Herramientas fismáticas

The Strange Doctor
Space-time Foundation & Quantum TimeLord Virtual Academy

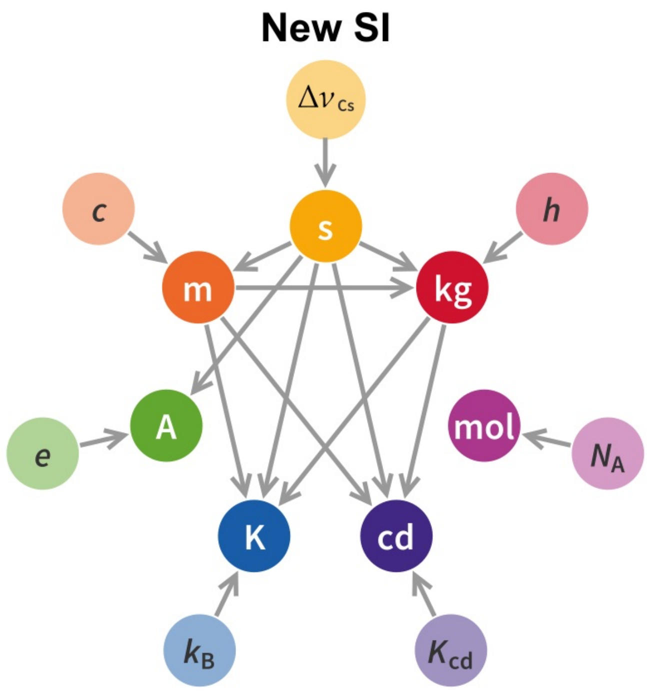
Multiverse of Madness

Resumen

Resumen con LaTeX en español de los temas de herramientas de la Fismática, Física de 2º de Bachillerato.

Defining constant	*Symbol*	*Numerical value*	*Unit*
hyperfine transition frequency of caesium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
Planck constant	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	lm W^{-1}

Table 1: The seven defining constants of the SI, and the seven corresponding symbols, numerical values, and units



Índice

$$\boxed{ab = a \quad b + a \wedge b}$$

$$\boxed{X = X^{A} E_{A}}$$

1. Magnitudes y dimensiones

1.1. Magnitudes y números

Magnitudes

En Ciencia, se llama *magnitud* a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multi-vectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de campo escalar, vectorial, tensorial, ... Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\varphi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\varphi: X \rightarrow Y$, con $y = \varphi(X)$.

1.2. El nuevo S.I. (circa 2020)

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs-133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón, e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $f(\mathrm{Cs}-133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiación de 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

1.3. Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1\,\mathrm{Hz} = \frac{f(\mathrm{Cs}-133)}{9192631770}\,\mathrm{s}^{-1}} \Leftrightarrow \boxed{1\,\mathrm{s} = \frac{9192631770}{f(\mathrm{Cs}-133)}} \qquad (1)$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $f(\mathrm{Cs}-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $f(\mathrm{Cs}-133)$ como sigue:

