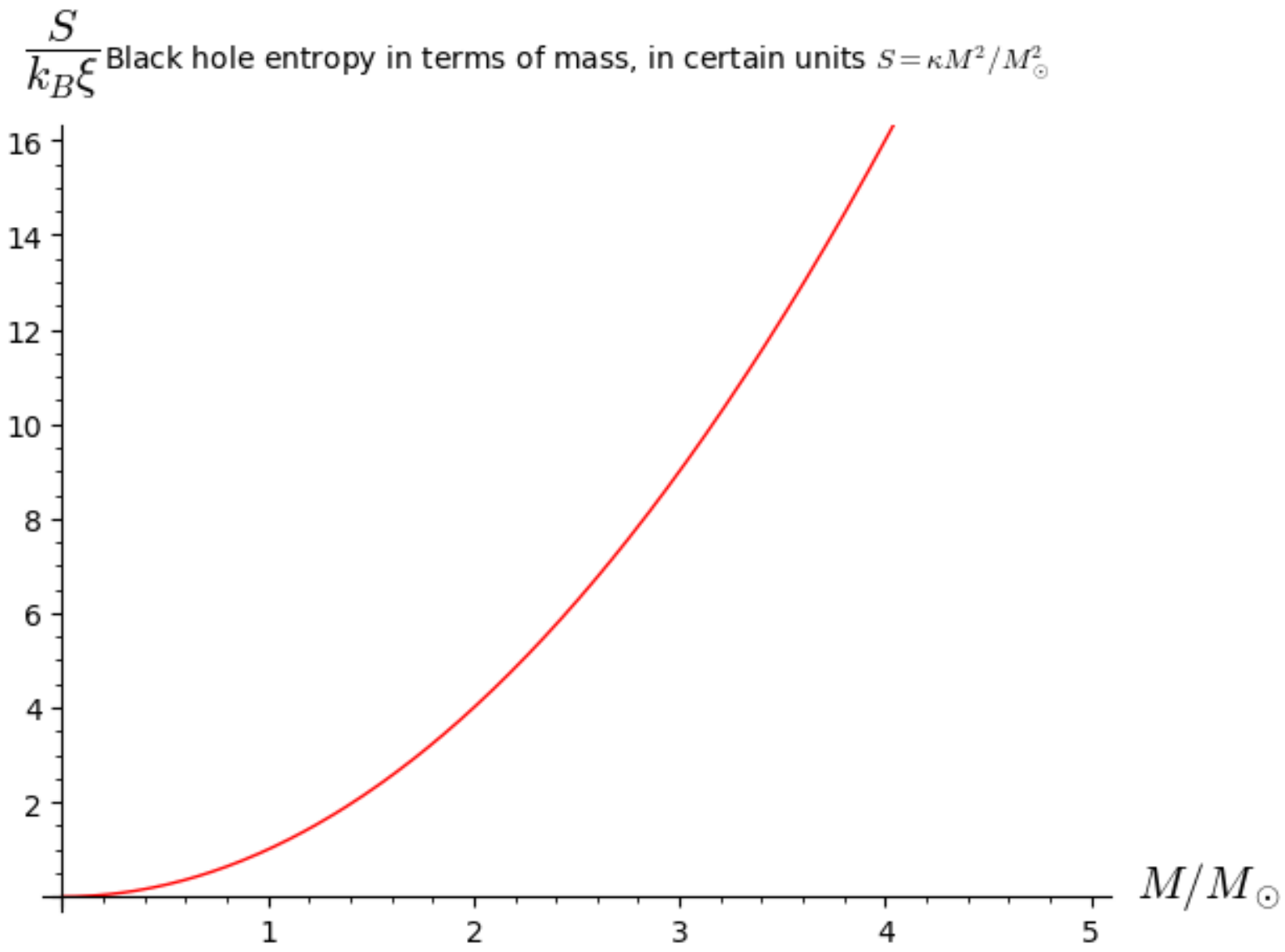


Proporción y análisis dimensional

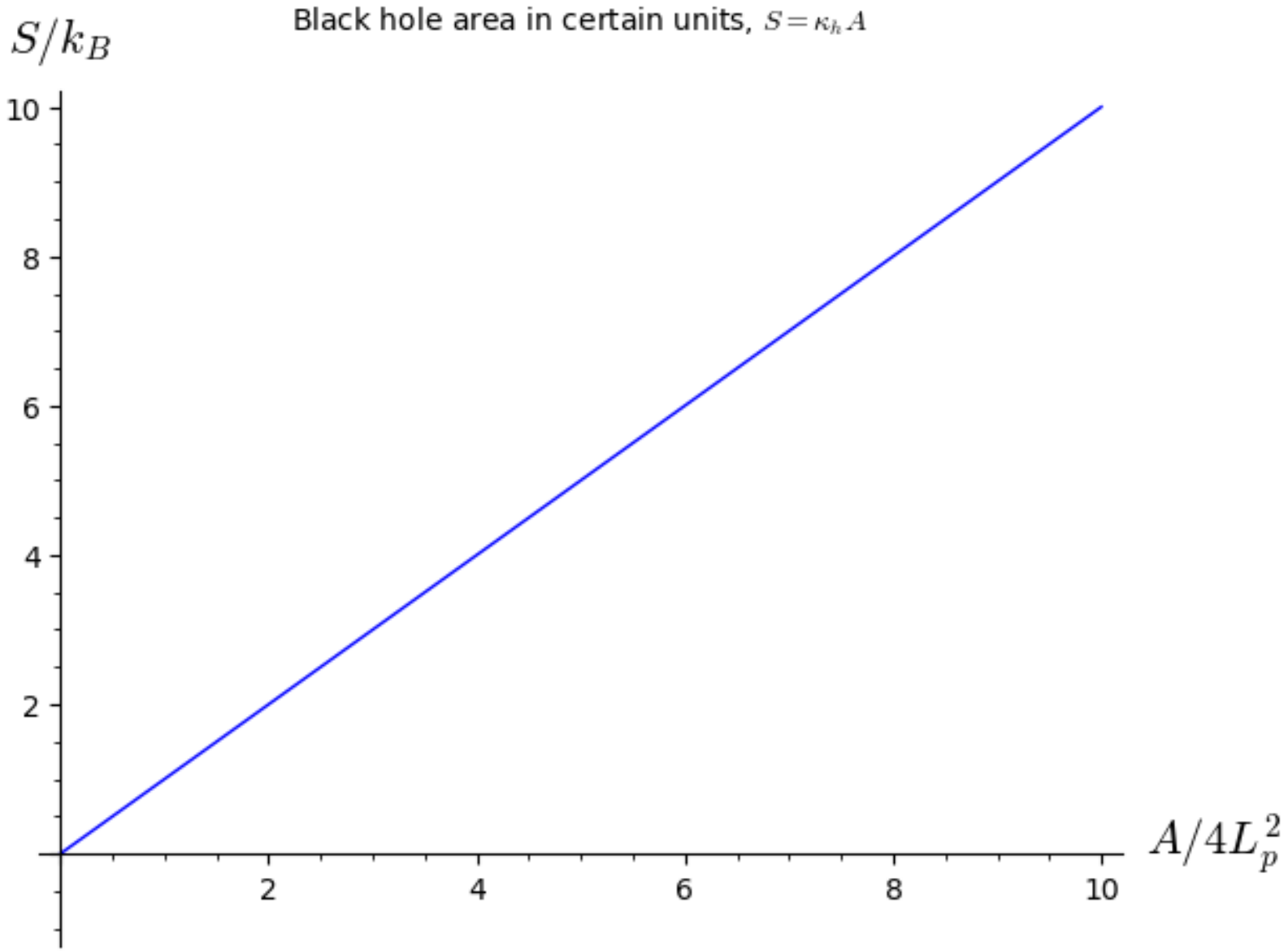
$$\frac{\hbar c^4 \alpha_e t_e}{5120\pi G^2}$$ Black hole evaporation time in certain units, $t_e = KM^3$



