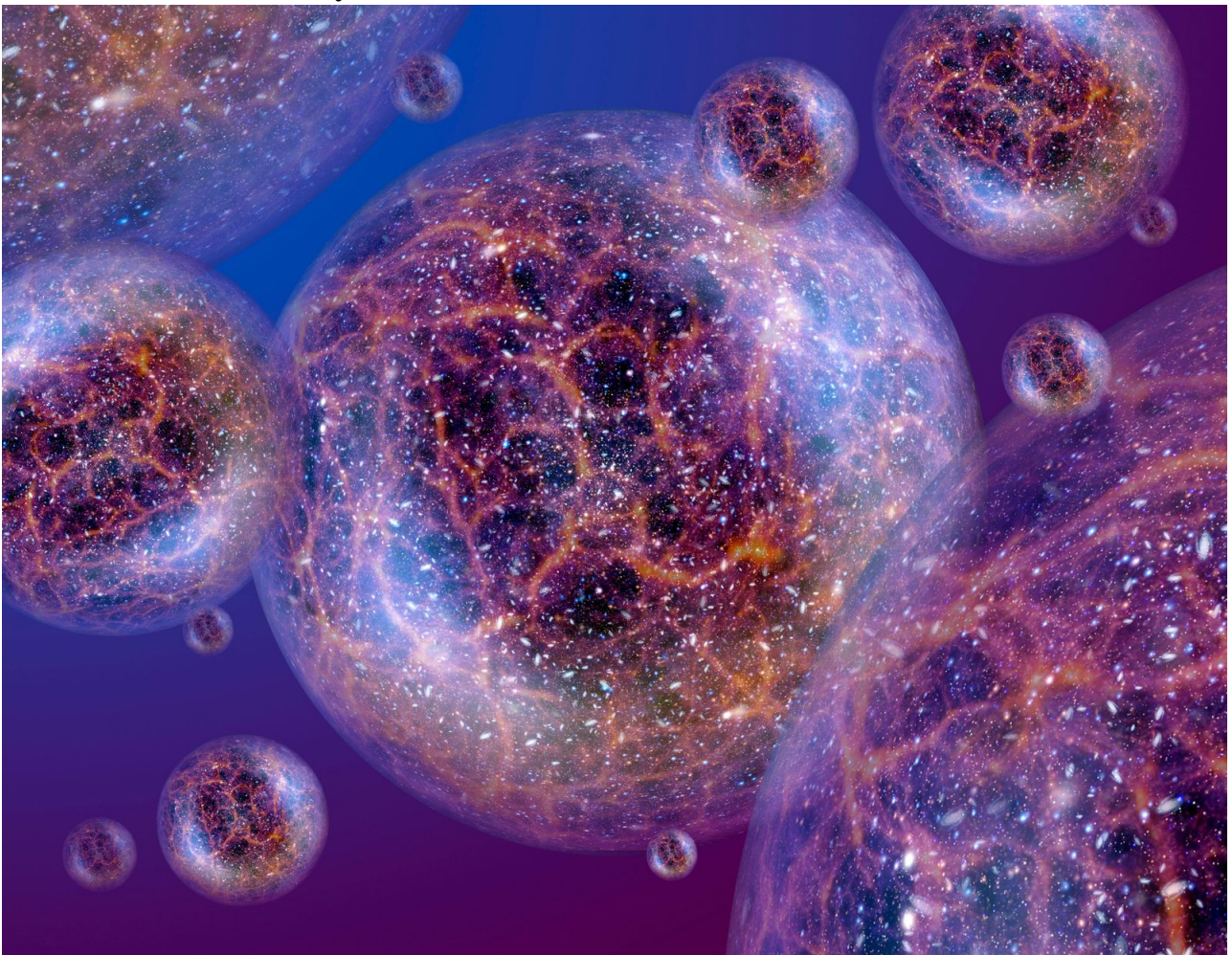


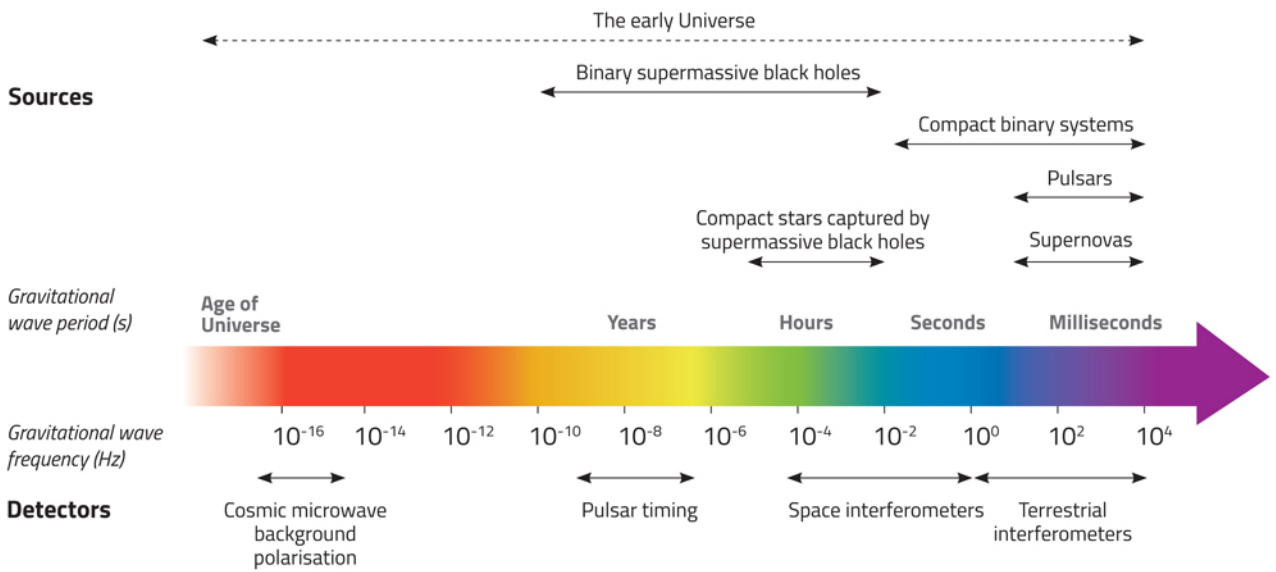
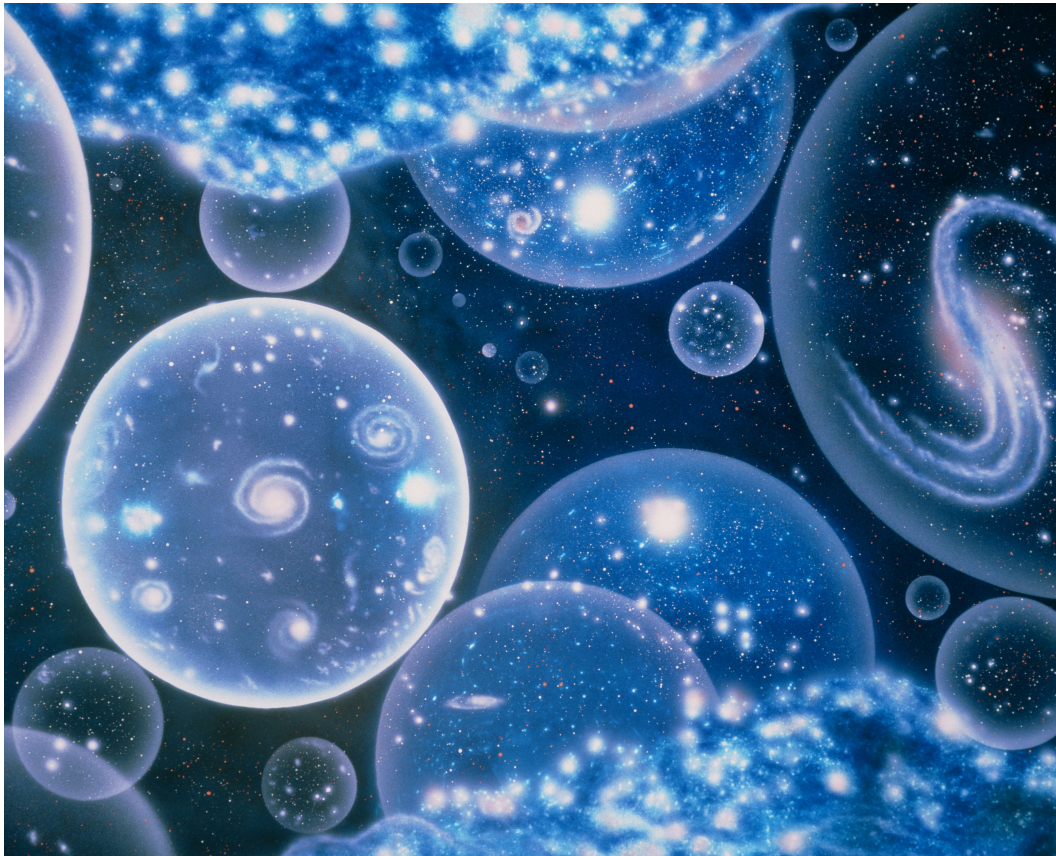
Física 2° Bachillerato: The Teen Tocho

The Strange Doctor

Space-time Foundation & Quantum TimeLord Virtual Academy

Beyond all the Universes: Multiverse of Madness





Índice general

1. Herramientas físicas	7
1.1. Magnitudes y dimensiones	7
1.1.1. Magnitudes y números	7
1.1.2. El nuevo S.I. (circa 2020)	8
1.1.3. Magnitudes base en el S.I.	9
1.1.4. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones	10
1.1.5. Otras constantes universales	13
1.2. Vectores	13
1.3. Fórmulas útiles	14
1.4. Operadores vectoriales diferenciales	15
1.5. Cinemática	15
1.6. Dinámica	17
1.7. Fluidos	18
1.7.1. Estática o hidrostática	18
1.7.2. Dinámica de fluidos	19
1.7.3. Deformaciones y elasticidad	20
2. Campos	25
2.1. Tipos de campos	26
2.2. Campo gravitacional	27
2.2.1. Leyes de Kepler	27
2.2.2. Ley de gravitación universal	29
2.2.3. Campo y potencial gravitacional	29
2.2.4. Energía orbital y energía de satelización	31
2.2.5. Velocidad de escape y velocidad orbital	31
2.2.6. Relaciones binarias en gravitación	32
2.2.7. Energía orbital (caso elíptico)	32
2.2.8. Velocidades cósmicas	33
2.2.9. Teorema de Gauss gravitacional	35
2.2.10. Expresiones de varios campos	36
2.2.11. Teoría gravitacional relativista: relatividad general	38
2.3. Campo eléctrico	40
2.3.1. Ley de Coulomb	41
2.3.2. Potencial y energía potencial eléctricos	41
2.3.3. Teorema de Gauss	42
2.3.4. Ejemplos de campos y potenciales eléctricos	42
2.4. Campo magnético	44
2.4.1. Propiedades generales	44
2.4.2. Fuerzas magnéticas	44
2.4.3. Selector de velocidades. Ciclotrón	44
2.4.4. Ley de Ampère. Campos de hilos infinitos, espiras y solenoides	45
2.5. Campos electromagnéticos e inducción EM	46
2.5.1. Transformadores	46

2.5.2.	Ley de Ohm	47
2.5.3.	Condensadores	47
2.6.	Otros campos	47
2.6.1.	El campo nuclear	47
2.6.2.	El campo de Higgs	48
2.6.3.	Inflación y Cosmología	49
2.6.4.	Y más allá, más campos.	49
2.6.5.	Otras mecánicas generalizadas	49
3.	M.A.S. y ondas	57
3.1.	M.A.S.	58
3.2.	Movimiento ondulatorio y ecuaciones de onda	61
3.3.	Ondas: propiedades y fenómenos	63
3.3.1.	Velocidad y aceleración de vibración	63
3.3.2.	Energía en ondas armónicas	63
3.3.3.	Velocidades de propagación en medios	65
3.4.	Ondas sonoras	66
3.5.	Polarización	67
3.6.	Reflexión y refracción	67
3.7.	Interferencia	67
3.7.1.	Caso 1: interferencia de ondas de igual frecuencia	68
3.7.2.	Caso 2: interferencia de ondas esféricas de igual frecuencia	69
3.8.	Difracción	70
3.9.	Ondas de ondas: cuerdas, tubos y armónicos	70
3.9.1.	Soluciones a la ecuación de ondas	70
3.9.2.	Armónicos y condiciones de contorno	71
3.9.3.	Ondas estacionarias en cuerdas	72
3.9.4.	Armónicos	73
3.10.	Efecto Doppler	73
3.11.	Resonancia	76
3.12.	Ecuaciones de ondas, campos y partículas (no entra en EvAU)	76
3.12.1.	Ecuaciones escalares	76
3.12.2.	Ecuaciones espinoriales	76
3.12.3.	Ecuaciones de fotones (masivos)	77
3.12.4.	Campo de Rarita-Schwinger: spin 3/2	77
3.12.5.	Gravitones: espín 2	77
3.12.6.	Otras ecuaciones de campo más exóticas o complicadas	78
3.13.	Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell (no entra en EvAU)	78
3.14.	Ecuaciones de Yang-Mills(no entra en EvAU)	81
3.15.	Gravitational waves/ondas gravitacionales (no entra en EvAU)	82
4.	Óptica física y geométrica	93
4.1.	Óptica física	94
4.1.1.	Reflexión	95
4.1.2.	Refracción	95
4.1.3.	Prisma óptico(ampliación)	96
4.1.4.	Lámina de caras plano-paralelas	97
4.2.	Óptica geométrica	98
4.2.1.	Dioptrios esféricos	100
4.2.2.	Espejos esféricos y planos	103
4.2.3.	Lentes y lentes delgadas	104
4.2.4.	El ojo humano	106
4.2.5.	Microscopios, telescopios y sistemas compuestos	107

5. Física moderna del siglo XX	109
5.1. Relatividad especial	109
5.1.1. Postulados y transformaciones	109
5.1.2. Efectos relativistas	110
5.2. Física cuántica	114
5.2.1. La hipótesis de Planck	114
5.2.2. Espectro electromagnético	116
5.2.3. Dualidad onda-partícula	118
5.2.4. Principio de indeterminación	120
5.2.5. Efecto fotoeléctrico	121
5.2.6. Efecto Schwinger	122
5.3. Sección eficaz y física nuclear. Reactores	123
5.4. Física nuclear y de partículas	124
5.4.1. Modelos atómicos	124
5.4.2. Tipos de desintegración radiactiva	124
5.4.3. Reacciones nucleares	126
5.4.4. Ley de desintegración	127
5.4.5. Defecto de masa y energía de ligadura	127
5.4.6. Actividad	128
5.5. Física de partículas y Cosmología	128
5.5.1. Física de partículas	128
5.5.2. Cosmología	129
6. Extras: Termología y Electrónica	133
6.1. Termología	134
6.1.1. Dilataciones	134
6.1.2. Cambios de estado o transiciones de fase	134
6.1.3. Magnitudes termodinámicas	135
6.1.4. Aplicaciones a gases ideales	136
6.1.5. Otras relaciones termodinámicas	137
6.1.6. Condiciones de equilibrio de un sistema	139
6.1.7. Teoría cinética de gases	139
6.1.8. Escalas de temperatura	140
6.2. Electrónica	145
6.2.1. Leyes de Kirchhoff	145
6.2.2. Conceptos de emisión y recepción de radiofrecuencias	145
A. Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados)	147
B. Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.	149
C. Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4	153
C.0.1. Ecuaciones de primer grado	153
C.0.2. Ecuación de segundo grado	153
C.0.3. Ecuación de tercer grado(cúbica)	154
C.0.4. Ecuación de cuarto grado(cuártica)	158
D. Formulario	161

Capítulo 1

Herramientas físicas

Vector calculus in \mathbb{R}^3		Forms in \mathbb{R}^3
functions	=	0-forms
↓ ∇		↓ d
vector fields	$\xrightarrow{\text{work } \omega}$	1-forms
↓ curl		↓ d
vector fields	$\xrightarrow{\text{flux } \Phi}$	2-forms
↓ div		↓ d
functions	$\xrightarrow{\text{density } \rho}$	3-forms

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$X = X^A E_A$$

1.1. Magnitudes y dimensiones

1.1.1. Magnitudes y números

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...

Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un “espacio” abstracto o espacio “target” se le asocia un número, vector, tensor, ..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ... Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \rightarrow Y$, con $y = \phi(X)$.

1.1.2. El nuevo S.I. (circa 2020)

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una “constante fundamental universal”. Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs - 133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h , y la velocidad de la luz en el vacío c , son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e , corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\epsilon_0\hbar = e^2/4\pi\hbar c\epsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs - 133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiación de 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W , y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de un observador estándar, medido en lúmenes lm , a una frecuencia de 540 THz.

1.1.3. Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T . La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$1\text{Hz} = \frac{\Delta f(Cs - 133)}{9192631770} s^{-1} \leftrightarrow 1s = \frac{9192631770}{\Delta \nu(Cs - 133)} \quad (1.1)$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L . La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs - 133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458\text{m/s}$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs - 133)$ como sigue:

$$1\text{m} = \frac{c}{299792458} s = \frac{9192631770}{299792458} \frac{c}{\Delta f(Cs - 133)} \approx 30,663319 \frac{c}{\Delta f(Cs - 133)} \quad (1.2)$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M . La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz , o bien $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$1\text{kg} = \frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{m}^2} s = \frac{299792458^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{c^2} = 1,4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2} \quad (1.3)$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I . La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1,602176634 \times 10^{-19} C$ ($1C = 1A \cdot 1s$) como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$1A = \frac{e}{1,602176634 \times 10^{-19}} s^{-1} = \frac{e\Delta f(Cs - 133)}{(1,602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6,789687 \cdot 10^8 e\Delta f_{Cs} \quad (1.4)$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n . La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A , fijada al valor $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$1mol = \frac{6,02214076 \cdot 10^{23}}{N_A} \quad (1.5)$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ . La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$1K = \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2,2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B} \quad (1.6)$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L , o también I_v ó \mathcal{J} . La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd , definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd} , ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entre vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$1cd = \frac{K_{cd} kg \cdot m^2}{683 s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2,61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2 \quad (1.7)$$

1.1.4. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L , metro, $1\text{Å} = 10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec = 3,26 años-luz (lyr) = $3,086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1,496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M , $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1,66 \cdot 10^{-27}kg$.
- Tiempo T : años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA, ...)

- Temperatura absoluta Θ , kelvin K . Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_v : candela.
- Cantidad de sustancia o materia n : el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales $^\circ$, gradianes (grados centesimal). $2\pi rad = 360^\circ = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω : estereoradián (sr).
- Superficie: L^2 . Metros cuadrados. Hectáreas ha . $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3 . Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3 .
- Densidad (superficial) de masa M/L^2 .
- Densidad (lineal) de masa M/L .
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3 . $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2 . $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L . $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3} , L^{-2} , L^{-1} .
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2} . m/s^2 . Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3} .
- Absent/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1} . rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2 . Dimensiones T^{-2} .
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondio o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2} .
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1} .
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2} . $1Nm$.
- Trabajo o energía: $W = Fd$, ML^2T^{-2} . $1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2 .
- Momento angular ML^2T^{-1} .
- Potencia ML^2T^{-3} . Vatio: $1W=1J/s$. 1 C.V.=735,4W.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal= N/m^2 . Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.
- Tensión superficial M/T^2 .
- Coeficiente de viscosidad η , $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise $\approx 0,1Pa \cdot s$.

- Número de onda k , L^{-1} .
- Intensidad de ondas MT^{-3} , vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D . $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm . ϕ_L . Dimensiones ϕ_L .
- Luminancia B : $\phi_L L^2$. cd/m^2 , 1 stilb = $10^4 cd/m^2$.
- Iluminación E : ϕ_L/L^2 . lux. Otras: $1phot = 10^4 lux$.
- Módulo del campo gravitacional g . LT^{-2} .
- Potencial gravitacional V_g , L^2T^{-2} , cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1} , en K^{-1} .
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2} . Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2} .
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ϵ : $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m .
- Carga eléctrica: culombio C . $Q = IT$. $1e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}C$.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C , newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C , dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F .
- Módulo de la densidad de corriente j : IL^{-2} .
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω .
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- Permeabilidad magnética μ . $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m , henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética B : $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss = $10^{-4}T$.
- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber = $1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell = $10^8 Wb$.
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H .
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D : ITL^{-2} , culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H : IL^{-1} , amperio partido (por) metro. 1 oersted = $10^3/4\pi A/m$.
- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1} , mol partido por segundo. También más frecuentemente: 1 curio = $1 Ci \approx 3,7 \cdot 10^{10} desintegraciones/s$, o también $1 Ci = 6,14 \cdot 10^{-14} mol/s$.

1.1.5. Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6,674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\epsilon_0$. $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m .
- Constante universal de los gases $R = 8,314 J/Kmol = 0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón $m_e = 0,511 keV/c^2 \approx 9,11 \cdot 10^{-31} kg$.
- Masa del protón $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1,673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón $m_n \approx m_p = 1,675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad $g_0(\oplus) = g_{\oplus} = 9,81 m/s^2$.
- Radio terrestre $R_{\oplus} = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4°C, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.
- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2,89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3 kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5,67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2,88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96472 C/mol$.

1.2. Vectores

Un vector es una magnitud orientada con ciertas propiedades abstractas. Se puede escribir un vector en 2d, 3d, ... En componentes cartesianas:

Vector 3d

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1.8)$$

Suma y resta de vectores

Sean \vec{a}, \vec{b} dos vectores en componentes cartesianas:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k} \quad (1.9)$$

Multiplicación de vector y escalar

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, y \vec{v} es un vector, entonces

$$\vec{V} = \lambda \vec{v} = \lambda v_x \vec{i} + \lambda v_y \vec{j} + \lambda v_z \vec{k} \quad (1.10)$$

Se pueden definir varias operaciones entre vectores 3d. Las dos más importantes son el producto escalar y el producto vectorial. En otras dimensiones, con otros objetos geométricos disponibles, hay varios tipos de productos adicionales naturales.

Producto escalar

La definición en componentes cartesianas del producto escalar \vec{a} y \vec{b} , es como sigue

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.11)$$

La definición geométrica usa la definición de módulos o magnitud/longitud del vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi \quad (1.12)$$

donde $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ es el módulo o norma del vector \vec{a} , y similarmente con \vec{b} .

El producto escalar define ortogonalidad y permite también calcular proyecciones:

Proyección de un vector \vec{a} sobre \vec{b}

$$\text{proy}(\vec{a} \rightarrow \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos \varphi \quad (1.13)$$

También permite calcular vectores unitarios a uno dado. Por ejemplo:

$$\vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{r}{|\vec{r}|} \quad (1.14)$$

Producto vectorial 3d

El producto vectorial de dos vectores \vec{a} y \vec{b} es otro vector \vec{c} :

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

El producto vectorial no es conmutativo ni asociativo en general. Permite definir paralelismo, y, además, satisface la relación

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \quad (1.16)$$

y la identidad

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 \quad (1.17)$$

1.3. Fórmulas útiles

Usando el binomio de Newton, se tiene una aproximación cuando un sumando es pequeño:

Aproximación de Newton

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathcal{O}(x^2), \quad x \ll 1 \quad (1.18)$$

Volumen y área de la esfera, área del círculo y longitud de circunferencia:

$$V_E = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1.19)$$

$$S_E = 4\pi R^2 = \frac{dV}{dR} \quad (1.20)$$

$$A_C = \pi R^2 \quad (1.21)$$

$$L_C = 2\pi R = \frac{dA_C}{dR} \quad (1.22)$$

El teorema fundamental de la trigonometría señala que

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

La densidad es un concepto genérico interesante. Se pueden definir la densidad de masa, carga, número, energía, ... por unidad de longitud, superficie, volumen, hipervolumen, ...

1.4. Operadores vectoriales diferenciales

Gradiente

Sea una función escalar $\varphi(x, y, z)$. El vector gradiente se escribe de la forma siguiente:

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.23)$$

Divergencia

Sea una función vectorial $\vec{A}(x, y, z)$. El escalar divergencia se escribe de la forma siguiente:

$$\text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.24)$$

Rotacional

El rotacional de un campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ es otro vector \vec{V} :

$$\vec{V} = \text{rot} \vec{v} = \text{curl} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

Propiedades para funciones suficientemente suaves o regulares:

- $\nabla \times \nabla f = \text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$.
- $\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = \text{div}(\text{rot} \vec{v}) = 0$.
- Operador laplaciano vectorial: $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A} + \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \Delta \vec{A} + \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$.
- Operador laplaciano escalar: $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \text{div}(\text{grad} \phi) = \nabla^2 \phi$.

1.5. Cinemática

Para una partícula puntual, el vector de posición y desplazamiento se define como

Vector posición y desplazamiento

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1.26)$$

$$\Delta \vec{r} = r_2 - r_1 = r(t) - r_0 = r(t) - r(0) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \quad (1.27)$$

Se definen la velocidad y aceleración medias como las variaciones temporales

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v_x^m \vec{i} + v_y^m \vec{j} + v_z^m \vec{k} \quad (1.28)$$

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = a_x^m \vec{i} + a_y^m \vec{j} + a_z^m \vec{k} \quad (1.29)$$

Los límites de la velocidad media y la aceleración media, en un instante muy pequeño, son la velocidad y aceleración instantáneas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (1.30)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad (1.31)$$

Cuando el movimiento es circular, el espacio angular es relacionado con el lineal mediante $s = \varphi R$, $v = \omega R$, $a_t = \alpha R$. También se puede definir la velocidad angular como $\omega = d\varphi/dt$, la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$, y sus versiones medias e instantáneas. Además, $a^2 = a_t^2 + a_c^2$, en donde $a_c = \omega^2 R = v^2/R$ es la aceleración centrípeta. La operación inversa de la derivación es la integración. Y tiene unas reglas sencillas para algunas funciones (como potencias, trigonométricas, productos, cocientes, logaritmos o exponenciales). Si tenemos la aceleración, podemos recuperar la velocidad integrando:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t)dt \quad (1.32)$$

Si tenemos la velocidad, podemos recuperar la posición integrando:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t)dt \quad (1.33)$$

Esto también ocurre en los movimientos circulares análogos:

$$\omega = \omega_0 + \int \alpha dt \quad (1.34)$$

y

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega(t)dt \quad (1.35)$$

Integrar la posición, produce una variable dinámica llamada en inglés absement (absition):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \int x(t)dt \quad (1.36)$$

o más generalmente en forma vectorial

$$\vec{\mathcal{A}}(t) = \vec{\mathcal{A}}_0 + \int \vec{r}(t)dt \quad (1.37)$$

Así, el espacio o vector de posición en general es la derivada del absement:

$$\vec{r}(t) = \frac{d\vec{\mathcal{A}}(t)}{dt} \quad (1.38)$$

Derivar la aceleración, produce una variable llamada jerk en inglés:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} \quad (1.39)$$

Existen variantes de derivación o integración de orden superior del jerk y del absement, y en dimensiones físicas superiores o inferiores.

1.6. Dinámica

Las 3 leyes de Newton son las leyes fundamentales de la Dinámica de partículas y sistema de partículas a bajas energías y grandes objetos.

Ley fundamental de la Dinámica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad (1.40)$$

La resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo es igual a la variación del momento $\vec{p} = m\vec{v}$. Las unidades de las fuerzas son los newton (N), o las dinas. $1N = 10^5 \text{dinas}$. También existe el kilopondio (kp). $1kp = 9,8N$.

Supongamos un sistema de puntos materiales formado por n masas, m_1, m_2, \dots, m_n . Se define el centro de masa como el punto con vector de posición:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (1.41)$$

La velocidad del centro de masas se define derivando:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \quad (1.42)$$

y la aceleración similarmente:

$$\vec{a}_G = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{f}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M} \quad (1.43)$$

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{R} = M\vec{a}_G$. Para un punto material, también se definen el momento angular y momento de una fuerza (torque), respectivamente, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (1.44)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \quad (1.45)$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (1.46)$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*) \quad (1.47)$$

donde $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i^* = m_i \vec{v}_i^*$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \quad (1.48)$$

$$\vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \quad (1.49)$$

El trabajo o energía se define como la cantidad

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_{\gamma} dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.50)$$

La energía de una partícula libre está relacionada con su momento. Es la llamada energía cinética (no relativista o relativista). Una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante satisface

$$\vec{p} = m\vec{v} \leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (1.51)$$

Multiplicando

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right) = 0 \rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante} = E_c \quad (1.52)$$

La energía cinética fue introducida originalmente por Descartes bajo el nombre de *vis viva*. La energía cinética de un sistema de partículas se puede relacionar también con la energía del centro de masas y la energía de las partículas alrededor de éste, o simplemente la suma de las energías de cada partícula, ya que es una cantidad aditiva ($E_c(\text{tot}) = \sum_i E_c(i)$).

Se llama potencia a la energía por unidad de tiempo:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1.53)$$

La potencia se mide en vatios (W). $1W = 1J/s$. $1kWh = 3,6MJ$ es unidad de energía. Si $W = 0$, la energía cinética del punto permanece constante. En un sistema de partículas, si el trabajo total (fuerzas interiores y exteriores) es nulo, la energía cinética del sistema se mantiene constante. En choques o colisiones de partículas, estas ideas son muy importantes. Si el choque es elástico, se conservarán el momento lineal y la energía cinética de las partículas. En un choque inelástico, el momento lineal se conservará, pero no se conservará la energía cinética de las partículas.

Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes. En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos externos son cero. Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$. Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \frac{3}{10}MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$.
- Caja paralelepípedo: $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$.

El momento de inercia permite simplificar la Dinámica de rotación. Así, el análogo de $\vec{F} = m\vec{a}$ es $\vec{\tau} = I\alpha$, donde $L = I\omega$. Además, podemos definir la energía cinética de rotación como $E_c(\text{rot}) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$. El trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el sólido ha girado un ángulo se puede determinar mediante la integral del momento de fuerzas o torque sobre el ángulo:

$$W = \int_i^f M d\varphi = \int_i^f \tau d\varphi \quad (1.54)$$

1.7. Fluidos

1.7.1. Estática o hidrostática

Ecuación general para la variación de presión $p = F/S$ de un fluido:

$$p_1 - p_2 = \int_1^2 \rho g dh \quad (1.55)$$

El principio de Arquímedes señala que el empuje es igual al peso del fluido desplazado o desalojado:

$$E = \rho_f V g = m_f g \quad (1.56)$$

El peso aparente es igual al peso menos el empuje: $P_a = P - E$. En equilibrio, $P_a = 0$, y el objeto flota con $P = E$. Si $E > P$, el objeto asciende, y si $E < P$, el objeto se hunde en el fluido. La presión hidrostática es $P_h = \rho_f g \Delta h$. El principio de Pascal señala que $F_1/S_1 = F_2/S_2$, porque la presión se transmite de forma instantánea a todos los puntos de un fluido. Se llama tensión superficial a la cantidad $\sigma = \frac{F}{2L}$. La presión capilar se define como

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (1.57)$$

y la capilaridad en un tubo de radio r pequeño, y altura h , se calcula con la ecuación

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r g \rho} \quad (1.58)$$

1.7.2. Dinámica de fluidos

Ecuación de continuidad

En un tubo, para un fluido incompresible, se cumple $v_1 S_1 = v_2 S_2$.

Teorema de Bernoulli

En un fluido, se mantiene constante la siguiente cantidad:

$$p_i + \rho g h_i + \frac{1}{2} \rho v_i^2 = p_f + \rho g h_f + \frac{1}{2} \rho v_f^2 \quad (1.59)$$

i.e.

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (1.60)$$

La velocidad de un fluido por los orificios de un depósito se puede estimar como $V = \sqrt{2gh}$.

La fuerza de viscosidad de un fluido sigue la ecuación

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad (1.61)$$

y donde η es el coeficiente de viscosidad.

Ley de Poiseuille

El volumen V de líquido que atraviesa un tubo cuando la viscosidad no es despreciable en régimen laminar se calcula mediante la expresión

$$V = \frac{p - p'}{8\eta L} \pi r^2 t \quad (1.62)$$

El número de Reynolds es la cantidad adimensional

$$R = \frac{\rho}{\eta} r v \quad (1.63)$$

La fuerza de resistencia F_R que un fluido ofrece al movimiento de un objeto es:

- Esfera pequeña y fluido en régimen laminar. Aplica la ley de Stokes:

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

- Objeto cualquiera en cualquier régimen:

$$F_R = kS \frac{\rho v^2}{2}$$

donde k es un factor de forma dependiente de la forma y geometría del objeto.

1.7.3. Deformaciones y elasticidad

El alargamiento longitudinal está relacionado con el módulo de Young y el “strain”:

$$\mathcal{Y} \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S}$$

La contracción transversal Δd por tracción longitudinal es

$$\sigma \frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta d}{d}$$

y donde σ es el coeficiente o módulo de Poisson. La variación de volumen por tracción longitudinal es igual a

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\sigma)$$

La deformación Ξ por esfuerzo tangencial es

$$\Xi = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$$

donde G es el módulo de rigidez. La compresión o variación de volumen debida a las fuerzas de presión sobre toda la superficie del cuerpo (sólido, líquido, gas):

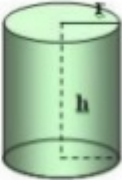

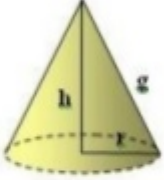
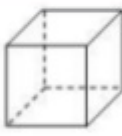
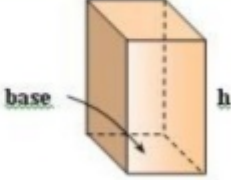
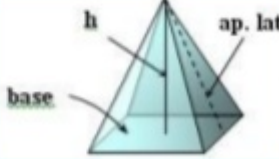
$$K \frac{\Delta V}{V} = -\Delta p$$

donde K es el módulo de elasticidad de volumen. Los módulos anteriores están relacionados entre sí, mediante la expresión:

$$K = \frac{\mathcal{Y}}{3(1 - 2\sigma)}$$

ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{\text{total}} = 2\pi r (h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{\text{total}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Cono		$A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6 a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim. base} \cdot h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \cdot h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim. base} \times \text{ap. lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15+\sqrt{3}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

Para una N -esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \quad (1.64)$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (1.65)$$

$$V_N(R) = R \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} V_{N-1}(R) \quad (1.66)$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} R^N \quad (1.67)$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \quad (1.68)$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \quad (1.69)$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \quad (1.70)$$

$$V_0(R) = 1, \quad (1.71)$$

$$A_0(R) = 2, \quad (1.72)$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \quad (1.73)$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \quad (1.74)$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (1.75)$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N, R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} R^N \quad (1.76)$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) = \log \pi + 2 \log R \quad (1.77)$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\log V(N, R)) = \frac{\log \pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) \quad (1.78)$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p . Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.79)$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del “taxicab”, o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \quad (1.80)$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \quad (1.81)$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i , definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

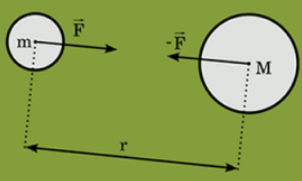
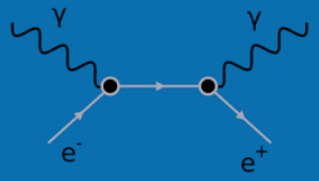
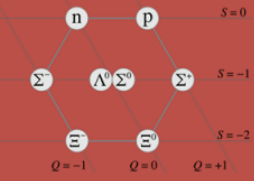
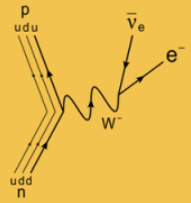
$$B_{p_1, \dots, p_n} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

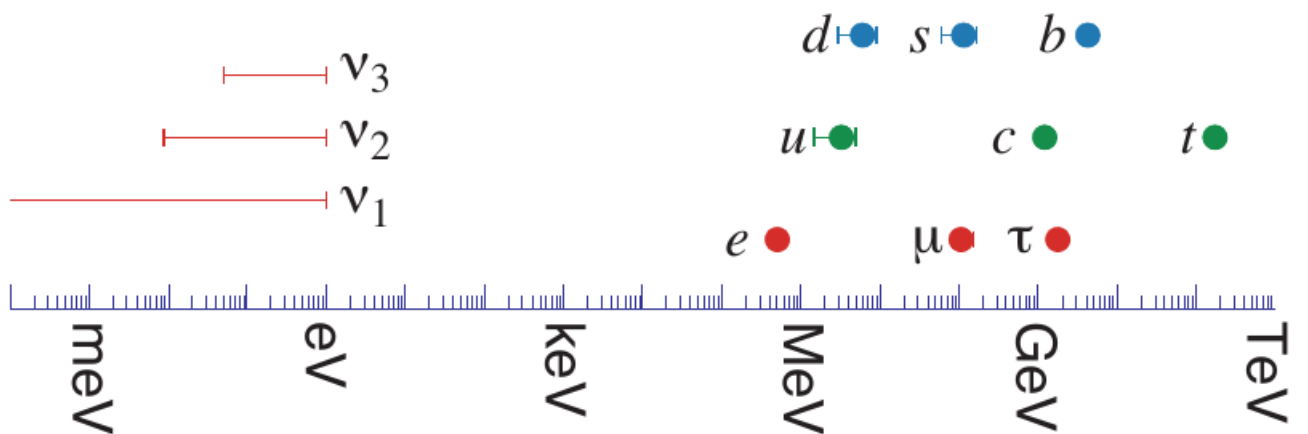
$$V(B_{p_1, \dots, p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)}$$

Capítulo 2

Campos

$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Gravity</p>	$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Electromagnetism</p>
$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$  <p style="text-align: center;">Strong</p>	$\mathcal{L} = g(\bar{\nu}_e, \bar{e})\gamma^\mu \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\xi^2}Z_\mu & 0 \\ 0 & \frac{\xi A_\mu}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{e}{\sqrt{1+\xi^2}}Z_\mu \end{pmatrix} + \frac{1-\gamma^5}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\xi^2}Z_\mu & -\sqrt{2}W_\mu^+ \\ -\sqrt{2}W_\mu^- & \sqrt{1+\xi^2}Z_\mu \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$  <p style="text-align: center;">Weak</p>

masses of matter particles



2.1. Tipos de campos

Un campo a nivel abstracto es una representación de la realidad en la que los objetos fundamentales son sistemas continuos que permean todo el espacio-tiempo. Los campos son simples funtores entre ciertos espacios abstractos, y asociados a números de diferente tipo. Hay campos escalares (números puros), espinoriales, twistoriales, superespinoriales, supertwistoriales, hipersupertwistoriales, campos vectoriales, campos vectoriales espinoriales, campos tensoriales, campos de alto espín y algunas otras variantes. Un campo que no depende del tiempo se le llama estacionario. Un campo de fuerzas, cuyo valor solo depende de la distancia a un punto llamado centro de fuerza, se llama campo central. Un campo que deriva de una función potencial se denomina conservativo, y las fuerzas que derivan de éste, se llaman fuerzas conservativas. Por otra parte, los campos dependen generalmente de cierta característica o propiedad para ser generados: la característica del campo gravitacional es la masa (o energía), la característica del campo eléctrico es la carga eléctrica, la característica del campo magnético las cargas móviles (o corrientes eléctricas). Los campos de las interacciones nucleares son de corto alcance, a diferencia de los casos electromagnético y gravitacional, que son de alcance infinito hipotéticamente. Los campos de la interacción nuclear débil son cuánticos y están generados por campos vectoriales gauge con masa que intercambian la carga débil o sabor de las partículas. Los campos de la interacción nuclear fuerte son cuánticos y están generados por campos vectoriales gauge sin masa que intercambian el color de las partículas (aquí color no es color físico sino una carga cuántica que cambia o transporta el campo nuclear fuerte).