$$\boxed{1\,\mathrm{m} = \frac{c}{299792458}\,\mathrm{s} = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{f(\mathrm{Cs}-133)} \approx 30{,}663319\frac{c}{f(\mathrm{Cs}-133)}} \qquad (2)$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015\cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $\mathrm{J\cdot s}$ ó $\mathrm{J/Hz}$, o bien $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1\,\mathrm{kg} = \frac{h}{6{,}62607015\cdot 10^{-34}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = \frac{(299792458)^2}{(6{,}62607015\cdot 10^{-34})(9192631770)}\frac{h\,f}{c^2} = 1{,}4755214\cdot 10^{40}\frac{h\,f_{Cs}}{c^2}} \qquad (3)$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A de nido usando la constante de nida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e =$ $1{;}602176634 \quad 10^{19}$ C(A s) como ja. Entonces, el amperio se de ne mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1\text{A} = \frac{e}{1{;}602176634 \quad 10^{19}} \text{s}^{1} = \frac{e \quad f(Cs \quad 133)}{(1{;}602176634 \quad 10^{19})(9192631770)} \quad 6{;}789687 \quad 10^{8} e \quad f_{Cs}} \tag{4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), de nido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, jada al valor $N_A = 6{;}02214076 \quad 10^{23}$ mol ^{1}. De aquí, un mol se de ne mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1\text{mol} = \frac{6{;}02214076 \quad 10^{23}}{N_A}} \tag{5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especi que.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el grado kelvin K de nido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B =$ $1{;}380649 \quad 10^{23}$ como ja, o bien en unidades dimensionales del S.I. como kg m ^{2} s ^{2} K ^{1}. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se de ne mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1\text{K} = \frac{1{;}380649 \quad 10^{23}}{k_B} \text{kg} \quad \text{m}^2 \quad \text{s}^2 = \frac{1{;}380649 \quad 10^{23}}{(6{;}62607015 \quad 10^{34})(9192631770)} \frac{h \quad f}{k_B} \quad 2{;}2666653 \frac{h \quad f_{Cs}}{k_B}} \tag{6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I ó J . La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, de nida como la cantidad que, tomando como valor numérico jo la e cacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmenes por vatio lm W ^{1}, o bien en candelas por estereoradián entre vatio cd sr W ^{1}, o también cd sr kg ^{1} m ^{2} s ^{3}, donde el kilogramo, el metro, el segundo se de nen mediante las constantes h; c; f_{Cs}. Con esta de nición, tenemos que la candela es igual, usando K_{cd}; h; c; f_{Cs} a:

$$\boxed{1\text{cd} = \frac{K_{cd}}{683} \frac{\text{kg} \quad \text{m}^2}{\text{s}^3 \quad \text{sr}} = \frac{K_{cd} h \quad [\quad f_{Cs}]^2}{(6{;}62607015 \quad 10^{34})(9192631770)^2 683} \quad 2{;}61483010 \quad 10^{10} K_{cd} h [\quad f_{Cs}]^2} \tag{7}$$

1.4. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, $1\text{Å} = 10^{-10}$ m o angström, 1 pc o parsec $= 3{,}26$ años-luz (ly) $= 3{,}086 \times 10^{10}$ m, unidad astronómica ($1UA = 1{,}496 \times 10^{11}$ m), milla, milla náutica, pulgada, ...
- Masa M, $1 utm = 9{,}8$ kg, $1g = 10^{-3}$ kg, $1u \approx 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.
- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr, ...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA, ...)
- Temperatura absoluta, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa : candela.
- Cantidad de sustancia o materia: el mol.
- Ángulo plano (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales (^{o}), gradianes (grados centesimales ^{g}). 2π rad $= 360° = 400^g$.
- Ángulo sólido : estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = 1dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa: M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa: M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa: M/L.
- Densidad (volúmica) de carga: Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga: Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga: Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal: $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}$ N, kilopondo o kilogramo-fuerza $1kp = 9{,}81$ N. Dimensiones MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza: $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1N \cdot m$.

- Trabajo o energía: $W = Fd$, ML^2T^{-2}. 1kg m^2 s^{-2} = 1J, julio. Otras: foes, FOE = 10^{51}erg, ergios 1J = 10^7ergs, 1kWh = 3,6MJ, 1eV = 1,602 10^{-19}J 160zJ.
- Momento de inercia: ML^2.
- Momento angular: ML^2T^{-1}.
- Potencia: ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=1J/s. 1 C.V.=735,4W.
- Presión: $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.
- Tensión superficial: M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad, $ML^{-1}T^{-1}$. Pa s. 1 poise 0,1Pa s.
- Número de onda: k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas: MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías: D. 1D = 1m^{-1}. C = L^{-1}.
- Flujo luminoso, lúmenes: lm. $_L$. Dimensiones $_L$.
- Luminancia: B: $_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=10^4cd/m^2.
- Iluminación: E: $_L/L^2$. lux. Otras: 1phot = 10^4lux.
- Módulo del campo gravitacional: g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional: V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $_g$ = L^3/T^2.
- Coeficientes de dilatación: $^{-1}$, en K^{-1}.
- Calor específico: L^2T^{-2} $^{-1}$, J/(kg K).
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: MLT^{-3} $^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios, ML^2T^{-2}.
- Entropía S: ML^2T^{-2} $^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica: $L^{-3}M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro: F/m.
- Carga eléctrica: culombio, C. Q = IT. 1e 1,602 10^{-19}C.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. 1V = Nm/C = 1J/1C.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $_E$ = $ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio: F.
- Módulo de la densidad de corriente: j. IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios .
- Resistividad eléctrica: $_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. m, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica: $_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $^{-1}$ m^{-1}.