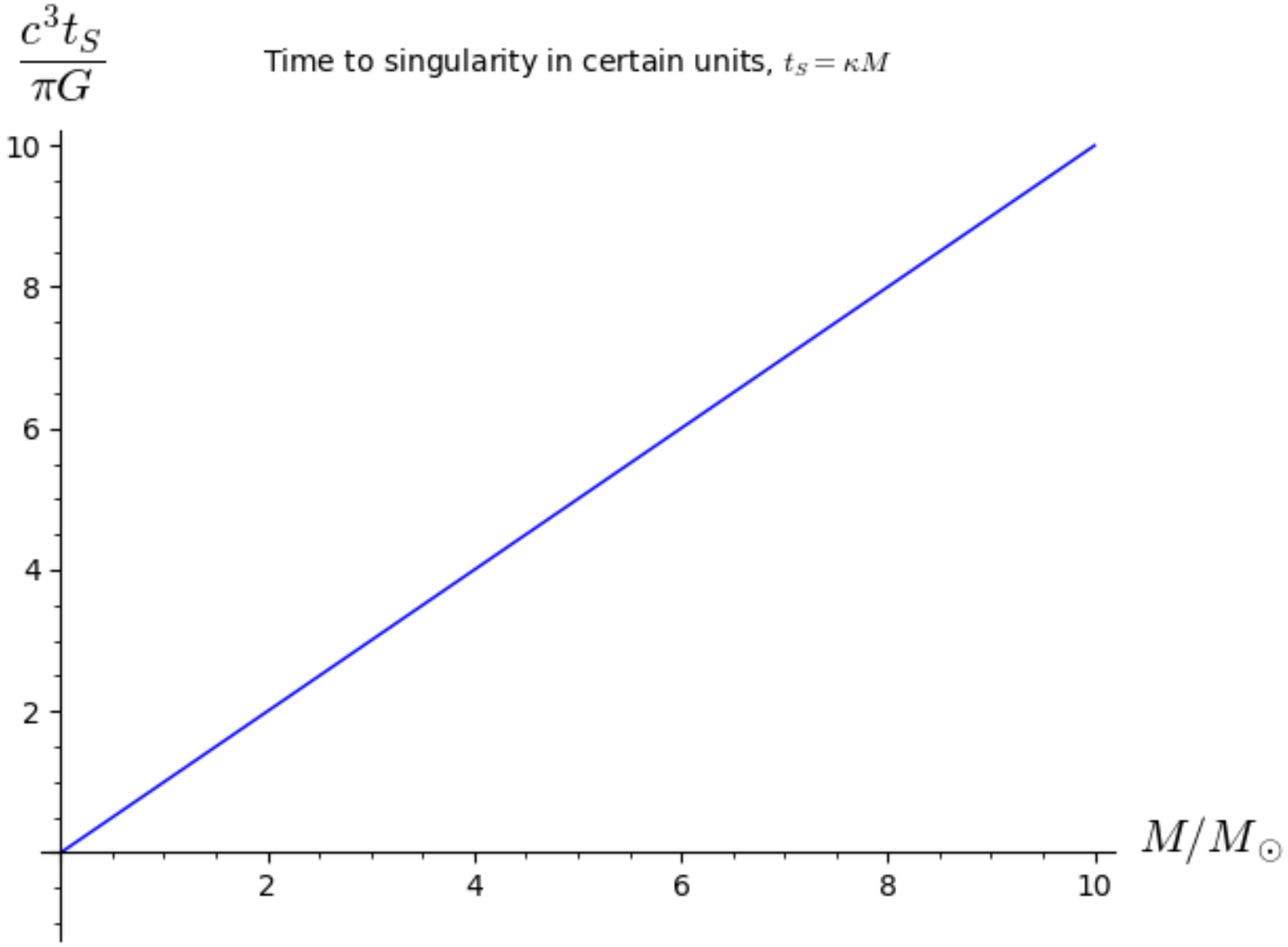
Proporción y análisis dimensional



Proporción y análisis dimensional

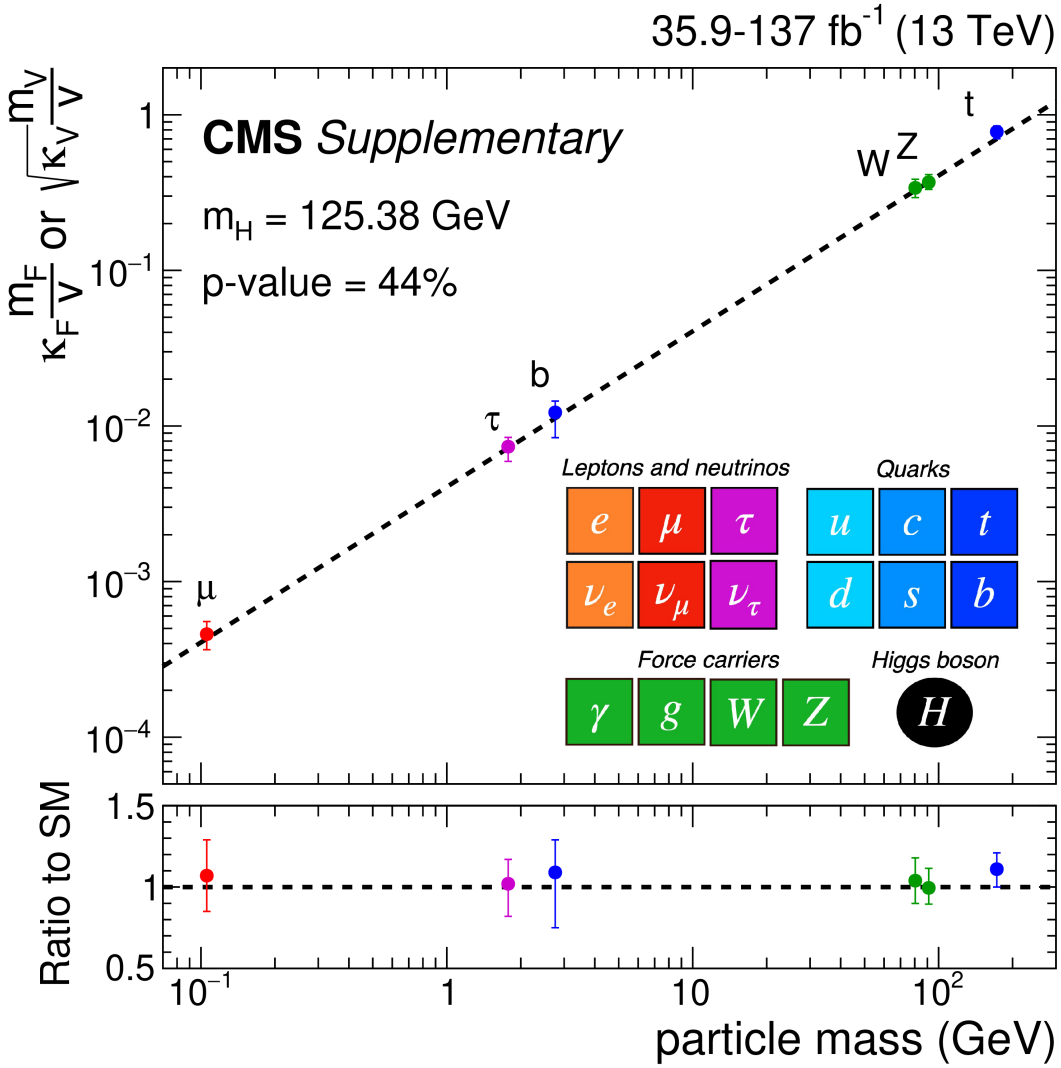


Proporción y análisis dimensional



Proporción y análisis dimensional

Higgs (2012-2022): acoplos y masa de fermiones y bosones vectoriales



Tercera ley de Kepler: variantes(I)

La tercera ley de Kepler se escribe usualmente: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_B} R^3$. ¿Y si la modificamos? Por ejemplo, para agujeros negros en rotación o de Kerr:

Tercera ley de Kepler: variantes(I)

La tercera ley de Kepler se escribe usualmente: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_B} R^3$. ¿Y si la modificamos? Por ejemplo, para agujeros negros en rotación o de Kerr:

$$\Omega = \pm \frac{M^{1/2}}{r^{3/2} \pm aM^{1/2}} \tag{6}$$

donde $M = G_N m$ es la masa en unidades gravitacionales naturales, a es el parámetro de rotación de Kerr $a = cJ/M = J/Mc$. En términos de unidades convencionales, se escribe

$$\Omega = \pm \frac{\sqrt{G_N M}}{r^{3/2} \pm \chi \left(\frac{\sqrt{G_N M}}{c} \right)^3} = \pm \frac{c^3}{GM} \left(\pm \chi + \left(\frac{c^2 r}{G_N M} \right)^{3/2} \right)^{-1} \tag{7}$$

Tercera ley de Kepler: variantes(II) [gravedad modificada]

Para teorías gravitacionales con potencial efectivo:

$$V_e = -\frac{GM}{r}\left(1 + A\frac{M^p}{r^p}\right) + \frac{L^2}{2\mu^2 r^2}$$

la condición de órbitas circulares $V' = 0$, con $L = \mu r^2 \Omega^2$ proporciona la tercera ley de Kepler modificada siguiente

$$\Omega^2 = \frac{GM}{r^3}\left(1 + \frac{M^p A(p+1)}{r^p}\right) \tag{8}$$

Una variante adicional de la tercera ley de Kepler en gravedad de Finsler es la siguiente modificación:

$$\frac{r^3}{T^2} = \left(1 - \frac{A(r)}{r^4}\right)\frac{GM}{4\pi^2} \tag{9}$$

Tercera ley de Kepler: variantes(III) [gravedad cuántica]