Campos conservativos

Un campo vectorial \vec{v} se dice que es conservativo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = -\Delta V = V_0 - V_f \quad (2.1)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (2.3)$$

$$E_m = E_c + E_p = \text{const} \quad (2.4)$$

$$\vec{v} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad (2.5)$$

$$\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} \text{ no depende de la trayectoria } \gamma \text{ sino solamente de los puntos A (inicial) y B (final)} \quad (2.6)$$

$$\text{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \vec{0} \quad (2.7)$$

Se puede escribir en términos de fuerzas y el concepto de trabajo o energía de forma general

Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas vectorial \vec{F} se dice que es conservativo si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_p(0) - E_p(f) \quad (2.8)$$

$$W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.9)$$

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = 0 \quad (2.10)$$

$$E_m = E_c + E_p = \text{const} \quad (2.11)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p = -\nabla E_p \quad (2.12)$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ no depende de la trayectoria } \gamma \text{ sino solamente de los puntos A (inicial) y B (final)} \quad (2.13)$$

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad (2.14)$$

Un campo conservativo se dice también irrotacional, sin vórtices. Un campo con divergencia nula se dice solenoidal.

2.2. Campo gravitacional**2.2.1. Leyes de Kepler**

Hay tres leyes de Kepler: la ley de las órbitas, la ley de las áreas y la ley de los períodos, que gobiernan el movimiento planetario.

Ley de las órbitas

El movimiento de un “planeta” en torno al “sol”, es una elipse con la estrella en uno de los focos. Matemáticamente puede expresarse como sigue:

$$r(\varphi) = \frac{\mathcal{P}}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \quad (2.15)$$

y donde \mathcal{P} es el llamado semi-latus rectum de la elipse, y ε es la excentricidad de la elipse. En el periastro $\varphi = 0^\circ$, y $r_M = \mathcal{P}/1 + \varepsilon$, mientras que en el apoastro $r_m = \mathcal{P}/1 - \varepsilon$. Con el semieje mayor de la elipse es a , se tiene que es la media aritmética de periastro y apoastro, que es $a = (r_M + r_m)/2$. El semieje menor de la elipse es la media geométrica de perihelio y apoastro, i.e., $b = \sqrt{r_M r_m} = \mathcal{P}/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Finalmente, el semi-latus rectum es la media armónica de periastro y apoastro, i.e.,

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\frac{1}{r_M} + \frac{1}{r_m}} = \frac{2r_M r_m}{(r_M + r_m)} = \frac{b^2}{a}$$

La excentricidad es la variación entre r_M y r_m , es decir,

$$\varepsilon = \frac{r_M - r_m}{r_M + r_m}$$

El área de la elipse es $A = \pi ab$.

Ley de las áreas

El radiovector que une una estrella y su planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, la velocidad areolar es constante. Matemáticamente:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega \quad (2.16)$$

Puede deducirse esta ley de la conservación del momento angular \vec{L} . Además, integrando para un período, si el área de la elipse es $A = \pi ab$, tenemos que el movimiento medio $n = 2\pi/T$ proporciona:

$$n = \frac{r^2}{ab} \frac{d\varphi}{dt}$$

Ley de los períodos

El cuadrado de los períodos de los planetas es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. Llamada por Kepler ley de las armonías (ley 1-2-3), puede derivarse para órbitas circulares como sigue. Igualamos fuerza centrípeta y gravitacional. Matemáticamente:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = G_N \frac{Mm}{r^2} \quad (2.17)$$

de donde se tiene que

$$T^2 = kr^3 = \frac{4\pi^2}{G_N M} r^3 \leftrightarrow G_N M T^2 = 4\pi^2 r^3 \quad (2.18)$$

Para órbitas elípticas, que orbitan el centro de masas de los dos cuerpos, se puede deducir la misma relación formal pero con $r = a$ el semieje mayor de la elipse, y $M = M_\star + M_p$, la suma de la masa del planeta y la estrella.

2.2.2. Ley de gravitación universal**Ley de gravitación universal de Newton**

Dos masas puntuales M, m , separadas una distancia r , se atraen con una fuerza

$$\vec{F} = -G_N \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = -G_N \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (2.19)$$

donde $G_N = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$.

2.2.3. Campo y potencial gravitacional**Campo gravitacional newtoniano**

Se define campo gravitacional como la fuerza por unidad de masa de prueba:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{e}_r = -G_N \frac{M}{r^3} \vec{r} \quad (2.20)$$

con unidades de $[g] = \text{m}/\text{s}^2 = \text{LT}^{-2}$. El peso es la fuerza con la que un cuerpo de masa m es atraído por otro cuerpo de masa M y campo \vec{g} , $\vec{P} = m\vec{g}$.

Como el campo gravitacional es conservativo, tiene potencial y energía potencial:

Potencial gravitacional

Se llama potencial gravitacional a la función

$$V = -G_N \frac{M}{r} = \frac{E_p(g)}{m} \quad (2.21)$$

que tiene unidades de J/kg y no es más que la energía potencial gravitacional por unidad de masa. La energía potencial gravitacional es

$$E_p(g) = -\frac{G_N M m}{r} \quad (2.22)$$

en unidades de julios (J). Potencial y energía potencial están relacionados por $E_p(g) = mV_g$. El trabajo del campo necesario para transportar una masa desde un punto inicial A hasta otro final B es igual a la variación negativa de energía potencial:

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = G_N M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_p(A) - E_p(B) \quad (2.23)$$

Así, el potencial en un punto puede ser también definido como el trabajo necesario para transportar una masa dada desde el infinito hasta ese punto. Una línea o superficie equipotencial son lugares geométricos donde el potencial gravitacional es constante. Por tanto, no se realiza trabajo para mover una partícula a lo largo de una línea o superficie equipotencial. Las líneas de fuerza del campo gravitacional son siempre entrantes porque la gravitación es una fuerza atractiva siempre, hasta donde se entiende.

Para alturas pequeñas la energía potencial puede aproximarse por $E_p(g) = -mgh$, ya que

$$E_p(g) = -G_N M m / r = -G_N M m \frac{R_p}{R_p^2 (1 + h/R_p)} \approx +G_N M m h / R_p^2 = mgh$$

usando la aproximación binomial de Newton.

Principio de superposición

Para un conjunto de masas puntuales m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, el campo gravitacional total y el potencial gravitacional total están dados por la suma de los campos gravitacionales y los potenciales gravitaciones de cada masa separadamente. Matemáticamente:

$$V_t = \sum_i V_i = \sum_{i=1}^N V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_N \quad (2.24)$$

$$\vec{g}_t = \sum_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_N \quad (2.25)$$

2.2.4. Energía orbital y energía de satelización

Energía orbital

En una órbita circular, la energía mecánica es constante porque la fuerza gravitacional es conservativa. Para una órbita circular de radio $R = R_p + h$ se tiene en general que

$$E_m(\text{orb}) = E_c + E_p = -\frac{G_N M m}{2R} = -\frac{1}{2}E_c(\text{orb}) = \frac{1}{2}E_p(\text{orb}) \quad (2.26)$$

donde R es el radio orbital. Para una órbita elíptica general, con excentricidad e , se tiene

$$E_m(\text{orb}) = E_c + E_p = \frac{G_N M m}{2a}(e^2 - 1) \quad (2.27)$$

y donde ahora a es el semieje mayor de la elipse.

Energía de satelización y de desatelización

La energía necesaria para que desde una altura inicial h_0 y radio $r_0 = R_p + h_0$ se ponga en órbita (circular) un satélite de masa m_s se calcula mediante la conservación de la energía mecánica

$$E_p(h_0) + E_s = E_m(\text{orb}) \quad (2.28)$$

Si $r = R_p + h$ es el radio orbital (nótese que $h \neq h_0$, y que en la mayoría de ejercicios o situaciones tendremos $h_0 = 0$), entonces:

$$E_s = E_m(\text{orb}) - E_p(h_0) = G_N M m_s \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r} \right) \quad (2.29)$$

Para desatelerizar se requiere una energía E_d : $E_m(A) + E_d = E_m(B) = 0$, luego $E_d = -E_m(A)$.

2.2.5. Velocidad de escape y velocidad orbital

Velocidad de escape

Se llama velocidad de escape v_e a la velocidad necesaria para que un cuerpo de masa m abandone la influencia gravitacional de un objeto de masa M . Matemáticamente:

$$E_m = 0 = E_c(v_e) + E_p(g) = \frac{1}{2}mv_e^2 - G_N \frac{Mm}{r} \quad (2.30)$$

de donde se tiene que

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{r}} \quad (2.31)$$

Velocidad orbital

La velocidad de un cuerpo de masa m , en órbita circular alrededor de un cuerpo de masa M , por fuerza gravitacional, se obtiene igualando fuerza centrípeta y gravitacional. Matemáticamente:

$$F_c = F_g \rightarrow m \frac{v^2}{r} = G_N \frac{Mm}{r^2} \quad (2.32)$$

de donde se tiene que, con un radio orbital $r = R_p + h$,

$$v(\text{orb}) = \sqrt{\frac{G_N M}{r}} \quad (2.33)$$

Entonces la energía cinética orbital es igual a

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.34)$$

2.2.6. Relaciones binarias en gravitación

La siguiente tabla, representa las relaciones binarias entre magnitudes en movimiento circular y kepleriano:

$\mathcal{Y}(X)$	R	T	v	ω	f	A_c
R	1	$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$	$R = \frac{GM}{v^2}$	$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$	$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi f^2}}$	$\sqrt{\frac{GM}{A_c}}$
T	$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$	1	$T = \frac{2\pi GM}{v^3}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$T = \frac{1}{f}$	$T = 2\pi \sqrt[4]{\frac{GM}{A_c^3}}$
v	$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$	$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$	1	$v = \sqrt[3]{GM\omega}$	$v = \sqrt[3]{2\pi GM f}$	$v = \sqrt[4]{GMA_c}$
ω	$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{v^3}{GM}$	1	$\omega = 2\pi f$	$\omega = \sqrt[4]{\frac{A_c^3}{GM}}$
f	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{v^3}{2\pi GM}$	$f = \frac{\omega}{2\pi}$	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{A_c^3}{GM}}$
A_c	$A_c = \frac{GM}{R^2}$	$A_c = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{16\pi^4 GM}{T^4}} \\ 2\pi \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T^4}} \end{cases}$	$A_c = \frac{v^4}{GM}$	$A_c = \sqrt[3]{GM\omega^4}$	$A_c = \begin{cases} \sqrt[3]{16\pi^4 GM f^4} \\ 2\pi \sqrt[3]{2\pi GM f^4} \end{cases}$	1

(2.35)

2.2.7. Energía orbital (caso elíptico)

Definamos el potencial gravitacional:

$$U_g = -\frac{D}{r} \quad (2.36)$$

y el radio orbital

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{L^2 / DM}{1 + e \cos \theta} \quad (2.37)$$

donde $D = G_N M M_0$. Entonces

$$\frac{1}{r} = \frac{DM(1 + e \cos \theta)}{L^2} \quad (2.38)$$

y

$$U_g = \frac{D^2 M}{L^2} (-1 - e \cos \theta) = U(\cos \theta) \quad (2.39)$$

La energía cinética orbital es

$$T = E_k = E_c = K.E. = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.40)$$

y definiendo el vector

$$\vec{v} \times \vec{L} = D(\hat{r} + \hat{e}) \quad (2.41)$$

tenemos que

$$(\vec{v} \times \vec{L})^2 = v^2 L^2 = D^2(\hat{r} + \hat{e})^2 \quad (2.42)$$

y

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(\hat{r} + \hat{e}) \cdot (\hat{r} + \hat{e}) \quad (2.43)$$

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(\hat{r} \cdot \hat{r} + 2\hat{r} \cdot \hat{e} + \hat{e} \cdot \hat{e}) = \frac{D^2}{L^2}(1 + 2\hat{r} \cdot \hat{e} + e^2) \quad (2.44)$$

Por tanto:

$$v^2 = \frac{D^2}{L^2}(1 + 2e \cos \theta + e^2) \quad (2.45)$$

y la energía mecánica total orbital será

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{D^2M}{L^2}(1 + e \cos \theta) \quad (2.46)$$

Como

$$E_k = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{1}{2}e^2\right) = E_k(\cos \theta) \quad (2.47)$$

se deduce que para órbitas elípticas en gravitación newtoniana

$$E = -\frac{MD^2}{2L^2}(1 - e^2) = \frac{MD^2}{2L^2}(e^2 - 1) \quad (2.48)$$

y que reproduce la energía de órbitas circulares para $e = 0$. Si $e > 1$ es de hecho una trayectoria hiperbólica y si $0 < e < 1$ será un movimiento elíptico. Para $e = 1$ el movimiento será parabólico (con velocidad de escape esencialmente). En resumen:

Energía de movimiento gravitacional elíptico y general

$$E_k = T = \frac{MD^2}{L^2}\left(\frac{1}{2} + e \cos \theta + \frac{e^2}{2}\right) \quad (2.49)$$

$$U_g = E_p = \frac{MD^2}{L^2}(-1 - e \cos \theta) \quad (2.50)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{MD^2}{2L^2}(e^2 - 1) = \frac{GMm}{2r_p}(e - 1) = -\frac{GMm}{2a} \quad (2.51)$$

2.2.8. Velocidades cósmicas

El momento angular orbital es

$$L = mvR = m\omega R^2 \quad (2.52)$$

para una órbita circular de radio R y velocidad v . De aquí:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \rightarrow L_{orb} = m\sqrt{GMR} \quad (2.53)$$

y la velocidad areolar es $V_A = L/2m$, o bien

$$V_A = \frac{\sqrt{GMR}}{2} \quad (2.54)$$

La velocidad de escape o la velocidad orbital de distintos cuerpos reciben el nombre de velocidad cósmica. Sabemos que generalmente $v_e = \sqrt{2}v_{orb}$, y de la misma forma que sabemos el valor del radio de Schwarzschild o de la energía potencial gravitacional de una esfera de radio R , definimos las siguientes velocidades cósmicas:

Primera velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto orbite con el radio orbital igual a al radio terrestre o planetario. Por supuesto es un radio orbital ideal ya que generalmente el planeta es sólido y tiene obstáculos:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} \quad (2.55)$$

Segunda velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto escape de la atracción gravitacional de un objeto:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} \quad (2.56)$$

Tercera velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto abandone la órbita del sistema solar donde está:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_\star}{R_{\star p}}} \quad (2.57)$$

Cuarta velocidad cósmica

Es la velocidad necesaria para que un objeto orbite una galaxia pueda escapar de su influencia gravitacional:

$$v_4 = \sqrt{\frac{2GM_{gal}}{R_{gal}}} \quad (2.58)$$

Finalmente, si uno cree en el Multiverso, uno se podría preguntar si podríamos definir la quinta velocidad cósmica: la velocidad de escape necesaria para abandonar este Universo local, y pasar su horizonte observable...

Quinta velocidad cósmica

$$v_5 = \sqrt{\frac{2G_N M_U}{R_U}} \quad (2.59)$$

Usando los datos conocidos para la masa y radio del universo, sale aproximadamente $v_5 = 2 \cdot 10^8 m/s = 2c/3$. Para la Tierra: $v_1 = 7,9 km/s$, $v_2 = 11,2 km/s$, $v_3 = 42,1 km/s$, $v_4 = 518 km/s$. Sin embargo, las velocidades orbitales ayudan a disminuir las velocidades cósmicas aprovechando la vectorialidad de la velocidad. Así,

$v_3(\text{real}) = 16,7\text{km/s}$ si lanzamos en la dirección del movimiento orbital solar, y $v_4 = 230\text{km/s}$. Además, hay una relación interesantes entre las velocidades cósmicas y la orbital:

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 v_{orb}^2} \quad (2.60)$$

Esta ecuación es para movimiento circular, pero puede generalizarse para movimiento elíptico, lo que da la tercera velocidad cósmica en el perihelio y el afelio:

$$v_3(p) = \sqrt{v_2^2 + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1+e})^2}{1-e} v_{orb}^2} \quad (2.61)$$

$$v_3(a) = \sqrt{v_2^2 + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1-e})^2}{1+e} v_{orb}^2} \quad (2.62)$$

En el caso de movimiento orbital:

$$v_p(\text{orb}) = v_{orb} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (2.63)$$

$$v_a(\text{orb}) = v_{orb} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (2.64)$$

La velocidad parabólica produce, si la curvatura y el vértice están relacionados por $\rho = b^2/a = a(1 - e^2)$,

$$v_p(\text{par}) = v_{orb} \sqrt{\frac{2}{1-e}} \quad (2.65)$$

$$v_a(\text{par}) = v_{orb} \sqrt{\frac{2}{1+e}} \quad (2.66)$$

La tercera velocidad cósmica generalizada es

$$v_3(\varphi) = \sqrt{v_2^2 + (3 - 2\sqrt{2}\cos\theta)v_0^2} \quad (2.67)$$

La velocidad parabólica respecto de la Tierra es $v_P = v_p - V_{orb} = (\sqrt{2} - 1)V_{orb}$.

2.2.9. Teorema de Gauss gravitacional

Teorema de Gauss gravitacional

El flujo del campo gravitacional a través de una superficie cerrada Σ es igual a $-4\pi G_N$ veces la masa atrapada por la superficie. Matemáticamente:

$$\phi_g = \oint g = \oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G_N M_i(\Sigma) \quad (2.68)$$

El teorema de Gauss permite calcular el campo gravitacional para cargas puntuales y también para distribuciones de carga con simetrías más complicados.

Para una esfera de densidad homogénea, ρ , el campo gravitacional en el interior es $g(r) = GMr/R^3$, mientras que en el exterior será $g(r) = GM/r^2$. El potencial gravitacional será en el interior

$$V_g(r) = \frac{GM}{2R} \left[\frac{r^2}{R^2} - 3 \right] \quad (2.69)$$

2.2.10. Expresiones de varios campos

Variación del campo de un objeto con la altura

Variación del campo gravitacional con la altura

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_N M}{(R_p + h)^2} \vec{e}_r \quad (2.70)$$

El campo gravitacional en la superficie planetaria es igual a

$$g_s = g(r = R_p) = g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2} = \kappa \quad (2.71)$$

Variación del campo de un objeto con la profundidad

Variación del campo gravitacional con la profundidad

Aplicando el teorema de Gauss, se puede probar que el campo gravitacional varía con la profundidad de la forma siguiente:

$$\vec{g}(r) = -\frac{G_N M}{R_p^2} \left(1 - \frac{d}{R_p}\right) \vec{e}_r \quad (2.72)$$

Variación del campo de un objeto con la latitud

Variación del campo gravitacional con la latitud

En un planeta, con $r = R_p \cos \varphi$, si $PB = PO + PA$, $PB^2 = PO^2 + PA^2 + 2PO \cdot PA \cos(\pi - \varphi)$, permite derivar la relación siguiente mediante el teorema de Pitágoras y que el peso efectivo en la latitud es el peso más el peso centrífugo:

$$g_\varphi = g_0 \left(1 - \frac{2\omega^2 R_p \cos^2 \varphi}{g_0} + \frac{\omega^4 R_p^2 \cos^2 \varphi}{g_0^2}\right)^{1/2} \quad (2.73)$$

$$PB^2 = PO^2 + PA^2 + 2POPA \cos(180 - \varphi)$$


$$(mg')^2 = (mg)^2 + (m\omega^2 R \cos \varphi)^2 + 2mg m\omega^2 R \cos \varphi (-\cos \varphi)$$

$$m^2 g'^2 = m^2 g^2 + m^2 \omega^4 R^2 \cos^2 \varphi - 2m^2 g \omega^2 R \cos^2 \varphi$$


$$g'^2 = g^2 \left(1 + \frac{\omega^4 R^2 \cos^2 \varphi}{g^2} - \frac{2 \omega^2 R \cos^2 \varphi}{g}\right)$$

Gravitational field variations


1st. With height: $r = R_p + h$

 $\vec{g} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r = -G_N \frac{M}{(R+h)^2} \vec{u}_r$

2nd. With depth: $r = R_p - d$


$\vec{g} = -G_N \frac{M}{R_p^2} \left(1 - \frac{d}{R_p}\right) \vec{u}_r$ 

3rd. With latitude: $r = R \cos \varphi$

 $\vec{PB} = \vec{PO} + \vec{PA}$
 (weight) (centrifugal term)

$|\vec{PB}|^2 = |\vec{PO}|^2 + |\vec{PA}|^2 + 2|\vec{PO}||\vec{PA}| \cos \varphi$

$\div m \Rightarrow g_\varphi^2 = g_0^2 + (\omega^2 R \cos \varphi)^2 - 2g_0 \omega^2 R \cos \varphi$

$g_\varphi = g_0 \left(1 - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \varphi}{g_0} + \frac{\omega^2 R^2 \cos^4 \varphi}{g_0} \right)^{1/2}$ 

Campo gravitacional de una esfera uniforme

Para una esfera maciza de radio R , con densidad de masa constante $\rho = M/V$, se tiene que, por aplicación del teorema de Gauss:

- Para puntos $r > R$.

$$g = g_r = \frac{G_N M}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G_N \rho \frac{R^3}{r^2} \tag{2.74}$$

- Para puntos con $r < R$.

$$g = g_r = \frac{G_N M r}{R^3} = \frac{4}{3} \pi G_N \rho r \tag{2.75}$$

2.2.11. Teoría gravitacional relativista: relatividad general

La teoría newtoniana de la gravitación no es coherente con la teoría de la relatividad especial. Einstein la modificó para que lo fuera. Además, usó el principio de equivalencia de Galileo (igualdad de las masas inerciales con las masas o cargas gravitacionales), para deducir propiedades relativistas de la gravitación. Dedujo que la gravitación era debida a la curvatura del espacio-tiempo mismo, y propuso las ecuaciones de campo siguientes:

Ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.76)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, G_N la constante gravitacional newtoniana y Λ es la constante cosmológica. $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, y los tensores de Ricci, de Einstein o el escalar de curvatura dependen de la métrica y sus derivadas hasta segundo orden en el espacio-tiempo. $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento-esfuerzo. La curvatura dice a la materia y energía cómo moverse, la materia-energía dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

La teoría de la relatividad tiene una serie de predicciones clásicas testadas:

- Fuerzas de marea: $F_M = \frac{2GMm\Delta r}{r^3}$ implicada en la curvatura espacio-temporal, como fuente de la gravitación.
- Dilatación del tiempo gravitacional. Comprobada en múltiples ocasiones, es importante en los sistemas GPS:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}}} \quad (2.77)$$

y donde $R_S = 2G_N M/c^2$ es el radio de Schwarzschild. Una manera más sencilla de ver el efecto de la métrica (potencial gravitacional) es mediante la expresión:

$$\Delta t = \frac{gh}{c^2} t \quad (2.78)$$

Δt es el tiempo que mide el reloj en lo alto, a una altura h respecto del observador que mide t . La deducción de este resultado puede hacerse mediante el siguiente argumento. Un reloj es un oscilador con frecuencia ν . En dos puntos diferentes, tendrá energía

$$h\nu_1 \left(1 + \frac{U_1}{c^2}\right) = h\nu_2 \left(1 + \frac{U_2}{c^2}\right)$$

lo que da, ya que frecuencia y período son inversamente proporcionales

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1 + \frac{U_2}{c^2}}{1 + \frac{U_1}{c^2}} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \quad (2.79)$$

Si $\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \Delta t$, y $\Delta t_1 = t$, se recupera la primera expresión $\Delta t = gh/c^2$ si suponemos que el potencial gravitacional es 0 en h_1 y gh en h_2 . Para el caso de que la altura no es despreciable frente al radio, la corrección GR del tiempo por dilatación gravitacional viene dada por

$$\delta_{GPS/GR} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{U(r_s) - U(r_\oplus)}{c^2} \quad (2.80)$$

Esto debe compararse a la corrección de la relatividad especial cinemática

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \delta_{SR} \quad (2.81)$$

Ejercicio: hacer los cálculos para $r_s = 26561km$, y $r_{\oplus} = 6370km$. El efecto neto es que el reloj orbital marcha más deprisa por una cantidad $1 + \delta_R$, donde $\delta_T = \delta_{GR} - \delta_{SR}$. Se puede ver cuál es el reloj dominante, la GR. Estimar cuántas veces es más potente ese efecto que el de SR. Una deducción más cuidadosa, teniendo en cuenta la elipticidad orbital, y los parámetros orbitales produce la expresión:

$$\Delta t_r(GPS) = -2 \frac{\sqrt{GM_{\odot}a}}{c^2} e \sin E = -2 \frac{\sqrt{GM_{\odot}a}}{c^2} (E - M) \quad (2.82)$$

y donde G , M_{\odot} , a , e , c , E , M son la constante gravitacional universal, la masa de la Tierra, el semieje mayor de la elipse, la excentricidad, la velocidad de la luz, la anomalía excéntrica y la anomalía media.

- Precesión del perihelio de Mercurio y de objetos orbitantes en general. Antes de la teoría einsteniana, había una discrepancia no observada que hasta llevó a inventar un planeta ficticio, Vulcano, para explicarlo. No existe Vulcano, sino un efecto no trivial de la curvatura gravitacional.

$$\Delta\phi = \frac{6\pi G_N M}{c^2 R(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 R^2}{c^2 T^2(1-e^2)} \quad (2.83)$$

En el caso de la presencia de una constante cosmológica como en un universo de tipo de Sitter (dS), hay un efecto de precesión adicional dado por la fórmula

$$\Delta\phi_{\Lambda} = \frac{\pi c^2 \Lambda a^3}{GM} \sqrt{1-e^2} \quad (2.84)$$

En el caso de la aproximación cuasicircular $e \ll 1$ puede demostrarse no trivialmente que

$$\Delta\phi_{\Lambda} \approx \frac{\pi c^2 \Lambda a^3}{GM} (1-e^2)^3 \quad (2.85)$$

- Efecto lente gravitacional (comprobado de forma espectacular en la expedición de A. Eddington en 1919).

$$\Theta_L = \frac{4G_N M}{c^2 r} = \frac{2R_S}{r} = \frac{D_S}{r} \quad (2.86)$$

- Predicción de ondas gravitacionales y radiación gravitacional de partículas sin masa (gravitones) que se propagan con velocidad $v_g = c$. Todo cuerpo además, perderá energía mediante radiación gravitacional. Se observó tal pérdida primeramente en un púlsar binario en el siglo XX (Nobel 1993). El ritmo relativo de cambio de período de un pulsar binario como consecuencia de la emisión de ondas gravitacionales en Relatividad General es igual a

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\frac{96}{6c^5} G^{5/3} \mu M^{2/3} \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{-8/3} F_{GR}(e) \quad (2.87)$$

con

$$F_{GR}(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)$$

La detección de ondas gravitacionales se produjo por LIGO en 2016 por primera vez. Sin fuentes, la ecuación de onda que satisface una onda gravitacional puede escribirse como sigue.

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.88)$$

- Efecto gravitomagnético (testado por GRAVITY probe B), también llamado efecto Lense-Thirring. Hay dos fórmulas principales para el efecto Lense-Thirring. La primera es:

$$\dot{\Omega} = \frac{R_S a c}{r^3 + a^2 r + R_S a^2} \left(\frac{360}{2\pi}\right), \quad R_S = \frac{2G_N M}{c^2}, \quad a = \frac{2R_{\star}^2}{5c} \left(\frac{2\pi}{T}\right) \quad (2.89)$$

y la segunda es

$$\dot{\Omega} = \frac{2GJ}{c^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{360}{2\pi}\right) = \frac{2G^2 M^2 \chi}{c^3 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{360}{2\pi}\right) \quad (2.90)$$

- Existencia de “agujeros negros”, objetos tan densos que ni la luz puede escapar. Una definición más precisa es como soluciones a las ecuaciones de campo de la relatividad general.
- Posibilidad de la existencia de la energía del vacío, vía Λ , lo que define una densidad de energía del vacío

$$\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N} \quad (2.91)$$

- Expansión cósmica universal, y teoría del Big Bang, como derivaciones a gran escala de las ecuaciones de campo. A nivel simplificado, considerado el Universo como un espacio-tiempo en el que se satisface el principio cosmológico, las ecuaciones de campo de Einstein se simplifican en términos de las ecuaciones de Friedmann, en el caso de un Universo espacialmente homogéneo e isótropo en el espacio. La conservación de la energía cósmica y su conservación conlleva la ecuación cósmica

$$\sum_i \Omega_i = \Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_K = 1$$

Observaciones cosmológicas y astrofísicas/astronómicas, circa 2020, establecen que

$$\Omega_\Lambda = 0,69$$

$$\Omega_M = 0,31 = \Omega_{DM} + \Omega_B + \Omega_r = 0,26 + 0,05 + 0,00$$

siendo $\Omega_i = \rho_i/\rho_0$ la densidad de energía de la especie i -ésima, y $\rho_0 = \rho_c = 3H_0^2 c^2/8\pi G_N$ es la densidad de energía crítica del Universo.

- Otros efectos de GR: efecto de Sitter o geodésico, efecto Schiff, igualdad de masas inercial y gravitacional (principio de equivalencia), retraso de Shapiro (Shapiro time dilation), teorema de la ausencia de pelo (en Kerr se simplifica enormemente),... El retraso de Shapiro es conocido como cuarto test clásico y adquiere la forma siguiente alrededor de un cuerpo masivo

$$\Delta t_S = -\frac{2GM}{c^3} \ln(1 - \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.92)$$

- Posibilidad de la existencia de máquinas del tiempo, agujeros de gusano, warp-drives y TARDIS-like space-times. Otras soluciones son posibles también, como cuerdas cósmicas, defectos y black p-branes en extensiones de la GR.
- Posibilidad de teorías multimétricas, de altas derivadas (Lanczos-Lovelock, Finsler, ...), no métricas, y de teorías con torsión o teleparalelismo (extensiones no triviales).

Sin embargo, la gravitación a nivel cuántico no se entiende todavía bien. Además, la teoría de la gravitación relativista, relatividad general, tiene un grupo de simetrías no entendido y conduce finalmente a la existencia de singularidades espacio-temporales que nadie sabe cómo tratar o eliminar. Las teorías cuánticas gravitacionales más exitosas son: la teoría de (super)cuerdas/Teoría M(F,S,...), la teoría de la gravitación de lazos cuántos (loop quantum gravity), la teoría de (super)twistores y otras extensiones.

2.3. Campo eléctrico

El campo eléctrico es generado por cargas eléctricas. En la naturaleza hay dos clases de cargas eléctricas, denominadas positivas y negativas. Cargas de diferente tipo se atraen, y cargas del mismo tipo se repelen. La carga eléctrica es una cantidad que está cuantizada en la Naturaleza, i.e., $Q = Ne$. Para cargas puntuales, la fuerza eléctrica viene dada por la ley de Coulomb:

2.3.1. Ley de Coulomb

Ley de Coulomb para cargas puntuales

Dos cargas puntuales Q, q , separadas una distancia r , se atraen o repelen con una fuerza

$$\vec{F} = K_C \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r = K_C \frac{Qq}{r^3} \vec{r} \quad (2.93)$$

donde $K_C = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, o bien $K_C = 1/4\pi\epsilon_0$, con $\epsilon_0 = 1/4\pi K_C = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$.

Por analogía con el campo gravitacional, el campo eléctrico es la fuerza coulombiana por unidad de carga, matemáticamente

Campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{K_C Q}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.94)$$

donde E se mide en N/C .

2.3.2. Potencial y energía potencial eléctricos

Potencial y energía potencial eléctrica

Se llama potencial eléctrica a la función

$$V = K_C \frac{Q}{r} = \frac{E_p(el)}{q} \quad (2.95)$$

que tiene unidades de voltios, $1\text{V} = 1\text{J/C}$ y no es más que la energía potencial eléctrica por unidad de carga. La energía potencial eléctrica es

$$E_p(el) = \frac{K_C Qq}{r} \quad (2.96)$$

en unidades de julios (J). Potencial y energía potencial están relacionados por $E_p(el) = qV$. El trabajo del campo necesario para transportar una carga desde un punto inicial A hasta otro final B es igual a la variación negativa de energía potencial:

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = K_C Qq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_p(A) - E_p(B) \quad (2.97)$$

Así, el potencial en un punto puede ser también definido como el trabajo necesario para transportar una carga dada desde el infinito hasta ese punto. Una línea o superficie equipotencial son lugares geométricos donde el potencial eléctrico es constante. Por tanto, no se realiza trabajo para mover una partícula a lo largo de una línea o superficie equipotencial. Las líneas de campo eléctrico son radiales y entran o salen dependiendo del signo de la carga. Las líneas de campo salen de las cargas positivas y entran en las cargas negativas.

Principio de superposición

Para un conjunto de cargas puntuales q_i , $i = 1, 2, \dots, N$, el campo eléctrico total y el potencial eléctrico total están dados por la suma de los campos gravitacionales y los potenciales gravitacionales de cada masa separadamente. Matemáticamente:

$$V_t = \sum_i V_i = \sum_{i=1}^N V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_N \quad (2.98)$$

$$\vec{E}_t = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N \quad (2.99)$$

Dos sistemas de cargas, que se conecten, evolucionarán hasta el equilibrio, momento en el que se igualan los potenciales en dichos sistemas.

2.3.3. Teorema de Gauss

Teorema de Gauss del campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada Σ es igual a $4\pi K_C = 1/\epsilon_0$ veces la carga atrapada por la superficie. Matemáticamente:

$$\phi_e = \oint E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi K_C Q(\Sigma) = \frac{Q(\Sigma)}{\epsilon_0} \quad (2.100)$$

El teorema de Gauss permite calcular el campo gravitacional para cargas puntuales y también para distribuciones de carga con simetrías más complicadas.

2.3.4. Ejemplos de campos y potenciales eléctricos

Campo eléctrico de una esfera uniforme

Para una esfera maciza de radio R , con densidad de carga constante $\rho = Q/V$, se tiene que, por aplicación del teorema de Gauss:

- Para puntos $r > R$,

$$E = E_r = \frac{K_C Q}{r^2} = \frac{4}{3}\pi K_C \rho \frac{R^3}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \quad (2.101)$$

- Para puntos con $r < R$,

$$E = E_r = \frac{K_C Q r}{R^3} = \frac{4}{3}\pi K_C \rho r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (2.102)$$

Para el caso de una esfera metálica hueca, se tiene que $E_i = 0$ si $r < R$ y $E = K_C Q/r^2$ si $r > R$. El potencial para la esfera es similar al de la partícula puntual para puntos alejados de la esfera y mayor que el radio de la misma. Para el caso de una esfera con densidad uniforme se tiene que

- Para puntos con $r > R$,

$$V(r) = \frac{K_C Q}{r} \quad (2.103)$$

- Para puntos con $r > R$,

$$V(r) = K_C Q \left[\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right] = \frac{K_C Q r^2}{2R} \left[3 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (2.104)$$

mientras que para la esfera hueca se tiene que $V = KQ/r$ si $r > R$, y $V = KQ/R$ si $r < R$.