- Permeabilidad magnética: $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética: B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla 1T. 1 gauss $= 10^{-4}$T.
- Flujo del campo magnético: $\Phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber $= 1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell $= 10^{-8}$Wb.
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico: D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético: H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted $= 10^3/4\pi$ A/m.
- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio = 1 Ci $\approx 3{,}7 \times 10^{10}$ desintegraciones/s, o también 1 Ci $= 6{,}14 \times 10^{-14}$ mol/s.

1.5. Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6{,}674 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.
- Constante universal de los gases: $R = 8{,}314 J/Kmol = 0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón: $m_e = 0{,}511 keV/c^2 \approx 9{,}11 \times 10^{-31} kg$.
- Masa del protón: $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1{,}673 \times 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón: $m_n \approx m_p = 1{,}675 \times 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad: $g(d) = g \approx 9{,}81 m/s^2$.
- Radio terrestre: $R_\oplus = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4°C, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.
- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2{,}89 \times 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3kg.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5{,}67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2{,}88 \times 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $F = N_A e = 96485 C/mol$.

2. Vectores

Un vector es una magnitud orientada con ciertas propiedades abstractas. Se puede escribir un vector en 2d, 3d,. . . En componentes cartesianas:

Vector 3d

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{8}$$

Suma y resta de vectores

Sean $\vec{a}, \vec{b}$ dos vectores en componentes cartesianas:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} \tag{9}$$

Multiplicación de vector y escalar

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\vec{v}$ es un vector, entonces

$$\vec{V} = \lambda\vec{v} = \lambda v_x\vec{i} + \lambda v_y\vec{j} + \lambda v_z\vec{k} \tag{10}$$

Se pueden definir varias operaciones entre vectores 3d. Las dos más importantes son el productos escalar y el producto vectorial. En otras dimensiones, con otros objetos geométricos disponibles, hay varios tipos de productos adicionales naturales.

Producto escalar

La definición en componentes cartesianas del producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$, es como sigue

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{11}$$

La definición geométrica usa la definición de módulos o magnitud/longitud del vector:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{12}$$

donde $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ es el módulo o norma del vector $\vec{a}$, y similarmente con $\vec{b}$.

El producto escalar define ortogonalidad y permite también calcular proyecciones:

Proyección de un vector $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$$\text{proy}(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\varphi \tag{13}$$

También permite calcular vectores unitarios a uno dado. Por ejemplo:

$$\vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \tag{14}$$

Producto vectorial 3d

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{15}$$

El producto vectorial no es conmutativo ni asociativo en general. Permite definir paralelismo, y, además, satisface la relación

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \tag{16}$$

y la identidad

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 \tag{17}$$

3. Fórmulas útiles

Usando el binomio de Newton, se tiene una aproximación cuando un sumando es pequeño:

Aproximación de Newton

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2); \quad x << 1 \tag{18}$$

Volumen y área de la esfera, área del círculo y longitud de circunferencia:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{19}$$

$$S_E = 4\pi R^2 = \frac{dV}{dR} \tag{20}$$

$$A_C = \pi R^2 \tag{21}$$

$$L_C = 2\pi R = \frac{dA_C}{dR} \tag{22}$$

El teorema fundamental de la trigonometría señala que

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

La densidad es un concepto genérico interesante. Se pueden definir la densidad de masa, carga, número, energía,. . . por unidad de longitud, superficie, volumen, hipervolumen, . . .

4. Operadores vectoriales diferenciales

Gradiente

Sea una función escalar $\varphi(x; y; z)$. El vector gradiente se escribe de la forma siguiente:

$$\vec{V} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \tag{23}$$

Divergencia

Sea una función vectorial $\vec{A}(x; y; z)$. El escalar divergencia se escribe de la forma siguiente:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{24}$$

Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{v}(x; y; z)$ es otro vector $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{curl}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right)\hat{\imath} - \left(\partial_x v_z - \partial_z v_x\right)\hat{\jmath} + \left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right)\hat{k} \tag{25}$$

Propiedades para funciones suficientemente suaves o regulares:

- $\nabla \times \nabla f = \text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$.
- $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \text{div}(\text{rot}\vec{v}) = 0$.
- Operador laplaciano vectorial: $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) = \nabla^2\vec{A} + \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \Delta\vec{A} + \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$.
- Operador laplaciano escalar: $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \text{div}(\text{grad}\,\phi) = \nabla^2 \phi$.

