“Ejercicios resueltos”

$$A\hbar = mc^3$$

1. ¿Cuál es la densidad de un objeto esférico gravitante para que un objeto se sienta ingrávido (no significa gravedad cero) bajo la acción de su giro en el ecuador?

Igualando la fuerza gravitacional a la centrípeta:

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

Y ahora, usando la densidad

$$M = \rho V = \rho\frac{4\pi R^3}{3}$$

y la relación de la velocidad en la periferia del objeto planetario o estelar (o compacto) con la frecuencia angular del MCU

$$v = \omega R$$

entonces, sustituyendo, tras operar nos queda

$$\frac{4\pi G\rho}{3} = \omega^2 \leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}$$

o bien

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

o

$$\rho = \frac{3\pi f^2}{G}$$

o también

$$\boxed{f = \sqrt{\frac{G\rho}{3\pi}} \leftrightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$$

Para $T = 24h = 86400s$, $\rho \approx 18{,}9 kg/m^3$. Para $T = 10h$, $\rho \approx 109 kg/m^3$.

2. Cálculo de la energía de satelización de un satélite de masa m_s, desde una altura h_0 hasta una altura orbital de h_{orb}.

La energía de satelización es la energía (cinética) necesaria para impulsar un satélite en un campo gravitacional $g(r)$ desde una altura inicial h_0 y radio $r_A = R_p + h_0$ hasta una altura final $h_f = h_{orb}$ y radio r_B. Como el campo gravitacional es conservativo, la energía mecánica ha de conservarse, y por tanto:

$$E_m(r_A) = E_m(r_B)$$

Pero $E_m(r_A) = E_c + E_p(r_A) = E_s + E_p(A)$, y entonces

$$E_s = E_m(B) - E_p(A)$$

Sustituyendo los valores oportunos tenemos que

$$E_s = -\frac{GMm_s}{2r_B} + \frac{GMm_s}{r_A}$$

Despejando

$$\boxed{E_s = GMm_s\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2r_B}\right) = GMm_s\left(\frac{1}{R_p + h_0} - \frac{1}{2(R_p + h_{orb})}\right)}$$

No se debe confundir esta energía de satelización E_s con la energía de transferencia orbital que es meramente la diferencia de las energías orbitales mecánicas entre dos órbitas en $r = r_A$ y $r = r_B$:

$$\Delta E_{trans} = E_m(final) - E_m(inicial) = \frac{GMm_s}{2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

La energía orbital de transferencia puede ser positiva o negativa, pero la energía de satelización es siempre POSITIVA. También puede calcularse fácilmente lo contrario: la energa necesaria para que un satélite abandone una órbita. El método es similar:

$$E_a + E_m(ini) = E_m(final) = 0$$

de donde $E_a = -E_m(ini)$.

3. Energía de desatelizacin. Supongamos el caso contrario a satelizar/enlazar un satélite en una órbita. ¿Qué energía debemos suministrar para que se vaya "al infinito" y no vuelva? Sencillo. Aplicando de nuevo la conservación de la energía mecánica, y suponiendo que en el infinito se parar, y no tendrá energía potencial, se tiene que:

$$E_m(A) + E_c = E_m(B) = 0$$

de donde de forma sencilla se obtiene que

$$E_d = -E_m(A)$$

En síntesis, la energía de desatelización es igual a la energía mecánica orbital, cambiada de signo. Equivalemente, la energía de desatelización es igual a la energía mecánica orbital total en valor absoluto.