Recientemente se ha propuesto una modificación de la gravedad con energía potencial efectiva:

$$U_e = -\frac{GMm}{r} - \lambda Mm \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

dando la fuerza

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{\lambda Mm}{r} = -G_e \frac{Mm}{r^2} \tag{10}$$

donde la constante gravitacional efectiva es

$$G_e = G + \lambda r = G\left(1 + \frac{\lambda r}{G}\right) \tag{11}$$

Tercera ley de Kepler: variantes(III) [gravedad cuántica]

Recientemente se ha propuesto una modificación de la gravedad con energía potencial efectiva:

$$U_e = -\frac{GMm}{r} - \lambda Mm \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

dando la fuerza

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{\lambda Mm}{r} = -G_e \frac{Mm}{r^2} \tag{10}$$

donde la constante gravitacional efectiva es

$$G_e = G + \lambda r = G\left(1 + \frac{\lambda r}{G}\right) \tag{11}$$

Similares ideas rodean el método de la gravedad segura asintóticamente (Weinberg), con $G_e = G(r)$, o incluso las supercuerdas con $G = G(r,t) = g_s^2 L_s^2 e^{\phi(r,t)}$.

Gravedad cuántica, teorías de cuerdas y fuerzas moleculares

Se puede practicar la relación de fuerzas conservativas en teoría de campos, con $F = -\nabla E_p$. E.g., la RG más correcciones de gravedad cuántica canónica a un lazo (o loop) proporciona la energía potencial efectiva:

Gravedad cuántica, teorías de cuerdas y fuerzas moleculares

Se puede practicar la relación de fuerzas conservativas en teoría de campos, con $F = -\nabla E_p$. E.g., la RG más correcciones de gravedad cuántica canónica a un lazo (o loop) proporciona la energía potencial efectiva:

$$E_p = U = -\frac{GM_1M_2}{r}\left(1 + a\frac{G(M_1+M_2)}{c^2 r} + b\frac{G\hbar}{c^3 r^2}\right) \tag{12}$$

donde $a = 3$ (GR) y $b = 41/10\pi$ (QG a un lazo). Análogamente, podríamos tomar la fuerza efectiva de la gravedad en la teoría de cuerdas 26D

$$F_N = G_{26d}\frac{Mm}{r^{24}} \tag{13}$$

Gravedad cuántica, teorías de cuerdas y fuerzas moleculares

Se puede practicar la relación de fuerzas conservativas en teoría de campos, con $F = -\nabla E_p$. E.g., la RG más correcciones de gravedad cuántica canónica a un lazo (o loop) proporciona la energía potencial efectiva:

$$E_p = U = -\frac{GM_1M_2}{r}\left(1 + a\frac{G(M_1+M_2)}{c^2 r} + b\frac{G\hbar}{c^3 r^2}\right) \tag{12}$$

donde $a = 3$ (GR) y $b = 41/10\pi$ (QG a un lazo). Análogamente, podríamos tomar la fuerza efectiva de la gravedad en la teoría de cuerdas 26D

$$F_N = G_{26d}\frac{Mm}{r^{24}} \tag{13}$$

Ejercicio: calcular la energía potencial de esta ley de fuerzas U_{26d}!. Se toma: $G_{26d} = g_s^2 L_s^{24}$ en ciertas unidades.
Ejercicio(II): Con la fuerza central de la interacción intermolecular dada por

$$f(r) = -\frac{K_1}{r^6} + \frac{K_2}{r^{12}}$$

Hallar la energía potencial para esta ley de fuerzas.

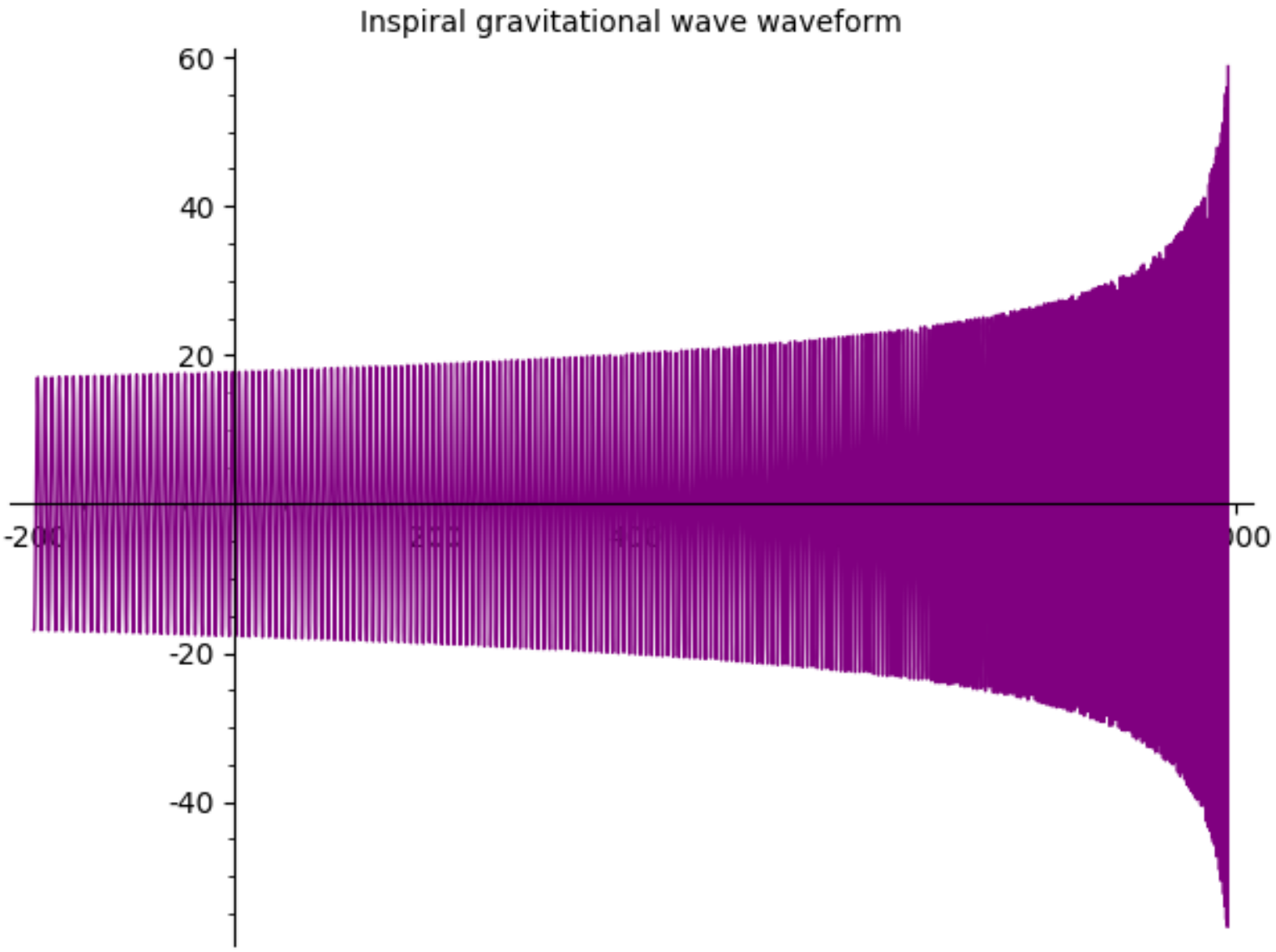
Ondas(I): ondas gravitacionales en fase inspiral

Una partícula se mueve unidimensionalmente mediante la expresión, con unidades del S.I., siguiente:

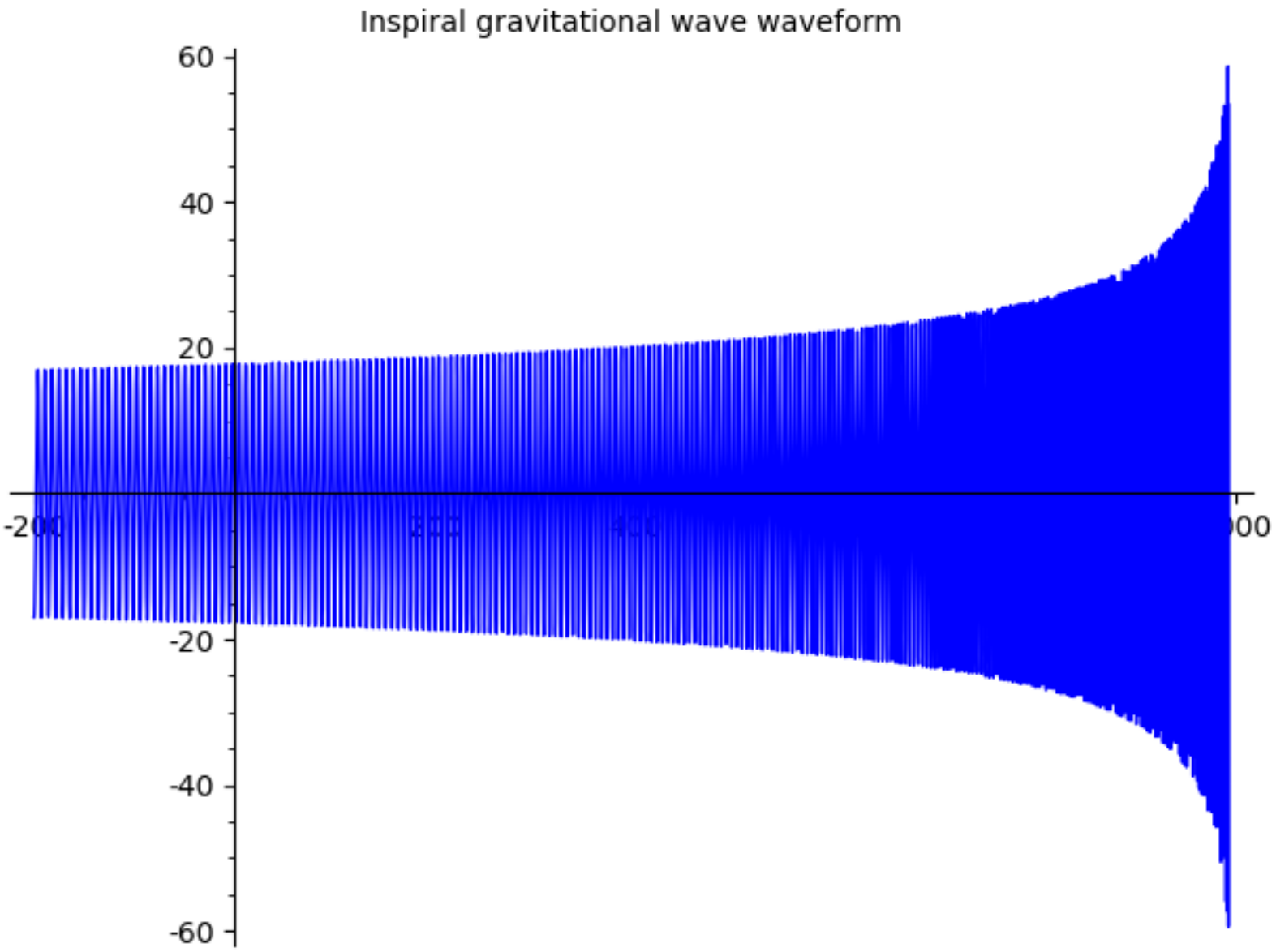
$$\Psi = 100(1000 - t)^{-1/4} \cos\left((10(1000 - t)^{5/8}\right)$$

a) ¿Es un MAS? Razona la respuesta.
b) Realiza una reprentación gráfica de la función y(t), que reprenta la vibración instantánea (necesitarás una aplicación de ordenador, o de móvil, o bien ser hábil en la representación de la función elongación si lo haces de forma manual).
c) Calcula la velocidad de vibración, $v = d\Psi/dt$ y la aceleración de vibración $a = d^2\Psi/dt^2$.
d) Calcula cuándo es máxima la velocidad de vibración. ¿Qué valor tendría Ψ en el instante de máxima vibración? Comenta el resultado.

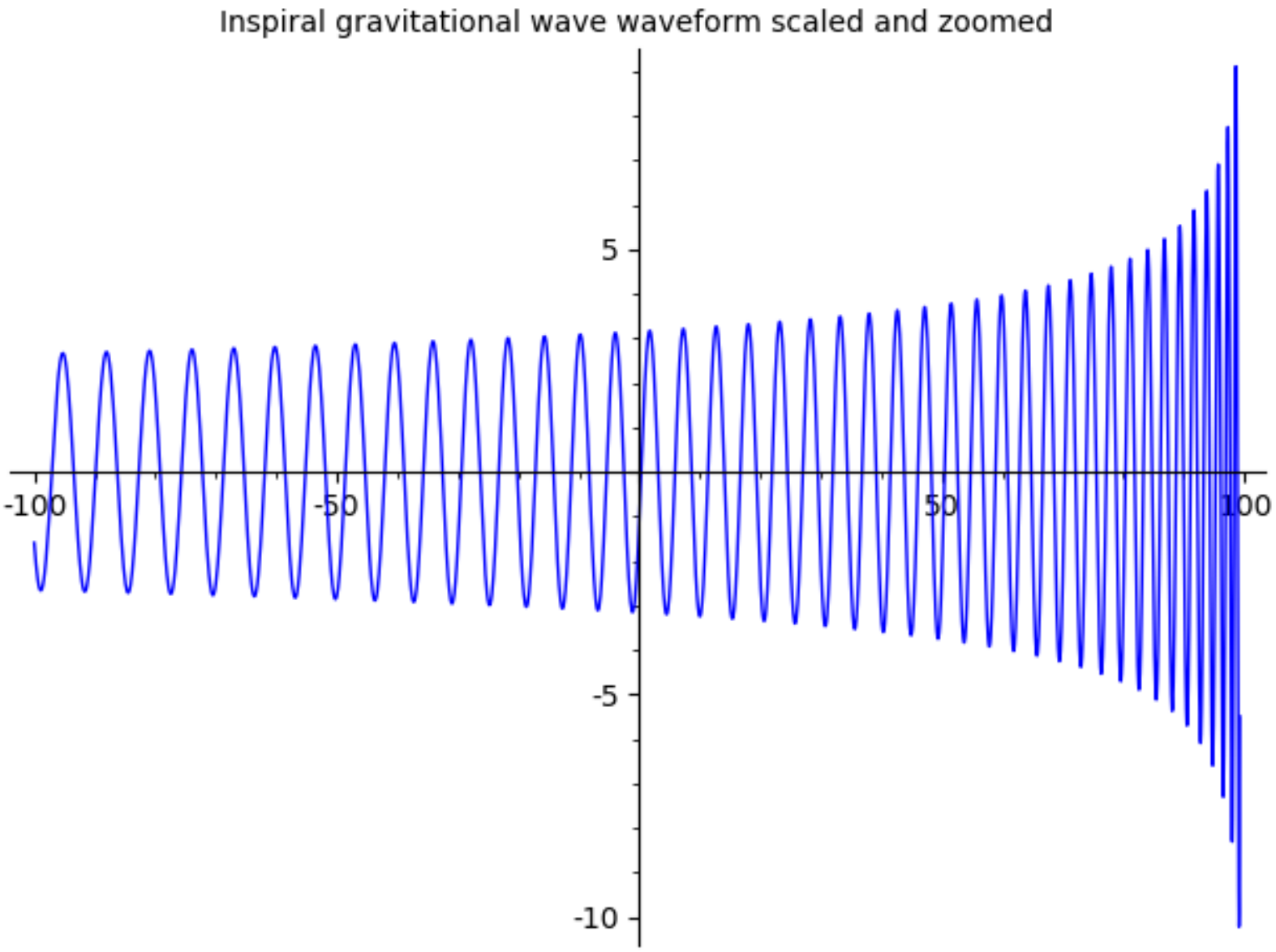
Ondas(I): ondas gravitacionales en fase inspiral