5. Cinemática

Para una partícula puntual, el vector de posición y desplazamiento se define como

Vector posición y desplazamiento

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{26}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(0) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \tag{27}$$

Se definen la velocidad y aceleración medias como las variaciones temporales

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v_x^m\vec{i} + v_y^m\vec{j} + v_z^m\vec{k} \tag{28}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = a_x^m\vec{i} + a_y^m\vec{j} + a_z^m\vec{k} \tag{29}$$

Los límites de la velocidad media y la aceleración media, en un instante muy pequeño, son la velocidad y aceleración instantáneas:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}} \tag{30}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}} \tag{31}$$

Cuando el movimiento es circular, el espacio angular es relacionado con el lineal mediante $s = \varphi R$, $v = \omega R$, $a_t = \alpha R$. También se puede definir la velocidad angular como $\omega = d\varphi/dt$, la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$, y sus versiones medias e instantáneas. Además, $a^2 = a_t^2 + a_c^2$, en donde $a_c = \omega^2 R = v^2/R$ es la aceleración centrípeta. La operación inversa de la derivación es la integración. Y tiene unas reglas sencillas para algunas funciones (como potencias, trigonométricas, productos, cocientes, logaritmos o exponenciales). Si tenemos la aceleración, podemos recuperar la velocidad integrando:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t)dt \tag{32}$$

Si tenemos la velocidad, podemos recuperare la posición integrando:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt \tag{33}$$

Esto también ocurre en los movimientos circulares análogos:

$$\omega = \omega_0 + \int \alpha\, dt \tag{34}$$

y

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega(t)dt \tag{35}$$

Integrar la posición, produce una variable dinámica llamada en inglés absement (absition):

$$A = A_0 + \int x(t)dt \tag{36}$$

o más generalmente en forma vectorial

$$\vec{A}(t) = \vec{A}(t) + \int \vec{r}(t)dt \tag{37}$$

Así, el espacio o vector de posición en general es la derivada del absemnt:

$$\vec{r}(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \tag{38}$$

Derivar la aceleración, produce una variable llamada jerk en inglés:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} \tag{39}$$

Existen variantes de derivación o integreación de orden superior del jerk y del absement, y en dimensiones físicas superiores o inferiores.

6. Dinámica

Las 3 leyes de Newton son las leyes fundamentales de la Dinámica de partículas y sistema de partículas a bajas energías y grandes objetos.

Ley fundamental de la Dinámica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \tag{40}$$

La resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación del momento $\vec{p} = m\vec{v}$. Las unidades de las fuerzas son los newton (N), o las dinas. $1N = 10^5$ dinas También existe el kilopondio (kp). $1kp = 9,8N$.

Supongamos un sistema de puntos materiales formado por masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Se define el centro de masa como el punto con vector de posición:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \tag{41}$$

La velocidad del centro de masas se define derivando:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \tag{42}$$

y la aceleración similarmente:

$$\vec{a}_G = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{f}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M} \tag{43}$$

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{F} = M\vec{a}_G$. Para un punto material, también se definen el momento angular y momento de una fuerza(torque), respectivamente, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{44}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \tag{45}$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{46}$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i') \tag{47}$$

donde $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i' = m_i \vec{v}_i'$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \tag{48}$$

$$\vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \tag{49}$$

El trabajo o energía se define como la cantidad

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}} \tag{50}$$

La energía de una partícula libre está relacionada con su momento. Es la llamada energía cinética (no relativista o relativista). Una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante satisface

$$\vec{p} = m\vec{v} \leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{51}$$

Multiplicando

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = 0 \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} \equiv E_c \tag{52}$$

La energía cinética fue introducidad originalmente por Descartes bajo el nombre de *vis viva*. La energía cinética de un sistema de partículas se puede relacionar también con la energía del centro de masas y la energía de las partículas alrededor de éste, o simplemente la suma de las energías de cada partícula, ya que es una cantidad aditiva ($E_c(tot) = \sum_i E_c(i)$).