Campo eléctrico de un plano infinito

El campo eléctrico generado por un plano infinito de carga es perpendicular al mismo y constante, proporcional a la densidad superficial de carga en el plano.

$$E = E_{\perp} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.105)$$

El campo entre las placas de un condensador, con diferencial de potencial ΔV , se relaciona con este campo de la forma siguiente $\Delta V = E\Delta x = Ed$, donde d es la separación entre las placas.

Campo eléctrico de un hilo infinito

El campo eléctrico de un hilo infinito de densidad lineal λ se perpendicular al hilo, y su intensidad se calcula mediante la expresión

$$E = E_{\perp} = E_r = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \quad (2.106)$$

El potencial de un hilo es una función de tipo logarítmico, dada por $V = V_0 + \frac{\lambda \ln(r/r_0)}{2\pi\epsilon_0}$.

Movimiento de una partícula cargada en un potencial

Una partícula de masa m y carga q se verá acelerada mediante la acción de un campo electrostático \vec{E} , de forma que

$$m\vec{a} = -q\nabla V \approx -q \frac{\Delta V}{\Delta x} \vec{e}_x \quad (2.107)$$

Una partícula positiva, se moverá espontáneamente de los puntos de mayor a menor potencial.

Energía potencial eléctrica (gravitacional) total de una esfera uniforme

Supongamos una esfera cargada eléctricamente de forma uniforme con densidad ρ . La densidad eléctrica proporciona $\rho = dQ/dV$, y $dQ = \rho dV$. O bien, $Q(r) = \rho V(r)$. Para el volumen de una esfera de capas de radio r , $V = 4\pi r^3/3$, y sumamos capas hasta el radio $r = R$. Entonces, si cada capa tiene $dV = 4\pi r^2 dr$, la energía potencial eléctrica total sería calculable mediante la integral

$$E_p(r) = \int_0^R V(r) dq(r) = \int_0^R \frac{K_C q(r)}{r} \rho \cdot 4\pi r^2 dr \quad (2.108)$$

de donde sustituyendo

$$E_p(r) = \int_0^R \frac{K_C \rho}{r} \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{16\pi^2 K_C \rho^2}{3} \int_0^R r^4 dr \quad (2.109)$$

luego

$$E_p(r) = \frac{16\pi^2 K_C \rho^2 R^5}{15} = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3K_C Q^2}{5R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad (2.110)$$

Además, de aquí mediante el cambio $K_C \rightarrow -G_N$, $Q \rightarrow M$, se deduce el equivalente gravitacional

$$E_p(r) = -\frac{16\pi^2 G_N \rho^2 R^5}{15} = -\frac{3G_N M^2}{5R} \quad (2.111)$$

2.4. Campo magnético

2.4.1. Propiedades generales

La existencia de objetos magnéticos se conoce desde tiempos antiguos. Experimentalmente, se observa que hay dos tipos de polos magnéticos, llamados polo norte (N) y polo sur (S) magnéticos. Las líneas de campo magnético salen del polo N, y entran en el polo S. Son líneas cerradas, a diferencia del campo eléctrico o gravitacional, donde son abiertas. La existencia del magnetismo se atribuye a cargas móviles. La fuerza magnética se define para una carga puntual q de la forma siguiente

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.112)$$

2.4.2. Fuerzas magnéticas

Infinitesimalmente, la fuerza magnética de un hilo de corriente es

$$d\vec{F}_m = Id\vec{l} \times \vec{B} \leftrightarrow \vec{F}_m = \oint_C Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.113)$$

La ley de Biot-Savart para cargas es, con $K_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{NA}^{-2}(\text{Tm/A})$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.114)$$

mientras que para corrientes es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (2.115)$$

La fuerza magnética entre dos cargas puntuales que se mueven con velocidades \vec{v}_1, \vec{v}_2 es igual a

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 (\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{e}_r))}{r_{12}^2} \quad (2.116)$$

Para corrientes I_1, I_2 , la fuerza magnética resulta ser

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12})}{r_{12}^2} \quad (2.117)$$

En todos los casos anteriores, $\vec{r}_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$.

2.4.3. Selector de velocidades. Ciclotrón

El campo eléctrico necesario para que una partícula cargada no sea desviado por una fuerza magnética en dirección y sentido es el principio del selector de velocidades. Igualando fuerza eléctrica y magnética se obtiene

Selector de velocidades

Igualando $qE=qvB$, se tiene que

$$E = vB \quad (2.118)$$

Análogamente, una partícula cargada que entra en una región donde hay un campo magnético se curva, y realiza un MCU (aunque en general sería un movimiento helicoidal). Es el principio de funcionamiento del ciclotrón:

Principio del ciclotrón

Igualando fuerza centrípeta y magnética, $F_c = F_m$, se obtiene el radio de giro de la partícula cuando se le aplica un campo magnético:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (2.119)$$

La frecuencia de ciclotrón $\omega_c = 2\pi R/T$, se obtiene si $v = 2\pi R/T = \omega R$:

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (2.120)$$

2.4.4. Ley de Ampère. Campos de hilos infinitos, espiras y solenoides

Hay una relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos, que permite ir más allá de cargas puntuales mediante la noción de circulación del campo magnético.

Ley de Ampère

La circulación a lo largo de un camino cerrado del campo magnético es μ_0 veces la intensidad de corriente que lo atraviesa. Matemáticamente

$$\Gamma_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I(C) \quad (2.121)$$

Como aplicación, permite deducir la expresión del campo magnético de un hilo infinito de forma muy rápida.

$$B = B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (2.122)$$

donde B_φ es en la dirección azimutal de \vec{e}_φ , que define la regla de la mano derecha. Para una espira circular en su centro, se puede deducir también que

$$\vec{B} = B_\perp \vec{e}_\perp = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_\perp \quad (2.123)$$

Para un solenoide recto, de $n = N/L$ vueltas por unidad de longitud, se puede probar que el campo de esta bobina en su interior es paralelo al eje del solenoide o bobina con

$$B = B_\parallel \vec{e}_\parallel = \mu_0 n I \vec{e}_\parallel \quad (2.124)$$

Antiguamente, la definición de amperio usaba la fuerza entre hilos paralelos de corriente:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d_{12}} \quad (2.125)$$

2.5. Campos electromagnéticos e inducción EM

Faraday descubrió la ley general de inducción electromagnética, y el sentido de la corriente lo da la ley de Lenz, de forma que la ley de Faraday-Lenz da la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en un circuito:

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = \Delta V = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (2.126)$$

El signo menos de la ley de Faraday se debe a Lenz. El sentido de la corriente inducida en un circuito (o del campo magnético inducido sobre un circuito) es aquel que se opone al aumento o disminución del flujo magnético.

Problemas de carriles conductores

Sea un circuito formado por dos carriles largos conductores paralelos, la separación entre carriles es b . Una barra se sitúa de forma transversal cerrando el circuito, también metálica y conductora. Supongamos la velocidad inicial es v_0 hacia la derecha, i.e., $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, y el campo entra en el circuito $\vec{B} = -B\vec{k}$. Inicialmente la barra está con posición x_0 respecto del origen y extremo. La aceleración es $\vec{a} = a\vec{i}m/s^2$. El circuito está en el plano XY. El flujo será

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos 180^\circ = -BS \quad (2.127)$$

La superficie es $S = bx = b \left[x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \right]$. Entonces, la f.e.m. inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = +B\frac{dS}{dt} = Bbv_0 + Bbat = Bb(v_0 + at) \text{ V} \quad (2.128)$$

La corriente inducida, supuesto el conductor óhmico de resistencia R , será:

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bb}{R}(v_0 + at) \text{ A} \quad (2.129)$$

y su sentido vendrá dado por la ley de Lenz.

Las relaciones de influencia mutua entre dos circuitos, por los que atraviesan flujos ϕ_1, ϕ_2 magnéticos, viene dada por las relaciones

$$\phi_1 = L_1I_1 + M_{12}I_2 \quad (2.130)$$

$$\phi_2 = M_{21}I_1 + L_2I_2 \quad (2.131)$$

donde $M_{12} = M_{21} = M$ es el coeficiente de inducción mutua, y L_1, L_2 son los coeficientes de autoinducción. Para una bobina larga, $L = \mu n^2 S$, y L se mide en henrios (H). $1H = 1Vs/A$.

Se llama momento magnético a la cantidad $\vec{m} = I\vec{S}$, que induce un torque en general $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

2.5.1. Transformadores

Los transformadores son dispositivos que permiten aumentar o disminuir el potencial o corriente eléctrica, mediante campos magnéticos y arrollamientos. Matemáticamente:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_1}{V_2} \quad (2.132)$$

2.5.2. Ley de Ohm

La ley de Ohm relaciona corriente y potencial para un dispositivo de resistencia R :

$$V = IR \quad (2.133)$$

donde $R = \rho L/A = L/\sigma A$, con ρ siendo aquí la resistividad. La corriente eléctrica es $I = dQ/dt$. Los conductores óhmicos satisfacen $\vec{J} = \sigma \vec{E} = nq^2 \vec{E}/m_e = qN\vec{v}$, con $\sigma = 1/\rho$. La ley de Ohm generalizada a un generador se escribe como sigue:

$$V = I(R + r) \quad (2.134)$$

Las resistencias en serie se suman, las resistencias en paralelo se suman armónicamente:

$$R_t(\text{ser}) = R_1 + R_2, \quad R_t = \sum_i R_i \quad (2.135)$$

$$R_t(\text{par}) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \frac{1}{R_t} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (2.136)$$

El efecto Joule es la producción de energía térmica por el paso de una corriente por un conductor. Matemáticamente:

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (2.137)$$

donde V es la diferencia de potencial (d.d.p.) entre los extremos del conductor.

2.5.3. Condensadores

La relación entre carga y potencial viene dada por una magnitud llamada capacidad o condensador.

$$Q = CV \leftrightarrow \Delta Q = C\Delta V \quad (2.138)$$

La capacidad se mide en faradios (F). Para un condensador plano-paralelo, $C = \epsilon_0 S/d$, para un condensador cilíndrico $C = 2\pi\epsilon_0 h / \ln(R_2/R_1)$. Para un condensador esférico $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$. La asociación en paralelo de condensadores suma capacidades, la asociación en serie de condensadores los suma de forma armónica:

$$C(\text{par})_t = C_1 + C_2, \quad C_t(\text{par}) = \sum_i C_i \quad (2.139)$$

$$C(\text{ser})_t = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_t(\text{ser})^{-1} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (2.140)$$

Un condensador almacena una energía proporcional a la carga y diferencia de potencial, es decir,

$$E(C) = \frac{1}{2} Q\Delta V = \frac{1}{2} C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta Q^2}{C} \quad (2.141)$$

2.6. Otros campos

2.6.1. El campo nuclear

Los campos nucleares (fuerte y débil) son complicados. La fuente del campo nuclear fuerte es la denominada carga de color (hay tres cargas de color, llamadas roja, verde y azul, R, G, B). La fuente del campo nuclear débil es la denominada carga de sabor. Hay 6 sabores de quarks y 6 sabores de leptones. Los cuantos del campo electromagnético son como sabemos bosones sin masa llamados fotones. En el caso del campo nuclear, a nivel fundamental son mediados por bosones sin masa llamados gluones (hay 8 gluones diferentes), y por los bosones masivos W (W^+ , W^-) y Z . Sin embargo, Hideki Yukawa encontró un potencial relativamente simple para aproximar el comportamiento peculiar de las interacciones débiles (a grandes distancias, y a nivel efectivo, la interacción fuerte está descrita por intercambio de piones, bosones masivos hechos de 1 quark y un antiquark). Matemáticamente, el potencial de los piones viene dado por un potencial a corto alcance de Yukawa:

Potencial de Yukawa

$$V_Y = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r} \quad (2.142)$$

La fuerza de Yukawa se obtiene como sigue

$$F_Y = -\frac{dV_Y}{dr} = -g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r^2} - \alpha m g^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r} = -\frac{g^2 e^{-\alpha m r}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha m \right) \quad (2.143)$$

2.6.2. El campo de Higgs

Los campos gauge masivos vectoriales de la interacción débil plantean otro problema ya existente en las teorías originales de Newton o Einstein. ¿Qué es la masa? ¿Por qué la masa del protón es unos $6\pi^5 \approx 1836$ veces la masa del electrón? ¿Por qué las masas de las partículas, en particular la de los bosones W y Z, es la que observamos? En Física o Química elemental uno define materia y volumen y no se pregunta habitualmente qué es la masa o qué es el espacio. Eso cambia en las teorías más fundamentales. Hoy día, se piensa que el origen de la masa tiene 2 fuentes: el campo de Higgs, encargado de dar masa a las partículas que hoy pensamos son elementales, y la ruptura de simetría quiral de la QCD (Quantum Chromodynamics, cromodinámica cuántica). Una partícula como un W, Z o un electrón adquiere masa por interacción con un campo adicional que permea el Universo, llamado campo de Higgs. El protón y otras partículas compuestas de la interacción nuclear adquieren masa por un mecanismo cinético más complicado de transmutación dimensional relacionado con la ruptura de cierta simetría de forma dinámica (y bastante complicada).

Una forma sencilla de entender el campo de Higgs, es suponer que deriva de un potencial que es una función cuadrática de un “campo escalar” $H(x)$, via

$$V(H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 = \lambda H^4 - 2\lambda v^2 H^2 + \lambda v^4 \quad (2.144)$$

Este potencial tiene un valor mínimo en $\pm v = \partial H / \partial H|_v = 0$. Este valor mínimo del potencial define el “vacío” del Universo. Una perturbación ligera del campo de Higgs via $H = h + v$ provoca el proceso de ruptura espontánea de simetría del campo, lo que dota de masa al propio campo de Higgs y unas autointeracciones:

$$V(h) = \lambda \left[(h + v)^2 - v^2 \right]^2 = \lambda h^4 + 4\lambda v h^3 + 4\lambda v^2 h^2 \quad (2.145)$$

El último término es un término de masa si identificamos $4\lambda v^2 = M_H^2/2$, luego $M_H = 8\lambda v^2$. Los valores de v, M_H no los predice la teoría electrodébil ni de la ruptura espontánea de simetría. Para el valor medido de la denominada constante de Fermi G_F , se obtiene que $v = 246 \text{ GeV}$, y con $M_H = 126 \text{ GeV}$, se obtiene que $\lambda = 0,13$. $V(H)$ puede interpretarse como una densidad de energía del vacío del campo de Higgs. Un método similar aplica para obtener la masa del W y del Z, mientras que el fotón electromagnético y los gluones no se acoplan al Higgs, y permanecen sin masa, de forma que

$$M_W = \frac{g v}{2} \quad (2.146)$$

y

$$M_Z = \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \quad (2.147)$$

y $m_\gamma = m_g = 0$ (masa del fotón y de los gluones nula, porque el campo de Higgs es transparente para ellos). Los fermiones de partículas elementales (no los fermiones compuestos o incluso los bosones compuestos de la interacción fuerte) adquieren masa mediante el campo de Higgs via

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}} = \mathcal{Y}_f v = \frac{g_f \sqrt{2} M_W \sin \theta_W}{e} \quad (2.148)$$

2.6.3. Inflación y Cosmología

Como la energía potencial no es lo relevante, sino las diferencias de energía, se tiene que $\lambda v^4 \simeq 4,8 \cdot 10^8 GeV^4$, que es bastante más grande que el valor medido cosmológico de la densidad de energía del vacío (del orden de meV^4). Esto se conoce como el problema de la constante cosmológica o de la energía del vacío. Se piensa, además, que al principio del Universo, hubo un campo escalar similar al Higgs que produjo una expansión exponencial del Universo. El Universo experimentó una transición de fase mediante un potencial “escalar” desconocido. Una transición de segundo orden en la inflación implica un campo inflatón a los $10^{-11} s$ tras el origen cósmico:

$$V(T, H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 + b^2 T^2 H^2 \quad (2.149)$$

Aquí, la temperatura crítica es $T_c = \sqrt{2\lambda v^2/b}$. Así, una corrección de primer orden a la energía del campo inflatón (Higgs-like) da una transición de fase de segundo orden en la energía potencial escalar. Una transición de fase de primer orden es también posible, lo que implicaría un potencial más complicado mediante una corrección extra

$$V(T, H) = \lambda(H^2 - v^2)^2 + bT^2 H^2 + aTH^3 \quad (2.150)$$

El tipo de transición de fase puede parecer complicado, pero tiene consecuencias cosmológicas. La transición de segundo orden está permanentemente en equilibrio y el sistema pierde memoria de estados previos. En tal escenario no se esperan remanentes o reliquias de la fase no rota a temperaturas por debajo de la temperatura crítica de la transición. En cambio, una transición de primer orden es más rica fenomenológicamente. Podría producir remanentes o reliquias detectables en Astrofísica o Cosmología observacionales. La transición de fase de primer orden es más atractiva también por otro motivo: permite explicar la asimetría bariónica en la naturaleza. Esto es, el desequilibrio de materia-antimateria observado en el Universo, y gracias al que éste existe hoy día como lo observamos. Determinar la naturaleza de la transición de fase inflacionaria es un problema no resuelto transdisciplinar. Y uno requiere también de los llamados métodos no perturbativos. Nueva Física será necesaria para entender la Naturaleza y la identidad concreta de la transición de fase inflacionaria o electrodébil que vino después. No se explica o entiende bien del todo en el marco del Modelo Estándar.

2.6.4. Y más allá, más campos...

Las leyes de fuerza, y el teorema de Gauss o la ley de Ampère, pueden ser generalizados a partículas de puntuales en espacios de cualquier dimensión. Además, el modelo de la partícula puntual puede extenderse a objetos extensos, mediante el álgebra de Grassmann de formas diferenciales o mediante el cálculo geométrico de Clifford en un álgebra de espacio-tiempo. Además, sabemos ya que existe otro campo, llamado campo de Higgs, que es responsable de la masa de las partículas elementales, mientras que la masa de objetos hadrónicos se debe a un efecto complicado no lineal mecanocuántico de la cromodinámica cuántica (QCD). Hay razones para pensar que la energía oscura, la materia oscura o incluso el campo escalar de la inflación en el Universo temprano requieren nuevos campos para la comprensión del Universo primigenio y su futuro. Aunque una pregunta aún persiste: ¿cuántos campos realmente hay? Quizás, todos los campos son realmente expresiones de un único campo y fuerza fundamental a muy alta energía. Esa es la idea de las Teorías de Gran Unificación, las Teorías del Todo y, en el fondo, la idea de la Teoría del Campo Unificado que fue el problema sin resolver que dejó A. Einstein en el siglo XX para las generaciones futuras de científicos.

2.6.5. Otras mecánicas generalizadas

Además, de la Mecánica de Newton, hay otras versiones de la Mecánica basadas en objetos llamados lagrangianos y hamiltonianos. Reproducen los resultados newtonianos y son más generales. De la Mecánica de Hamilton, Yoichiro Nambu dio una generalización misteriosa que no se entiende. Estas mecánicas son útiles en sistemas de partículas y continuos (campos). Además, ofrecen una conexión natural entre simetrías y leyes de conservación. Por otra parte, la generalización del cálculo diferencial clásico a más variables, o también a lo que hoy día se llama cálculo fraccional o diferentegral es otro tema moderno de investigación.

Particle	Mass	Spin
t	173 GeV	1/2
b	4 GeV	1/2
c	2 GeV	1/2
s	100 MeV	1/2
d	5 MeV	1/2
u	2 MeV	1/2
τ	1777 MeV	1/2
μ	106 MeV	1/2
e	511 keV	1/2
ν_τ	< 0.6 eV	1/2
ν_μ	< 0.6 eV	1/2
ν_e	< 0.6 eV	1/2
W^\pm	80 GeV	1
Z	91 GeV	1
γ	0	1
g	0	1
H	125 GeV	0

Table 1.1: Summary of the mass and spin of the Standard Model particles

La nueva Tabla Periódica es el Modelo (o teoría) Estándar:

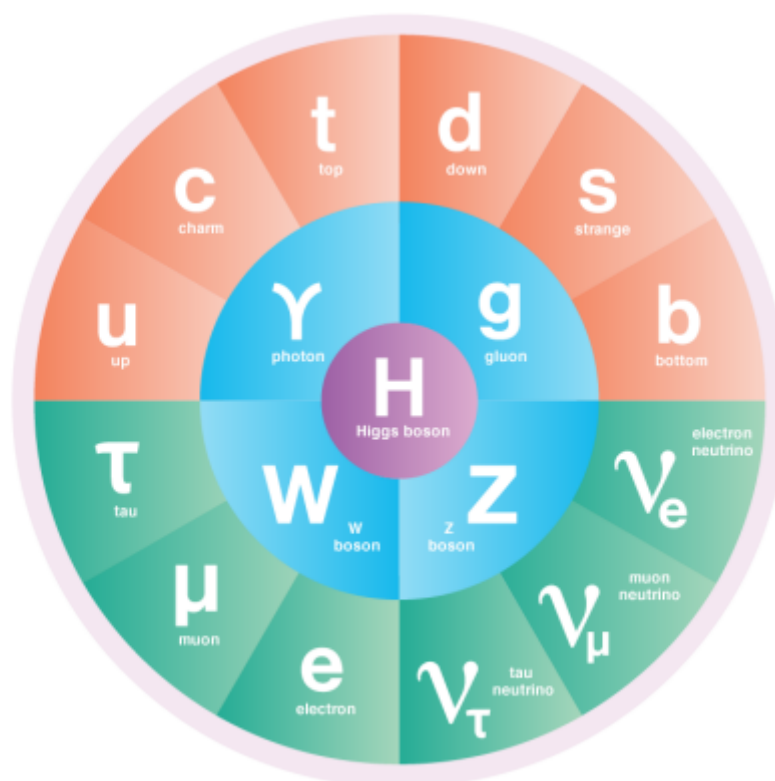
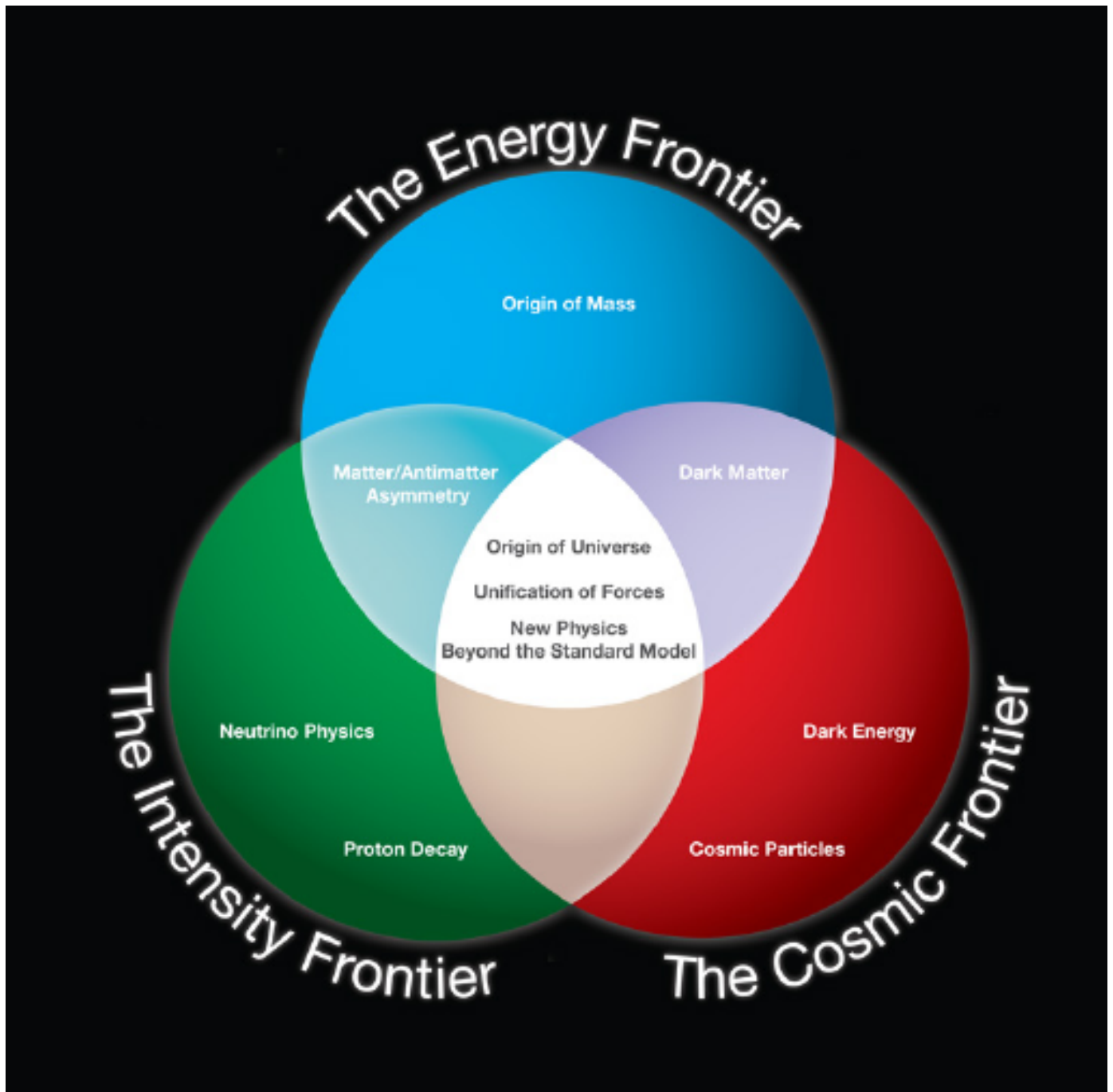


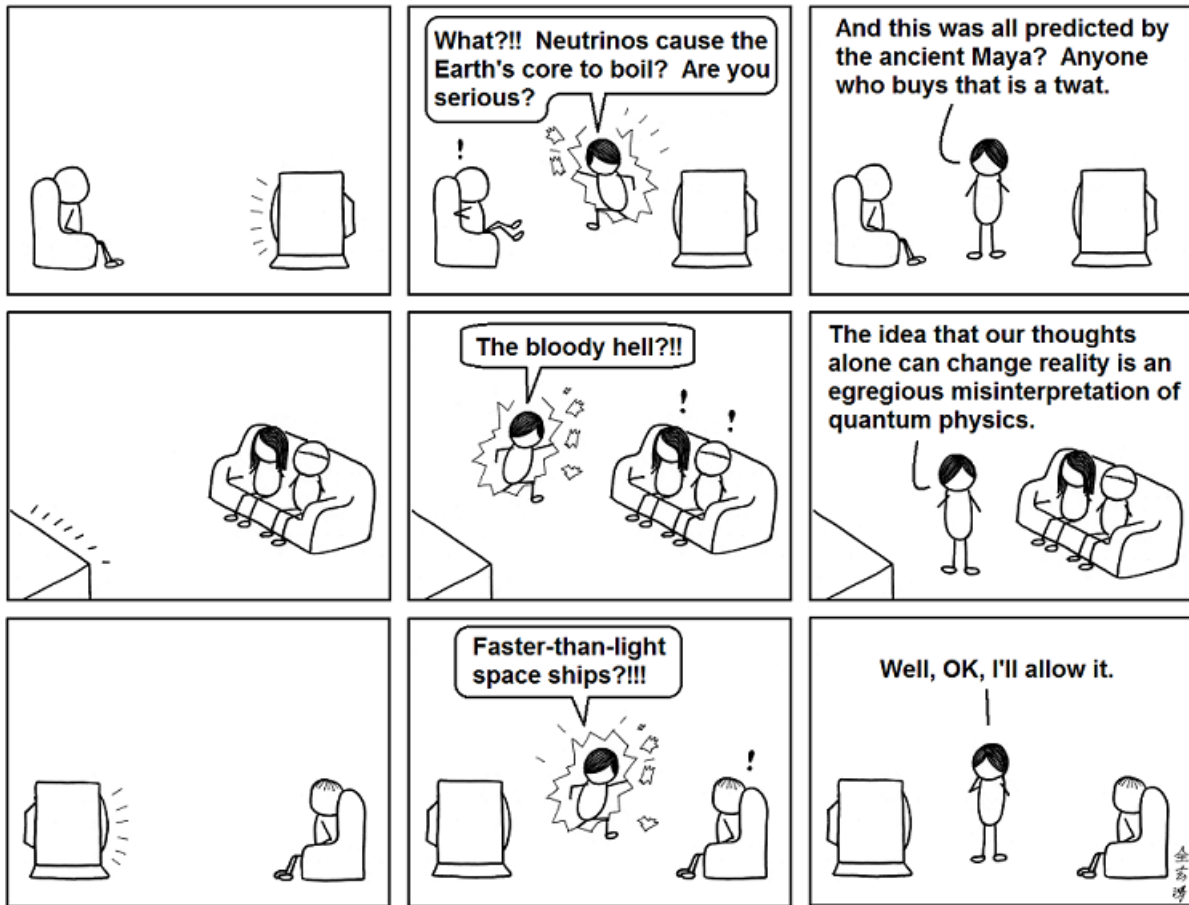
Figure 1.1: Schematic diagram of the Standard Model of particle physics

Las nuevas fronteras son aún enormes...

Landmark Inventions in Mathematical Physics

- ☆ **Geometry** (-230 Euclid) the foundation for measurement
- ☆ **Analytic Geometry** (1637 Descartes)
 - first integration of algebra and geometry
- ☆ **Differential and Integral Calculus** (~ 1670 Newton & Leibniz)
 - Newtonian Mechanics 1687
 - Perfected ~1780+ by Euler, Lagrange, Laplace
- 19th Century { ☆ **Complex variable theory** (~1820+ Gauss, Cauchy, Riemann)
 - Celestial mechanics and chaos theory (1887 Poincaré)
 - Quantum mechanics (1926 Schrödinger)
- ☆ **Vector calculus** (1881 Gibbs)
 - Electrodynamics (1884 Heaviside)
- ☆ **Tensor calculus** (1890 Ricci)
 - General Relativity (1955 Einstein)
- ☆ **Matrix algebra** (1854+ Cayley)
 - Quantum mechanics (1925 Heisenberg, Born & Jordan)
- ☆ **Group Theory** (~1880 Klein, Lie)
 - Quantum mechanics (1939 Weyl, Wigner)
 - Particle physics (1964 Gell-Mann, etc.)





all known physics

$$\Psi = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4} F^2 + \bar{\psi} i \not{D} \psi - \lambda H \bar{\psi} \psi + |DH|^2 - V(H) \right)} \int e^{\dots}$$

The equation is surrounded by labels for various physicists and theories: Schrödinger, Feynman, Einstein, Maxwell-Yang-Mills, Kobayashi-Maskawa, Lagrange, Dirac, Yukawa, Higgs, Euler, Planck, and Newton.

plus neutrino masses and mixing and dark matter


$$W = \int_{k < \Lambda} [Dg][DA][D\psi][D\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + (\bar{\psi}_L^i V_{ij} \Phi \psi_R^j + \text{h.c.}) - |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \right] \right\}$$

quantum mechanics
spacetime
gravity


other forces
matter
Higgs

ALL KNOWN PHYSICS


$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$




$6\text{CO}_2 + 6\text{H}_2\text{O} + n\gamma \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6\text{O}_2$
 $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi$
 $v = \frac{d[P]}{dt} = \frac{V_{\max}[S]}{K_m + [S]}$





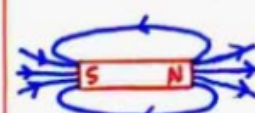
$dU = \delta Q + \delta W$
 $dG = d(H - TS)$
 $dS^t = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0$



$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{v^2}{2} + gz = f(t)$
 $\mathbf{F} = - \iint_S p \hat{n} dS$
 $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$

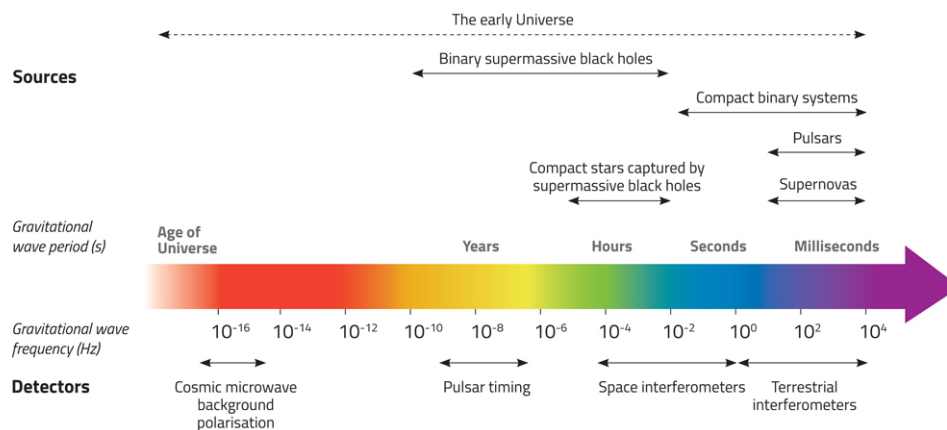
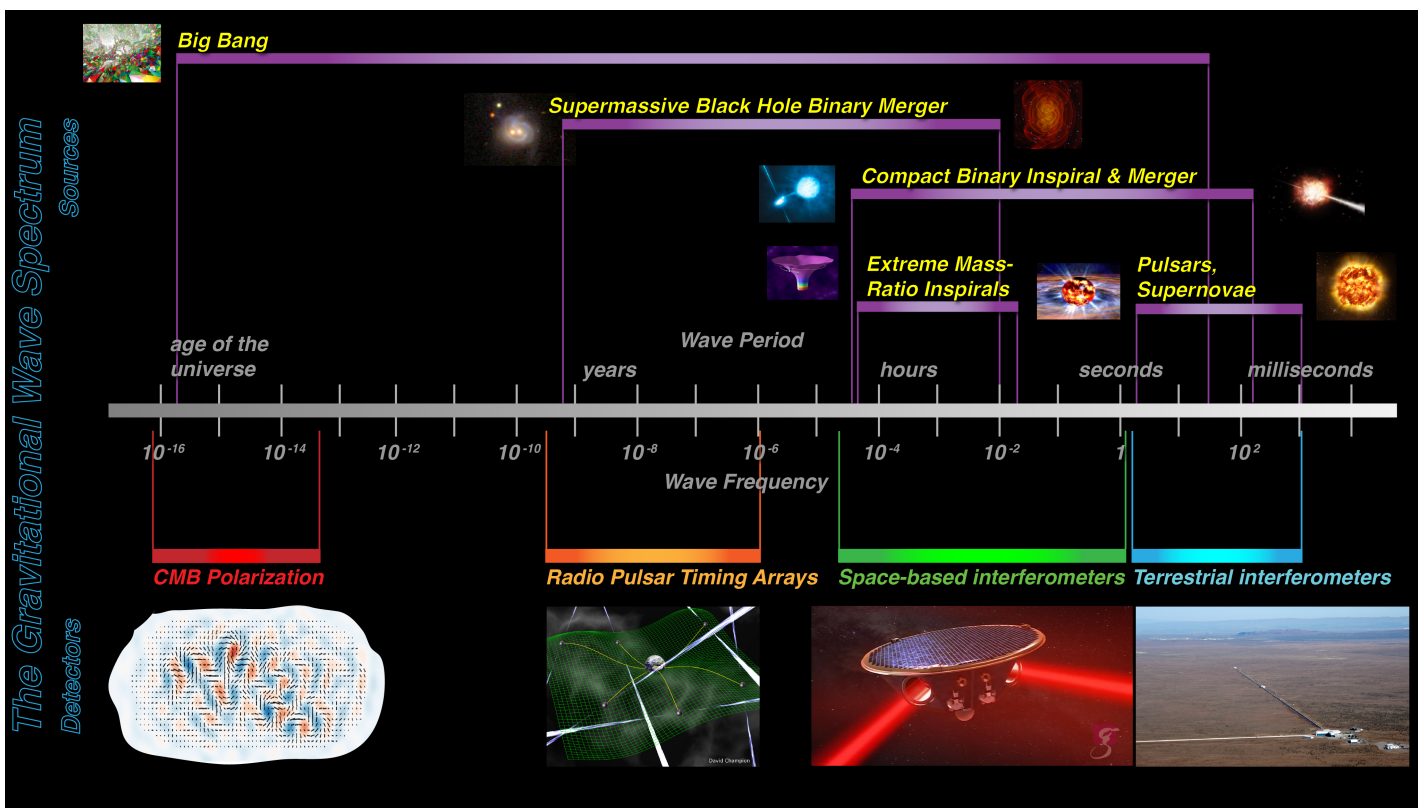


Resumen comparativo de campo gravitacional, campo eléctrico y campo magnético:

	CAMPO GRAVITATORIO	CAMPO ELÉCTRICO	CAMPO MAGNÉTICO
Fuentes del campo	Masa (puntual o distribución de masa)	Carga eléctrica (puntual o distribución de carga) <u>Campo magnético variable en el tiempo</u>	Carga eléctrica en movimiento - corriente eléctrica - <u>Campo eléctrico variable con el tiempo</u>
Líneas de fuerza	 Abiertas y entrantes	 Abiertas Entrantes: $-q$ Salientes: $+q$	 Cerradas (de N a S) (campo solenoidal)
Carácter conservativo	$\vec{F}_{\text{grav}} = m' \vec{G}$ Conservativo - es un campo central - $E_{\text{pgrav}} = -G \frac{mm'}{r}$	$\vec{F}_{\text{el}} = q' \vec{E}$ Conservativo - es un campo central - $E_{\text{pel}} = k \frac{qq'}{r}$	$\vec{F}_{\text{mag}} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ No conservativo - \vec{F}_{mag} depende de la velocidad - No existe E_{pmag}

Capítulo 3

M.A.S. y ondas



3.1. M.A.S.

Un movimiento armónico simple (M.A.S.) es la proyección sobre una recta de un M.C.U. (movimiento circular uniforme). Por lo tanto, tiene las mismas variables:

- **Elongación** (según el eje x, y, z). Describe el estado de oscilación como función periódica del tiempo, mediante funciones $x(t), y(t), z(t)$, según el eje en el que haya oscilación.
- **Período** es el tiempo que tarda el móvil en pasar por el mismo punto con el mismo estado de vibración, es decir, el valor T para el que $x(t) = x(t + T)$, y similarmente con oscilaciones en torno a otros ejes.
- **Frecuencia** f es el número de oscilaciones en cada segundo, matemáticamente $f = 1/T$, en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ o hertzios.
- **Frecuencia angular** o **pulsación** ω , es la velocidad de vibración angular, matemáticamente $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Se mide en $\text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- **Velocidad de vibración:** es la derivada de la elongación respecto del tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

donde hemos tomado $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ como elongación.