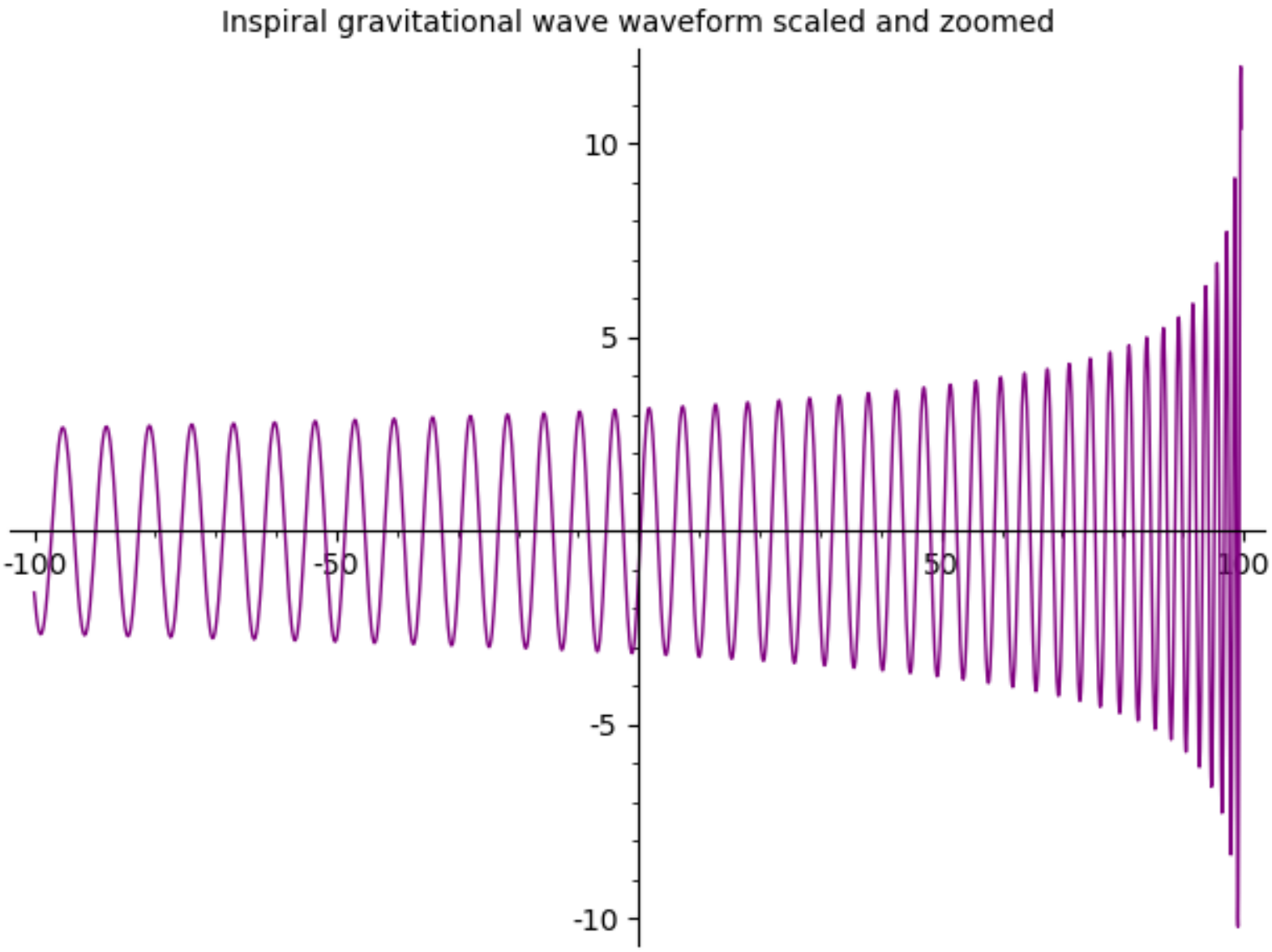
Ondas(I): ondas gravitacionales en fase inspiral



Ondas(I): ondas gravitacionales en fase inspiral



Ondas(I): ondas gravitacionales en fase inspiral



Ondas(II): modelo de materia oscura axiónica

Un modelo de materia oscura[5], cuya densidad de energía es $\rho_{DM} = 0{,}4 GeV/cm^3$, predice su distribución como las ondas transversales generadas por unas partículas ultraligeras de un campo escalar (bosones de espín cero). Las ondas escalares vienen dadas en la dirección de observación OX por la función de onda siguiente:

$$\phi(x,t) = 2\frac{\sqrt{2\rho_{DM}}}{m_\phi c^2}\cos\left(2\pi\frac{m_\phi c x}{h}\right)\sin\left(2\pi\frac{m_\phi c^2 t}{h}\right)$$

donde $c = 3\cdot 10^8 m/s$ es la velocidad de la luz, $h = 6{,}63\cdot 10^{-34} J\cdot s$ la constante de Planck y m_ϕ es la masa de la partícula ϕ. Determina, si $E_\phi = m_\phi c^2 = 10\cdot 10^{-22} eV = 1 zeV$ (zeV es zeptoelectrón-voltio):

a) Tipo de onda justificadamente (de acuerdo a la expresión dada), así como su velocidad de propagación v_p, longitud de onda λ_ϕ, su frecuencia f_ϕ y su período T_ϕ. (0.5 puntos=0.1x5).

b) El valor de las amplitudes de ϕ y de ϕ^2 en unidades del S.I.(0.5 puntos).

Ondas(II): modelo de materia oscura axiónica

c) El número de máximos que esperaríamos observar en el cuadrado de la distribución de partículas $\phi(0,t)^2$, con un detector haloscópico, al cabo de un tiempo igual a un período, $t = T_\phi$. (0.5 puntos)
d) Cuántas partículas por metro cúbico debería haber si supusiéramos que la densidad de energía local ρ_{DM} está hecha únicamente de partículas de masa m_ϕ. ¿Qué le pasa al campo, el valor de la función de onda, en el límite $m_\phi = 0$? (0.5 puntos)
Dato: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$

Cosmografía(I)

En Cosmografía (Cosmología descriptiva moderna) se definen, para $a(t)$:

Cosmografía(I)

En Cosmografía (Cosmología descriptiva moderna) se definen, para $a(t)$:

$$\text{Hubble function}: \quad H(t) = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{14}$$

$$\text{deceleration function}: \quad q(t) = -\frac{1}{aH^2}\frac{d^2a}{dt^2} \tag{15}$$

$$\text{jerk}: \quad j(t) = \frac{1}{aH^3}\frac{d^3a}{dt^3} \qquad \text{snap}: \quad s(t) = \frac{1}{aH^4}\frac{d^4a}{dt^4} \tag{16}$$

$$\text{crackle/lerk function}: \quad l(t) = \frac{1}{aH^5}\frac{d^5a}{dt^5} \tag{17}$$

Cosmografía(II)

Los parámetros cosmográficos en tiempo actual $(H_0, q_0, j_0, s_0, l_0)$ son un blanco clave de actuales y futuras medidas del universo, generalmente destrito por un factor de escala que puede expandirse en serie como sigue:

$$a(t) = a(0) + \frac{da}{dt}(0)t + \frac{d^2a}{dt^2}(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^na}{dt^n}(0)t^n + \mathcal{O}(t^{n+1}) \quad (18)$$

así como lo hace la función H a través del redshift z

$$H(z) = H(0) + \frac{dH}{dz}(0)z + \frac{d^2H}{dz^2}(0)z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^nH}{dt^n}(0)z^n + \mathcal{O}(z^{n+1}) \quad (19)$$

a) Demuestra, detallando los cálculos paso a paso, las siguientes relaciones entre parámetros cosmográficos:

$$\dot{H} = -H^2(1+q)$$

$$\ddot{H} = H^3(3q + j + 2), \quad \dddot{H} = H^4(-3q^2 - 12q - 4j + s - 6)$$

$$\ddddot{H} = H^5(30q^2 + 60q + 10qj + 20j - 5s + l + 24)$$

b) Halla las dimensiones y unidades de los parámetros cosmográficos, y por qué la ley de Hubble $v = Hd$ está relacionada con ellos.

MAS: Modelo cíclico de Universo

En la charla y artículo [1], se introduce la ecuación cósmica para un Universo dominado por una red de "domain walls" (dominios):

MAS: Modelo cíclico de Universo

En la charla y artículo [1], se introduce la ecuación cósmica para un Universo dominado por una red de "domain walls" (dominios):

$$\ddot{a}+\frac{|\Lambda|}{3}a=\frac{4\pi G_N c}{3}, \text{ con solución } a(t)=\frac{1}{\gamma\omega}\left(1+\sqrt{1-\gamma}\cos(\omega t)\right) \quad (20)$$

donde la frecuencia y anchura de oscilación vienen dados por:

$$\omega=\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}, \quad \gamma=\frac{3\,|\Lambda|}{(4\pi G_N c)^2}\sim\frac{a_-}{a_+} \quad (21)$$

y donde usamos las ecuaciones de Friedmann para un Universo de tipo FRW y la ecuación de estado: $p=\omega\rho$, con $\rho=-2/3$ (domain walls).

Inflación y el Multiverso(I): grandes números

- Nuestro Universo observable satisface: $S_{dS} \leq |\Lambda|^{-3/4} \sim 10^{90}$.
- Entropía del agujero negro de SgA*: $S_{MWBH} \sim 10^{100} \sim$ googol.
- El número de observadores con masas del orden de $M \sim 10^2 kg$, y altura de orden $1m$ está limitado por la cota de Bekenstein

$$\mathcal{N}_{obs} \leq S_{Bek} = e^{2\pi MR} \leq e^{10^{45}}$$

Curiosamente, el número de observadores inteligentes con un cerebro humano sería del orden de $\mathcal{N} \sim 10^{10^{16}} >> \mathcal{N}_{ds-Vacua}$, por lo que un cerebro humano parece tener más configuraciones que el número de posibles geometrías de un Universo(Multiverso) de Sitter.