Se llama potencia a la energía por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{53}$$

La potencia se mide en vatios (W), $1W = 1J/s$. $1kWh = 3{,}6MJ$ es unidad de energía. Si $W = 0$, la energía cinética del punto permanece constante. En un sistema de partículas, si el trabajo total(fuerzas interiores y exteriores) es nulo, la energía cinética del sistema se mantiene constante. En choques o colisiones de partículas, estas ideas son muy importantes. Si el choque es elástico, se conservarán el momento lineal y la energía cinética de las partículas. En un choque inelástico, el momento lineal se conservará, pero no se conservará la energía cinética de las partículas.

Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes. En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos externos son cero. Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$. Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \frac{3}{10}MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$.

- Caja paralelepípedo: $I = \frac{1}{12}M\ \ a^2 + b^2\ $.

El momento de inercia permite simpli car la Dinámica de rotación. Así, el análogo de $F = ma$ es $\tilde{\ } = I$, donde $L = I\,!$. Además, podemos de nir la energía cinética de rotación como $E_c(\mathrm{rot}) = \frac{1}{2}I\,!^2 = \frac{1}{2}L\,!$. El trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el sólido ha girado un ángulo se puede determinar mediante la integral del momento de fuerzas o torque sobre el ángulo:

$$W = \int_i^f M d' = \int_i^f \ d' \tag{54}$$

7. Fluidos

7.1. Estática o hidrostática

Ecuación general para la variación de presión $p = F{=}S$ de un uido:

$$p_1 \quad p_2 = \int_1^2 \ gdh \tag{55}$$

El principio de Arquímides señala que el empuje es igual al peso del uido desplazado o desalojado:

$$E = \ _f V g = m_f g \tag{56}$$

El peso aparente el igual al peso menos el empuje: $P_a = P \quad E$. En equilibrio, $P_a = 0$, y el objeto ota con $P = E$. Si $E > P$, el objeto asciende, y si $E < P$, el objeto se hunde en el uido. La presión hidrostática es $P_h = \ _f g\ h$. El principio de Pascal señala que $F_1{=}S_1 = F_2{=}S_2$, porque la presión se transmite de forma instantánea a todos los puntos de un uido. Se llama tensión super cial a la cantidad $= \frac{F}{2L}$. La presión capilar se de ne como

$$p = \frac{2}{r} \tag{57}$$

y la capilaridad en un tubo de radio r pequeño, y altura h, se calcula con la ecuación

$$h = \frac{2\ \ \cos}{rg} \tag{58}$$

7.2. Dinámica de uidos

Ecuación de continuidad

En un tubo, para un uido incompresible, se cumple $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Teorema de Bernouilli

En un uido, se mantiene constante la siguiente cantidad:

$$p_i + \ gh_i + \frac{1}{2}\ v_i^2 = p_f + \ gh_f + \frac{1}{2}\ v_f^2 \tag{59}$$

i.e.

$$\boxed{p + \ gh + \frac{1}{2}\ v^2 = \text{constant}} \tag{60}$$

La velocidad de un uido por los ori cios de un depósito se puede estimar como $v = \sqrt{2gh}$.
La fuerza de viscosidad de un uido sigue la ecuación

$$F = \ S\frac{v}{r} \tag{61}$$

y donde es el coe ciente de viscosidad.

Ley de Poiseuille

El volumen V de líquido que atraviesa un tubo cuando la viscosidad no es despreciable en regimen laminar se calcula mediante la expresión

$$V = \frac{p \quad p^0}{8 \; L} r^2 t \tag{62}$$

El número de Reynolds es la cantidad adimensional

$$R = -rv \tag{63}$$

La fuerza de resistencia F_R que un uido ofrece al movimiento de un objeto es:

- Esfera pequeña y uido en regimen laminar. Aplica la ley de Stokes:

$$F_R = 6 \quad rv$$

- Objeto cualquiera en cualquier regimen:

$$F_R = kS\frac{v^2}{2}$$

donde k es un factor de forma dependiente de la forma y geometría del objeto.