- **Aceleración de vibración:** es la derivada de la velocidad de vibración respecto del tiempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

donde $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

- **Amplitud** es el valor máximo de la elongación.
- **Fase inicial.** Es el estado angular de oscilación inicial φ_0 . Se mide en radianes.
- **Fase.** Es la cantidad dependiente del tiempo $\varphi(t) = \omega(t - t_0) + \varphi_0$. Se mide en radianes.
- Ecuación de movimiento del M.A.S. (dos opciones:

$$x(t) = R \sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0)$$

$$y(t) = R \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_0)$$

Generalmente $R = A$, y $t_0 = 0$, luego es también usual

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Debido a que un M.A.S. es una función sinusoidal, tanto la elongación, como la velocidad, la aceleración, el jerk y toda derivada temporal de la elongación están acotadas mediante la expresión:

$$0 \leq \left| \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right| \leq A\omega^n$$

$$-A\omega^n \leq \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leq A\omega^n$$

donde n es el orden de derivación, siendo la derivada de orden cero la función $x(t)$. Así, el valor máximo de la elongación, la velocidad o la aceleración son $A, A\omega, A\omega^2$, y los valores mínimos $-A, -A\omega, -A\omega^2$.

La causa de un movimiento oscilatorio o M.A.S. es una ley de fuerza tipo ley de Hooke: $F = -kx$, donde k es la constante elástica en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ y x es la elongación. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t)$$

se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ecuación del M.A.S.

Todo M.A.S. posee una ecuación de movimiento igual a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

y elongación

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

donde $m\omega^2 = k$ es la relación entre la constante de la ley de Hooke responsable del M.A.S., la masa de la partícula o sistema oscilante es m , y ω es su velocidad angular o pulsación. A es la amplitud o máxima elongación, φ_0 es la fase inicial.

Mediante derivación directa se puede comprobar efectivamente que la ecuación del M.A.S. se resuelve efectivamente con una función de tipo $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ o de tipo $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Un M.A.S. proviene de una ley de Hooke, que es una fuerza elástica del tipo de fuerzas conservativas que hemos visto posee energía potencial. Escribiendo

$$F = -\frac{dE_p(el)}{dx}$$

se obtiene mediante integración directa que $E_p = kx^2/2$. Entonces, tenemos los siguientes resultados:

Energía cinética y energía potencial en el M.A.S.

La energía potencial de todo M.A.S. es igual a:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

donde $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ es en general una función del tiempo. La energía cinética del M.A.S. es una función temporal

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

ya que $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Como la fuerza elástica es conservativa, existe una función conservada para todo valor del tiempo, la energía mecánica:

Energía mecánica del M.A.S.

Para todo M.A.S., la energía mecánica $E_m = E_k + E_p$ permanece constante, siendo su valor

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Demostración:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0))$$

de donde

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

por el teorema fundamental de la trigonometría.

Es importante recalcar que salen funciones sinusoidales gracias al signo de la fuerza elástica. Si el signo en la función de la fuerza de la ley de Hooke fuera positivo y no negativo (signo opuesto de la fuerza recuperadora), las soluciones en vez de soluciones trigonométricas salen funciones exponenciales, o su análogo que se llaman funciones “trigonométricas” hiperbólicas. Por curiosidad, supongamos que $F = +\lambda x$, y entonces $E_p = -\frac{\lambda x}{2}$, ya que $F = -dE_p/dx$. En este caso las soluciones de la ecuación de movimiento (no periódicas en los reales, sino periódicas con periodo imaginario $T = i\tau$)

$$F = ma = +\lambda x \rightarrow ma - \lambda x = 0$$

o bien

$$a = \ddot{x} - \frac{\lambda}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}x - \omega^2 x = 0$$

son o bien

$$x(t) = A \sinh(\omega t + \beta_0)$$

o bien

$$x(t) = A \cosh(\omega t + \beta_0)$$

y donde $\omega = \sqrt{\lambda/m}$, $m\omega^2 = \lambda$. La velocidad resulta ser (tomando $x(t) = A \sinh(\omega t + \beta_0)$)

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cosh(\omega t + \beta_0)$$

y la aceleración

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = A\omega^2 \sinh(\omega t + \beta_0) = \omega^2 x(t)$$

La energía cinética del oscilador hiperbólico es

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cosh^2(\omega t + \beta_0)$$

y la energía potencial

$$E_p = -\frac{1}{2}\lambda x^2(t) = -\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sinh^2(\omega t + \beta_0)$$

La energía mecánica es constante como el M.A.S. habitual:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cosh^2(\omega t + \beta_0) - \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sinh^2(\omega t + \beta_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}\lambda A^2$$

y donde se ha usado el teorema fundamental de la trigonometría hiperbólica

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

Existe un análogo angular para el MAS, llamado MAS angular u oscilador de torsión. La Dinámica del oscilaciones por torsión tiene ecuaciones análogas a las de desplazamiento lineal. Supongamos que

$$F = -kx \longrightarrow M = -k\varphi \quad (3.1)$$

$$F = ma \longrightarrow M = I\alpha \quad (3.2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I}}} \quad (3.3)$$

Del péndulo simple surgen el péndulo simple y el péndulo físico

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.4)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad (3.5)$$

Las energías cinéticas, potenciales y mecánica del MAS de torsión son ahora

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.6)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\varphi^2 \quad (3.7)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I\omega_m^2 = \frac{1}{2}k\varphi_m^2 \quad (3.8)$$

3.2. Movimiento ondulatorio y ecuaciones de onda

El movimiento ondulatorio se describe con un objeto llamado *función de onda* $\Psi(x, t)$ satisface una ecuación llamada **ecuaciones de onda**. Una función de onda simple es aquella que realiza el denominado *movimiento armónico*. Un movimiento armónico realiza un M.A.S. en el espacio y en el tiempo de forma que su función de onda es una función sinusoidal

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (3.9)$$

que describe una onda armónica porque satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

como puede probarse por inspección o sustitución directamente, o escribir equivalentemente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = \square^2 \Psi(x, t) \equiv \square \Psi(x, t) = 0 \quad (3.11)$$

con v_p la velocidad de la onda, y donde se define el operador de D'Alembert o D'Alambertiano como

$$\square^2 = \square \cdot \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (3.12)$$

Cuando aumentamos el número de dimensiones, el D'Alembertiano se puede escribir:

$$\square \equiv \square_{2d+1}^2 = \square \cdot \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.13)$$

$$\square \equiv \square_{3d+1}^2 = \nabla \cdot \nabla - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

y donde ∇ es el operador nabla

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \vec{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (3.15)$$

Se puede incluso generalizar el operador D'Alembertiano a espacios denominados ultrahiperbólicos, o multitemporales, de la forma siguiente. Si asumimos una misma velocidad (isotropía) de las direcciones temporales múltiples, tendremos los operadores de onda generalizados

$$\square \equiv \square_{nd+2t}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) \quad (3.16)$$

$$\square \equiv \square_{nd+mt}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} \right) = \sum_i \partial_{x_i}^2 - v_p^{-2} \sum_j \partial_{t_j}^2 \quad (3.17)$$

mientras que si permitimos diferentes velocidades (anisotropías) en los diferentes ejes y vectores del tiempo, escribiremos v_1, v_2, \dots, v_m como velocidades en las diferentes direcciones del tiempo, y el operador de onda se reescribe como

$$\square \equiv \square_{nd+mt}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \dots - \frac{1}{v_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t_m^2} = \sum_i \partial_{x_i}^2 - \sum_j v_j^{-2} \partial_{t_j}^2 \quad (3.18)$$

Generalmente se simplifica la notación del D'Alembertiano escribiendo \square en vez de \square^2 . Cuando tenemos ondas electromagnéticas o gravitacionales en el vacío, es costumbre también escribir $v_p = c$. Para las ecuaciones de onda en el caso de dimensiones multitemporales, se guarda la denominación ultrahiperbólica por cuestiones puramente matemáticas. Por tanto, las ondas y ecuaciones de onda pueden ser unitemporales, o multitemporales, unidimensionales o multidimensionales. Cuando no hay dimensiones del tiempo, la ecuación ya no es una ecuación de onda, sino una ecuación laplaciana:

$$\nabla^2 \Psi \equiv \Delta \Psi = 0 \quad (3.19)$$

que no puede ser una ecuación temporal obviamente. Hay otra clase de ecuaciones de onda. Las ondas pueden ser

- **Longitudinales.** La vibración ocurre en la misma dirección que la de propagación. Ejemplo: el sonido, ondas sísmicas de tipo P,...
- **Transversales.** La vibración ocurre en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. Ejemplos: ondas electromagnéticas, ondas gravitacionales, ondas sísmicas de tipo S, ondas en una cuerda,...

Las ondas hoy día subyacen al concepto de campo, más fundamental. Además de las ecuaciones de Laplace o de D'Alembert, existen ecuaciones lineales y no lineales de onda de diferentes tipos adicionales: la ecuación de Dirac, la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon, y otras varias.

Una función de onda armónica es periódica en el tiempo y en el espacio. Se escribe generalmente en la forma

$$\Psi(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) = A \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (3.20)$$

o bien

$$\Psi(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (3.21)$$

y la doble periodicidad se manifiesta en el hecho matemático de que

$$\Psi(x, t) = \Psi(x, t \pm nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.22)$$

para la periodicidad en el tiempo, o bien

$$\Psi(x, t) = \Psi(x \pm n\lambda, t), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.23)$$

La cantidad T es el período, y la cantidad λ , la periodicidad espacial, se llama *longitud de onda*. La cantidad de fase que puedo meter en cada longitud de onda se denomina k , y se llama *número de onda*. El número de onda es una suerte de pulsación espacial (es el análogo de ω). El número de onda dividido entre 2π , que es el análogo de la frecuencia f , es el número de longitudes de onda por metro, y se llama número de onda racionalizado \bar{k} . Matemáticamente, tenemos pues

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{k} \quad (3.24)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \quad (3.25)$$

Las unidades de k, \bar{k} son los son respectivamente los $rad/m, m^{-1}$, pero se escribe generalmente m^{-1} en ambos casos como norma habitual.

3.3. Ondas: propiedades y fenómenos

Las ondas experimentan una serie de fenómenos interesantes: superposición e interferencia, reflexión, refracción, difracción, polarización (exclusiva de ondas transversales), absorción o atenuación, resonancia, reverberación, sonoridad, dispersión, no linealidad (exclusiva de ondas no lineales), efecto Doppler y algunas otras propiedades menos estandarizadas.

3.3.1. Velocidad y aceleración de vibración

Para una función de onda $\Psi = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi)$, podemos definir la velocidad y aceleración vibratorias:

$$v_{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (3.26)$$

$$a_{\Psi} = \frac{\partial v_{\Psi}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (3.27)$$

3.3.2. Energía en ondas armónicas

Según hemos visto, en un M.A.S. tenemos como energía mecánica constante (cuidado en no confundir la constante elástica k con el número de onda): $E_m = k_e A^2 / 2$, lo que se puede reescribir como sigue

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m (4\pi^2 f^2) A^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2 \quad (3.28)$$

En un medio de tipo homogéneo e isótropo, la dirección de propagación es siempre perpendicular al frente de ondas (conjunto de puntos con igual fase). Supongamos una fuente emite ondas en un tiempo inicial $t_0 = 0s$. Tras un tiempo t_1 , la energía se reparte en radio $r_1 = vt_1$, donde v es la velocidad de propagación. Igualmente, en t_2 , $r_2 = vt_2$. En cada tiempo habrá una energía, que podremos denotar respectivamente E_0, E_1, E_2 . Además, suponiendo una densidad uniforme ρ del medio vibrante, se tendrá que

$$E_0 = 2m_0\pi^2 f^2 A_0^2 \rightarrow E_0 = 2\rho S_0 x_0 \pi^2 f^2 A_0^2$$

$$E_1 = 2m_1\pi^2 f^2 A_1^2 \rightarrow E_1 = 2\rho S_1 \pi^2 f^2 A_1^2$$

$$E_2 = 2m_2\pi^2 f^2 A_2^2 \rightarrow E_2 = 2\rho S_2 \pi^2 f^2 A_2^2$$

y donde $V = Sx = 4\pi r^2 vt$, donde v es la velocidad. El frente de onda esférico, con igualdad de energía, implica que

$$r_1^2 A_1^2 = r_2^2 A_2^2 = \text{constante} \quad (3.29)$$

$$r_i A_i = \text{constante} \quad (3.30)$$

Si definimos la potencia de una onda como

Potencia de una onda

La potencia de una onda es el producto de su intensidad por la superficie. Matemáticamente:

$$P = IS \quad (3.31)$$

o bien la intensidad es el cociente de la potencia en vatios W y la superficie que atraviesa (una esfera si la onda tiene un frente de onda esférico)

$$I = \frac{P}{S} \quad (3.32)$$

Esta intensidad se mide en $W \cdot m^{-2}$. Para una onda armónica, se tiene que

$$I = I(\rho, v, A, f) = 2\pi^2 \rho v A^2 f^2 \quad (3.33)$$

ya que

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{tS}$$

También se satisfacen las relaciones (para ondas esféricas)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Para ondas de tipo circular o cilíndrico se tiene $Ir = const$ en vez de $Ir^2 = const$.

Ley de absorción

Un sistema que tiene un coeficiente de absorción β en m^{-1} , atenúa la onda mediante la ley

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

Demostración simple: una onda armónica plana (o también algunas ondas no planas), disminuye su intensidad al atravesar un medio de absorción β de forma proporcional a la intensidad y distancia de forma que

$$dI = -\beta I dr$$

Integrando

$$\int \frac{dI}{I} = -\beta \int dr$$

se sigue de forma trivial que $\ln(I) - \ln(I_0) = -\beta r$, de donde se deduce la ley de forma natural. La distancia de semiabsorción $D_{1/2}$ es la distancia que debe cruzar una onda en un medio para que su intensidad se reduzca a la mitad. Matemáticamente

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

3.3.3. Velocidades de propagación en medios

Onda transversal en una cuerda

Velocidad de propagación en una cuerda

Para una cuerda con tensión $T_s = F$, en newtons, y una densidad lineal de masa en kg/m igual a $\eta = \lambda$, se tiene que

$$v_s = \sqrt{\frac{T_s}{\eta}} \quad (3.34)$$

Onda longitudinal en un sólido

Velocidad de propagación en un sólido

Una vibración longitudinal de un cuerpo sólido de densidad volúmica ρ y módulo de Young en N/m^2 igual a \mathcal{Y} se propaga con velocidad

$$v_p = \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\rho}} \quad (3.35)$$

Velocidad de ondas acústicas en un líquido o gas

Velocidad acústica

Para un gas con coeficiente adiabático γ , adimensional, modelado como un gas ideal cuya constante es $R = 8,31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} = 0,082 atmL/Kmol$, a una temperatura absoluta T , y con una masa molar o molecular M en kg/mol , se tiene que

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (3.36)$$

En el caso de un polítopo con $K = \gamma p$ de factor de compresibilidad, en un medio de densidad ρ , se tiene

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (3.37)$$

mientras que para un líquido con K y densidad ρ será

$$v_a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.38)$$

Ondas superficiales en el mar u olas

Velocidad de las ondas superficiales marinas

La velocidad de las ondas marinas u olas, en el caso de que la longitud de onda es mucho menor que la profundidad, viene dada por

$$v_{ola} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (3.39)$$

Ondas electromagnéticas y gravitacionales

Velocidad de perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales en el vacío

Si definimos la permitividad eléctrica en el vacío

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_C} = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$$

y la permitividad magnética en el vacío como

$$\mu_0 = 4\pi K_m = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} N \cdot A^{-2}$$

se define la velocidad de la luz en el vacío o velocidad de transporte de las perturbaciones en el espacio-tiempo ordinario como

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{K_C}{K_m}} \quad (3.40)$$

3.4. Ondas sonoras

La intensidad es $I = P/S$, pero se define el nivel de intensidad sonora o sonoridad mediante la ley de Weber-Fechner, basada en escala logarítmica:

Sonoridad y logaritmos

El nivel de intensidad de referencia se toma como $I_0 = 10^{-12} W/m^2$, basado en el umbral de audición humano, lo que permite definir la sonoridad en la escala logarítmica de decibelios como sigue:

$$\beta = N.I. = S(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = k \log_{10} I - k' \quad (3.41)$$

Sound sources (noise) Examples with distance	Sound pressure Level L_p dB SPL
Jet aircraft, 50 m away	140
Threshold of pain	130
Threshold of discomfort	120
Chainsaw, 1 m distance	110
Disco, 1 m from speaker	100
Diesel truck, 10 m away	90
Kerbside of busy road, 5 m	80
Vacuum cleaner, distance 1 m	70
Conversational speech, 1 m	60
Average home	50
Quiet library	40
Quiet bedroom at night	30
Background in TV studio	20
Rustling leaves in the distance	10
Hearing threshold	0

3.5. Polarización

Las ondas transversales pueden vibrar en direcciones diferentes a las de propagación. Así, la amplitud de la onda polarizada inclinada un ángulo α respecto de una onda polarizada será

$$A_\alpha = A \cos \alpha$$

La intensidad de una onda polarizada inclinada un ángulo α respecto de una onda polarizada incidente viene dada por la expresión

$$I_\alpha = I \cos^2 \alpha$$

expresión que se denomina **Ley de Malus** de la polarización. Se puede comparar su importancia a la ley de Brewster $n_r = \tan i$ de la polarización por reflexión.

3.6. Reflexión y refracción

Ley de la reflexión

$$\theta_i = \theta_r \quad (3.42)$$

Ley de la refracción de Snell-Descartes

$$\frac{\theta_i}{v_i} = \frac{\theta_r}{v_r} \quad (3.43)$$

3.7. Interferencia

Cuando dos o más ondas coinciden en un punto del espacio, puede interferir. Se llama interferencia al fenómeno ondulatorio que tiene lugar cuando se combinan diferentes funciones de onda en un punto del espacio.

Matemáticamente, equivale a aplicar el principio de superposición:

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^N \Psi_i = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_N \quad (3.44)$$

3.7.1. Caso 1: interferencia de ondas de igual frecuencia

Sean las funciones de onda armónicas:

$$\Psi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1) \quad (3.45)$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2) \quad (3.46)$$

Entonces:

$$\Psi_1 = A_1 \sin(\omega t - kx + \delta_1) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (3.47)$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin(\omega t - kx + \delta_2) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (3.48)$$

Usando la superposición $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, se obtiene

$$\Psi = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (3.49)$$

$$\Psi = A_1 [\sin(\omega t) \cos(\varphi_1) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_1)] + A_2 [\sin(\omega t) \cos(\varphi_2) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_2)] \quad (3.50)$$

$$\Psi = \sin(\omega t) [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2] + \cos(\omega t) [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2] \quad (3.51)$$

$$\Psi = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.52)$$

y donde se ha definido

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \quad (3.53)$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \quad (3.54)$$

y de donde entonces obtenemos las relaciones interferenciales para la amplitud y fase de la onda resultante:

Amplitud y fase para superposición de ondas armónicas de igual frecuencia

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (3.55)$$

En interferencia, son útiles las siguientes identidades trigonométricas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\pi + \varphi) = \sin(\varphi), \quad \cos(2\pi + \varphi) = \cos \varphi, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

De aquí, si $\alpha + \beta = \varphi_1$, $\alpha - \beta = \varphi_2$, se deduce que $\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ y

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

y entonces

$$\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = 2 \sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

De aquí, también si $\alpha + \beta = \varphi_1$, $\alpha - \beta = \varphi_2$, se deduce que se deduce que $\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ y

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

y entonces

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

Cuando las ondas interfirientes están desfasadas $0^\circ = 0$ rad, i.e., cuando $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, y entonces

$$A_t^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

Se dice que la interferencia es constructiva, los puntos están en fase, y las amplitudes se suman, lo que ocurre en general para $\Delta\varphi = 2n\pi = 2\delta$, con $n \in \mathbb{Z}$. Cuando las ondas interfirientes están desfasadas en π rad, entonces

$$A_t^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

y se dice que la interferencia es destructiva o los puntos están en oposición de fase, lo que ocurre más en general cuando $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi = 2\delta$, con $n \in \mathbb{Z}$. Para hallar los puntos x donde se producirán estas condiciones, basta con hacer la diferencias

$$\Delta\varphi_M = (\omega t - kx) - (\omega t - k(x + n\lambda)) = nk\lambda = 2\pi n$$

lo que da para los máximos

$$\Delta\varphi_M = 2n\pi \rightarrow \Delta x_M = n\lambda$$

y las diferencias

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx) - (\omega t - k(x + \frac{2n+1}{2}\lambda)) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

lo que da para los mínimos

$$\Delta\varphi_m = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \Delta x_m = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\lambda$$

3.7.2. Caso 2: interferencia de ondas esféricas de igual frecuencia

Una onda esférica tiene intensidad $I \propto r^{-2}$ en el espacio euclídeo tridimensional, y $A \propto \sqrt{I} \propto r^{-1}$. La función de onda radial

$$\Psi(r, t) = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \delta) \quad (3.56)$$

es diferente pero similar a una onda plana $\psi = A \sin(\omega t - kz + \delta)$. Superponemos dos ondas

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (3.57)$$

$$\Psi = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr) + \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \delta) \quad (3.58)$$

$$\Psi_t = \frac{A_0}{r} [\sin(\omega t - kr) + \sin(\omega t - kr + \delta)] \quad (3.59)$$

El resultado final es

$$\Psi = \frac{2A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \frac{\delta}{2}) \cos(\frac{\delta}{2}) \quad (3.60)$$

$$\Psi = A_t \sin(\omega t - kr + \frac{\delta}{2}) \quad (3.61)$$

donde

$$A_t = \frac{2A_0}{r} \cos(\frac{\delta}{2}) \quad (3.62)$$

La intensidad de la onda esférica es proporcional al cuadrado de la función de onda, i.e., proporcional a

$$I = \frac{4A_0^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{4A_0^2}{r^2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2}\right) = \frac{2A_0^2}{r^2} (1 + \cos \delta) \quad (3.63)$$

2 ondas de luz aleatorias de luz son en general incoherentes. Si producimos coherencia, desde u mismo foco, mediante radiación monocromática y rendijas, sí habrá interferencia. En síntesis, la condición de interferencia entre dos ondas de igual frecuencia que proceden del mismo punto y que han seguido dos caminos x_1, x_2 es $|x_1 - x_2| = n\lambda$, y $|x_1 - x_2| = (2n + 1)\lambda/2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$. Otra idea importante es la de pulsación de dos ondas, con frecuencias f_1, f_2 . 2 ondas de frecuencias diferentes f_1, f_2 ($f_1 > f_2$), de la misma amplitud y fase, propagándose en la misma dirección, en $x = 0$, mediante superposición:

$$\Psi_1 = A \sin(2\pi f_1 t) \quad (3.64)$$

$$\Psi_2 = A \sin(2\pi f_2 t) \quad (3.65)$$

$$\Psi_t = A [\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)] \quad (3.66)$$

producen una onda resultante igual a

$$\Psi = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (3.67)$$

donde la frecuencia de desplazamiento es $f_d = (f_1 + f_2)/2$, y la frecuencia de batido o pulsación es igual al resultado mencionado anteriormente, $f_b = f_p = f_1 - f_2$.

3.8. Difracción

3.9. Ondas de ondas: cuerdas, tubos y armónicos

3.9.1. Soluciones a la ecuación de ondas

La ecuación de ondas en 1+1 dimensiones se escribe como sigue:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi = 0 \quad (3.68)$$

La solución general de esta ecuación fue obtenida por D'Alembert, como una suma de una función que se propaga hacia una dirección y su dirección contraria (que podemos llamar, derecha + e izquierda -, o bien arriba y abajo, o similar):

$$\Psi = F_-(x - ct) + F_+(x + ct) \quad (3.69)$$

y donde F_-, F_+ son dos funciones arbitrarias que describen perturbaciones u ondas viajeras con velocidad c , y que se propagan hacia "adelante" en el tiempo F_- y hacia "delante" detrás F_+ . Estas funciones pueden ser determinadas mediante las llamadas condiciones de contorno o frontera, también llamadas condiciones de valor inicial. Si, por ejemplo, definimos $\Psi(x, 0) = f(x)$, $\partial_t \Psi(x, 0) = g(x)$, entonces:

$$\Psi(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (3.70)$$

donde $f(x) \in C^k$, $g(x) \in C^{k-1}$, tal que $\Psi(x, t) \in C^k$. Además, F_-, F_+ pueden no ser funciones estrictas sino cierta clase de objetos matemáticos llamados funciones generalizadas (distribuciones es otro nombre popular). Cualquier función o función generalizada puede admitir un desarrollo o descomposición en "armónicos trigonométricos", es decir, en ondas u osciladores armónicos (suma de M.A.S.), conocidos en matemáticas como series de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (3.71)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (3.72)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) f(t) dt \quad (3.73)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) f(t) dt \quad (3.74)$$

en donde a_0 , y a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) son números reales. También es posible una forma compleja pura del desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (3.75)$$

donde ahora los coeficientes

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (3.76)$$

son generalmente números complejos. Tanto en el caso real, como en el complejo, $\omega_n = 2\pi n/T$. La versión continua de las series de Fourier se llaman transformadas de Fourier, y hay otras variantes del formalismo, usadas en diversos ámbitos científico-matemáticos. Hay variantes multidimensionales.

3.9.2. Armónicos y condiciones de contorno

Una forma equivalente de escribir la solución de la ecuación de onda arbitraria en 1+1D es mediante la función

$$\Psi(x, t) = (A \sin(kx) + B \cos(kx)) \cos(\omega t) \quad (3.77)$$

donde A, B son constantes arbitrarias reales. Para fijar dichas constantes, se deben especificar condiciones de contorno o frontera en el medio oscilante. General y matemáticamente hablando, hay 3 tipos de condiciones de contorno:

- Dirichlet: si se especifica el valor de Ψ en la frontera $\partial\Sigma$.
- Neumann: si se especifica el valor de la derivada normal $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ sobre $\partial\Sigma$.
- Cauchy: si se especifica tanto el valor de la función Ψ como su derivada normal $\partial_n\Psi$ en $\partial\Sigma$.
- Mixtas: si hay una combinación de las anteriores condiciones en la frontera del medio de oscilación.

Vamos solamente a estudiar la solución de la ecuación de onda en tres casos:

- **Caso 1:** una cuerda de longitud finita $L_s = L$, con extremos fijos (o en un tubo cerrado). Usando $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$, se deduce de forma trivial que $B \cos(\omega t) = 0 \rightarrow B = 0$. Entonces:

$$0 = A \sin(kL) \cos(\omega t), \quad \forall t \rightarrow kL = n\pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (3.78)$$

Como $c = \lambda f$, se deduce entonces que

$$f_n = \frac{cn}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_s}{\rho}} \quad (3.79)$$

- **Caso 2:** una cuerda con extremos libres, de longitud finita $L_s = L$, o tubo abierto por los dos extremos. Usando las relaciones

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.80)$$

derivando

$$\partial_x \Psi = [Ak \cos(kx) - Bk \sin(kx)] \cos(\omega t) \quad \forall t \quad (3.81)$$

de donde

$$Ak \cos(\omega t) = 0 \rightarrow A = 0 \quad \forall t \quad (3.82)$$

Por ende,

$$[Ak \cos(kL) - Bk \sin(kL)] \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \quad (3.83)$$

De nuevo, obtenemos el mismo resultado que antes, unos armónicos con

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}, \quad \boxed{f_n = \frac{cn}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_s}{\rho}}} \quad (3.84)$$

- **Caso 3:** condiciones de Cauchy (Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro), i.e., $\Psi(0, t) = \partial_x \Psi(L, t) = 0$. Ahora se tendría que $B \cos(\omega t) = 0 \rightarrow B = 0$. Y de las ecuaciones

$$Ak \cos(kL) - Bk \sin(kL) = 0 \rightarrow \cos(kL) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \quad (3.85)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. En este caso, por tanto,

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}, \quad \boxed{f_n = \left(\frac{2n-1}{4L}\right)c = \left(\frac{2n-1}{4L}\right) \sqrt{\frac{T_s}{\rho}}} \quad (3.86)$$

3.9.3. Ondas estacionarias en cuerdas

La solución de la ecuación de ondas para la superposición de dos ondas que se interfieren constructivamente, mediante el principio de superposición:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \quad (3.87)$$

o bien

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \sin(\omega - kxt) + A \sin(\omega t + kx) \quad (3.88)$$

Esta ecuación se puede reescribir como sigue:

$$\Psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) = A_r \cos(\omega t) \quad (3.89)$$

Esta función de onda describe una onda que oscila en el tiempo, pero con dependencia espacial estacionaria $x \neq x(t)$. Los puntos de amplitud nula se llaman generalmente nodos (o antivientres), y los puntos de amplitud máxima vientres (o antinodos). Si A_r es máxima, entonces vale $A_r = \pm 2A$, y la solución de la ecuación trigonométrica $\sin(kx) = \pm 1$ produce $kx_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n = 0, 1, \dots, \infty$. Las posiciones de los vientres serían pues $x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$. Para los puntos con amplitud nula, o nodos, se tendría que $A_R = 0 \rightarrow kx = n\pi$, de donde se obtendría que $x_n = \frac{n\lambda}{2}$, con $n = 0, 1, \dots, \infty$. En síntesis:

- Nodos o antivientres. Puntos de oscilación nula en ondas estacionarias. Se tiene que están en semienteros de la longitud de onda o enteros pares de cuarto de longitud de onda:

$$\boxed{A_R = 0} \rightarrow \boxed{x_n = \frac{n\lambda}{2}} \quad (3.90)$$

- Vientres o antinodos. Puntos de oscilación máxima en ondas estacionarias, con $A_R = \pm A$, y se encuentran en enteros impares de cuarto de longitud de onda o semienteros de media longitud de onda:

$$x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (3.91)$$

3.9.4. Armónicos

Las ondas de un objeto o instrumento musical pueden producirse con ciertos patrones. La frecuencia natural o fundamental de tales objetos resuena a ciertos múltiplos de la frecuencia fundamental, como hemos visto en los subapartados anteriores. En ciertos instrumentos, son múltiplos enteros y el sonido o percepción de ondas con razones o proporciones de números enteros es agradable. En ondas en una cuerda:

$$f(n+1) = (n+1)f_0, \quad \lambda(n+1) = \frac{\lambda_0}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (3.92)$$

o bien

$$f(n) = nf_0, \quad \lambda(n) = \frac{\lambda_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.93)$$

Los armónicos de una cuerda fija por sus 2 extremos satisfacen las relaciones siguientes

$$f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad c = \sqrt{\frac{T_s}{\lambda}} \quad (3.94)$$

Los armónicos de una cuerda fija en un extremo y libre en el otro, satisfacen las relaciones:

$$f_n = \frac{nc}{4L} \rightarrow f_n = nf_1, \quad n = 1, 3, \dots, \infty \quad (3.95)$$

Una onda con un extremo fijo y uno libre vibra solamente en el modo fundamental y tien solamente armónicos impares. Un tubo abierto por un extremo es análogo a una cuerda con un extremo libre.

3.10. Efecto Doppler

El efecto Doppler es la variación de la frecuencia de una onda de velocidad u observada por un observador, dependiendo del movimiento de la fuente V_o , o del emisor con V_s , relativo al observador. Si el observador se mueve con velocidad V_o , entonces la frecuencia observada será

$$f' = f \left(1 + \frac{V_o}{u}\right) \quad (3.96)$$

Si el emisor o fuente se mueve con velocidad V_s , entonces la frecuencia observada será:

$$f' = f \left(1 - \frac{V_s}{u}\right)^{-1} \quad (3.97)$$

En el caso relativista, hay una deducción complicada más detallada, pero se puede simplificar el análisis yendo al resultado: suponiendo que $V_o = V_s = v$, que $u = c$, y que $v/c = \beta$, la fórmula del efecto Doppler longitudinal relativista es meramente la media geométrica de los efectos Doppler de observador y fuente de los casos 1 y 3, suponiendo que $f' = f_r = f_p$ es la frecuencia del observador (receptor, perceptor), y $f = f_s$ es la frecuencia del emisor, se tiene que:

Efecto Doppler relativista longitudinal

$$f' = f \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (3.98)$$

Efecto Doppler relativista arbitrario y transversal

En el caso de una fuente moviéndose respecto del receptor con velocidad v , y dirección θ_r respecto del mismo, la relatividad especial predice

$$f' = f \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta_r} = \frac{f}{\gamma(1 + \beta \cos \theta_r)} \quad (3.99)$$

Si ambos ocurren, i.e., que tanto observador como emisor se mueven, la ecuación es

Efecto Doppler para una onda general

$$f' = f \left(1 + \frac{V_0}{u}\right) \left(1 - \frac{V_s}{u}\right)^{-1} = f \frac{\left(1 + \frac{V_0}{u}\right)}{\left(1 - \frac{V_s}{u}\right)} \quad (3.100)$$

Una deducción más rigurosa, caso por caso, es como sigue:

- Caso 1. El observador se aleja de la fuente con velocidad V_0 (cambiamos el signo respecto del criterio usado antes). Entonces, la velocidad relativa es $v_r = v - V_0$. Si $v - V_0 = \lambda f_p$, donde f_p es la frecuencia percibida (antes f'), y $v = \lambda f_e$, donde $f_e = f$ es la frecuencia emitida, resulta que $v - V_0 = v f_p / f_e$, de donde se tiene trivialmente que

$$f_p = f_e \left(\frac{v - V_0}{v}\right) = f_e \left(1 - \frac{V_0}{v}\right) \quad (3.101)$$

Vemos que el sonido es más grave (la luz es más roja), porque la frecuencia disminuye.

- Caso 2. El observador se acerca. El mismo análisis proporciona, con $-V_0$ la expresión:

$$f_p = f_e \left(\frac{v + V_0}{v}\right) = f_e \left(1 + \frac{V_0}{v}\right) \quad (3.102)$$

Ahora, el sonido es más agudo (la luz más azul), porque la frecuencia aumenta.

- Caso 3. La fuente se aleja con velocidad v_s . Ahora $\lambda_1 = \lambda + v_s T$, y como $s = v_s T$, $f_1 = v / \lambda_1$, se tiene que $f_p = v / \lambda_1$. Como $v = \lambda f$, $T = 1 / f$, se deduce que

$$f_p = f \frac{v}{v + v_s} = f \left(\frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 + \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (3.103)$$

El sonido se hace más grave (la luz más roja), al alejarse la fuente, al disminuir la frecuencia.

- Caso 4. La fuente se acerca, con velocidad $-v_s$. Repitiendo el mismo análisis, o cambiando el signo a la velocidad vectorial, se deduce que

$$f_p = f \frac{v}{v - v_s} = f \left(\frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (3.104)$$

El sonido es más agudo (la luz más azul), al aumentar la frecuencia.