Inflación y el Multiverso(I): grandes números

- Nuestro Universo observable satisface: $S_{dS} \leq |\Lambda|^{-3/4} \sim 10^{90}$.
- Entropía del agujero negro de SgA*: $S_{MWBH} \sim 10^{100} \sim$ googol.
- El número de observadores con masas del orden de $M \sim 10^2 kg$, y altura de orden $1m$ está limitado por la cota de Bekenstein

$$\mathcal{N}_{obs} \leq S_{Bek} = e^{2\pi MR} \leq e^{10^{45}}$$

Curiosamente, el número de observadores inteligentes con un cerebro humano sería del orden de $\mathcal{N} \sim 10^{10^{16}} >> \mathcal{N}_{ds-Vacua}$, por lo que un cerebro humano parece tener más configuraciones que el número de posibles geometrías de un Universo(Multiverso) de Sitter.

En la inflación, un campo escalar en modelos de inflación cáotica eterna $V(\phi) = 0{,}5m^2\phi^2$ tiene un comportamiento de MAS modulado en amplitud

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot \sin(mt), \quad \text{with} \quad \Phi(t) = \frac{M_p}{\sqrt{3\pi}mt} \sim \frac{M_p}{2\pi\sqrt{3\pi}N} \tag{22}$$

donde N es el número de oscilaciones desde el fin de la inflación cósmica.

Inflación y el Multiverso(II): contando Universos

How many Universes in the Multiverse? [3], i.e., ¿cuántos universos hay en el Multiverso? Respuestas posibles (A.Linde et al.; cf. ideas de A. Vilenkin y A. Guth):

- Modelos inflación "Slow-roll" dan: $\mathcal{N}_{efolds} \sim e^{e^{3N}}$. Si $N = 60$ (usual ó 70), entonces $\mathcal{N} \sim e^{e^{180}} \sim 10^{10^{77}} \sim 10^{S_{BH}(1M_\odot)}$.
- La inflación eterna (caótica) proporciona, $N = cS_{dS} \sim c/m$: $\mathcal{N} \sim e^{e^{3N}} \sim e^{e^{3c/m}} \sim 10^{10^{10^7}} >> 10^{\text{googol}}$
- Universos con constante cosmológica, Λ, no nula, dan $S_p \approx H^{\frac{1+3\omega}{1+\omega}} |\Lambda|^{-\frac{1+3\omega}{2+2\omega}} = H^{3/2} |\Lambda|^{-3/4} \rightarrow \mathcal{N} \sim 10^{10^{82}}$.
- Los Universos del string landscape (M es el número de vacíos dS):

$$\mathcal{N} \approx \sum_{j=1}^{M} \exp\left(|\Lambda|^{-3/4}\right) \sim e^{0,75M}, \quad \text{Popular: } M \sim 10^{500}, \mathcal{N} \sim 10^{10^{375}}$$

Otras opciones: $M \sim 10^{272000}$ (F-theory), $M \sim 10^{15}$. $\Lambda \sim 10^{-122}$, $N_{max} \sim log|\Lambda| \sim 280$, y $N(efolds) \sim 70$.

Contenido

1. What is Physmatics? ¿Qué es la Fismática?
2. Teaching with Physmatics/Enseñando con Fismática
   - Matemáticas (Mathematics)
   - Gravedad y campos (Gravity and fields)
   - Ondas y MAS (Waves and SHM)
   - Cosmología y Cosmografía (Cosmology and Cosmography)
3. Bibliografía

References/Referencias, Bibliography/Bibliografía

[1] *A Simple Harmonic Universe*, P. Graham, B. Horn, S. Rajendran and G. Torroba. ArXiv: https://arxiv.org/abs/1109.0282v2

[2] *Constraining Feeble Neutrino Interactions with Ultralight Dark Matter*, arXiv: https://arxiv.org/abs/2205.06821v1 and references therein. Abhish Dev, G. Krnjaic, P. Machado, and H. Ramani.

[3] *How many universes are in the multiverse?*, Andrei Linde and Vitaly Vanchurin. ArXiV:http://arxiv.org/abs/0910.1589v3

[4] JFGH. Física 2° de Bach. New Tocho/Billet. 2020eds.

[5] *Dark matter or strong gravity?*, Saurya Das and Sourav Sur, arXiv: https://arxiv.org/abs/2205.07153

[6] JFGH's personal website: TSOR. *The Spectrum Of Riemannium*, http://thespectrumofriemannium.com

[7] *EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory*, John F. Donoghue , Mikhail M. Ivanov, and Andrey Shkerin. ArXiv: https://arxiv.org/abs/1702.00319.

[8] *Mass and Motion in General Relativity*, Springer. Luc Blanchet, Alessandro Spallicci, Bernard Whiting.

Haría esto todo los días de mi vida...

Mi pasión es la Fismática. ¿Nunca duermo?

Please. . . I am grateful for your attention!

Lo sé...Las cosas se me han ido de las manos...

Gracias/Thank you!

Back-up slides

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^0) = 2R \tag{23}$$

$$V(S^1) = \pi R^2 \approx 3{,}14159 R^2 \tag{24}$$

$$V(S^2) = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}11879 \tag{25}$$

$$V(S^3) = \frac{\pi^2}{2} R^4 \approx 4{,}9348 R^4 \tag{26}$$

$$V(S^4) = \frac{8\pi^2}{15} R^5 \approx 5{,}26379 R^5 \tag{27}$$

The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^5) = \frac{\pi^3}{6} R^6 \approx 5{,}16771 R^6 \tag{23}$$

$$V(S^6) = \frac{16\pi^3}{105} R^7 \approx 4{,}72477 R^7 \tag{24}$$

$$V(S^7) = \frac{\pi^4}{24} R^8 \approx 4{,}05871 R^8 \tag{25}$$

$$V(S^8) = \frac{32\pi^4}{945} R^9 \approx 3{,}29851 R^9 \tag{26}$$

$$V(S^9) = \frac{\pi^5}{120} R^{10} \approx 2{,}55016 R^{10} \tag{27}$$

The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^{10}) = \frac{64\pi^5}{10395} R^{11} \approx 1{,}8841 R^{11} \tag{23}$$

$$V(S^{11}) = \frac{\pi^6}{720} R^{12} \approx 1{,}33526 R^{12} \tag{24}$$

$$V(S^{12}) = \frac{128\pi^6}{135135} R^{13} \approx 0{,}919629 R^{13} \tag{25}$$

$$V(S^{13}) = \frac{\pi^7}{5040} R^{14} \approx 0{,}599265 R^{14} \tag{26}$$

$$V(S^{14}) = \frac{256\pi^7}{2027025} R^{15} \approx 0{,}381443 R^{15} \tag{27}$$

The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^{15}) = \frac{\pi^8}{40320} R^{16} \approx 0{,}235331 R^{16} \tag{23}$$

$$V(S^{16}) = \frac{512\pi^8}{34459425} R^{17} \approx 0{,}140981 R^{17} \tag{24}$$

$$V(S^{23}) = \frac{\pi^{12}}{479001600} R^{24} \approx 0{,}00192957 R^{24} \tag{25}$$

$$V(S^{24}) = \frac{8192\pi^{12}}{7905853580625} R^{25} \approx 0{,}000957722 R^{25} \tag{26}$$

$$V(S^{25}) = \frac{\pi^{13}}{6227020800} R^{26} \approx 0{,}000466303 R^{26} \tag{27}$$

The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^{26}) = \frac{16384\pi^{13}}{213458046676875} R^{27} \approx 0{,}000222872 R^{27} \tag{23}$$

$$V_{91} \begin{cases} \dfrac{\pi^{46} R^{92}}{550262215981208894985030542880025489296165175296000000000} \\ \approx 1{,}34377 \cdot 10^{-35} R^{92} \end{cases} \tag{24}$$

Two more...The 4096-dimensional sphere

$$V(S^{4095}) \approx 8{,}70008138919055 \times 10^{-4877} R^{4096} \tag{25}$$

with a fantastic fraction that can not be written in the margin or space of this page easily. Surprisingly, the infinite-dimensional sphere volume is zero: The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Objetos geométricos: la hiperesfera(II)

$$V(S^{\infty}) = 0 \tag{23}$$

The amazing vanishing sphere volume with increasing dimensions!!!!!!!!!!

Inflation and the Multiverse (I)EN

- Our (observable) Universe has an entropy bound $S_{dS} \leq |\Lambda|^{-3/4} \sim 10^{90}$.
- Milky way black hole entropy: $S_{MWBH} \sim 10^{100} \sim$ googol.
- The number of observers with masses about $M \sim 10^2 kg$, and height $1m$ is bound by Bekenstein formula

$$\mathcal{N}_{obs} \leq S_{Bek} = e^{2\pi MR} \leq e^{10^{45}}$$

Remarkly, the number of an intelligent brain observer is about $\mathcal{N} \sim 10^{10^{16}} >> \mathcal{N}_{ds-Vacua}$, a brain seems to have more configurations than the expected possible geometries of the Universe(Multiverse).