7.3. Deformaciones y elasticidad

El alargamiento longitudinal está relacionado con el módulo de Young y el “strain”:

$$\boxed{Y \frac{L}{L} = \frac{F}{S}}$$

La contracción transversal d por tracción longitudinal es

$$\boxed{\frac{L}{L} = \quad \frac{d}{d}}$$

y donde es el coe ciente o módulo de Poisson. La variación de volumen por tracción longitudinal es igual a

$$\frac{V}{V} = \frac{L}{L}(1 \quad 2 \;)$$

La deformación por esfuerzo tangencial es

$$= \frac{1}{G}\frac{F}{S}$$

donde G es el módulo de rigidez. La comprensión o variación de volumen debida a las fuerzas de presión sobre toda la super cie del cupero (sólido, líquido, gas):

$$K\frac{V}{V} = \quad p$$

donde K es el módulo de elasticidad de volumen. Los módulos anteriores están relacionados entre sí, mediante la expresión:

$$K = \frac{Y}{3(1 \quad 2 \;)}$$

A. Greek alphabet

A.1. Densidad e hiperesferas/hiperobjetos

Densidades de masa:

$$= \frac{M}{V}; \quad = \frac{M}{S}; \quad = \frac{M}{L}$$

Densidades de carga:

$$= \frac{Q}{V}; \quad = \frac{Q}{S}; \quad = \frac{Q}{L}$$

Densidades de energía:

$$= \frac{E}{V}; \quad = \frac{E}{S}; \quad = \frac{E}{L}$$

Densidades de partículas:

$$= \frac{N}{V}; \quad = \frac{N}{S}; \quad = \frac{N}{L}$$

Densidades de cantidad de sustancia (concentración):

$$= \frac{n}{V}; \quad = \frac{n}{S}; \quad = \frac{n}{L}$$

Para una N esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2 R^2}{N} V_N(R) \tag{64}$$

$$V_N(R) = V_{N \ 1}(R) \ R \ B \left(\frac{N+1}{2}; \frac{1}{2} \right) \tag{65}$$

$$V_N(R) = R \sqrt{\ } \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\frac{N+}{2} + 1} V_{N \ 1}(R) \tag{66}$$

$$A_N(R) = \frac{2 ^{\frac{N+1}{2}}}{\frac{N+1}{2}} R^N \tag{67}$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \tag{68}$$

$$A_{N+1}(R) = 2 \ R V_N(R) \tag{69}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \tag{70}$$

$$V_0(R) = 1; \tag{71}$$

$$A_0(R) = 2; \tag{72}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R); \tag{73}$$

$$A_{N+1}(R) = (2 \ R) V_N(R) \tag{74}$$

$$V_n(R) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2 \ e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^n; \quad \text{si} \quad n \, ! \, 1 \tag{75}$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N;R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} R^N \tag{76}$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) = \log\pi + 2\log R \tag{77}$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}\log V(N;R) = \frac{\log\pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) \tag{78}$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p. Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{79}$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del "taxicab", o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!}R^n \tag{80}$$

$$V_n^{\infty}(R) = (2R)^n \tag{81}$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i, definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1,\ldots,p_n} = \left\{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\right\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

B. Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo K algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tienen soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es C, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es cas complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ru ni y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas. . .

B.1. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con $a; b; c$ númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión (a 0 sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c \quad b}{a}} \tag{82}$$

B.2. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x \quad = \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $= \; b^2 \quad 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coe cientes reales. Si los coe cientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida “en general”. Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{\quad c{=}a}; \quad x \quad = \quad \sqrt{\quad c{=}a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \; ! \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \quad \frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \frac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

B.3. Ecuación de tercer grado (cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

B.3.1. Cardano method (I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a “discriminant” whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the “irreducible case” of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- “Eliminate the square term” by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution $x = 1$ in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

B.3.2. Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

B.3.3. Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$
$$ST = -Q$$
$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$
$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \le m, n \le 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that $m + n$ must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$
$$y_2 = Sw + Tw^2$$
$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions.
Q.E.D.

B.3.4. Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of $Q; R$, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

B.4. Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

B.4.1. Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A; c = B; e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}; \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

B.4.2. Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.

- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.

- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces $z_1; z_2$. Esto da dos soluciones:

$$z = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = \frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada z, $z_1; z_2$, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

B.4.3. General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots $x_1; x_2; x_3; x_4$ for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1;2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \tag{83}$$

$$x_{3;4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \tag{84}$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \tag{85}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \tag{86}$$

and where

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{87}$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \tag{88}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \tag{89}$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \tag{90}$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for "Q", any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

C. Notación científica y potencias de 10

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	; : unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol=10^{100}, googolplex=$10^{\text{googol}} = 10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	; : unit/unidad
$10^{\ 1} = 1{=}10 = 0{;}1$	deci (d)
$10^{\ 2} = 1{=}10^2 = 0{;}01$	centi (c)
$10^{\ 3} = 1{=}10^3 = 0{;}001$	mili (m)
$10^{\ 6} = 1{=}10^6 = 0{;}000001$	micro ( )
$10^{\ 9} = 1{=}10^9 = 0{;}000000001$	nano (n)
$10^{\ 12} = 1{=}10^{12} = 0{;}000000000001$	pico (p)
$10^{\ 15} = 1{=}10^{15} = 0{;}000000000000001$	femto (f)
$10^{\ 18} = 1{=}10^{18} = 0{;}000000000000000001$	atto (a)
$10^{\ 21} = 1{=}10^{21} = 0{;}000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{\ 24} = 1{=}10^{24} = 0{;}000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{\ 27} = 1{=}10^{27} = 0{;}000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{\ 30} = 1{=}10^{30} = 0{;}000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Regla mnemotécnica: PEZYRQ-fazyrq para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$\boxed{Z = x{:}abcdef \quad 10^{\ n}}$$

donde x , 0, y $abcdef$ son números arbitrarios.

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

D. Análisis de datos estadísticos. Teoría, gráficas e informe de resultados (avanzado)

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.

Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.

2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:

1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.

2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.

1. Statistical estimators.

Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{91}$$

Absolute error:

$$\boxed{\epsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{92}$$

Relative error:

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{\overline{X}} \cdot 100} \tag{93}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\sigma_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{94}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{95}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.

Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{96}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1 \to n$:

$$\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma^2_{x;n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = s_n \tag{97}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{98}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\varepsilon_{\overline{x};n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}{n} \tag{99}$$

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\sigma^2(s^2) = \sigma^2_{\sigma^2} = \sigma^2(\sigma^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \tag{100}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\sigma_{s^2} = \sqrt{\sigma^2_{\sigma^2}} = \sigma(\sigma^2) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{101}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma] \rightarrow P \approx 68{,}3\,\% \approx \frac{1}{3} \tag{102}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma] \rightarrow P \approx 95{,}4\,\% \approx \frac{1}{22} \tag{103}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x} - 3\sigma; \overline{x} + 3\sigma] \rightarrow P \approx 99{,}7\,\% \approx \frac{1}{370} \tag{104}$$

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x} - 4\sigma; \overline{x} + 4\sigma] \rightarrow P \approx 99{,}994\,\% \approx \frac{1}{15787} \tag{105}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x} - 5\sigma; \overline{x} + 5\sigma] \rightarrow P \approx 99{,}99994\,\% \approx \frac{1}{1744278} \tag{106}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x} - 6\sigma; \overline{x} + 6\sigma] \rightarrow P \approx 99{,}9999998\,\% \approx \frac{1}{506797346} \tag{107}$$

For a given confidence level $C{:}L$: (generally 90 %, 95 %, 98 %, 99 %), the interval width will be: $1;645 \quad ; 1;96 \quad ; 2;326 \quad ; 2;576 \quad$.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \quad x$ and $y \quad y$. Furthermore, define the variable $q = x \quad y$. The error in q would be:

$$\boxed{"(q) = \; x + \; y} \tag{108}$$

Example. $M_1 = 540 \quad 10g$, $M_2 = 940 \quad 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \quad 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \quad 1g$. Then, we have:

$M = M_1 \quad m_1 + M_2 \quad m_2 = 1311g$ as liquid mass.

$M = \; M_1 + \; m_1 + \; M_2 + \; m_2 = 32g$, as total liquid error.