- Caso 5. Combinando los casos del movimiento del observador y la fuente, la fórmula general del efecto Doppler no relativista se escribe $v_s = v_f$, $v_0 = V_0$, $v = c$,

$$f_p = f_e \frac{v \pm v_0}{v \mp v_s} = f \left(\frac{1 \pm \frac{v_0}{v}}{1 \mp \frac{v_s}{v}}\right) = f \left(1 \pm \frac{v_0}{v}\right) \left(1 \mp \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \quad (3.105)$$

3.11. Resonancia

Una onda forzada, por una fuerza externa, puede amplificarse en amplitud enormemente si $\omega = \omega_0$, donde ω es la frecuencia de forzamiento y ω_0 es la frecuencia natural:

$$A = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

3.12. Ecuaciones de ondas, campos y partículas (no entra en EvAU)

Hay una triada entre ecuaciones de campos (clásicos o cuánticos), campos y partículas:

Ecuaciones de ondas \leftrightarrow Campos \leftrightarrow Partículas o cuantos

3.12.1. Ecuaciones escalares

Un campo escalar libre satisface la ecuación de Klein-Gordon

Ecuaciones de espín cero

Un campo escalar libre con masa m , escalar o de espín cero, satisface la ecuación:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (3.106)$$

Estas ondas pueden representar por ejemplo la inflación cósmica, o el campo de Higgs libre (aunque éste generalmente se presenta con autointeracciones y NO libre).

3.12.2. Ecuaciones espinoriales

Un campo espinorial libre satisface o bien la ecuación de Weyl, la ecuación de Dirac o la ecuación de Majorana:

Ecuaciones de espín 1/2

Un campo espinorial libre con masa m , sin carga eléctrica, de espín 1/2, satisface la ecuación de Dirac

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\Psi = 0 \quad (3.107)$$

o bien la ecuación de Weyl

$$\sigma^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (3.108)$$

o bien la ecuación de Majorana

$$-i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + mc\Psi_c = 0 \leftrightarrow i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_c + m\Psi = 0 \quad (3.109)$$

donde $\Psi_c = i\Psi^*$.

Hay ecuaciones de espinores exóticos con espín continuo o con espín infinitas componentes (ecuación de Majorana de alto espín).

3.12.3. Ecuaciones de fotones (masivos)

Las ondas electromagnéticas son un caso particular de ecuaciones de tipo campo Yang-Mills. Las ecuaciones de YM para el fotón son ecuaciones de espín uno sin masa. Una generalización para permitir masa se denomina ecuación de Proca:

Ecuación de onda de espín 1 de Maxwell-Proca

Un fotón o fotón masivo dado por un campo gauge (que suponemos abeliano B^ν) satisface la ecuación de Maxwell o de Proca:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) B^\nu = 0 \quad (3.110)$$

y donde $\partial_\nu B^\nu = 0$. La variación

$$B^\mu \rightarrow B^\mu + \delta B^\mu = B^\mu + \varepsilon \partial^\mu \varphi \quad (3.111)$$

es una transformación de gauge. En el caso de Maxwell, $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, implica que $\square A_\mu = 0$, y las soluciones de vacío son las ondas electromagnéticas, de las que la luz visible forma una pequeña parte.

3.12.4. Campo de Rarita-Schwinger: spin 3/2

Una partícula espinorial vectorial con masa m se llama campo de Rarita-Schwinger. Satisface una ecuación compleja:

Ecuación de espín 3/2 de Rarita-Schwinger

Un campo de espín 3/2 libre satisface la ecuación de Rarita-Schwinger

$$i\hbar \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho + m_{3/2} \gamma^{\mu\nu} \Psi_\nu = 0 \quad (3.112)$$

y donde $\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi_\nu = 0$, $\gamma^\mu \Psi_\mu = 0$ son ligaduras del campo, y donde $\gamma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \frac{1}{2}$, y $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\rho]}$.

Esta ecuación de Rarita-Schwinger proviene de un lagrangiano

$$L_{RS} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_\mu \left(i\gamma^{\mu\rho\nu} \partial_\rho + m_{3/2} \gamma^{\mu\nu} \right) \Psi_\nu \quad (3.113)$$

3.12.5. Gravitones: espín 2

Los hipotéticos gravitones asociados a radiación gravitacional (constituyentes de ondas gravitacionales u excitaciones del campo gravitacional), $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ son fluctuaciones pequeñas del campo gravitacional, que producen en general una ecuación de espín 2 para el gravitón (en relatividad general los gravitones NO tienen masa, pero hay teoría de gravedad con gravitones masivos):

Ecuación del gravitón de espín 2

El gravitón o partícula de espín 2, tendrá en general una ecuación de onda dada por la expresión:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.114)$$

3.12.6. Otras ecuaciones de campo más exóticas o complicadas

Existen campos tensoriales con número par de índices de tipo bosónico, y ecuaciones de campos tensoriales con número impar de índices. Algunas veces se les llama notophs o hipernotophs. Matemáticamente:

$$\square F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2p}} = 0$$

$$\square F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2p+1}} = 0$$

También existen objetos de tipo superespinorial, twistorial, supertwistorial, hiperespinorial, hipersupertwistorial con ecuaciones más sofisticadas, pero no demasiado diferentes a las ecuaciones de onda y campos anteriores. Existen otras ecuaciones de onda como la ecuación de Schrödinger o la ecuación del calor, y generalizaciones no lineales de las mismas. La ecuación del calor o difusión se escribe:

Ecuación del calor o de la difusión

Sea la función $\Phi(x, y, z, t)$, la ecuación del calor es la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.115)$$

en donde α es la difusividad del medio.

Ecuación de Schrödinger

Sea la función $\Psi(x, y, z, t)$, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es la ecuación en derivadas parciales

$$H\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (3.116)$$

en donde $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck racionalizada, m es la masa, $H = T + V$ el hamiltoniano, e $i^2 = -1$. No es más que una ecuación de difusión con tiempo imaginario. La versión independiente del tiempo de la ecuación de Schrödinger, para estados estacionares tales que $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$ se escribe como sigue:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = E\psi \quad (3.117)$$

3.13. Ondas electromagnéticas y ecuaciones de Maxwell (no entra en EvAU)

Durante el x.XIX, se estableció la unión definitiva entre la electricidad y el magnetismo. La síntesis del electromagnetismo, anticipada por Faraday, se condensa en las siguientes ecuaciones, denominadas ecuaciones de Maxwell:

Ley de Gauss del campo eléctrico

El flujo del campo eléctrico a lo largo de una superficie cerrada Σ es proporcional a la carga eléctrica encerrada por la superficie. Matemáticamente, a nivel integral se escribe

$$\phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi K_C Q_{in} \quad (3.118)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.119)$$

y donde ρ es la densidad de carga en unidades del S.I. Las fuentes del campo eléctrico son las cargas eléctricas.

Ley de Gauss del campo magnético

El flujo del campo magnético a lo largo de una superficie cerrada Σ es cero porque no existen los monopolos magnéticos. Matemáticamente, a nivel integral se escribe

$$\phi_B = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.120)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0 \quad (3.121)$$

La existencia de hipotéticos monopolos magnéticos, predichos por algunas teorías de gran unificación (GUT) o incluso por el modelo estándar, forzaría a cambiar esta ecuación introduciendo la carga magnética $Q_m = P$. Si no hay monopolos, esta ley significa que no hay polos magnéticos aislados, y que las fuentes del campo magnético son en general dipolos magnéticos.

Ley de Faraday-Lenz

La circulación del campo eléctrico a lo largo de una línea cerrada γ es igual al cambio del flujo del campo magnético, lo que genera una fuerza electromotriz inducida (f.e.m.) y una corriente inducida. Matemáticamente

$$\Gamma_E = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \varepsilon \quad (3.122)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.123)$$

Esta ley significa que podemos generar campos (potenciales) eléctricos mediante campos magnéticos variables en el tiempo. Además, el campo eléctrico es conservativo, por lo que puede escribirse, incluso si hay f.e.m., como

$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad} V \quad (3.124)$$

En el caso de que el flujo del campo magnético no cambie, tenemos la relación habitual $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.

Ley de Ampère-Maxwell

La circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada γ es igual a la suma del flujo de carga (corriente eléctrica) con el cambio del flujo del campo eléctrico, multiplicados por ciertas constantes. Matemáticamente

$$\Gamma_B = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right) \quad (3.125)$$

y a nivel diferencial

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (3.126)$$

y donde \vec{j} es el vector densidad de corriente superficial, definido como $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. En el caso de que el campo eléctrico no dependa del tiempo, se tiene la ley de Ampère usual, $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$. Esta ley de Ampère-Maxwell significa que podemos generar campos magnéticos mediante campos eléctricos variables en el tiempo incluso en ausencia de corrientes eléctricas libres. Además, el campo magnético no es conservativo, pero puede definirse un objeto llamado potencial vector tal que

$$\vec{B} = -\nabla \times \vec{A} = -\text{rot} \vec{A} \quad (3.127)$$

Las ecuaciones de Maxwell escritas de esta forma tridimensional pierden simetría, pero son la forma habitual de escribirlas en Ingeniería y cursos aplicados. En esta forma, predicen la existencia en el vacío (ausencia de corrientes y cargas, i.e., $I = 0$, $\vec{j} = 0$, $Q = 0$) de soluciones que son las ondas electromagnéticas que observamos de una forma u otra, y que se mueven con velocidad

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{K_C}{K_m} \quad (3.128)$$

Además de predecir naturalmente la existencia de ondas electromagnéticas, poseen algunas cualidades matemáticas interesantes:

- Conservan la carga eléctrica, dado que ésta se relaciona con la densidad de corriente \vec{j} mediante la denominada ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.129)$$

- No son invariantes bajo transformaciones de Galileo, sino bajo otras transformaciones más generales, las transformaciones de Lorentz (o incluso las de Poincaré). También poseen un conjunto de simetrías aún mayor, dadas por el llamado grupo conforme.
- En el vacío, también poseen otra propiedad matemática o invariancia denominada transformación de dualidad, en la que cambios $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, y $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ dejan las ecuaciones invariantes. Si hay cargas, la dualidad requiere la introducción de monopolos magnéticos para mantenerse como simetría.
- Transformaciones de gauge. Las ecuaciones de Maxwell tienen una simetría adicional, que es su invarianza bajo cambios de los campos $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, y $\vec{E} = -\nabla V - \partial_t \vec{A}$, del tipo $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f$, $V \rightarrow V - \partial_t f$ (no solamente desplazamientos del potencial $V \rightarrow V + C$), las ecuaciones de Maxwell se mantienen inalteradas.
- Condiciones de contorno. Las ecuaciones de Maxwell, para resolverse en un medio general, también requerirán condiciones de contorno o frontera para los campos eléctricos y magnéticos.
- En un formalismo tetradimensional, donde el tiempo es una cuarta coordenada, las ecuaciones de Maxwell adoptan un lenguaje más sencillo, reduciéndose a dos ecuaciones compactas:

Ecuaciones de Maxwell 3+1 y más allá

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$$

(3.130)

y donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Estas ecuaciones pueden generalizarse a espacios de dimensión arbitraria $D = s + t$. Usando objetos llamados formas diferenciales, las ecuaciones de Maxwell se reescriben sucintamente como $dF = J$, y $\star d \star F = \delta F = 0$, ya que $F = dA$, se tiene que $dJ = 0$ (conservación de la carga) y la identidad $d^2 F = 0$ más la identidad de Bianchi del tensor dual via la codiferencial o bien $d \star F = 0$. El operador codiferencial $\delta = \star d \star$ usa el llamado operador de Hodge-estrella, y también permite combinar las ecuaciones de Maxwell Dirac en una sola ecuación híbrida, llamada forma de Kähler-Dirac: $(d + \delta)F = 0$. En vez de formas diferenciales, hay otro formalismo equivalente multivectorial, debido a W. K. Clifford y otros. En este formalismo también pueden escribirse las ecuaciones de Maxwell de forma compacta en una simple ecuación: $\partial F = J$, donde $\partial = \partial \cdot + \partial \wedge$ es el operador derivada en cálculo geométrico/de Clifford.

En el caso de medios materiales, se definen las cantidades denominadas desplazamiento eléctrico \vec{D} , polarización $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, campo magnético \vec{H} , magnetización $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$, y las cargas y corrientes libres ρ_f, I_f . Para medios lineales, homogéneos e isótropos, se puede escribir que

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (3.131)$$

Y la primera ecuación de Maxwell queda $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$, o bien $\oint_{\mathcal{V}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$, y donde en general $Q = Q_f + Q_b$, $\rho = \rho_f + \rho_b$. Análogamente, para medios lineales, homogéneos e isótropos, se puede escribir que

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (3.132)$$

Con estas definiciones de magnetización y polarización, las ecuaciones de Maxwell macroscópicas restantes quedarían escritas como sigue:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.133)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.134)$$

y donde

$$Q = Q_f + Q_b = \int_V \rho dV \quad (3.135)$$

$$I = I_f + I_b = \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.136)$$

3.14. Ecuaciones de Yang-Mills(no entra en EvAU)

El caso del electromagnetismo es un subcaso de un conjunto más general de teorías gauge llamadas teorías de Yang-Mills. En estas teorías se define

$$F = dA + A \wedge A \leftrightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.137)$$

donde $[T_b, T_c] = i f_{bc}^a T_a$. Si definimos

$$D_\mu = I \partial_\mu - ig T^a A_\mu^a \quad (3.138)$$

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig T^a F_{\mu\nu}^a \quad (3.139)$$

se deducen las ecuaciones de Yang-Mills

Ecuaciones Yang-Mills

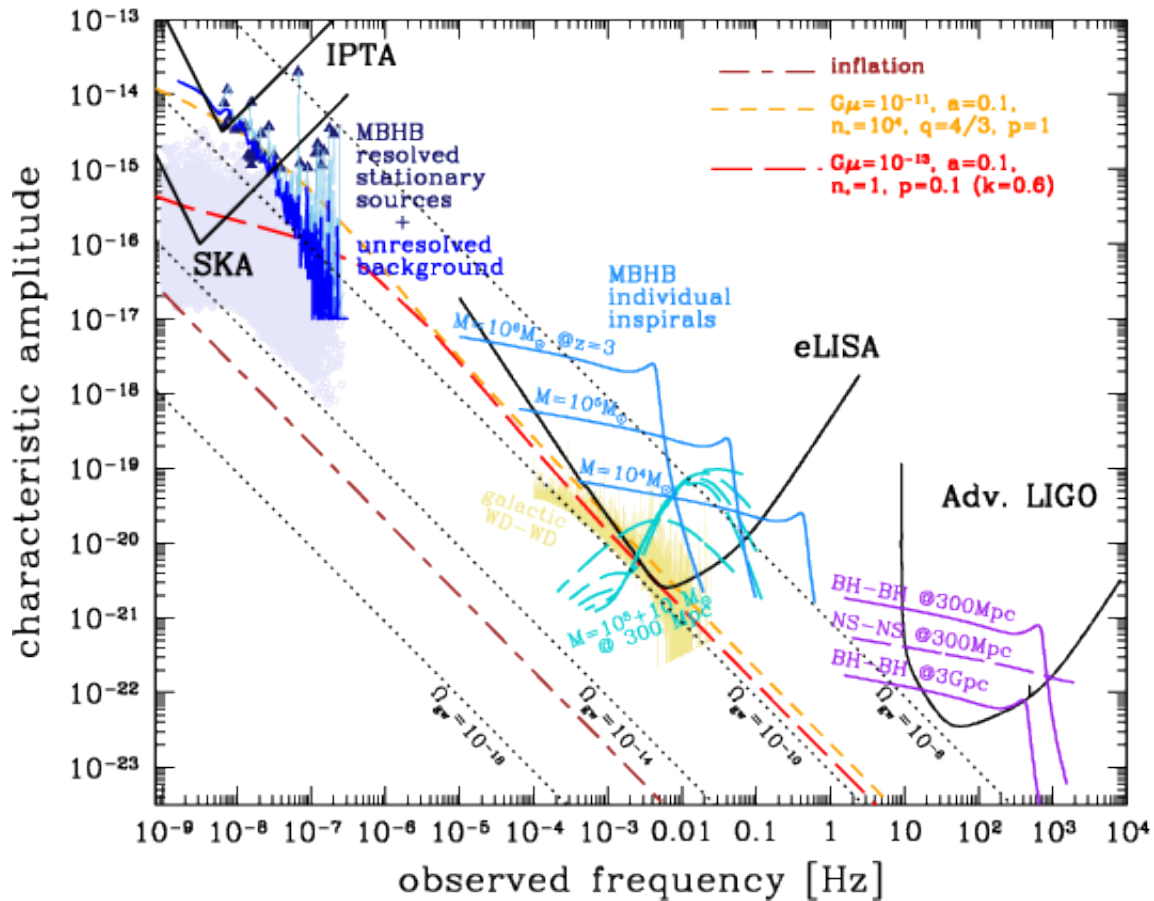
$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c = -J_\nu^a \tag{3.140}$$

y las identidades de Bianchi se escriben ahora

$$(D_\mu F_{\nu\kappa})^a + (D_\kappa F_{\mu\nu})^a + (D_\nu F_{\kappa\mu})^a = D^\mu * F_{\mu\nu}^a = 0 \tag{3.141}$$

En lenguaje más sucinto, se pueden escribir $D_A F = J$, y $\star D_A \star F = 0$, casi como antes. Las ecuaciones de Yang-Mills son ecuaciones de tipo no abeliano, no conmutativas en general, y complicadas de resolver en el vacío. Circa 2020, sigue sin resolverse el problema Clay consistente en demostrar esencialmente que las ecuaciones de Yang-Mills predicen esencialmente un “mass-gap”, que explicaría esencialmente por qué algunas partículas poseen masa.

3.15. Gravitational waves/ondas gravitacionales (no entra en EvAU)



The spectrum of gravitational waves!!!! Purely gravitational wave music! Sources of gravitational waves:

- Axions and axion decoupling in the early Universe, plus other possibly unknown phase transitions.
- Binary (or multiple) stellar mass black hole mergers and (exotic) compact object mergers.
- Primordial black holes.
- Binary mergers from intermediate or supermassive black holes.
- Cosmic strings or cosmic defects like domain walls and alike.
- Stochastic gravitational wave backgrounds.

- Primordial gravitational waves (from inflation or similar transitions).
- Cosmic graviton background fluctuations.
- Unknown sources, specially in very low, very high frequencies.

These notes are from my blog. Today, I will cover two topics from elementary viewpoints: falling into a non-rotating black hole and gravitational wave “music”, i.e., gravitational wave formulae! It is a hard equilibrium just to fall into the BH singularity and to be spaghettified, but you will be awarded with gravitational wave physics at the second act! Happy???

Non-rotating black holes are called Schwarzschild black holes, or Schwarzschild-Tangherlini, since the latter generalized the black hole metric into extra space-like dimensions in 1963. I will keep mathematics as simple as possible, but that will introduce some imprecisions that, I wish, experts in the field will forgive.

A classical particle owns a lagrangian

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

It implies that

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{i}} = -\frac{m^2 g_{tt} \cdot \dot{i}}{L} = \text{constant} = -E$$

Thus

$$\dot{i} = \frac{LE}{m^2 g_{tt}} \quad (3.142)$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -1 \quad (3.143)$$

$$L = -m \rightarrow \dot{i} = -\frac{E^2}{mg_{tt}} \quad (3.144)$$

and then

$$g_{tt} \dot{i}^2 + g_{rr} \dot{r}^2 = -1 \rightarrow \dot{r}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) + \frac{E^2}{m^2}$$

Firstly, let us consider a test particle at rest from an infinite distance from the black hole event horizon, with $E = m$, and thus set up

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r}$$

Note that the above result is essentially the classical escape velocity. Secondly, make a trip towards the singularity, starting from $r = r_0$ (at $\tau = 0$). Supposing its distance from $\tau = 0$ is r you get

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

and now proceed to integrate the above equation with the proper above mentioned limits

$$\int_{r_0}^R r^{1/2} dr = -\sqrt{2GM} \int_0^\tau d\tau$$

Remark: until the singularity from the boundary event horizon radius, you get a distance $r = R_S$, until the initial point, you have a distance $r = r_0$, until the final point you have $r = R$ from the initial point but $r = r_0 - R$ from the singularity at the center.

After integration, and reintroducing c , you will obtain that

$$\tau_{BH}^f = \frac{2}{3R_S^{1/2}c} (r_0^{3/2} - R^{3/2}) \quad (3.145)$$

If $r_0 = R_S$ and $R = 0$ for the time we reach the singularity, then

$$\tau = \frac{2R_S}{3c} = \frac{4GM}{3c^3}$$

This calculation can be performed for a D -dimensional black hole with d space-like dimensions. If you define the higher dimensional version of the Schwarzschild radius $r_s = r_s(D)$ the analogue integration is about

$$\tau_{BH}^f = \frac{(D-2)}{(D-1)R_S^{(D-3)/2}c} \left(r_0^{(D-1)/2} - R^{(D-1)/2} \right) \quad (3.146)$$

and similarly

$$\tau(XD) = \frac{(D-2)r_s(D)}{(D-1)c}$$

A variation of this time (but you will be likely death before the singularity arrives), can be done if you use the same geodesic equation above but with initial $E = 0$ (or a big test mass so $E \ll m$), then the integral is lightly different and you have to be careful to evaluate it. I will calculate it only in the usual $D = 4$ spacetime to compare it with the previous result:

$$\tau_f = \frac{1}{c} \int_0^{R_s} \frac{1}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - 1}} dr$$

The result is

$$\tau_f = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_s}{c} \right) = \frac{\pi GM}{c^3}$$

The difference is not big, since $\tau_f = 3\pi\tau/4$, so we can be sure that we will be pushed into the singularity in about that order of time. Of course, the caveats are the life of the passenger and that quantum gravity should be taken into account at some point in the interior of the black hole. Maybe even before, according to the firewall paradigm.

What is next? Small problem: what is the density for a spherical exoplanet, moon or compact object to stay weightlessness in the equator surface? For 3d space, we can equalize

$$F_g = F_c \leftrightarrow \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

and plugging $v = 2\pi r/T$ and $V = 4\pi r^3/3$, $\rho = M/V$, then we will obtain

$$\frac{4\pi G r^3 \rho}{3r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}$$

and thus

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3\pi f^2}{G}$$

or

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{G\rho}{3\pi}}$$

By the other hand, our Universe is mysterious. Just like when we have different types of gravitational lensing (strong lensing, weak lensing and microlensing), via e.g. a simple equation

$$\theta_E = \frac{4GM}{rc^2} = \frac{2R_S}{r} = \frac{D_S}{r}$$

the study of the gravitational waves just began. Perhaps, we will have new tools to test even the black hole entropy of our almost de Sitter Universe. The dS Universe entropy is given by

$$S_{dS} = \frac{A_{dS}}{4L_p^2} = \frac{\pi}{L_p^2 H_\Lambda^2}$$

For Keplerian orbits, the same argument than the previous one will help us to find the gravitational wave frequencies. The orbital frequency for quasi-circular keplerian orbits will be

$$f_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

The gravitational wave frequency in Einstein theory is twice the orbital frequency, i.e., $f_{GW} = 2f_K$, and then

$$f_{GW} = 2f_K = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

or, in terms of density,

$$f_{GW} = 2f_K = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \sim \sqrt{G\rho}$$

We want to compute this quantity from some reference scale, e.g., solar mass scale. Then, since $R_s = 2GM/c^2$ and M_\odot are the Schwarzschild radius and the solar mass respectively, by ratios we can calculate

$$f_{GW} = \frac{\sqrt{G}}{\pi} \left[\left(\frac{M}{R^3} \right) \left(\frac{M_\odot}{M_\odot} \right) \left(\frac{R_s^3}{R_s^3} \right) \right]^{1/2}$$

so

$$f_{GW} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\pi G M_\odot} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

and then

$$f_{GW} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\pi G M_\odot} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Therefore, the dominant gravitational wave frequency for quasicircular keplerian orbits reads off as

$$f_{GW} \approx 2,29 \cdot 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ Hz} \approx 23 \text{ kHz} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

For periods

$$T_{GW} = \frac{1}{f_{GW}} = 43,7 \mu\text{s} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \left(\frac{R_s}{R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

In the end, unless quantum gravity changes the rules, any gravitational bounded system will decay gravitationally! The time for the gravitational coalescence of two orbiting bodies can also be computed from General Relativity for any (even eccentric) orbit. If initially the two bodies, with masses M_1, M_2 have a separation a and eccentricity e , then the time till coalescence will be

$$t_{GW}^c = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4 f(e)}{G^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}$$

with the eccentricity function

$$f(e) = \frac{(1 - e^2)^{7/2}}{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}$$

Since a is the major semi-axis, the apoastron and periastron centers will be $R = a(1 + e)$, $r_p = a(1 - e)$. Also, define the chirp mass

$$\mathcal{M}_c = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}$$

Then, the time to coalescence is

$$t_{GW,c} \approx 10^5 \text{Gyr} \left(\frac{1}{AU} \right)^4 \left(\frac{10M_\odot}{M_1} \right) \left(\frac{10M_\odot}{M_2} \right) \left(\frac{20M_\odot}{(M_1 + M_2)} \right) (1 - e^2)^{7/2}$$

while the peak of the gravitational wave frequency (music) will be

$$f_{GW,peak} = 0,35 \text{mHz} \left(\frac{M_{BHB}}{30M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{0,01AU} \right)^{-3/2} \frac{(1 + e)^{1,1954}}{(1 - e^2)^{1,5}}$$

See, e.g., Wen 2003, or Antonini et al. 2014. to check the above formulae. By the other hand, merger anatomy is generally complex and hard with current tools. There are phases: inspiral, plunge, merger and coalescence. The final phase is “balding hair” of the black hole (in the case of binary black hole mergers). After plunge and merger phase end, there is also a new phase called “ring-down”. The final product is a Kerr black hole in general. At least from the current knowledge of gravity, general relativity and black hole theory. Kerr black hole is perturbed and the so-called quasinormal modes are emitted. For quadruple QNM (quasinormal mode), from the paper PRD 34, 384 (1986), you can get the values

$$\frac{\omega_{QNM}}{2\pi} = f_{QNM} = 32 \text{kHz} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) (1 - 0,63(1 - j)^{0,3})$$

and

$$\tau_{QNM} = 20 \mu\text{s} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \frac{(1 - j)^{-0,45}}{1 - 0,63(1 - j)^{0,3}}$$

where $j = a/M_f$ is the Kerr parameter for the final state. In this field, there are also zoom-whirls. Zoom-whirl orbits are perturbations of unstable circular orbits that exist within the inner stable circular orbits (ISCO). The number of whirls n is related to perturbation magnitude δr and instability exponent γ via $e^n \propto |\delta r|^{-\gamma}$. Orbit taxonomy and classification of Kerr-like black hole orbits are also possible. It is generally defined a rational number $q = \omega + \nu/z$, where ω is the number of whirls, and z is the number of leaves that make up the zooms, while ν is the sequence in which the leaves are traced out ($\nu/z < 1$). Any non-closed orbit is arbitrarily close to some periodic orbit. If $a = J/M_f c$, then $j = a/M_f = J/M_f^2 c$.

There are two more places where gravitational waves are important. Firstly, for the so-called Kozai-Lidov resonances in ternary systems. When a binary system is perturbed by a third body, the latter can induce some periodic oscillations in the libration of the orbital ellipse and a variation in the orbital eccentricity. The typical Kozai-Lidov oscillations can be calculated to have a period

$$T_{KL} = \frac{2T_0^2}{3\pi T} (1 - e_0^2)^{3/2} \left(\frac{m_1 + m_2 + m_0}{m_0} \right)$$

where T is the period of the triplet’s inner orbit (keplerian), T_0 is the period of the triple’s outer orbit (keplerian).

Finally, we have the so-called stochastic gravitational wave background, a buzz in GW caused by non-resolved GW sources. This is different from the so-called gravitational or graviton relic background (the cosmic analogue of the cosmic microwave background). Just as the current CMB has a temperature $T_\gamma \sim 3K$, and the cosmological neutrino background has a temperature $T_\nu \leq 2K$, the relic graviton background is expected to be $T_g \leq 1K$. For the stochastic background, however, we define the energy density

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \left(\frac{d\rho_{GW}}{d \ln f} \right)$$

and the gravitational wave cosmological stochastic density to be

$$\rho = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ab} \dot{h}^{ab} \rangle$$

Therefore, the strain spectrum and the strain scale are respectively

$$S(f) = \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \frac{\Omega_{GW}(f)}{f^3}$$

$$h(f) = 6,3 \cdot 10^{-22} \sqrt{\Omega_{GW}(f)} \left(\frac{100Hz}{f} \right)^{3/2} Hz^{-1/2}$$

Where do all of those equations come from? Consider a small perturbation of the spacetime metric

$$\delta\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

The Einstein's Field Equations read off

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

In vacuum $T_{\mu\nu} = 0$ implies that $\square^2\Psi \equiv \square\Psi$ can be used to compute

$$\partial_\nu h_\mu^\nu(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu h_\nu^\nu = 0$$

and with

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

it yields

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

and plus sources

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

The simplest solution to a wave-equation is the plane wave

$$h_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$$

With many simplifications, the solution is rewritte as the variation of a quadrupole moment

$$h^{ij}(t, x) \sim \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} (I^{ij}(t - r/c))$$

There, the distance to the source is r and the quadrupole moment is delayed or computed in the so-called retarded time. This is easier than the entropic uncertainty principle $H(x) + H(p) \geq \ln(e\pi)$ for sure. Gravitational waves from binaries, during the inspiral phase, is just elementary physics from these considerations. First, assume edge on observation ($\theta = i = \pi/2$) such as $\cos \theta = 0.4$. Then, you can check that ($t_r = t - r/c$ is the retarded time):

$$h_+ = h_+(t, \theta, \psi, r) = \frac{4G\mu}{c^4 r} \omega_K^2 a^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos(2\omega_K t_r + \psi)$$

$$h_\times = h_\times(t, \theta, \psi, r) = \frac{4G\mu \omega_K^2 a^2}{c^4 r} \cos \theta \sin(2\omega_K t_r + \psi)$$

Now, define

$$h = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2} = \frac{4G\mu\omega_K^2 a^2}{c^4 r} \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \theta}{4} + \cos^2 \theta}$$

and then, with the previous conditions, deduce that

$$h = \frac{4G\mu\omega_K^2 a^2}{c^4 r}$$

where $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, and with the aid of Kepler third law you get

$$h = \frac{4G^2}{c^4} \left(\frac{\mu M}{ra} \right) = \frac{4G^2 m_1 m_2}{c^4 r a} = \frac{4}{c^4} (\mathcal{M}G)^{5/3} \left(\frac{\omega_{GW}}{2} \right)^{2/3}$$

with $M = m_1 + m_2$. Now, resume the formulae

$$\mathcal{M}_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{M^{1/5}} \quad (3.147)$$

$$M = m_1 + m_2 \quad (3.148)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (3.149)$$

$$\eta = \frac{m_1 m_1}{M^2} \quad (3.150)$$

$$T_K = \frac{2\pi}{\omega_K} = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{GM} \right]^{1/2} \quad (3.151)$$

$$a = \frac{GM^{1/3}}{\omega_K^{2/3}} \quad (3.152)$$

$$\omega_{ISCO} = \frac{2c^3}{6^{3/2} GM} \quad (3.153)$$

$$\omega_{GW} = 2\omega_K \quad (3.154)$$

$$a_{ISCO} = 3 \times \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2} \quad (3.155)$$

Furthermore,

$$h = \frac{4G^{5/3}}{c^4} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \omega_{orb}^{2/3} = \frac{4G^{5/3}}{c^4} m_{chirp}^{5/3} \omega_{orb}^{2/3}$$

or

$$h \propto \left[\frac{m_{chirp}}{M_\odot} \right]^{5/3} \left[\frac{P_b}{\text{hours}} \right]^{-2/3} \left[\frac{r}{\text{kpc}} \right]^{-1}$$

Moreover, we can calculate the gravitational wave power radiated in the GW emission as

$$\begin{aligned} P &= \frac{dE_{orb}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{Gm_1 m_2}{2a} \right] = \frac{Gm_1 m_2}{2} \frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \\ &= \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{1}{a^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) \quad \text{from the quadrupole formula} \\ &= \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left[\frac{Gm_{chirp} \omega_{GW}}{2c^3} \right]^{10/3} \end{aligned}$$

and the time varying angular frequency will be

$$\frac{d\omega_{GW}}{dt} = \omega_{GW}^{11/3} m_{chirp}^{5/3}$$

from which

$$\omega_{\text{gw}} = \left[\frac{64}{5 \times 2^{2/3}} \right]^{-3/8} \left[\frac{Gm_{\text{chirp}}}{c^3} \right]^{-5/8} t_{\text{GW}}^{-3/8}$$

and for quasicircular orbits, you get the previously mentioned value

$$t_{\text{GW}} \sim \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4}{(m_1 m_2)(m_1 + m_2)}$$

while the general formula in the literature is

$$t_{\text{GW}} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4(1 - e^2)^{7/2}}{(m_1 m_2)(m_1 + m_2)}$$

From Peter and Mathews, we also have

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (3.156)$$

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2}}{c^5 a^{7/2} (1 - e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (3.157)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{304}{15} e \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^3}{c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

$$\left\langle \frac{da}{de} \right\rangle = \frac{12}{19} \frac{a}{e} \frac{\left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{36}{96} e^4 \right]}{(1 - e^2) \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]} \quad (3.158)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^3} \quad (3.159)$$

Integrating the semi-axis from a_0 to a , you would get

$$a(t) = (a_0^4 - 4Ct)^{1/4}$$

For the major semi-axis shrinking value we get in the literature being similar

$$a(t) = \left(a_0^4 - 4C \frac{t}{(1 - e^2)^{7/2}} \right)^{1/4}$$

and the integration constant

$$C = \frac{64}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{c^5}$$

The function of radial shrinking in terms of eccentricity reads

$$a(e) = \frac{\omega e^{12/19}}{1 - e^2} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{870/2299}$$

The period decreases as

$$\dot{T} = -\frac{192G^{5/3}}{5c^5} (m_1 m_2) (m_1 + m_2)^{-1/3} \left(\frac{T}{2} \right)^{-5/3} f(e)$$

where

$$f(e) = \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right]$$

The power decrease is given by the formula

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{5c^5} G^{5/3} (m_1 + m_2)^{-1/3} m_1 m_2 \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{-5/3} f(e)$$

where $f(e)$ is, as before,

$$f(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)$$

Maggiore's book on gravitational waves define

$$\tau_c = t_c - t_0 = t_{GW}$$

with

$$f_{GW} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{5}{256} \frac{1}{\tau}\right]^{3/8} \left[\frac{GM_c}{c^3}\right]^{-5/8} = 134Hz \left(\frac{1,21M_\odot}{M_c}\right)^{5/8} \left(\frac{1s}{\tau}\right)^{3/8}$$

$$\tau_0 = \frac{5c^5}{256G^3} \frac{a_0^4}{m_1 m_2 M}$$

$$\tau \sim 2,18s \left(\frac{1,21M_\odot}{M_c}\right)^{5/3} \left(\frac{100Hz}{f_{GW}}\right)^{8/3}$$

Relativity and newtonian gravity approximation (valid in weak gravitational fields) provide limits to the mass-radius ratio:

$$\frac{M}{R} \leq \left(\frac{Rc^2}{G_N}\right) \quad (3.160)$$

or equivalently

$$M \leq \frac{R^2 c^2}{G_N} \quad (3.161)$$

and

$$R \geq \frac{\sqrt{G_N M}}{c} \quad (3.162)$$

since $\omega_c = \sqrt{G_N M R} \leq Rc$ is the maximal spinning rate consistent with SR and weak gravity in GR (newtonian approximation). In the GW zone, the strain

$$s = \frac{\Delta L}{L} \sim \frac{h}{2} \quad (3.163)$$

where h is the GW amplitude

$$h_{GW} = \frac{4G^2 M_1 M_2}{c^4 a R} \quad (3.164)$$

for a binary M_1, M_2 system. Here, a is the separation of the circular binary and R is the distance to the observer from the binary (inclination is neglected). Using the Kepler 3rd law $a^3 = \tau^2 G_N (M_1 + M_2) / (4\pi^2)$, we obtain the useful formula

Gravitational wave amplitude

Gravitational wave amplitudes, in a circular binary with $\sin \iota = 1$, have the formal expression

$$|h_{GW}| = \frac{2\pi^{2/3} (2G_N)^{5/3} M_1 M_2 f^{2/3}}{c^4 R (M_1 M_2)^{1/3}} \quad (3.165)$$

with $f = 2f_K$ the gravitational wave frequency, and $f = nc/2L$.