Inflation and the Multiverse (I)EN

- Our (observable) Universe has an entropy bound $S_{dS} \leq |\Lambda|^{-3/4} \sim 10^{90}$.
- Milky way black hole entropy: $S_{MWBH} \sim 10^{100} \sim$ googol.
- The number of observers with masses about $M \sim 10^2 kg$, and height $1m$ is bound by Bekenstein formula

$$\mathcal{N}_{obs} \leq S_{Bek} = e^{2\pi MR} \leq e^{10^{45}}$$

Remarkly, the number of an intelligent brain observer is about $\mathcal{N} \sim 10^{10^{16}} >> \mathcal{N}_{ds-Vacua}$, a brain seems to have more configurations than the expected possible geometries of the Universe(Multiverse).

En la inflación, un campo escalar en modelos de inflación cáotica eterna $V(\phi) = 0{,}5m^2\phi^2$ tiene un comportamiento de MAS modulado en amplitud

$$\phi(t) = \Phi(t) \cdot \sin(mt), \quad \text{with} \quad \Phi(t) = \frac{M_p}{\sqrt{3\pi}mt} \sim \frac{M_p}{2\pi\sqrt{3\pi}N} \tag{24}$$

and N is the number of oscillations since the end of inflation!

Inflation and the Multiverse (II)Ben

How many Universes in the Multiverse? [3], i.e., ¿cuántos universos hay en el Multiverso? Respuestas posibles (A.Linde et al.; cf. ideas de A. Vilenkin y A. Guth):

- Slow-roll inflation provides $\mathcal{N}_{efolds} \sim e^{e^{3N}}$. If $N = 60$ (usual hypothesis), then $\mathcal{N} \sim e^{e^{180}} \sim 10^{10^{77}} \sim 10^{S_{BH}(1M_{\odot})}$.
- (Chaotic) Eternal inflation provides, $N = cS_{dS} \sim c/m$: $\mathcal{N} \sim e^{e^{3N}} \sim e^{e^{3c/m}} \sim 10^{10^{10^7}} >> 10^{\text{googol}}$
- Cosmological constant universes, Λ non-zero, imply $S_p \approx H^{\frac{1+3\omega}{1+\omega}} |\Lambda|^{-\frac{1+3\omega}{2+2\omega}} = H^{3/2} |\Lambda|^{-3/4} \rightarrow \mathcal{N} \sim 10^{10^{82}}$.
- Universes in the string landscape (M is the number of dS vacua):

$$\mathcal{N} \approx \sum_{j=1}^{M} \exp\left(|\Lambda|^{-3/4}\right) \sim e^{0,75M}, \quad \text{Popularly } M \sim 10^{500}, \mathcal{N} \sim 10^{10^{375}}$$

Other options: $M \sim 10^{272000}$ (F-theory), $M \sim 10^{15}$. $\Lambda \sim 10^{-122}$, $N_{max} \sim log|\Lambda| \sim 290$, and $N(efolds) \sim 70$.

Inflation energy scale and tensor-to-scalar ratio

General inflation models use ODE like the Lame or Mathieu equations (H is a friction term), or elliptic functions. Moreover, the energy scale of inflation is related to the tensor-to-scalar perturbation ratio.

Inflation energy scale

$$V^{1/4} \approx \left(\frac{3\pi^2}{2} r\mathcal{P}_s\right)^{1/4} M_P = \left(\frac{r}{0{,}01}\right)^{1/4} \cdot 1{,}06 \cdot 10^{16}\text{GeV} \qquad (25)$$

Primordial gravitational waves triggered by inflation in the Early Universe (even in the beginning of time or "before" the Big Bang) are a hot target of current and future research!

References for the last 2 slides:

1. *Primordial Gravitational Waves from Cosmic Inflation*. Mike S. Wang. Mathematical Tripos Part III Essay 75 (colour in electronic version) Submitted 5th May 2017, updated 26th August 2017.
2. *Towards the Theory of Reheating After Inflation*. Lev Kofman, Andrei Linde, Alexei A. Starobinsky.

Bohr-logy in XD

2d Bohr energy levels and radius

In any 2d Universe, the Bohr-Rydberg energy and radius are:

$$E = Ke^2\left(\frac{1}{2} + \ln(n)\right), \quad r_n = na_0(2d) = \frac{n\hbar}{\sqrt{mKe}}, n \in \mathbb{Z} \tag{26}$$

For gravitational case, take $Ke^2 \to GMm$.

Dd Bohr energy levels and radius

In any Dd Universe, the Bohr-Rydberg energy and radius are:

$$E = \frac{D-4}{2(D-2)}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{\frac{D-2}{4-D}} n^{-\frac{2D-4}{4-D}} e^{\frac{4}{4-D}}, \quad r_n(D) = \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{D-4}} e^{\frac{2(2-D)}{(4-D)(D-2)}} n^{\frac{2}{4-D}} \tag{27}$$

For gravitational case, take $Ke^2 \to GMm$.

Gravity in XD

Newton in higher dimensions

In any Dd ($D = d + 1$) Universe (spacetime), the gravitational force, the gravitational field, the potential energy and the potential read

$$F_N = G_D \frac{Mm}{r^{D-2}} = G_{d+1} \frac{Mm}{r^{d-1}} \quad g = G_D \frac{M}{r^{D-2}} = G_{d+1} \frac{M}{r^{d-1}} \tag{28}$$

$$U_g = G_D \frac{Mm}{r^{D-3}} = G_{d+1} \frac{Mm}{r^{d-2}}$$

$$\mathrm{V}_g = G_D \frac{2\Gamma((D-1)/2)M}{\pi^{(D-3)/2} r^{D-3}} = G_{d+1} \frac{2\Gamma(d/2)M}{\pi^{(d-2)/2}(d-2) r^{d-2}} \tag{29}$$

Dilution of gravity: $G_N(4d) = G_D/V_D$. $g^2_{YM}(4d) = g^2_{YM,d} R^{-d}$,

$M_P = \sqrt{hc/G} \sim 10^{-5} g, M_W = \frac{h}{c}\sqrt{\Lambda/3} \sim 10^{-65} g. Gh\Lambda/c^3 \sim 10^{-121}$.

$M_U = \frac{c^2}{G}\sqrt{3/\Lambda} \sim 10^{56} g$, $M'_W = \sqrt[3]{\frac{h^2\sqrt{\Lambda/3}}{G}} \sim 10^{-25} g$. $M_U/M_W \sim 10^{121}$

Uniform sphere total energy in XD

Gravitational/electric energy for uniform density sphere

$$U_g = -G_{d+1}\frac{d(d-2)M^2}{d+2}\frac{1}{R^{d-2}} = -G_D\frac{(D-1)(D-3)M^2}{D+1}\frac{1}{R^{D-3}} \quad (30)$$

with $D = d+1$ and M the mass. If $M = \rho V$, then

$$U_g = -G_{d+1}\frac{d(d-2)\pi^d\rho^2}{(d+2)\Gamma^2\left(\frac{d}{2}+1\right)}R^{d+2} = -G_D\frac{(D-1)(D-3)\pi^d\rho^2}{(D+1)\Gamma^2\left(\frac{D+1}{2}+1\right)}R^{D+1} \quad (31)$$

Trickery for the electric case: substitute $G_n \to K_C$, $M \to Q$, with $Q = \rho V$.

Entropic gravity in XD

Hypothesis for $D = d + 1$ hyperdimensional Newton gravity:

- $A(\Sigma) = \dfrac{2\pi^{d/2} R^{d-1}}{\Gamma(d/2)}$.
- $N = A(\Sigma)/L_p^{d-1}$, $E = mc^2 = Nk_B T/2$, $\Delta S = 2\pi k_B \dfrac{mc\Delta x}{\hbar}$.