$M_0 = 1311 \quad 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \quad x = x \; 1 \quad \frac{x}{x}$$

$$y \quad y = y \; 1 \quad \frac{x}{x}$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{q}{jqj} = \frac{x}{jxj} + \frac{y}{jyj} = jyj \; x + jxj \; y} \tag{109}$$

If $q = x{=}y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{q}{jqj} = \frac{x}{jxj} + \frac{y}{jyj} = jyj \; x + jxj \; y} \tag{110}$$

3C. Error in powers.

With $x \quad x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{q}{jqj} = jnj\frac{x}{jxj} = jnjjx^{n \quad 1}j \; x \tag{111}$$

and if $g = \; f(x)$, with the error of x being $\; x$, you get

$$\boxed{f = j\frac{df}{dx}j \; x} \tag{112}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{q = \; f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1} \left(\frac{@f}{@x_i} \; x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{@f}{@x_1} \; x_1\right)^2 + \quad + \left(\frac{@f}{@x_n} \; x_n\right)^2}} \tag{113}$$

or, equivalently, the errors are combined in quadrature (via standard deviations):

$$\boxed{q = \; f(x_1; : : : ; x_n) = \sqrt{\left(\frac{@f}{@x_1}\right)^2 \; {}^2 x_1 + \quad + \left(\frac{@f}{@x_n}\right)^2 \; {}^2 x_n}} \tag{114}$$

since

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{115}$$

for independent random errors (no correlations). Some simple examples are provided:
1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = |k|\,\delta x}$.
2nd. $q = x \pm \cdots \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \cdots + \delta y + \cdots}$.
3rd. $q = k x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1| \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n| \frac{\delta x_n}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided, the best estimator for the combined mean is a weighted mean with the variance, i.e.,

$$\overline{X}_{best} = \frac{\displaystyle\sum_{i=n} \frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\displaystyle\sum_{i=1} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{116}$$

The best standard deviation from the different combined measurements would be:

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{117}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. There, the standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{118}$$

D.1. Linear fits, least squares

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let $(X_i; Y_i)$ from $i = 1; \ldots; n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with $Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.

We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha;\beta) = \sum_{i=1} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

Writing $y = \alpha + \beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} \tag{119}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=i}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{120}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_i \varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{121}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}\varepsilon_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{122}$$

$$s_\alpha^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\right]\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{123}$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{124}$$

Alternatively, all the above can be also written as follows. Define

$$S_x = \sum x_i \tag{125}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{126}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{127}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{128}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{129}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \varepsilon$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}\quad \hat{\alpha} = \frac{1}{n}S_y - \hat{\beta}\frac{1}{n}S_x \tag{130}$$

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n(n-2)}\left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2(nS_{xx} - S_x^2)\right] \tag{131}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{ns_\varepsilon^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{132}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2\frac{1}{n}S_{xx} \tag{133}$$

and where the correlation coefficient is

$$r = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nS_{xx} - S_x^2)(nS_{yy} - S_y^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(n-1)s_x s_y} \tag{134}$$

or equivalently

$$r = \frac{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1} (y_i - \bar{y})^2}} \tag{135}$$

and where s_x, s_y are the corrected sample standard deviations of x, y. To know what $s_{x,y}$ is in a more general setting, we note that the sample mean vector $\bar{\mathbf{x}}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1} x_{ij}, \quad j = 1, \dots, K.$$

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_K \end{bmatrix} \tag{136}$$

The sample covariance matrix is a “K”-by-“K” matrix

$$\mathbf{Q} = \left[q_{jk} \right]$$

with entries

$$q_{jk} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1} \left(x_{ij} - \bar{x}_j \right) (x_{ik} - \bar{x}_k)$$

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$\mathbf{Q} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1} (\mathbf{x}_{i:} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{i:} - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where ˆ; ˆ are. The t-vallue has a Student’s t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for ˆ:

$$\in \left[b - s_b t_{n-2}, b + s_b t_{n-2} \right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\alpha$, where t_{n-2} is the $1-\frac{\alpha}{2}$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\alpha = 0{,}05$, then the C.L. is 95 %.

Similarly, the confidence interval for the intercept coe cient ˆ is given by

$$\in \left[b - s_b t_{n-2}, b + s_b t_{n-2} \right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\alpha$, where as before above

$$s_b = s_b \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \left(\sum_{i=1} b_i^2 \right) \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$