Simple estimate for a GW burst from binary coalescence, for a couple of neutron stars (NS) about minimal mass and total mass $M = 2 \cdot M_{Ch} = 2 \cdot 1,4M_{\odot}$:

$$h_{BBH} \sim \frac{GM}{c^2 r} \sim 10^{-21} \left(\frac{200 \text{Mpc}}{r} \right) \quad (3.166)$$

Simple gross estimate for continuous (periodic) GW emission from a pulsar (fast NS):

$$h_{CW} \sim 6 \cdot 10^{-25} \left(\frac{f}{500 \text{Hz}} \right) \left(\frac{1 \text{kpc}}{r} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \quad (3.167)$$

and where ϵ is the ellipticity parameter. CGW are a signal of peaks or mountains (asymmetries from sphericity) at the NS surface, and its deformability. They can provide a way to study the hard issue of the equation of state of nuclear matter in the core of NS, currently unknown.

Yominum crystals (fictional formula): $K_4YM_3(SO_7^3ES_2)$, or a more realistic versions $K_4Ym(SO_7)_3EsS_2$, $K_4YMn(SO_7) \cdot 3ErS_2$, or even $K_4YMn(SO_3)_7ErS_2$. SK: 50kton, HK: up to 250000kton?

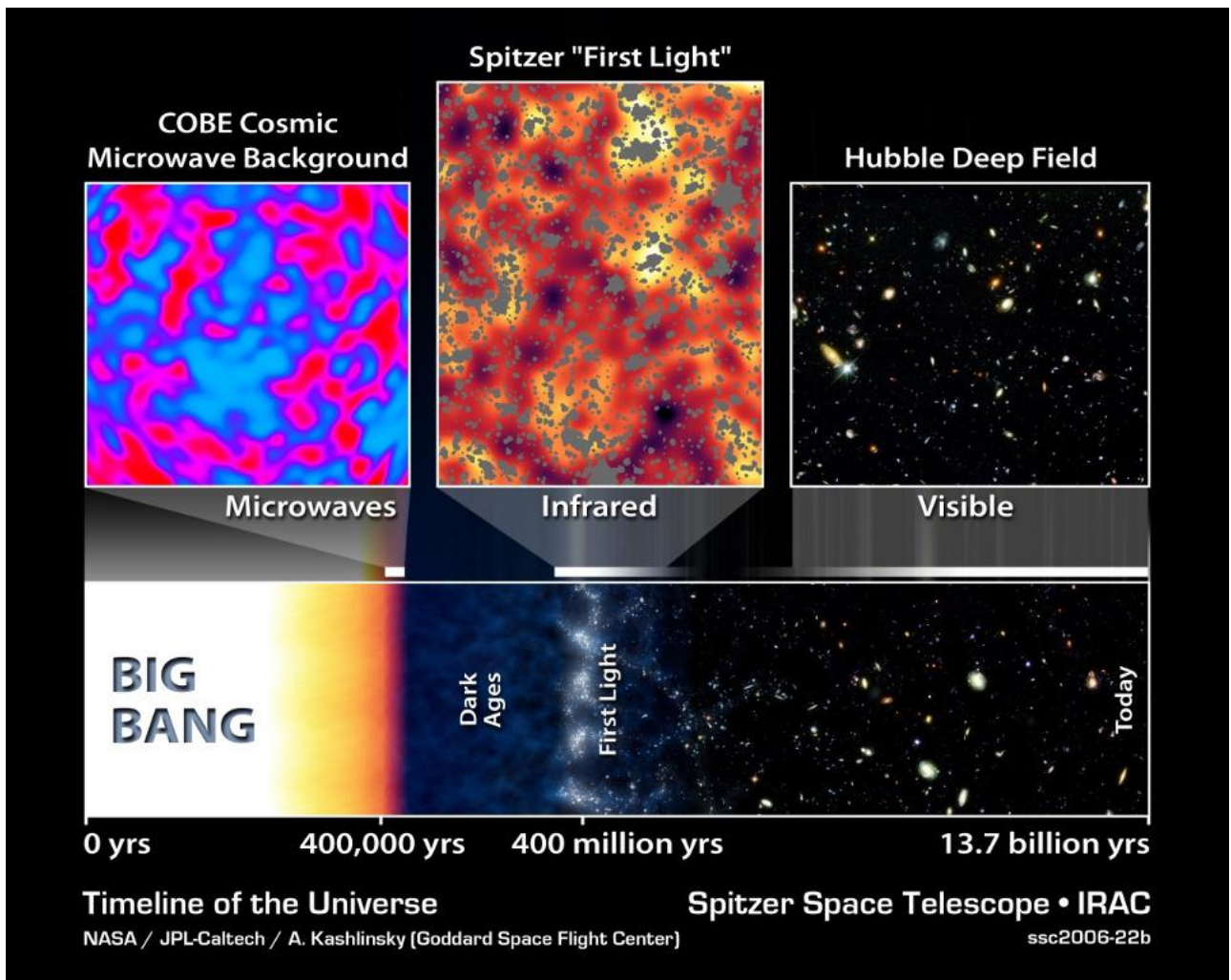
Alpha equation

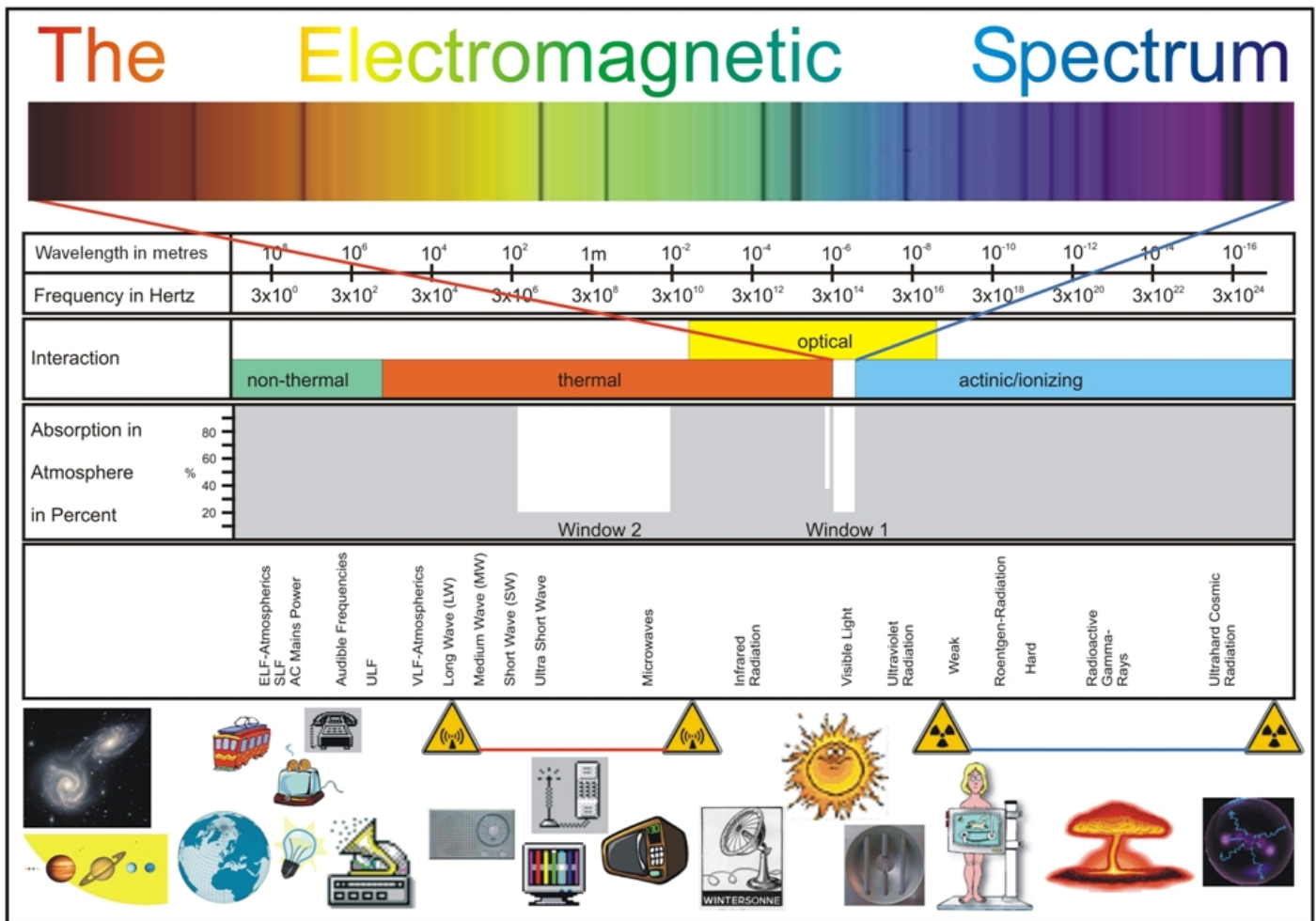
Alpha equation in D space-like dimensions:

$$\alpha(D) = K_C(D)^{D-2} e^{D-1} G_N^{\frac{3-D}{2}} \hbar^{2-D} c^{D-4} \quad (3.168)$$

Capítulo 4

Óptica física y geométrica





4.1. Óptica física

La Óptica física estudia los más importantes fenómenos ondulatorios particularizados a las ondas electromagnéticas y la luz. En particular, la lista de fenómenos que incluye es:

1. Reflexión.
2. Refracción.
3. Resonancia.
4. Polarización.
5. Interferencia (superposición).
6. Difracción.
7. Amortiguación o absorción.
8. Reverberación.
9. No linealidad.
10. ...

Propiedades más generales de las ondas como intensidad, potencia, nivel de intensidad, son también aplicables a la teoría de la Óptica física.

Las dos leyes más importantes de la Óptica Física son las leyes de la reflexión y la refracción (Snell-Descartes).

4.1.1. Reflexión

Ley de la reflexión

Cuando un rayo es reflejado por una superficie, se tiene en general que el ángulo reflejado es igual al de incidencia, respecto de la normal de la superficie de separación de dos medios ópticos diferentes. Matemáticamente:

$$\theta_i = \theta_r \quad (4.1)$$

4.1.2. Refracción

Se denomina índice de refracción de un medio al cociente de la velocidad de luz en el vacío y la velocidad de la luz en ese medio:

$$n = \frac{c}{v} \quad (4.2)$$

En general, salvo circunstancias excepcionales, el índice de refracción es igual o mayor que uno y la velocidad de la luz es imbatible en el vacío. Sin embargo, en ciertos medios ópticamente densos, puede ocurrir que el índice de refracción sea menor que uno y tener una velocidad de la luz mayor que en el vacío en dicho medio.

Ley de Snell de la refracción

Si un rayo de luz pasa de un medio de índice de refracción n_i a otro de índice de refracción n_r , con un ángulo de incidencia respecto de la normal θ_i y un ángulo de refracción respecto de la normal en el segundo medio igual a θ_r , entonces se verifica la ley de Snell

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (4.3)$$

En general, suele haber tanto reflexión como refracción en un medio. Sin embargo, cuando se cambia de un medio de un índice de refracción mayor a uno menor, existe un ángulo, denominado ángulo límite, para el que no hay refracción, sino que como el ángulo refractado es 90° , el rayo luminoso no entra en el medio ópticamente denso. Matemáticamente, el ángulo límite se define como

$$n_i \sin \theta_L = n_r \sin 90 \longrightarrow \theta_L = \sin^{-1} \frac{n_r}{n_i} \quad (4.4)$$

Nota: si $n_r > n_i$, entonces no existe ángulo límite.

En 1812, Brewster enunció una ley de polarización que hoy se llama ley de Brewster de la polarización. En física óptica, el ángulo de Brewster (nombrado en honor al físico escocés Sir David Brewster) corresponde al ángulo de incidencia de luz sobre una superficie que anula la componente con polarización paralela al plano de incidencia. El resultado cuando se aplica un rayo de luz no polarizada sobre una superficie bajo el ángulo de Brewster es la obtención de un rayo reflejado de luz polarizada en una dirección (cuyo vector de polarización es perpendicular al plano de incidencia). Brewster observó que cuando las direcciones de los haces transmitido y reflejado formaban un ángulo de 90 grados sexagesimales, el haz de luz reflejado resultaba polarizado linealmente. Dicho de otra manera: La polarización por reflexión es máxima cuando la tangente del ángulo de incidencia es igual al índice de refracción de la sustancia. La polarización es nula para la incidencia normal. En general, el ángulo de Brewster entre dos medios depende de las características electromagnéticas de los mismos (permitividad eléctrica y permeabilidad magnética). En el caso en que las permeabilidades magnéticas de ambos medios no varían (el caso más frecuente), el ángulo de Brewster se puede calcular a partir de los índices de refracción de ambos medios como sigue:

Ley de Brewster y ángulo de Brewster de polarización

El ángulo de Brewster de polarización se define como

$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{n_r}{n_i} \quad (4.5)$$

Demostración: teniendo en cuenta que el ángulo de refracción es complementario del incidente, esto es, que $\theta_r = 90^\circ - \theta_i$

$$\sin \theta_r = \sin(90 - \theta_i) = \cos \theta_i \quad (4.6)$$

$$\theta_i = \theta_B \quad (4.7)$$

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r = n_r \cos \theta_i = n_r \cos \theta_B = n_i \sin \theta_B \quad (4.8)$$

$$\tan \theta_B = \frac{n_r}{n_i} \quad (4.9)$$

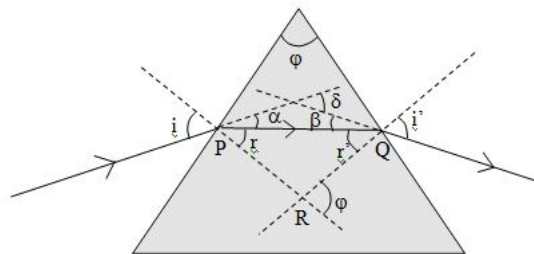
$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{n_r}{n_i} \quad Q.E.D. \quad (4.10)$$

Recuerda: La polarización es una propiedad exclusiva de las ondas transversales como las ondas electromagnéticas o las ondas gravitacionales.

Para la interferencia de ondas ópticas vale también el **principio de Huygens**.

4.1.3. Prisma óptico(ampliación)

Un prisma óptico o de refracción es un sistema como el que sigue, hecho de un índice n :



Aplicando la ley de Snell se obtiene:

$$\sin i = n \sin r \quad (4.11)$$

$$n \sin r' = \sin i' \quad (4.12)$$

$$\varphi = r + r' \quad (4.13)$$

$$\delta = \alpha + \beta \quad (4.14)$$

$$i = \alpha + r \quad i' = \beta + r' \quad (4.15)$$

$$\delta = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r') \quad (4.16)$$

$$\delta = i + i' - \varphi \quad (4.17)$$

Experimentalmente se comprueba que la desviación mínima del prisma δ_m , se alcanza para la igualdad de los ángulos de incidencia y emergencia, i.e., $i = i'$. Como $r = r'$, entonces $\varphi = 2r$, de donde se obtiene

$$\delta_m = i + i' - \varphi = 2i - \varphi \quad (4.18)$$

o bien

$$r = \frac{\varphi}{2} \quad (4.19)$$

y

$$i = \frac{\delta_m + \varphi}{2} \quad (4.20)$$

Entonces, la ecuación que permite determinar experimentalmente el índice de refracción del prisma y una sustancia transparente n , con la desviación mínima es

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_m + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad (4.21)$$

Para incidencias casi normales en el prisma, se tiene la relación aproximada $\delta \approx (n - 1)\varphi$, que es coherente con que la mínima desviación $\Delta = \delta_m$ que corresponde a un ángulo de incidencia i satisfaga las ecuaciones dadas anteriores, i.e.,

$$i = \frac{\Delta + \varphi}{2}, \quad \sin \frac{\Delta + \varphi}{2} = n \sin \frac{\varphi}{2}$$

Principio de Fresnel (mínimo camino óptico): de entre toda las trayectorias posibles, la que efectivamente sigue un rayo de luz entre dos puntos es la que minimiza su camino óptico.

El camino óptico se define como la expresión

$$s = \sum n_i d_i$$

4.1.4. Lámina de caras plano-paralelas

Otro caso particular común en óptica es la lámina de caras plano-paralelas. En este sistema se tiene:

Láminas de caras planas y paralelas

- Cuando un haz de luz monocromática incide sobre una lámina transparente de caras planas y paralelas se refracta en ambas de la lámina.
- Si la lámina de índice de refracción n_2 está situada en un medio de índice de refracción n_1 , según la ley de Snell:

$$\text{En la primera cara: } n_1 \cdot \text{sen } i_1 = n_2 \cdot \text{sen } r_1$$

$$\text{En la segunda cara: } n_2 \cdot \text{sen } r_2 = n_1 \cdot \text{sen } i_2$$

- Combinando ambas ecuaciones se obtiene:

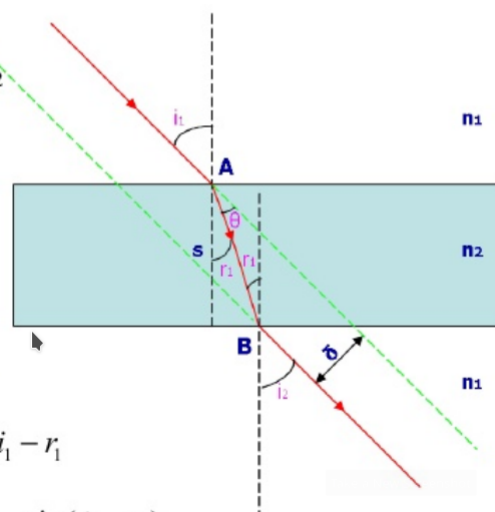
$$i_1 = i_2$$

- Es decir, el rayo luminoso emerge de la lámina paralelo al rayo incidente.
- El rayo luminoso experimenta un desplazamiento lateral δ (distancia entre las direcciones de los rayos incidente y emergente) cuyo valor es:

$$\delta = AB \sin \theta \quad AB = \frac{s}{\cos r_1} \quad \theta = i_1 - r_1$$

$$\delta = s \frac{\sin(i_1 - r_1)}{\cos(r_1)}$$

siendo s el espesor de la lámina.



El rayo emergente paralelo al rayo incidente de una lámina de caras planas-paralelas de espesor D e índice de refracción n están separados una distancia

$$d = D \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

4.2. Óptica geométrica

La Óptica Geométrica es la parte de la Física y la Óptica que trata y estudia los problemas de propagación de los rayos de luz y los instrumentos ópticos. Generalmente, en Óptica Geométrica, se usa la denominada aproximación de Gauss o **paraxial**: todos los rayos de luz se consideran paralelos al eje óptico, y así se desprecian efectos como la aberración de la luz y otros varios que sí considera la Óptica de rayos en su versión de difracción u Óptica de Fresnel. En el límite de difracción, se tiene que

$$d = \frac{1,22\lambda}{2n \sin \theta} \quad (4.22)$$

Y también, $\tan \alpha = \sin \alpha = \alpha$.

Por tanto, en la aproximación paraxial consideramos:

- Propagación rectilínea de la luz
- Dimensiones de los objetos mucho mayores que la longitud de onda de la luz que emiten. Evitamos entonces la posibilidad de la difracción.
- Que el medio de propagación es en general homogéneo e isótropo.

Además, veremos que, en aproximación paraxial:

- Las características principales de los sistemas centrados es que los puntos y planos principales de un sistema óptico los determinan las posiciones de los objetos e imágenes, y ciertos puntos llamados focales objeto e imagen. Para lentes delgadas, el grosor de la lente debe ser pequeño en relación a los radios de curvatura. En el dioptrio esférico tendremos n, n' , y en los espejos esféricos $n' = -n$.
- Focales para lentes delgadas en aire se satisfacen:

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad f = \frac{-nR}{n'-n}, \quad f' = \frac{n'R}{n'-n} \quad (4.23)$$

- Focales para espejos esféricos en aire: $f' = f = R/2$.
- Relaciones útiles para posiciones de objeto e imagen. Para sistemas centrados:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (4.24)$$

Para lentes delgadas

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \quad (4.25)$$

Para espejos esféricos

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \quad (4.26)$$

- Aumento lateral para sistemas centrados generales:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'f}{sf'} \quad (4.27)$$

que para lentes da $\beta_L = s'/s$, para dioptrios $\beta_d = \frac{ns'}{n's}$ y para espejos $\beta_e = -\frac{s'}{s} = \frac{R}{R-2s}$.

- Aumento angular γ . Para sistemas centrados generales proporciona

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{s}{s'} = \frac{x}{f'} = \frac{x'}{f} \quad (4.28)$$

y donde $x = s - f$, $x' = s' - f$. Para lentes delgadas $\gamma_L = \frac{s}{s'}$. Para dioptrios esféricos $\gamma_d = \frac{s}{s'}$, y para espejos esféricos $\gamma_e = -\frac{s}{s'} = \frac{R - 2s}{R}$.

- Relaciones entre aumentos lateral y angular. Para sistemas centrados

$$\beta\gamma = \frac{f}{f'} \quad (4.29)$$

que para lentes delgadas da $\beta_L\gamma_L = 1$, $\beta_d\gamma_d = \frac{n}{n'}$ para dioptrios esféricos, y $\beta_e\gamma_e = -1$ para espejos esféricos.

- El invariante de Helmholtz es una cantidad invariante en dioptrios esféricos y espejos. Para dioptrios se tiene que $ny\alpha = n'y'\alpha'$, y para espejos esféricos $y\alpha = -y'\alpha'$.
- Fórmulas de Newton para sistemas centrados y lentes delgadas, respectivamente: $xx' = ff'$, $xx' = -f'^2$.
- La convergencia o potencia de una lente es $C = 1/f' = \varphi$, pero para un sistema de dos lentes separadas una distancia d , se puede escribir

$$C = C_1 + C_2 - \frac{C_1 C_2}{d} \quad (4.30)$$

También hay unos conceptos usuales a tener en cuenta:

- **Objeto:** En óptica geométrica llamamos objeto a cualquier fuente de la que proceden los rayos, bien sea por luz propia o reflejada. Los objetos pueden ser puntuales, cuando se supone todo su volumen concentrado en un único punto o no puntuales. En este último caso, cada punto de la superficie puede ser considerado en sí mismo una fuente puntual de rayos.
- **Dioptrio:** Es una superficie que separa dos medios transparentes de distinto índice de refracción. El dioptrio refracta la luz haciendo que los rayos varíen su trayectoria. Según su forma se distinguen: dioptrios esféricos, y dioptrios planos.
- **Espejo:** Es una superficie lisa y pulimentada que refleja todos los rayos que llegan a ella. El espejo refleja la luz haciendo que los rayos varíen su trayectoria. Según su forma se distinguen: espejos esféricos y espejos planos.
- **Centro de curvatura:** Es el centro geométrico de la superficie esférica a la que pertenece el dioptrio o el espejo. En el caso de los dioptrios y espejos planos, se considera situado en el infinito. Solemos designarlo por la letra C.
- **Radio de curvatura:** Es el radio de la superficie esférica a la que pertenece el dioptrio o espejo. Podemos clasificar las superficies, en función de su curvatura en: superficie cóncava y otra convexa, aunque también puede haber superficies planas con radio de curvatura infinito.

Hay un criterio general de signos, denominado criterios DIN, para la Óptica Geométrica, aunque también se pueden usar otros. En los criterios DIN:

- Alturas positivas tienen $y > 0$, alturas negativas $y < 0$ quedan por debajo del llamado eje óptico.
- Ángulos antihorarios son positivos, ángulos horarios son negativos.
- Distancias a la izquierda del centro u origen del sistema óptico (no confundir centro óptico con centro de curvatura) son negativas, distancias a la derecha son positivas.

Otras definiciones importantes son las siguientes:

- **Sistema óptico:** Se suele denominar sistema óptico al conjunto de varios dioptrios y espejos. Así, podemos distinguir:
 - Dióptricos: Si están formados sólo por dioptrios, es decir, superficies refractantes. De ellos, las lentes delgadas son los que estudiaremos con más atención.
 - Catóptricos: Si están formados sólo por espejos, es decir, superficies reflectantes.
 - Catadióptricos: Si están formados por ambos tipos de superficies.
- **Eje óptico:** También llamado eje principal, es el eje de simetría en torno al cual se sitúan el/los dioptrio/s y/o el/los espejo/s.
- **Vértice óptico:** También denominado centro óptico o polo, es el punto de corte del dioptrio o espejo con el eje óptico. Se suele denotar por la letra O ya que constituye el origen de coordenadas.
- Cantidad de luz: energía en forma luminosa (generalmente visible para el ojo o un instrumento).
- Flujo luminoso: cantidad de luz por unidad de tiempo.
- Intensidad luminosa: cantidad de luz emitida por un foco por unidad de tiempo y por unidad de ángulo sólido.
- Luminancia de un foco extenso, B , es la cantidad de luz emitida por unidad de ángulo sólido y por unidad de superficie perpendicular a la dirección de emisión considerada.
- Iluminación E de una superficie: cantidad de luz recibida por unidad de tiempo y por unidad de superficie.
- Fotometría: para de la Óptica encargada de medir la intensidad, potencia y cantidad de luz, o magnitudes relacionadas.

Estudiaremos principalmente los sistemas ópticos centrados, que son aquellos con sus centros de curvatura situados sobre una misma recta llamada eje del sistema o eje óptico.

El objetivo principal de los sistemas ópticos es la formación de *imágenes*. Cuando todos los rayos de un objeto puntual que pasan por el sistema óptico convergen en un punto, decimos que dicho punto es la imagen del objeto. En el caso de los objetos no puntuales, los distintos puntos de la superficie del mismo convergerán en distintos puntos de la imagen formando una réplica del objeto original. La imagen puede ser clasificada:

- Atendiendo a su orientación: puede ser *derecha* si tiene la misma orientación o *invertida* si tiene la orientación contraria.
- Atendiendo a su tamaño: puede ser más grande que el objeto (aumentada o ampliada/magnificada), o más pequeña que el objeto (disminuida o empuqueñecida), aunque también puede ser de igual tamaño o tamaño natural que la del objeto.
- Atendiendo a la procedencia de los rayos puede ser **imagen real**, si se forma por la intersección de los rayos convergentes que provienen del objeto, tras pasar por el sistema óptico. En un espejo aparecen delante y en un dioptrio detrás generalmente. También puede ser una **imagen virtual**, si se forma por la intersección de las prolongaciones de los rayos divergentes que provienen del objeto, tras pasar por el sistema óptico. En un espejo están detrás y en un dioptrio delante.

4.2.1. Dioptrios esféricos

Un dioptrio esférico es generalmente la superficie de separación de dos medios con índices de refracción diferentes y cierta curvatura, dada por un radio R . El dioptrio se llama convexo si $R > 0$ y cóncavo si $R < 0$ en los convenios DIN. Hay una ecuación fundamental que liga las distancias del objeto y la imagen de un dioptrio:

Ecuación del dioptrio esférico

Si la distancia de un objeto al origen del dioptrio es s y la distancia a la imagen s' , entonces:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R} \quad (4.31)$$

Existen dos puntos muy importantes cuando estudiamos un dioptrio: su foco objeto y su foco imagen.

- El foco objeto de un dioptrio esférico es el punto F del eje óptico en el que tendría que situarse un objeto para que sus rayos saliesen paralelos al eje tras refractarse en el dioptrio. La distancia del foco objeto al vértice del dioptrio se denomina distancia focal objeto y se denota por f . Se cumple que, usando la ecuación del dioptrio esférico:

$$f = -R \frac{n}{n' - n} \quad (4.32)$$

- El foco imagen es el punto F' del eje óptico en el que convergen, tras pasar por el dioptrio, los rayos que son paralelos al eje óptico. La distancia del foco imagen al vértice del dioptrio se denomina distancia focal imagen y se denota por f' . Se cumple que:

$$f' = +R \frac{n'}{n' - n} \quad (4.33)$$

Las focales verifican las siguientes 2 ecuaciones:

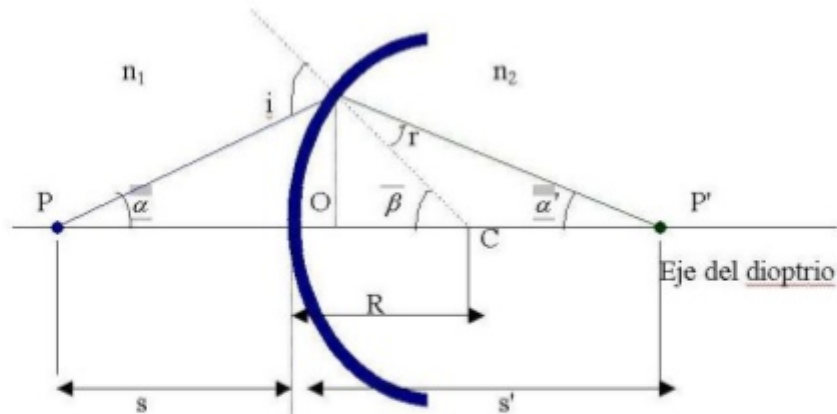
$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad (4.34)$$

$$f + f' = R \quad (4.35)$$

y una tercera ecuación, derivada de la del dioptrio, llamada **ecuación de Gauss**:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (4.36)$$

ELEMENTOS DE UN DIOPTRIO



- EJE ÓPTICO O EJE PRINCIPAL
- ORIGEN, VÉRTICE O CENTRO ÓPTICO (O)
- RADIO (R) de curvatura
- CENTRO DE CURVATURA: centro de la supuesta esfera a la que pertenecería el dioptrio
- OBJETO: punto del eje principal donde se coloca el objeto
- DISTANCIA OBJETO (s) distancia entre el objeto y el origen
- IMAGEN: punto del eje principal donde se forma la imagen
- DISTANCIA IMAGEN (s') distancia del origen a la imagen

La relación entre el tamaño de la imagen del objeto y' , y el tamaño del objeto y se calcula con el denominado aumento lateral $A_L = \beta_L$:

Aumento lateral

Se llama aumento lateral de un dioptrio esférico a la cantidad

$$\beta_L = \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s} \quad (4.37)$$

El signo del aumento lateral dice si la imagen es derecha $\beta_L > 0$, o invertida $\beta_L < 0$, y además dice si está aumentada $|\beta_L| > 1$, es de tamaño natural $|\beta_L| = 1$, o si está reducida $|\beta_L| < 1$.

Es habitual obtener la posición y dimensiones de las imágenes de los objetos en el dioptrio desde un punto de vista gráfico. Para ello se usa lo que se conoce como diagrama de rayos. En ellos nos basta dibujar 2 rayos de trayectoria conocida, de los infinitos posibles. En realidad, es fácil dibujar al menos tres. Son los llamados rayos principales. Se denominan rayos principales a rayos de trayectoria conocida que nos permiten determinar la posición de la imagen de un objeto en un diagrama de rayos. En el dióptrio esférico son:

- El rayo procedente del objeto y paralelo al eje óptico, que, tras refractarse, pasará por el foco imagen.
- El rayo que, procedente del objeto, pasa por el centro de curvatura del dioptrio. Tras refractarse no modifica su trayectoria.
- El rayo procedente del objeto que pase por el foco objeto, que, tras refractarse, saldrá paralelo al eje óptico.

4.2.2. Espejos esféricos y planos

En Óptica Geométrica un espejo es cualquier superficie lisa y pulida capaz de reflejar los rayos de luz que llegan a él. El espejo refleja la luz haciendo que los rayos varíen su trayectoria y formando imágenes. En este apartado vamos a analizar como se ven los objetos cuando estas superficies reflectoras son esféricas. Matemáticamente, la ecuación de los espejos esféricos se obtiene poniendo $n' = -n$ en la ecuación del dioptrio esférico:

Ecuación de los espejos esféricos

Si la distancia objeto es s , la distancia imagen s' , y llamamos focal imagen a la cantidad $f' = f = R/2$, entonces

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad (4.38)$$

La ecuación de los aumentos para un espejo esférico se deriva trivialmente de la del dioptrio esférico con $n' = -n$

Aumento lateral para los espejos esféricos

El aumento lateral para un espejo esférico viene dado por

$$\beta_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (4.39)$$

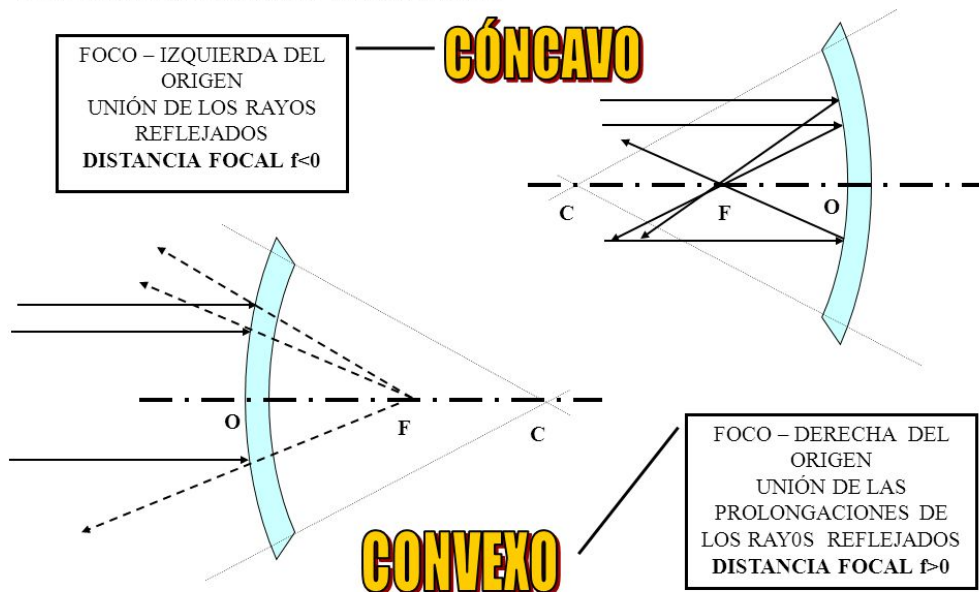
En el espejo esférico, los rayos principales son:

- El rayo procedente del objeto y paralelo al eje óptico, que, tras reflejarse, pasará por el foco.
- El rayo que, procedente del objeto, pasa por el centro de curvatura del espejo. Tras reflejarse no modifica su dirección.
- El rayo procedente del objeto que pase por el foco, que, tras reflejarse, saldrá paralelo al eje óptico.

La formación de imágenes en estos espejos esféricos puede verse de la siguiente forma:

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS

ESPEJOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS:



Un caso particular de los espejos esféricos es cuando el radio de curvatura es infinito. En tal caso el espejo se llama plano y verifica

Espejos planos

$$s' = -s \quad (4.40)$$

$$f = f' = R = \infty \quad (4.41)$$

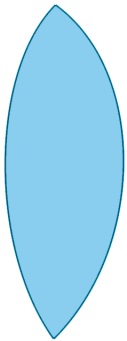
$$\beta_L = \frac{y'}{y} = 1 \quad (4.42)$$

4.2.3. Lentes y lentes delgadas

Una lente es un sistema óptico que encierran dos superficies o dioptrios, con un determinado índice de refracción n' . Hay varios tipos de lentes según la curvatura:

LENTE CONVERGENTES

lente
convexa



lente
biconvexa



lente
plano-convexa

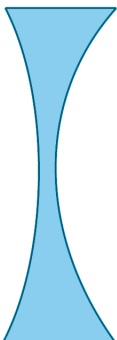


menisco
positivo

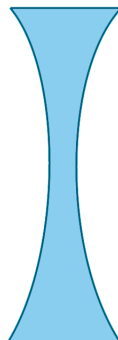


LENTE DIVERGENTES

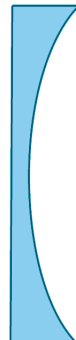
lente
concava



lente
biconcava



lente
plano-concava



menisco
negativo



Observa como las lentes convergentes son más gruesas en su parte central y las divergentes son más gruesas en sus extremos. Por otro lado, las lentes menisco-convexa y menisco-cóncava también se suelen denominar menisco-convergente y menisco-divergente respectivamente. Los signos de los radios indicados corresponden al criterio DIN.

El comportamiento convergente o divergente de una lente depende, en realidad, de la relación entre el índice de refracción del medio que rodea la lente, n , y el de la propia lente, n' . Cuando decimos con carácter general que una lente es convergente o divergente lo hacemos asumiendo que $n' > n$, y más concretamente, que la lente se encuentra en el aire ($n=1$).

Ecuación del constructor de lentes

Usando dos veces la ecuación del dioptrio esférico, se puede probar que la ecuación de que relaciona las posiciones objeto e imagen s, s' , los índices de refracción del medio externo y de la lente n, n' , y los radios de curvatura de las superficies de la lente R_1, R_2 está dada por

$$\frac{n}{s'} - \frac{n}{s} = (n' - n) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.43)$$

Si el medio externo es aire, la ecuación toma la forma

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n' - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.44)$$

Demostración: usamos dos veces la ecuación de los dioptrios, con posición de la imagen de la primera lente igual a la posición del objeto de la segunda lente

$$\frac{n'}{s_1} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R_1} \quad (4.45)$$

$$\frac{n}{s'} - \frac{n'}{s_1} = \frac{n - n'}{R_2} \quad (4.46)$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene la ecuación del constructor de lentes de forma trivial. Un concepto importante es el de lente delgada, que es cuando no se aprecia la curvatura de la lente, y solamente podemos saber si es convergente (acercas los rayos al eje óptico), o divergente (separa los rayos del eje óptico). En tal caso, la ecuación de las lentes se transforma en la ecuación de las lentes delgadas:

Ecuación de las lentes delgadas

Cuando la curvatura de las lentes es despreciable, se obtiene la llamada ecuación de las lentes delgadas

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad (4.47)$$

Para lentes convergentes, $f' > 0$, y para lentes divergentes $f' < 0$.