Then:

$$F = -T\frac{\Delta S}{\Delta x} = -G_d \frac{Mm}{R^{d-1}}$$

where

Hyperdimensional gravitational Newton constant

$$G_d = \frac{2\pi^{1-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) c^3 L_p^{d-1}}{\hbar} = 2\pi^{1-d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\frac{c^3 L_p^{d-1}}{\hbar}$$

$$\phi_g = -\Omega_d G_d M; \quad \phi_e = \Omega_d K_d Q = Q/\varepsilon_0(d) \;\; \Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$$

Zeta function and gravitational constant

Take the functional equation:
$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)$ for $1 - s = d/2$. Then, since

$$G_d = 2\pi^{1-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \frac{c^3 L_p^{d-1}}{\hbar}$$

you can derive that

Gravitational constant and zeta function

$$G_d = \frac{\pi 2^{d/2} \zeta\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi d}{4}\right)} \left(\frac{c^3 L_p^{d-1}}{\hbar}\right) \tag{32}$$

Classical atom instability

Hypothesis: non quantum atoms are unstable. To prove this:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2e^2a^2}{3c^3}(\text{Larmor formula})$$

$$\frac{Ke^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v^2 = \frac{Ke^2}{mR},\ E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ke^2}{R} = -\frac{Ke^2}{R}$$

$$dt = -\frac{1}{\frac{dE}{dt}}\frac{dE}{dR}dR = -\frac{3}{16}\frac{m^2c^3R^2dR}{(E_0R_0)^2} \rightarrow \int_0^{t_c} dt = -\frac{3m^2c^3}{(E_0R_0)^2}\int_{R_0}^{0} R^2dR$$

We finally get:

Decay time of classical em-atoms

$$t_c = \frac{m^2c^3R_0}{16E_0^2} = \frac{m^2c^3R_0^3}{4K_Ce^4} = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2m^2c^3R_0^3}{e^4} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-11}s \sim 20ps$$

Gravitational music equations

Binary system with $M = M_1 + M_2$, $f_{GW} = 2f_{orb}$, $M_c = (M_1 M_2)^{3/5}/M^{1/5}$ yields (GR):

$$L_{GW} = \frac{2^5}{5}\left(\frac{G^{7/3}}{c^5}\right)[M_c \pi f_{GW}]^{10/3}$$

$$\dot{f}_{GW} = \left(\frac{96}{5}\right)\left(\frac{G^{5/3}}{c^5}\right)\left(\pi^{8/3}\right)(f_{GW})^{11/3}$$

$$t_c = \frac{2}{2^8}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{-5/3}[\pi f_{GW}]^{-8/3}$$

Neutrino oscillations: the equations

Supposing transitions between different neutrino species, via $|\nu_\alpha\rangle$ to $|\nu_\beta\rangle$

Neutrino oscillations

$$\mathcal{A} = P(\alpha \to \beta) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle|^2 = \left| \sum_j U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-i \frac{m_j^2 c^3 L}{2\hbar E}} \right|^2 \tag{33}$$

$$\mathcal{A} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \mathrm{Re}\left(U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\beta j} U^*_{\beta j}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 c^3 L}{4\hbar E}\right) +$$

$$+2 \sum_{i>j} \mathrm{Im}\left(U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\beta j} U^*_{\beta j}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 c^3 L}{2\hbar E}\right) \tag{34}$$ with

Neutrino transition matrix

$$|\nu_\beta\rangle = U^\alpha{}_\beta |\nu_\alpha\rangle$$

Multitemporal physics(I)

Usual 1T newtonian physics: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla U(r)$, assuming conservative forces only. Let $W = F_i dx^i$ the work form, in a ND manifold $V \subset \mathbb{R}^N$, with submanifold nd $M \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$. $y^I = y^I(x)$, $\omega = f_I dy^I$ implies $dy^I = \frac{\partial y^I}{\partial x^i} dx^i$, and also

$$W = F_i(x)dx^i \to F_I = f_I(y(x))\frac{\partial y^I}{\partial x^i}$$

Single time manifold approach

$$f_I = m\delta_{IJ}\frac{d\dot{y}^J}{dt} = m\delta_{IJ}\frac{d^2y^I}{dt}$$

$$F_i = m\delta_{IJ}\frac{d\dot{y}^I}{dt}\frac{\partial y^J}{\partial x^i} = m\delta_{IJ}\frac{d^2y^I}{dt^2}\frac{\partial y^J}{\partial x^i}$$

Multitemporal physics(II)

Going multitemporal with timelike coordinates $(t) = t^\alpha$, $\alpha = 1, \cdots, m$

Multitime tensorial Newton 2nd law

$$f_I = m\delta_{IJ}\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 y^J}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}$$

$$f_i = m\delta_{IJ}\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 y^I}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\frac{\partial y^J}{\partial x^i}$$

with anti-trace $F_i = F^\alpha_{i\alpha}$ given by the tensor 1-form

$$F^\sigma_{i\alpha} = m_{IJ}\delta^{\sigma\beta}\frac{\partial^2 y^I}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\frac{\partial y^J}{\partial x^i}$$

(Multitime) Kinetic energy

$$T = E_k = \frac{1}{2}m\delta_{IJ}\dot{y}^I\dot{y}^J \quad T = \frac{1}{2}\delta_{IJ}\delta^{\alpha\beta}\frac{\partial y^I}{\partial t^\alpha}\frac{\partial y^J}{\partial t^\beta}$$

Multitemporal physics(III)

Single time Euler-Lagrange 1st order EOM

$$\delta S = 0 \rightarrow E(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0$$

(Multitime) Euler-Lagrange EOM

$$\delta S = 0 \rightarrow E(L) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial D_\alpha x^i}\right) = 0$$

(Multitime) Euler-Lagrange EOM: nth order

$$E(L) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\frac{\partial L}{\partial \partial_t^j x^i}\right) = 0 \quad E(L) = \sum_{J=0}^{n}(-1)^J\left(\frac{\partial^J L}{\partial D_\alpha^J x^i}\right) = 0$$

Multitemporal physics(IV)

Single time Hamilton EOM

Define 1T hamiltonian as $H = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L$, and $p_i = \partial L / \partial \dot{x}^i$, then

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

Multi-time Hamilton EOM

Define nT hamiltonian as $H = D_\alpha x^i \frac{\partial L}{\partial D_\alpha x^i} - L$, and $p_i^\alpha = \partial L / \partial D_\alpha x^i$, then

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} \qquad \frac{\partial p_i^\beta}{\partial t^\alpha} = -\delta^\beta{}_\alpha \frac{\partial H}{\partial x^i}$$

Detecting exoplanets(I)

Astrometry

$$\theta = \left(\frac{M_p}{M_\star}\right)\left(\frac{a}{r}\right) \approx \frac{10^{-3}}{r(pc)}\left(\frac{P(yr)}{M_\star(\odot)}\right)^{2/3} M_p(J)$$

Here

$$V_r(m/s) \approx \frac{30}{(P(yr))^{1/3}} \frac{M_p(J)}{M_\star(\odot)^{2/3}} \sin(i)$$

Detecting exoplanets(II)

Microlensing

$$R_E^2 = \frac{4GMD}{c^2}, \quad D = \frac{D_{ds}D_d}{D_s}, \quad t_0 = \frac{R_E}{v_e}$$

$$t_0 = \frac{2D_L\theta_E}{v_L} = \frac{2\theta_L}{v_L}\sqrt{\frac{4GM(1 - D_s/D_s)}{c^2 D_d}}$$

The impact parameter u reads

$$A = \frac{u^2 + 2}{u(u^2 + 4)^{1/2}}$$

Detecting exoplanets(III)

Direct detection

$$B \geq \frac{\lambda D}{r} \approx \left(\frac{\lambda}{10\mu mu}\right)\left(\frac{D}{10pc}\right)\left(\frac{r}{1AU}\right)^{-1} m$$

Detecting exoplanets(IV)

Radial velocity

$$K_\star = \left(\frac{2\pi G_N}{P}\right)^{1/3} \frac{M_p\left(M_\star + M_p\right)^{1/3}\sin(i)}{M_\star}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Also, it is usually written with $M_\star + M_P \simeq M_\star$ as follows

$$M_p \sin(i) = \left(\frac{P}{2\pi G}\right)^{1/3} K_\star M_\star^{2/3}\sqrt{1-e^2}$$

Bohr-like quantization of magnetic monopoles

Hypothesis:

- Magnetic and electric field of a point monopole charge with $Q_m = g$ and dual charge $e_g = eg/c = egv/c^2$.

$$F_e + F_m = 2F_{m,e} = F_c \leftrightarrow \frac{2K_c e_g}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow \frac{c^{-2}eg}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{mvR}{2} = \frac{n\hbar}{2}$$

Then, $eg = \dfrac{n\hbar c^2}{2K_C}$(Q.E.D.). Equivalently: $\dfrac{g}{e} = \dfrac{nc}{2\alpha_e} \leftrightarrow \alpha_e = \dfrac{nce}{2g}$

- Dirac-Zwanziger-Schwinger dyonic quantization $Z = (e, g)$:

$$e_1 g_2 - e_2 g_1 = 2\pi n\hbar c$$

From this, it follows that $Q = ne$, or $Q = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) e$ and

$$M = \sqrt{\frac{K_C}{G_N}} e = \frac{\hbar c^2}{g} \sqrt{\frac{1}{K_C G_N}}.$$

The existence of magnetic monopoles implies the quantization of Q_e.

Doctor Strange in the Multiverse of Madness!