Para una lente delgada el aumento lateral viene dado por la siguiente relación:

Aumento lateral para lentes delgadas

Para una lente delgada

$$\beta_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad (4.48)$$

Las focales objeto e imagen de las lentes delgadas vienen dada por las expresiones

Focales objeto e imagen de lentes delgadas

$$\frac{n}{f} = (n - n') \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.49)$$

$$\frac{n}{f'} = (n' - n) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.50)$$

Se puede observar que $f' = -f$.

Otra definición importante es la potencia de una lente (o un sistema óptico en general):

Potencia de una lente

Se llama potencia de una lente, y se mide en **dioptrías** ($1D = 1m^{-1}$), a la cantidad

$$\varphi' = \frac{1}{f'} \quad (4.51)$$

Los rayos principales para una lente son:

- El rayo procedente del objeto y paralelo al eje óptico, que, tras refractarse en la lente, pasará por el foco imagen.
- El rayo que, procedente del objeto, pasa por el centro óptico de la lente. Tras refractarse en la lente no modificará su dirección.
- El rayo procedente del objeto que pase por el foco objeto, que, tras refractarse en la lente, saldrá paralelo al eje óptico.

4.2.4. El ojo humano

El ojo es un instrumento óptico natural que consta de las siguientes partes:

1. LA CÓRNEA

Las imágenes entran en el ojo atravesando una ventana exterior transparente que conocemos como la **córnea** y que en el ojo humano se comporta como una lente de unas 43 dioptrías.

Las paredes del ojo, es decir, la carcasa o chasis de la cámara fotográfica, están compuestas por un tejido fibroso blanco que llamamos **esclerótica**. Éste, a su vez, se protege del exterior por una fina capa transparente denominada **conjuntiva**.

2. LA PUPILA

La **pupila** es la parte negra y redondeada que vemos en los ojos y es como su ventana interior. Se comporta como un mecanismo de diafragma regulando la intensidad de la luz entrante, con mucha luz se hace pequeña y con poca luz se agranda. La pupila es el orificio natural del **iris**, que es la capa interna que da el color a los ojos.

3. EL CRISTALINO

Tras la pupila, la imagen atraviesa una lente que conocemos como **crystalino** y que sería como la lente de la cámara fotográfica. Tiene una potencia de unas 22 dioptrías pero su consistencia elástica le permite de manera automática variar su poder permitiendo no sólo ver de lejos, sino el enfoque de objetos próximos como hacemos en la lectura.

4. LA RETINA Y EL NERVIÓ ÓPTICO

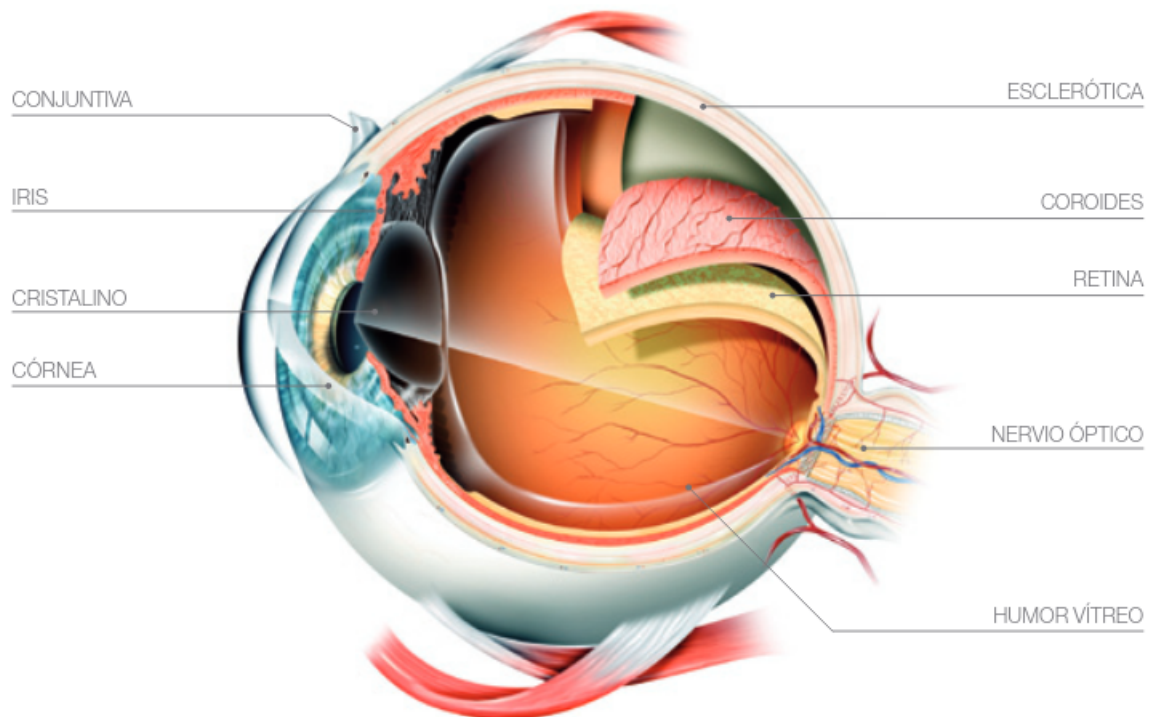
Las imágenes, tras atravesar una estructura gelatinosa transparente denominada **humor vítreo**, llegan finalmente al fondo del ojo donde son captadas por la retina. La **retina** se comporta como el carrete fotográfico que colocamos en la parte trasera de las cámaras, de forma que recibe y procesa las imágenes. Éstas serán luego transmitidas al cerebro a través del **nervio óptico**.

5. LA NUTRICIÓN DEL OJO

El sistema ocular se alimenta de nutrientes que llegan por arterias y venas que se sitúan en una capa entre la retina y la esclerótica, que conocemos como **coroides** o **úvea**. También encontramos vasos directamente sobre la retina y que podemos observar y estudiar cuando hacemos una exploración del fondo del ojo.

El ojo humano es un tipo particular evolucionado de lente natural. La potencia normal de un ojo sano es de 40 dioptrías la córnea, y 20 dioptrías el cristalino, generalmente. Así, la potencia total es de unas 60 dioptrías, aunque suele darse habitualmente un valor más bajo medio de 50 dioptrías como algo más normal y natural. Hay varios defectos de la visión:

- **Miopía:** se corrige con lentes divergentes. Los rayos convergen por delante de donde deberían, y se ven las imágenes de objetos lejanos borrosas.
- **Hipermetropía:** se corrige con lentes convergentes. Los rayos convergen detrás de donde deben, y se ven las imágenes de objetos cercanos borrosas.
- **Astigmatismo:** se corrige con lentes curvas. El cristalino o el globo ocular pierden su esfericidad. Crea borrosidad en la silueta de los objetos.
- **Vista cansada o presbicia:** se corrige con lentes de diverso tipo. Se debe a la pérdida de elasticidad del cristalino.
- **Daltonismo:** pérdida de la capacidad para distinguir colores o ciertas frecuencias de forma diferenciada.



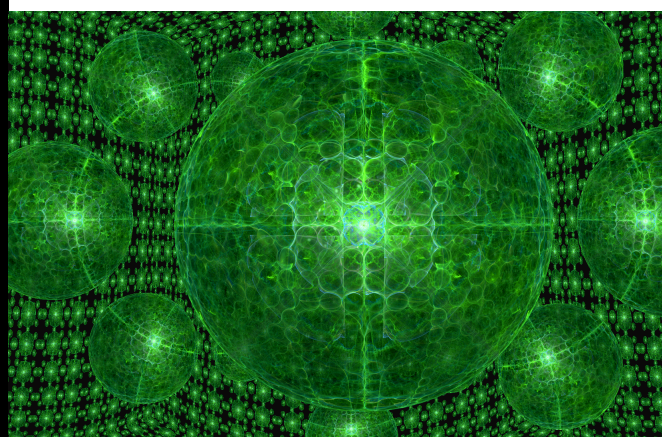
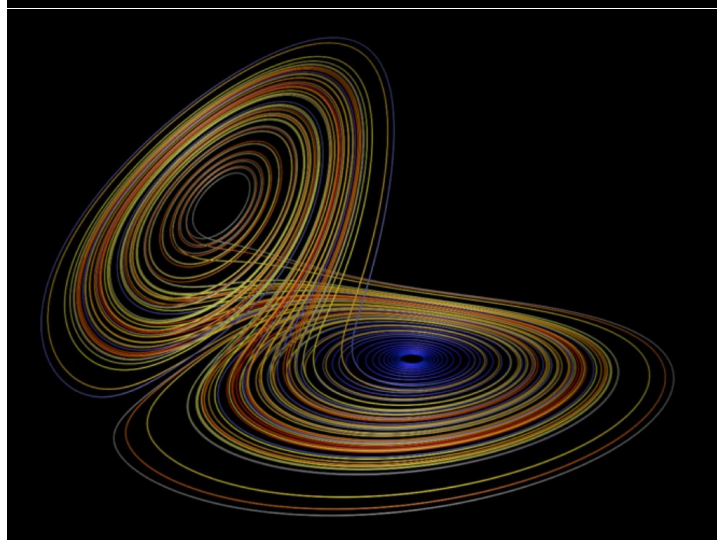
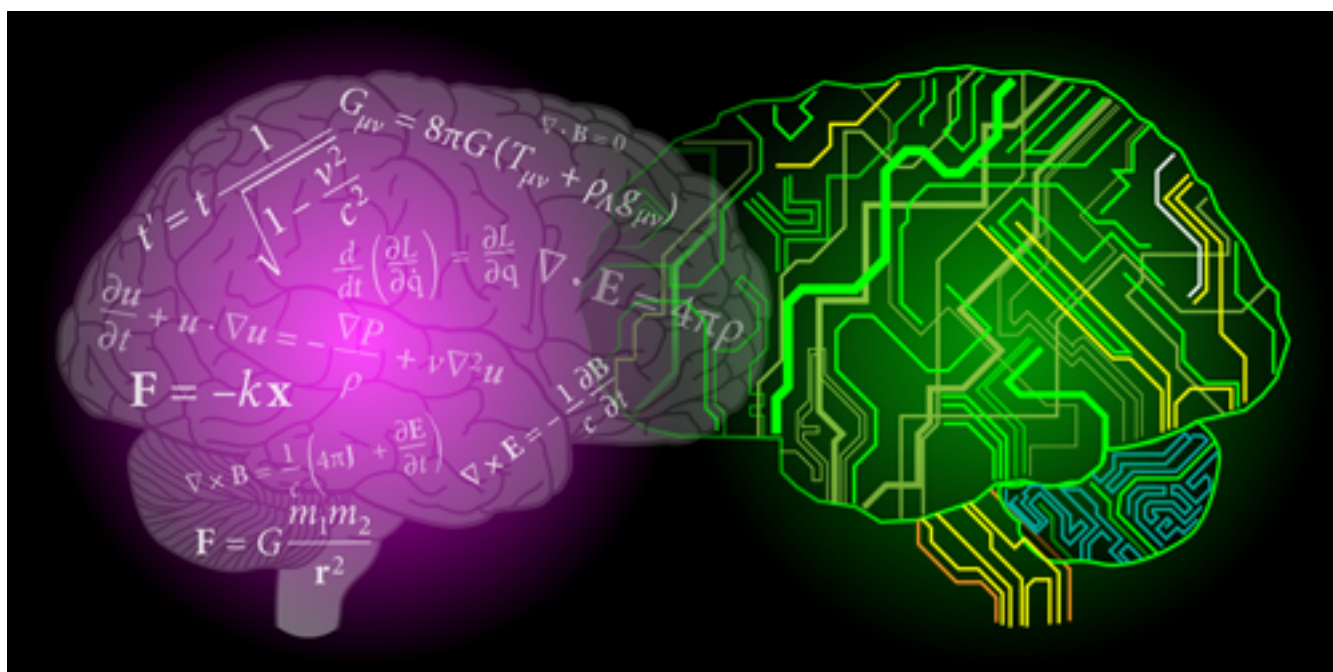
4.2.5. Microscopios, telescopios y sistemas compuestos

Un sistema óptico compuesto, como microscopios o telescopios, es en realidad un conjunto de lentes. el aumento de un sistema compuesto es igual al producto de los aumentos de los diferentes sistemas.

$$\beta_t = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_N = \prod_{i=1}^N \beta_i \quad (4.52)$$

Capítulo 5

Física moderna del siglo XX



5.1. Relatividad especial

5.1.1. Postulados y transformaciones

La relatividad especial parte de dos postulados:

- Principio de invariancia de las leyes físicas para sistemas inerciales (aquellos que se mueven con MRU entre sí). Por leyes físicas entemos todas las leyes físicas, tanto la Mecánica, como el electromagnetismo.
- Principio de la constancia de la velocidad de la luz. La luz en el vacío se mueve con velocidad constante e igual a $c = 299792458 m \cdot s^{-1} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$. Esta velocidad es independiente del movimiento del observador o de la fuente y es invariante o constante.

Estos dos postulados llevan de forma inexorable a un conjunto de transformaciones que generalizan las transformaciones de Galileo:

$$x' = x - vt \quad (5.1)$$

$$y' = y \quad (5.2)$$

$$z' = z \quad (5.3)$$

$$t' = t \quad (5.4)$$

de la forma siguiente

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (5.5)$$

$$y' = y \quad (5.6)$$

$$z' = z \quad (5.7)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (5.8)$$

y donde el factor de dilatación o “engorde” relativista γ viene dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (5.9)$$

con $\beta = v/c$. Un objeto empieza a notar las correcciones relativistas cuando la velocidad es un décimo (a veces hasta 1/100) de la velocidad de la luz. Las transformaciones anteriores se llaman **transformaciones de Lorentz**, y son básicas en la teoría de la relatividad especial y general. En el límite en el que la velocidad de la luz se hace *infinita*, esto es, cuando $c \rightarrow \infty$, las transformaciones de Lorentz se reducen a las transformaciones de Galileo. Las transformaciones de Lorentz se pueden escribir en términos de β, γ como sigue:

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (5.10)$$

$$y' = y \quad (5.11)$$

$$z' = z \quad (5.12)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (5.13)$$

Si introducimos $x^0 = ct$, estas transformaciones adoptan un aspecto simétrico en el tiempo y en el espacio:

$$x' = \gamma(x - \beta x^0) \quad (5.14)$$

$$y' = y \quad (5.15)$$

$$z' = z \quad (5.16)$$

$$x^0 = \gamma(x^0 - \beta x) \quad (5.17)$$

5.1.2. Efectos relativistas

Hay una serie de consecuencias elementales derivables desde las transformaciones de Lorentz. Sin ser explícito en las demostraciones, las resumimos a continuación.

Contracción de longitudes**Contracción de longitudes**

Un objeto en movimiento “mide” más corto respecto al sistema de referencia (observador) en reposo. Si en reposo, un objeto mide una longitud propia L_0 , en movimiento aparenta una longitud igual a

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.18)$$

Dilatación del tiempo**Dilatación del tiempo**

En la Teoría de la Relatividad Especial, el tiempo NO es universal. Depende su percepción del observador inercial. En general, los “ticks” de relojes en movimiento son más largos, es decir, el tiempo se dilata y ralentiza al acercarse a la velocidad de la luz, cuando se observa desde un observador inercial. Matemáticamente:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t \quad (5.19)$$

Relatividad de la simultaneidad**Relatividad de la simultaneidad**

En Relatividad especial, sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia, no son generalmente simultáneos en otros. Matemáticamente:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (5.20)$$

$$\Delta y' = \Delta y \quad (5.21)$$

$$\Delta z' = \Delta z \quad (5.22)$$

$$c \Delta t' = \gamma(c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (5.23)$$

luego si en un sistema de referencia $\Delta t = 0$, se ve que $\Delta t' \neq 0$ en otro en general.

Adición de velocidades relativistas**Ley de adición de velocidades en relatividad especial**

En Relatividad Especial, las velocidades de suman no linealmente, de forma que la velocidad de luz es la velocidad máxima de las señales de información. Supongamos un observador en reposo A y un objeto móvil B respecto de B con velocidad v_1 relativa al observador en reposo y una velocidad v_2 relativa al observador en movimiento. Matemáticamente, si nos restringimos a un movimiento en una dimensión, la ley de adición dice que el observador en A observa una velocidad relativa igual a

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (5.24)$$

Esta ecuación no es la forma más general de ley de composición de velocidades relativista \mathbf{v} .

Ley general de composición de velocidades relativista

Si un cuerpo se mueve a velocidad \mathbf{v} respecto de un referencial S , y este referencial se mueve con velocidad \mathbf{V} respecto de otro referencial S' , entonces visto desde el referencial S' , la velocidad relativa \mathbf{v}' vista desde S' resultará ser

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} + \gamma^{-1}(\mathbf{V})\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{V}}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}} \quad (5.25)$$

En el caso habitual (más general) en el que el movimiento de los referenciales es paralelo, $\mathbf{v}_{\perp} = 0$, y se tiene que con $\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v}$ la velocidad relativa vista desde S' es

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{V}}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}} \quad (5.26)$$

Momento y energía relativistas

Momento relativista

El momento relativista no es lineal respecto de la velocidad, sino que adopta la expresión general

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.27)$$

Energía relativista

La energía relativista se define como la expresión formal

$$E = Mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.28)$$

La energía en reposo es $E_0 = mc^2$, y la energía relativista se define como

$$E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (5.29)$$

Cuando la velocidad es pequeña respecto de la luz, la energía cinética relativista es aproximadamente

$$E_k \approx \frac{1}{2}mv^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \approx \frac{1}{2}mv^2$$

A veces se define la masa no invariante o masa relativista como la expresión

$$M = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.30)$$

Relación energía-momento-masa

La energía, el momento y la masa relativistas están relacionados por la expresión pitagórica siguiente:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (5.31)$$

donde E , p son la masa y el momento relativistas dados por $E = Mc^2$, y $p = Mv$.

Relación $\beta - \gamma$

Los parámetros β , γ están relacionados mediante las expresiones siguientes:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (5.32)$$

en donde

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{ó} \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \quad (5.33)$$

Para un fotón o cualquier otra partícula sin masa, la energía es $E = pc$, y la longitud de onda se relaciona con la energía mediante $E = hc/\lambda$, equivalentemente $\lambda = hc/E$, y donde h es la constante de Planck.

Transformaciones de los campos electromagnéticos

Los campos electromagnéticos \mathbf{E} y \mathbf{B} también se transforman bajo transformaciones de Lorentz generales.

Transformaciones de \mathbf{E} y $c\mathbf{B}$ en SR

En general, un campo eléctrico puro o magnético puro da lugar a un campo eléctrico o un campo magnético mixto, i.e., la transformación de Lorentz más general de un campo eléctrico o magnético puros los transforma en una combinación lineal (mezcla) de campos eléctricos y magnéticos. El par $(\mathbf{E}, c\mathbf{B})$, en un sistema de referencia S cambia a unos valores en otro sistema de referencia inercial S' como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ c\mathbf{B}' &= \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

en donde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ y $\gamma = \gamma(v)$. Hay dos invariantes estándar en electromagnetismo: $\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B}$, y $E^2 - (c\mathbf{B})^2$. Así, un campo eléctrico puro satisface $E^2 - (c\mathbf{B})^2 = E^2 > 0$, y no puede transformarse en uno magnético puro porque $E^2 - (c\mathbf{B})^2 = -(c\mathbf{B})^2 < 0$, y viceversa.

Ciclotrón relativista

Si un ciclotrón no relativista tenía período y radios dados por $T = 2\pi m/qB$ y $R = p/qB = mv/qB$, un ciclotrón relativista en el que $B \perp v$ tendrá período y radio dados por las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{qB} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & R &= \frac{v}{qB} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Espacio-tiempo y Mom-energía

La relatividad especial se comprende mejor en un contexto matemático multidimensional. El espacio y el tiempo forman una unión llamada espacio-tiempo, y el momento y energía una unión llamada momenergía.

Espacio-tiempo

En Relatividad Especial, un suceso es un vector en un espacio de 4-dimensiones, con $x_0 = x_4 = ct$:

$$X = (\vec{r}, ct) = (\vec{r}, x^0) = X^\mu e_\mu \quad (5.36)$$

Esto admite una generalización a un espacio de D-dimensiones, con s-dimensiones espaciales, y t-dimensiones espaciales:

$$X = (\vec{r}, c\vec{T}) = X^\mu e_\mu + c_{(v)} T^\nu e_\nu \quad (5.37)$$

Invariante en relatividad especial 4D: el tiempo propio τ , definido bajo la relación

$$X \cdot X = X^\mu X_\mu = -c^2 \tau^2 \quad (5.38)$$

Momenergía

En Relatividad Especial, energía, masa y momento están relacionados mediante el cuadrimento

$$P = \left(\vec{p}, \frac{E}{c} \right) = (\vec{p}, p_0) \quad (5.39)$$

y donde $p_0 = \frac{E}{c}$, donde $E = m\gamma c^2$ y $\vec{p} = m\gamma \vec{v}$. El cuadrado de la momenergía es proporcional a la denominada masa invariante o masa “en reposo” de una partícula o sistema

$$P \cdot P = P^\mu P_\mu = -m^2 c^2 \quad (5.40)$$

5.2. Física cuántica

5.2.1. La hipótesis de Planck

La hipótesis cuántica de Planck no es más que la extensión a la energía de la teoría atómica o cinético-molecular. Planck, para resolver el problema del cuerpo negro, postuló que la energía electromagnética está cuantizada o cuantificada. Esto es, toda energía es siempre múltiplo de una unidad o cuanto elemental. Matemáticamente, se expresa como sigue:

Hipótesis de Planck

La energía es siempre un múltiplo entero de un valor mínimo o cuanto elemental dado por

$$E = hf = \hbar\omega \quad (5.41)$$

con lo que $E = nhf = n\hbar\omega$, para $n \in \mathbb{Z}^+$, i.e., $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. Aquí, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

La hipótesis cuántica permitió a Max Planck derivar la ley correcta para la densidad espectral del cuerpo negro (cuerpo caliente que emite radiación electromagnética), de forma que se lograba obtener la ley de Stefan-Boltzmann y la ley de Rayleigh-Jeans bajo un mismo marco común más general.

Ley de Rayleigh-Jeans

La radiancia espectral $R_T(\omega)$, potencia emitida por unidad de área superficial e intervalo unidad de frecuencia angular, de un cuerpo negro a bajas frecuencias viene dada por la expresión

$$R_T(\omega) = \frac{\omega^2 k_B T}{(2\pi c)^2} = \frac{k_B T}{\lambda^2} \quad (5.42)$$

donde $\lambda = 2\pi c/\omega$.

Ley de Stefan-Boltzmann

Un cuerpo negro emite una potencia emisiva en W/m^2 que es directamente proporcional a la cuarta potencia de la temperatura. Matemáticamente:

$$I = \frac{P}{S} = E_{BB} = \sigma T^4 \quad (5.43)$$

y donde la constante de Stefan-Boltzmann es $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, teniendo su origen cuántico microscópico en la expresión:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = \frac{12\pi k_B^4 \zeta(4)}{c^2 h^3} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2 h^3} = \frac{3k_B^4 \zeta(4)}{2\pi^2 c^2 h^3} \quad (5.44)$$

La intensidad de la luz emitida por un cuerpo negro, considerando que la radiación está cuantizada, viene dada por la ley de Planck del cuerpo negro siguiente:

Ley de Planck del cuerpo negro

Un cuerpo negro emite una intensidad $I(\nu, T)$ que depende de la frecuencia y la temperatura de acuerdo a la expresión de Planck siguiente:

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (5.45)$$

o en términos de la magnitud radiancia espectral

$$R_T(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \frac{\hbar\omega/k_B T}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} k_B T \quad (5.46)$$

Además, se tiene que integrando a todas las frecuencias, la radiancia espectral, da la ley de Stefan-Boltzmann. Esto es,

$$R_T(T) = \frac{P}{S} = I(T) = \int_0^\infty R_T(\omega) d\omega = \sigma T^4 \quad (5.47)$$

Ley de Wien

La ley del desplazamiento de Wien o simplemente ley de Wien establece la relación que existe entre el pico de emisividad en la ley de Planck del cuerpo negro y el inverso de la temperatura. Matemáticamente establece que

$$\lambda_p = \frac{hc}{k_B T \left(W\left(-\frac{5}{e^5}\right) + 5 \right)} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} m \cdot K}{T} \tag{5.48}$$

donde $W(z)$ es la función W de Lambert y e es el número e . Esta función no elemental permite resolver, entre otras, la ecuación no lineal $xe^x/(e^x - 1) = n$ como $x = n + W(-ne^{-n})$.

Ley de Kirchoff

La ley del desplazamiento de Kirchoff sobre la relación entre la potencia emisiva de dos cuerpos, I_1 e I_2 , y el poder de absorción α_1 y α_2 de sus superficies a la misma temperatura:

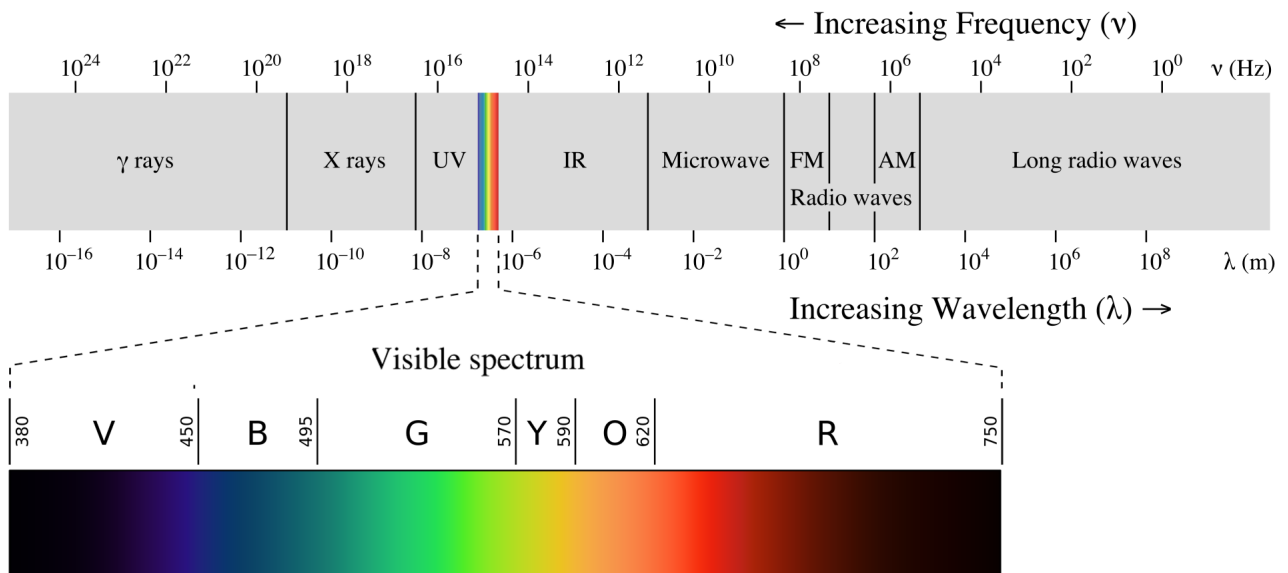
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tag{5.49}$$

La distribución espectral de la potencia emisiva por cada longitud de onda viene dada por la expresión:

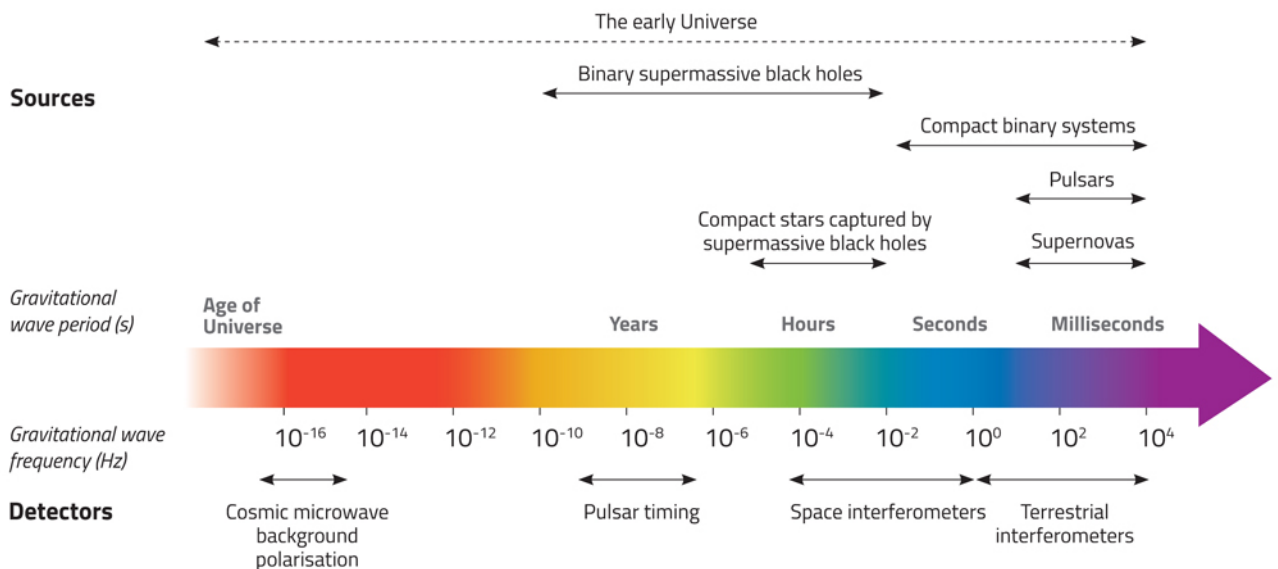
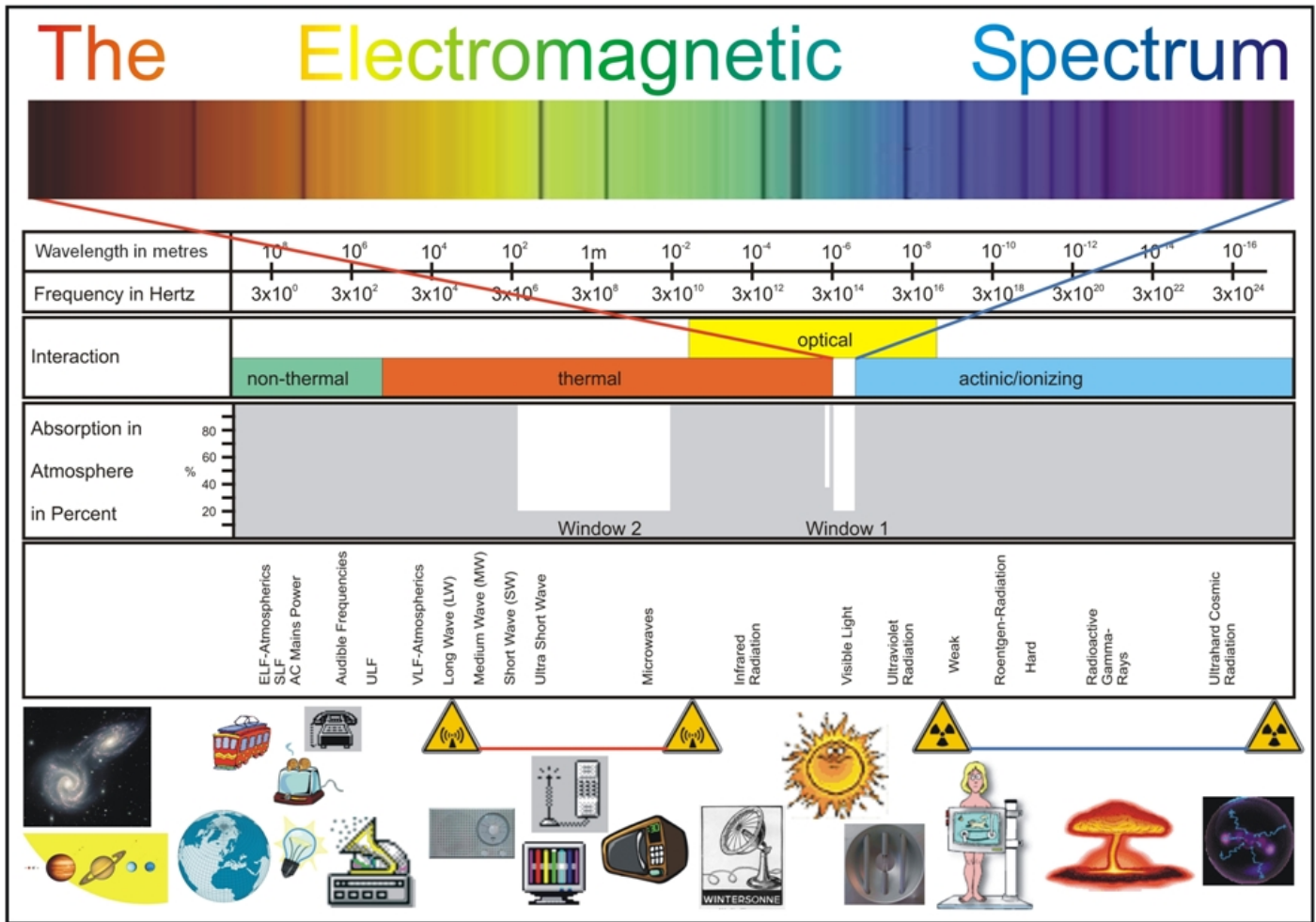
$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)} \tag{5.50}$$

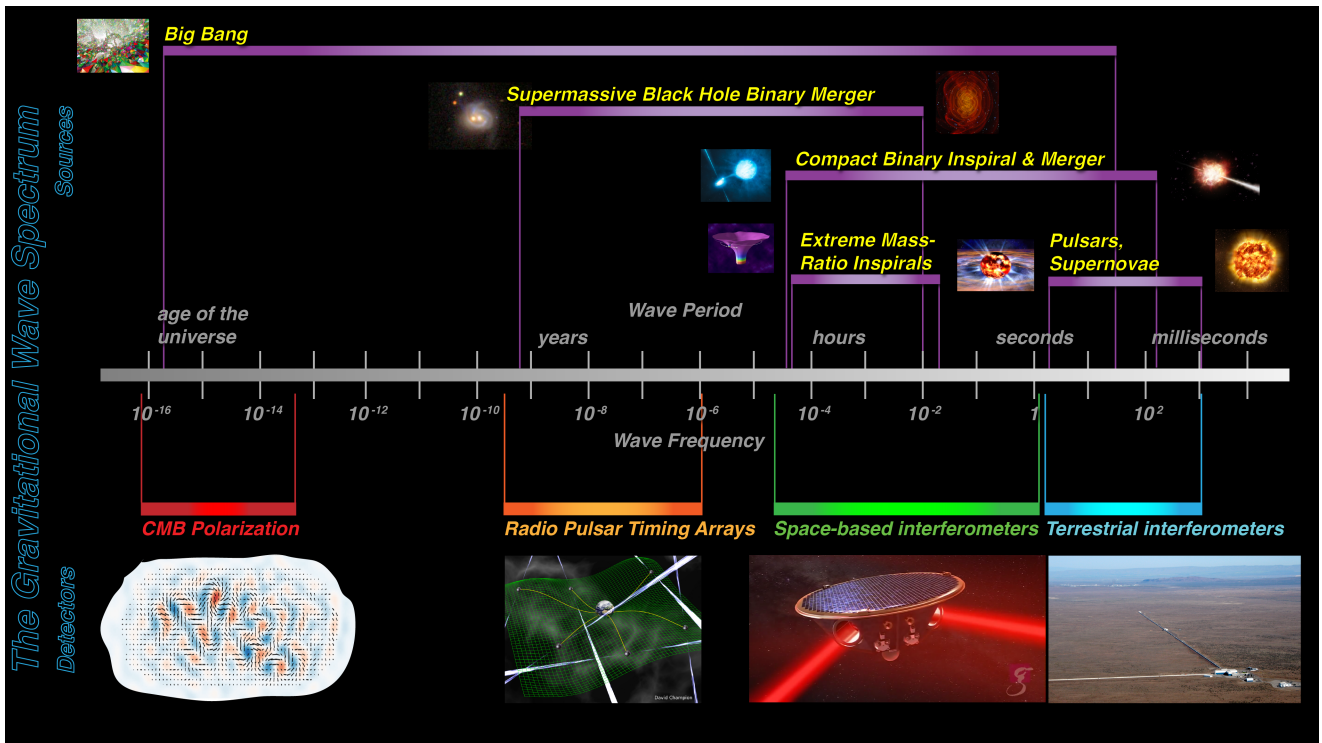
5.2.2. Espectro electromagnético

El conjunto de todas las posibles radiaciones (como partículas u ondas) de todas las frecuencias o longitudes de onda, se denomina espectro electromagnético.



Existe un espectro equivalente para la radiación gravitacional, denominado espectro gravitacional, que generalmente se define como el conjunto de períodos (no de longitudes de onda, pero están relacionados) y frecuencias de las ondas y partículas de gravitación (gravitones). Una comparación es como sigue:





5.2.3. Dualidad onda-partícula

Louis de Broglie, mediante las ideas de la relatividad y la hipótesis cuántica, derivó una relación entre energía y momento para cualquier longitud de onda de la forma siguiente:

Dualidad: longitud de de Broglie y microscopio electrónico(I)

La longitud de onda de de Broglie de cualquier partícula de momento p viene dada por la expresión

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{Mv} = \frac{h}{\gamma mv} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{h}{mv} \tag{5.51}$$

donde la aproximación última es válida en el régimen no relativista. Para una partícula general, se tiene que $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$, de donde

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}} = \frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0E_k \left(1 + \frac{E_k}{2E_0}\right)}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0q\Delta V \left(1 + \frac{q\Delta V}{2E_0}\right)}} \tag{5.52}$$

y donde $E = E_k + E_0$, $E_0 = mc^2$. Vemos que para $m = 0$ recupera el resultado del fotón $E = hc/\lambda$, $\lambda = hc/E$. Para una partícula no relativista se puede escribir la longitud de de Broglie en función de la energía cinética, ya que $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, con lo que $p = \sqrt{2mE_k}$, y

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m(-\Delta E_p)}} = \frac{h}{\sqrt{2mq\Delta V}} \tag{5.53}$$

Hemos usado el teorema de conservación $\Delta E_k = -\Delta E_p = -q\Delta V$, y evaluado esta última expresión para una carga negativa, pero puede hacerse la evaluación para toda carga en general. Además, se llama longitud de onda de Compton a la longitud de onda de un fotón que iguala la longitud de onda asociada a la energía en reposo de la partícula, es decir:

$$\lambda_C = \frac{hc}{E_0} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{h}{mc} \tag{5.54}$$

Longitud de onda de De Broglie y microscopio electrónico(II)

Usando relaciones cinemáticas relativistas, y la idea subyacente de dualidad, De Broglie propone que toda partícula tiene una longitud de onda asociada:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \quad (5.55)$$

Para el caso no relativista con masa, el momento $p = mv$ y

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \quad (5.56)$$

Para el caso relativista con masa, el momento $p = m\gamma v = Mv$, y

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.57)$$

Para “fotones”, o más generalmente partículas relativistas sin masa (fotones, gluones, gravitones,...) se tiene

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = hf \rightarrow \lambda_{dB} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p} \quad (5.58)$$

porque $E = pc$ para el caso de partículas relativistas sin masa. Nótese que en relatividad $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, $E = mc^2$ es la masa en reposo, mientras que $E = Mc^2 = m\gamma c^2$ es la energía total relativista, y la energía cinética relativista sería $E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$.

La idea de longitud de onda de De Broglie permite ya introducir el concepto de microscopio con partículas cuánticas. Un microscopio es simplemente el resultado de arrojar fotones sobre algo y reconstruir una imagen...Eso mismo puede hacerse con electrones y en general cualquier otra partícula-X:

Electron microscope

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} \quad (5.59)$$

X-particle microscope

$$\lambda_X = \frac{h}{\sqrt{2m_X Z eV}} \quad (5.60)$$

Electron microscope(II)

$$\lambda_e = \frac{12,25 \cdot 10^{-10} m}{\sqrt{V}} = \frac{1,225 nm}{\sqrt{V}} \quad (5.61)$$

X-particle microscope(II)

$$\lambda_e = \frac{12,25 \cdot 10^{-10} m}{\sqrt{N_X Z_X V}} = \frac{1,225 nm}{\sqrt{N_X Z_X V}} \quad (5.62)$$

Relativistic electron microscope

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \left[2m_e eV \left(1 + \frac{eV}{2mc^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (5.63)$$

Relativistic X-particle microscope

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \left[2m_X Z_X eV \left(1 + \frac{Z_X eV}{2m_X c^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (5.64)$$

El mundo subatómico se describe mediante una teoría llamada Mecánica Cuántica, de la que el modelo estándar es la variante más elaborada. A nivel de los átomos y moléculas, la Mecánica Cuántica puede ser descrita con bastante precisión en general por la ecuación de Schrödinger o la de Dirac.

5.2.4. Principio de indeterminación

Heisenberg, usando la teoría de matrices, se dio cuenta de que la descripción ondulatoria de la materia implicaba que había variables que no podían observarse simultáneamente con precisión arbitraria. En síntesis:

Principio de indeterminación de Heisenberg

Para cualquier par de variables “conjugadas”, dimensionalmente con producto de acción, la indeterminación de estas magnitudes no puede conocerse con precisión arbitraria sino que

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (5.65)$$

Dos casos particulares importantes de esta relación de indeterminación con la indeterminación de posición y momento y la de energía y tiempo

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.66)$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5.67)$$

Los objetos cuánticos son en general funciones de onda $\Psi \in \mathbb{C}$, es decir, son números complejos. Una función de onda Ψ es una amplitud de probabilidad sin significado físico más allá de la información que codifica de un sistema. El módulo $|\Psi|^2 = \bar{\Psi}\Psi$ es interpretado como una probabilidad en la interpretación de Copenhague. Esta interpretación estadística se debe a Max Born (no confundirle con Bohr, Bohm o Max Planck). Las funciones de onda satisfacen la ecuación de Schrödinger en Mecánica Cuántica no relativista (imagen de Schrödinger) o la ecuación de Dirac en Mecánica Cuántica relativista.

Ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = E\Psi \leftrightarrow H\Psi = E\Psi \quad (5.68)$$

$$H\Psi = (T + V)\Psi = E\Psi \quad (5.69)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V(x, y, z, t) \right) \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = E\Psi \quad (5.70)$$

Ecuación de Dirac

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - mc \right) \Psi = \left(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0 \quad (5.71)$$

La ecuación de Dirac describe el comportamiento de fermiones de espín 1/2, y predice la existencia de antimateria, materia con la misma masa que la materia normal pero carga opuesta. Existen generalizaciones de las ecuaciones de campo para otros espines (las ecuaciones de Maxwell o las ecuaciones de Yang-Mills en general son las ecuaciones para fotones sin masa, y la ecuación de Proca es su versión masiva), con espín 3/2 o espín 2, o espín 0, con masa y sin masa, y también ecuaciones complicadas para partículas con espín arbitrario. Por otra parte, hay versiones generalizadas del principio de incertidumbre más generales o extendidas, llamadas GUP, EUP o EGUP.

5.2.5. Efecto fotoeléctrico

Una aplicación importante de la teoría o hipótesis cuántica es la explicación del efecto fotoeléctrico. El efecto fotoeléctrico es el fenómeno mediante el cual un metal o sustancia emite electrones o corriente eléctrica cuando le incide luz (radiación electromagnética). Este efecto fue explicado por Einstein en 1905 usando la hipótesis cuántica y la conservación de la energía, lo que le valió un premio Nobel, dado que hasta entonces nadie había explicado ese fenómeno. La física ondulatoria proporcionaba resultados erróneos.

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

Cuando se incide radiación electromagnética con frecuencia f , longitud de onda $\lambda = c/f$, sobre un metal o material electrónicamente denso, se cumple la relación

$$hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2 \leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + E_c(max) \quad (5.72)$$

y donde $hf_0 = W_e$ es el trabajo de extracción del metal (particular para cada metal), f_0 y λ_0 son la frecuencia y longitud de onda umbral. Para que exista efecto fotoeléctrico, $f \geq f_0$ ó $\lambda \leq \lambda_0$. La energía cinética máxima de los electrones es

$$E_c(max) = \frac{1}{2}mv^2 = hf - hf_0 = h(f - f_0) \quad (5.73)$$

y donde m es la masa del electrón. El potencial de frenado $\Delta V = V_f$ de los electrones se define como la energía necesaria para parar los electrones eyectados por el efecto fotoeléctrico, y tiene un valor:

$$\Delta V = V_f = -\Delta E_c / (q_e) = -\frac{\Delta E_c}{-e} = \frac{E_c(max)}{e} = \frac{h(f - f_0)}{e} \quad (5.74)$$

donde $q_e = e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$ es la carga del electrón en valor absoluto. El trabajo mínimo o energía mínima para extraer los electrones del metal, se llama función de trabajo φ , y vale precisamente $\varphi = hf_0$. La función de trabajo puede expresarse en voltios, dividiendo por la carga elemental, y entonces tenemos el potencial de extracción $V_e = \varphi/e = \frac{hf_0}{e}$, donde $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$ es de nuevo la carga elemental del electrón en valor absoluto. El efecto fotoeléctrico admite una generalización relativista especial.

Número de fotones por unidad de tiempo y superficie

Regla SETI:

$$I = \frac{E/t}{S} = \frac{nhc}{t\lambda S}$$

de donde

$$\frac{n}{t \cdot S} = \frac{\lambda I}{hc} = \frac{I}{hf} = \frac{I}{E}$$

Un efecto relacionado con el fotoeléctrico es el efecto termoiónico:

Efecto termoiónico

Ley de Richardson: la intensidad e corriente I emitida por unidad de superficie por un metal a temperatura T es igual a

$$I = AT^2 e^{-\frac{\phi_0}{k_B T}} \quad (5.75)$$

y donde ϕ_0 es la función de trabajo del metal.

Otro efecto relativista y cuántico es el denominado efecto Compton: es el efecto del cambio de la longitud de onda de la luz o radiación electromagnética cuando interacciona con electrones libres. Matemáticamente, se describe como sigue.

Efecto Compton

El cambio de la longitud de onda de un fotón al interactuar con un electrón sigue la fórmula:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \varphi) \leftrightarrow \lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \varphi) \quad (5.76)$$

y donde φ es el ángulo que forman el fotón y electrón, con λ' la longitud de onda final del fotón, λ la longitud de onda inicial y $\lambda_C = h/mc$ es la longitud de onda de Compton. El efecto de Compton inverso también es importante en Astronomía y Astrofísica.

Rayos X

Los rayos X son fotones de radiación electromagnética emitidos por metales cuando sobre ellos incide un haz de electrones (rayos catódicos) con muy alta energía. La frecuencia de las radiaciones de rayos X emitidas por un metal se relaciona mediante la ley de Moseley:

$$f = a(Z - b)^2 \quad (5.77)$$

La longitud de onda mínima de los rayos X emergentes se relaciona con el potencial V que acelera los electrones mediante la ley de Douane-Hunt

$$\lambda_{min} = \frac{ch}{q_e V} \quad (5.78)$$

5.2.6. Efecto Schwinger

En otra característica de la combinación de física relativista especial y teoría cuántica, es posible también la creación de pares de partículas mediante colisiones. O también, simplemente, mediante la excitación muy fuerte de los campos. Supongamos que tenemos un campo eléctrico muy fuerte o intenso, de forma que su energía potencial pueda crear un par de partículas de masa m cuando en una región cuya longitud de onda de de Broglie es $2\lambda_C$. Entonces:

Efecto Schwinger eléctrico y magnético

$$W = F\Delta x = qE\Delta x = qE_S \frac{2\hbar}{mc} = 2mc^2$$

de donde

$$E_S = \frac{m^2 c^3}{q\hbar} \quad (5.79)$$

Para el campo magnético, como $E = Bc$,

$$B_S = \frac{E_S}{c} = \frac{m^2 c^2}{q\hbar} \quad (5.80)$$

Efecto Schwinger gravitacional

Para el caso gravitacional, hay un cálculo análogo, porque

$$W = F\Delta x = mg\Delta x = mg \frac{2\hbar}{mc} = 2mc^2$$

$$g_c = \frac{mc^3}{\hbar} \quad (5.81)$$

y que también puede obtenerse del electromagnético fijando $e = m$. Este campo gravitacional crítico también es llamado en ocasiones aceleración crítica de Caianiello.

5.3. Sección eficaz y física nuclear. Reactores

El estudio de la física atómica, pero también de la física nuclear y de partículas, lleva a introducir conceptos estadísticos y probabilísticos no deterministas. Los procesos microfísicos se caracterizan por el área de interacción, lo que lleva aparejado el concepto de **sección eficaz**. Sea un haz paralelo de neutrones (o de cualquier otro tipo de partículas), que incide sobre un blanco o lámina o punto de material que contiene N átomos o partículas por cm^3 (o chocan entre sí mismas haciendo vibrar el vacío). El producto de la densidad de número de partículas por la velocidad se llama flujo

$$\phi = n \cdot v$$

y tiene unidades de $cm^{-2} \cdot s^{-1}$. Al llegar el haz al blanco, producirá un determinado número de sucesos o interacciones, que dependerá del número de neutrones o partículas que lleguen al blanco (o sea, depende del flujo) y del número de átomos o partículas en la lámina o blanco. El número de eventos o sucesos será

$$\mathcal{N} = KNnv = KN\phi$$

por cada cm^3 y cada segundo. $K = \sigma$ es una constante llamada sección eficaz o área de interacción, microscópica. Así:

$$\mathcal{N} = \sigma Nnv = \sigma N\phi$$

Las dimensiones de σ son de área. Y como consideramos áreas muy pequeñas, suele usar el barn $1barn = 10^{-24}cm^2 = 10^{-28}m^2$. Si hubiera varios procesos, la sección eficaz es la suma de todos los subprocesos:

$$\sigma = \sum_i \sigma_i = \sum_{i=1}^M \sigma_i$$

La sección eficaz microscópica en general disminuye al aumentar la energía, aunque depende en realidad del tipo de partícula y proceso considerado. También puede definirse la sección eficaz macroscópica

$$\Sigma = N\sigma$$

y que tiene dimensiones de cm^{-1} . N es la densidad de átomos en el blanco, N es el número de átomos por centímetro cúbico, i.e., la densidad de número de átomos. Otro concepto importante es el de anchura de una desintegración. Se llama anchura a la cantidad

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Si hay varios subprocesos, y no solamente uno, la anchura total es la suma de todas las anchuras.

En un reactor nuclear de fisión es importante el concepto de densidad neutrónica, la vida media del neutrón, y el llamado factor de multiplicación K , definido como la relación o cociente entre el número de neutrones en una generación y el número de neutrones que hubo en la generación precedente. Así si $K > 1$ se dice que un reactor es supercrítico (aumenta la población de neutrones). Si $K = 1$ se dice que un reactor es crítico (la población de neutrones se mantiene). Finalmente, si $K < 1$, la población de neutrones se reduce y estamos en un reactor subcrítico. El flujo de neutrones $\phi_n = nv$ es una situación idealizada. Los neutrones se comportan como partículas y tienen una distribución en velocidad. Por tanto, suele definirse el flujo total neutrónico como la integral del número de neutrones con cierta velocidad

$$\phi = \int n(v)dv$$

La densidad de neutrones o el flujo de neutrones no son constantes en ningún reactor por lo general. Para el caso de la fisión del U-235, si un reactor tiene N núcleos sometido a flujo de neutrones ϕ , da un número de fisiones por segundo $N\sigma_f\phi$. Como para el U-235 $\sigma_f = 549barn$ y los neutrones son térmicos, la potencia por unidad de volumen es

$$P = \frac{N\sigma_f\phi}{3,3 \cdot 10^{10}}$$

en unidades de voltios por centímetro cúbico. $3,3 \cdot 10^{10}$ son el número de fisiones por segundo para producir 1 voltio. El hecho fundamental es que para reactores de fisión no hay un límite fijo a la cantidad de energía que se puede extraer, pero el reactor puede llegar a destruirse si la velocidad de extracción del calor llega a ser inferior que la de generación del calor de fisión. Por eso es importante el sistema de refrigeración de un reactor. Hipotéticamente hablando, además, se podría usar el residuo nuclear como combustible, algo que se está investigando. También hay propuestas de reactores nucleares torio, incluso para coches o vehículos de todo tipo.

5.4. Física nuclear y de partículas

5.4.1. Modelos atómicos

- 1894. Modelo de Thomson (plum-cake model). El átomo es una esfera de radio $r = 10^{-10}m$, con los electrones a modo de pasas. Problema: no explica el experimento de Geiger-Marsden-Rutherford de dispersión de partículas por una lámina de oro (y otros).
- 1911. Rutherford (modelo planetario). El átomo tiene un núcleo como sol y electrones como planetas. Problema: inestabilidad y no explicación de espectros.
- 1915. Bohr (modelo semicuántico). El átomo de hidrógeno es un modelo atómico con capas y órbitas cuantizadas en energía y momento angular. Explica el átomo de hidrógeno e hidrogenoides con relativa facilidad. Problema: inconsistencia conceptual con otros experimentos posteriores y no explicación de átomos no hidrogenoides, incluso incluyendo órbitas elípticas y correcciones relativistas era insuficiente (corrección de Sommerfeld).
- De 1924 hasta la actualidad (con picos en 1931, 1949, 1971, 1995 y 2012). Modelo mecanocuántico del átomo y las partículas subatómicas. Explica todo hasta el momento: espectros, átomos complejos, moléculas. Problemas: no explicación coherente definitiva sobre el carácter cuántico de la fuerza gravitacional.

5.4.2. Tipos de desintegración radiactiva

Un núcleo o átomo queda esencialmente cuantificado con tres números (cuatro si incluyes los electrones):

- **Número atómico Z .** Es el número de protones del átomo, coincide con el número de electrones si el átomo es neutro.

- **Número de neutrones N.** Es el número de neutrones de un átomo.
- **Número másico A.** Es el número de protones más el de neutrones de un átomo $A = Z + N$.
- **Número de electrones N_e .** Es el número de electrones del átomo. En su estado fundamental y neutro, un átomo tiene el mismo número de protones que de electrones. En caso de un desbalance de electrones respecto al número de protones, obtenemos un átomo cargado eléctricamente (no neutro), también llamado *ion*.

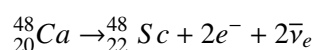
Ahora unas definiciones relacionadas:

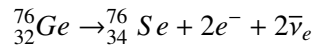
- **Iones.** Átomos o grupos de átomos que han perdido o ganado electrones. Si ganan electrones, los iones son de carga negativa y se llaman aniones. Si pierden electrones, los iones son de carga positiva o cationes.
- **Isótopos.** Átomos del mismo elemento, por tanto mismo Z, mismo número de protones, pero diferente número másico y por tanto diferente número de neutrones.
- **Isótonos.** Átomos de diferentes elementos con el mismo número de neutrones.
- **Isóbaros.** Átomos de diferentes elementos con el mismo número másico.
- **Isómeros.** Átomos del mismo núcleo, que solamente difieren en energía. Es decir, son estados excitados del mismo átomo o núcleo.

Los átomos se suelen simbolizar mediante el esquema ${}^A_ZX^{n\pm}$, donde A es el número másico, Z el número atómico y n es la carga eléctrica del mismo (no se pone si es neutro). Además de en estado neutro, la estabilidad de un átomo se logra con la estabilidad del propio núcleo. Generalmente, salvo en los elementos más pesados, los átomos estables tienen un número de protones similar al número de neutrones. Cuando hay un desbalance o desequilibrio entre el número de protones y el de neutrones, el núcleo y el átomo suelen ser inestables, presentando el fenómeno de la *radioactividad*.

La radioactividad es el fenómeno que tiene lugar en algunos átomos cuyos núcleos están muy desbalanceados en su número Z y N. Hay átomos radiactivos de casi todos los elementos químicos. La radioactividad es un fenómeno que consiste en la emisión de partículas (fotones, neutrones y neutrinos, protones o incluso otros núcleos como partículas alfa) de un átomo, transmutándose (transformándose) en otro para lograr la estabilidad (menor energía, y un mejor balanceo de protones y neutrones). Existen 3 tipos básicos de radioactividad: alfa, beta y gamma. Luego hay dos formas menos conocidas de “radiación”, denominadas radiación delta y epsilon:

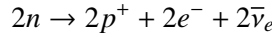
- **Radiación alfa α ,** emisión de un núcleo o átomo de helio:
 $(A, Z) \rightarrow (A - 4, Z - 2), {}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + {}^4_2He^{2+} + 2e^- \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + {}^4_2He$.
- **Radiación beta β .** Hay dos tipos. Beta negativa o beta menos β^- , y beta positiva o beta más β^+ . Así,
 $\beta^- : (A, Z) \rightarrow (A, Z + 1)$, o bien ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}X' + e^- + \bar{\nu}_e$.
 La β^+ es $(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1)$, o bien ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}X' + e^+ + \nu_e$.
 e^- es el electrón, e^+ es el positrón (antipartícula del electrón), ν_e es el neutrino del electrón, y $\bar{\nu}_e$ el antineutrino del electrón. Se especula con la posibilidad de las llamadas desintegraciones beta doble, solamente posibles si el neutrino es lo que se llama una partícula de Majorana (su propia antipartícula, descrita por una ecuación de Dirac modificada llamada ecuación de Majorana). En tal caso, sería posible el proceso
 $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- (\beta\beta^{2-}0\nu_e)$, y $(A, Z - 2) \rightarrow (A, Z) + 2e^+ (\beta\beta^{2+}0\nu_e)$, es decir, sería posible una desintegración beta doble sin neutrinos si el neutrino es su propia antipartícula. Este hecho se desconoce en la actualidad (así como el valor exacto de la masa de los neutrinos). Más concretamente:
 $\beta^{--} : {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+2}X' + 2e^-$,
 para una reacción doble beta menos sin neutrino, y,
 $\beta^{++} : {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-2}X' + 2e^+$,
 para una reacción de desintegración doble beta más sin neutrino. Aunque esta desintegración beta doble es muy rara, hay algunos núcleos que poseen ese modo de desintegración:





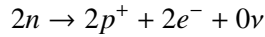
Si el neutrino es una partícula de Majorana, los dos neutrinos se autoaniquilarían y no serían detectados. Las desintegraciones beta doble sin neutrinos representan una de las fronteras de la Física Nuclear y de Física de Altas Energías y partículas elementales. Los procesos

$$\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}$$



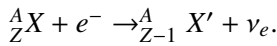
$$\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \gamma$$

$$\mu^{-} \rightarrow e^{-} + e^{+} + e^{-}$$

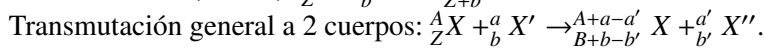
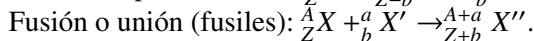
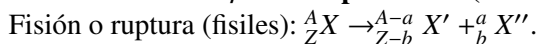


no han sido observados en la Naturaleza (violan el número leptónico), y deben ser extraordinariamente raros o imposibles en este Universo, al menos con el tiempo de vida actual del mismo.

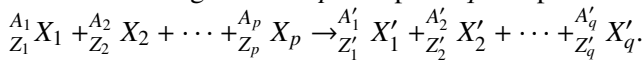
- **Reacción o radiación de captura electrónica (CE, K-capture).** Consiste en la captura de un electrón y la transmutación del átomo y núcleo asociado.



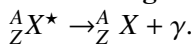
- **Reacción de fisión/fusión tipo cluster (o cúmulo).**



Transmutación general de p -cuerpos a q -cuerpos:



- **Radiación gamma** (emisión de fotones electromagnéticos de alta energía de núcleos o átomos excitados).



- **Rayos (o radiación) delta δ (Δ^{-} , *Delta - rays*).** Se trata de electrones muy energéticos arrancados de los átomos por otro tipo de radiación (ionizante). También se la llama radiación secundaria o electrones secundarios. Los electrones menos energéticos, o terciarios, constituyen la llamada radiación epsilon (o rayos epsilon). Δ^{-} : ${}^A_Z X + E \rightarrow {}^A_Z X^+ + e^{-}(\delta)$. Y, también, ϵ^{-} : ${}^A_Z X + E \rightarrow {}^A_Z X^+ + e^{-}(\epsilon)$

5.4.3. Reacciones nucleares

La producción de energía en una reacción nuclear (de fusión o fisión principalmente), se debe a la fórmula de Einstein:

$$E = Q = \left(\sum M_i - \sum M_f \right) c^2$$

Podemos clasificar aproximadamente las reacciones nucleares según el tamaño de los blancos y “balas” incidentes en 3 tipos:

- Reacciones de bombardeo. Ejemplo: ${}^4_2\alpha + {}^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow n + {}^{30}_{15}\text{P}$. Estas reacciones tienen reactivos pequeños contra blanco grande, y el resultado son productos pequeños y grandes. Son reacciones a veces endotérmicas y a veces exotérmicas.
- Reacciones de fisión. Ocurre en reacciones con reactivos pequeños contra blanco grande, dando núcleos medianos. Ejemplo: $n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^{89}_{36}\text{Kr} + 3n$. Estas reacciones son exotérmicas siempre, y tienen usos comerciales y militares.
- Reacciones de fusión. Ocurre cuando los reactivos son pequeños y dan núcleos grandes o medianos. El ejemplo típico es la reacción de deuterio ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + n$. Son reacciones fuertemente exotérmicas. Las aplicaciones militares (bomba H) y comerciales (energía de fusión) son las principales aplicaciones.

Existen varias familias de desintegración de reacciones radioactivas naturales. Se llama familia o serie radiactiva a un conjunto de especies nucleares que se van obteniendo sucesivamente por desintegración radiactiva de una especie inicial hasta que se llega a una especie final estable ($\lambda = 0$). Las series son:

- Serie del torio. Tipo de familia $A = 4n$. Cabeza de familia: ${}^{232}_{90}\text{Th}$. Especie final estable ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.
- Serie del neptunio. Tipo de familia $A = 4n + 1$. Cabeza de familia: ${}^{237}_{93}\text{Np}$. Especie final estable ${}^{205}_{81}\text{Pb}$.
- Serie del uranio. Tipo de familia $A = 4n + 2$. Cabeza de familia: ${}^{238}_{92}\text{U}$. Especie final estable ${}^{206}_{82}\text{Pb}$.
- Serie del actinio. Tipo de familia $A = 4n + 3$. Cabeza de familia: ${}^{235}_{92}\text{U}$, pasando por el actinio ${}^{227}_{89}\text{Ac}$. Especie final estable: ${}^{207}_{82}\text{Pb}$.

5.4.4. Ley de desintegración

Ley de desintegración radioactiva

El número de átomos o núcleos radioactivos que quedan tras un tiempo t sigue una ley exponencial del tipo

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/T_{1/2}} \quad (5.82)$$

en donde N_0 es el número inicial de núcleos o átomos, y $T_{1/2}$ es el denominado período o tiempo de semidesintegración. λ se llama constante radioactiva (es igual a cero para núcleos o partículas estables) y sus unidades son s^{-1} . El período de semidesintegración es el tiempo necesario para que el número de átomos o núcleos de la muestra se reduzca a la mitad, y el inverso de la constante radioactiva se llama semivida o vida media τ :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \quad (5.83)$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (5.84)$$

La ley de desintegración también puede ponerse en función de la masa, dada la relación entre el número de átomos o núcleos y la misma usando la constante de Avogadro y el número de moles: $n = \frac{m}{MM}$, luego como $N = nN_A = \frac{mN_A}{MM}$, se tiene también que

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 2^{-t/T_{1/2}} \quad (5.85)$$

para $m = \frac{MMN}{N_A}$ y $m_0 = \frac{MMN_0}{N_A}$, $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

5.4.5. Defecto de masa y energía de ligadura

Sea un núcleo (A, Z) con número atómico Z y número másico $A = Z + N$. En un proceso químico nuclear, en el que se libera energía, se llama defecto de masa de masa del núcleo o átomo a la diferencia:

Defecto de masa nuclear

$$\Delta m = (N \cdot m_N + Z \cdot m_P + n_e m_e) - m_{\text{núcleo}} \approx Nm_N + Zm_P - m_n \quad (5.86)$$

en donde m_N es la masa del neutrón, m_P es la masa del protón, m_e es la masa del electrón, n_e es el número de electrones y m_n es la masa del núcleo.

Energía de ligadura por nucleón

Se llama energía de ligadura por nucleón de un átomo o núcleo a la cantidad

$$B = \frac{\Delta mc^2}{A} \quad (5.87)$$

Experimentalmente, la densidad de un núcleo permanece constante a partir de cierto A . Eso puede explicarse con un modelo sencillo denominado modelo de la gota líquida. Si la densidad nuclear permanece constante para diferentes nucleidos, eso implica que el tamaño del núcleo varía aproximadamente como una función del número másico de la siguiente forma:

$$r = r_0 A^{1/3} \quad (5.88)$$

donde r_0 es del orden de femtómetros o fermis.

5.4.6. Actividad

La rapidez con la que un núcleo, átomo o partícula se desintegra se llama *actividad*. Matemáticamente:

Actividad

Se llama actividad a la derivada del número de átomos respecto del tiempo en valor absoluto:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 2^{-t/T_{1/2}} \quad (5.89)$$

Las unidades de la actividad son los becquerel (Bq) o los curios (Ci). $1 Bq = 1 s^{-1} = 3,7 \cdot 10^{10} Ci$.

5.5. Física de partículas y Cosmología

5.5.1. Física de partículas

En la actualidad, circa 2020, la materia y 3 de sus interacciones están descritas por una teoría cuántica de campos (relativista especial) denominada Modelo Estándar (ME). El ME describe a la materia conocida en dos tipos de partículas (fermiones): leptones y quarks. Las partículas de fuerza (electromagnética, interacción nuclear débil e interacción nuclear fuerte) son bosones (o bosones de gauge portadores de fuerza o interacciones). Los fermiones del ME se agrupan en 3 familias o generaciones, cuya única diferencia son los valores de las masas:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (5.91)$$

Los bosones del ME son el fotón γ , 8 gluones g , los bosones masivos intermedios de la interacción débil W^+ , W^- , Z^0 , y el bosón de Higgs H_0 , que es el denominado “dador de masa” de las partículas elementales. El ME se describe mediante el formalismo de una teoría gauge en la que se introduce la ruptura espontánea de simetría para cierto sector del lagrangiano e interacciones de Yukawa:

$$L_{SM} = L_f + L_g + L_Y + L_H \quad (5.92)$$

donde

$$L_f = \sum i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi \quad (5.93)$$

$$L_b = L_{gauge} = -\frac{1}{4} \sum F_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \quad (5.94)$$

$$L_Y = Y\phi\bar{\Psi}\Psi \quad (5.95)$$

$$L_H = |D\phi|^2 - V_H(\phi) \quad V_H = -m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \quad (5.96)$$

El ME es una teoría de campos cuántica local gauge de tipo Yang-Mills con grupo gauge $G = SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$. La gravedad no está descrita por el ME, y no hay teoría cuántica del gravitón en este framework. Teorías cuánticas de la gravedad han sido propuestas: teoría de cuerdas o supercuerdas, teoría M (F,S,...), loop quantum gravity, y otras variantes exóticas.

En el mundo cuántico subatómico hay montones de partículas. Hay fermiones y bosones. Hay hadrones y leptones. Los hadrones pueden ser bariones y mesones. Ejemplos de bariones: el protón, Λ , Ω ,... Ejemplos de mesones: piones, etas,...

5.5.2. Cosmología

El Universo a gran escala está descrito por la teoría localmente relativista especial denominada Relatividad General. Las ecuaciones de campo de esta teoría vienen dadas por las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5.97)$$

Estas ecuaciones describen la gravedad como curvatura del espacio-tiempo, afectada por la energía y el momento, así como una posible componente intrínseca denominada constante cosmológica Λ . El Universo a gran escala se puede describir por una métrica de tipo homogénea e isótropa denominada métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Esta métrica describe la expansión del espacio (espacio-tiempo) mediante un factor de escala. El universo en expansión puede describirse mediante la denominada ley de Hubble: $v = H(z)d(z)$. Para objetos no muy lejanos, el parámetro de Hubble es aproximadamente constante, y su valor en el momento actual se denomina constante o parámetro de Hubble en el tiempo actual. Los datos actuales sugieren que de $v = H_0 d$, se puede inferir un valor de

Ley de Hubble y constante de Hubble H_0

$$v = H_0 d \quad (5.98)$$

si

$$H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc} \quad (5.99)$$

La constante de Hubble permite determinar la edad del Universo t_U , el radio del Universo R_U , la llamada densidad crítica ρ_c , y la masa (crítica) del Universo m_U .

Constante de Hubble H_0 y parámetros cósmicos

Igualando energía cinética y gravitacional

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH_0^2R^2 = G_N \frac{Mm}{R} = G_N \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c m = \frac{4}{3}\pi G_N m \rho R^2 \quad (5.100)$$

Y de aquí trivialmente se obtienen las ecuaciones:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} \quad (5.101)$$

$$t_U = \frac{1}{H_0} \quad (5.102)$$

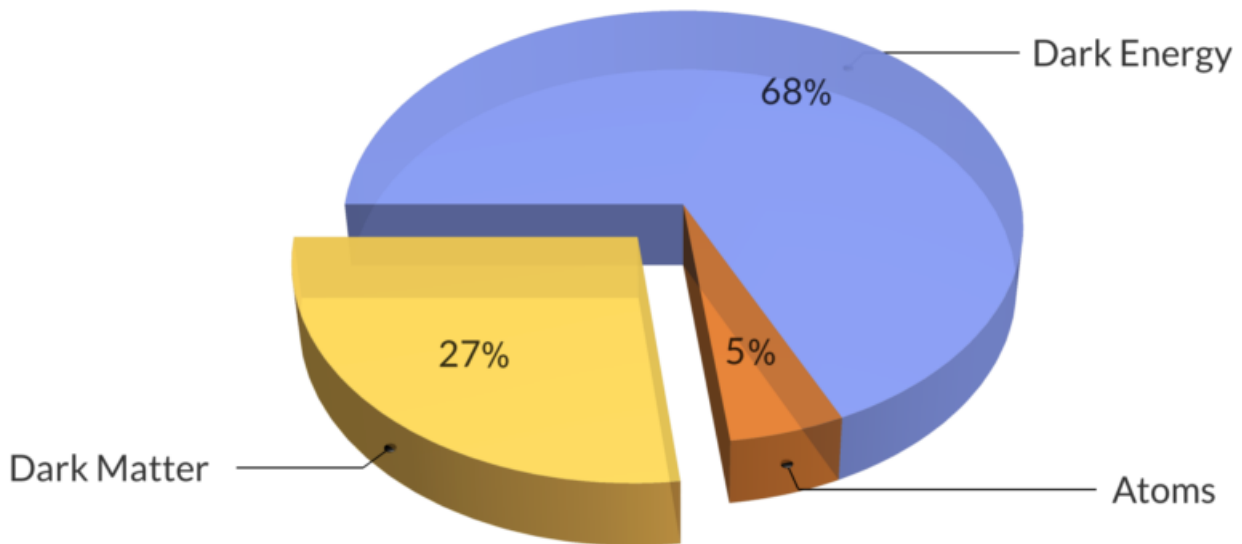
$$R_U = \frac{c}{H_0} = ct_U \quad (5.103)$$

$$M_U = \rho_U V_U = \rho_c \frac{4}{3}\pi R_U^3 = \frac{c^3}{2G_N H_0} \quad (5.104)$$

$$E_U = M_U c^2 = \frac{c^5}{2G_N H_0} \quad (5.105)$$

La constante cosmológica Λ se interpreta como la energía del vacío en muchas ocasiones, pero puede ser algo totalmente diferente, ya que es un término de presión en las ecuaciones de campo y podría no ser constante en realidad, sino una forma de energía exótica derivada de algún tipo particular de campo. Con esta generalización, el término cosmológico se denomina energía oscura. La energía oscura puede ser un campo de quintaesencia, la constante cosmológica, energía fantasma y otras clases de substancia.

En la actualidad, el Modelo Cosmológico Estándar sugiere que el Universo a gran escala está descrito por 3 principales componentes: la materia y energía normal del ME forma solamente el 5 % del Universo conocido. El 25 % es alguna forma de materia no incluida en el ME, denominada materia oscura, y el 70 % restante debe ser energía oscura. Los datos actuales apuntan a que la energía oscura se comporta muy aproximadamente como se esperaría de la constante cosmológica (un campo cuya densidad de energía es constante en todo el espacio y en todo tiempo). Esto plantea un conflicto, porque si bien este modelo cosmológico estándar, denominado *LCDM* ó *Λ CDM*, describe las observaciones muy bien, no arroja pistas sobre la naturaleza de la energía o materia oscuras. Además, el valor de la constante cosmológica, relacionado con la densidad de energía del vacío, es no nulo, positivo (antigravita por así decirlo) y tiene un valor 122 órdenes de magnitud más grande que los cálculos de la densidad de energía proporcionados por los modelos teóricos de Teorías Cuánticas de Campos gauge locales usuales.



Ecuaciones de Friedmann

Si el Universo se supone homogéneo e isótropo a grandes escalas, se satisfacen las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \kappa \frac{c^2}{R} + \frac{\Lambda}{3} \quad (5.106)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}G_N\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (5.107)$$

y donde $R(t)$ es el denominado factor de escala, Λ la constante cosmológica, κ el parámetro de curvatura, c la velocidad de la luz, G_N la constante gravitacional de Newton, y ρ es la densidad. La densidad de energía del vacío se define como

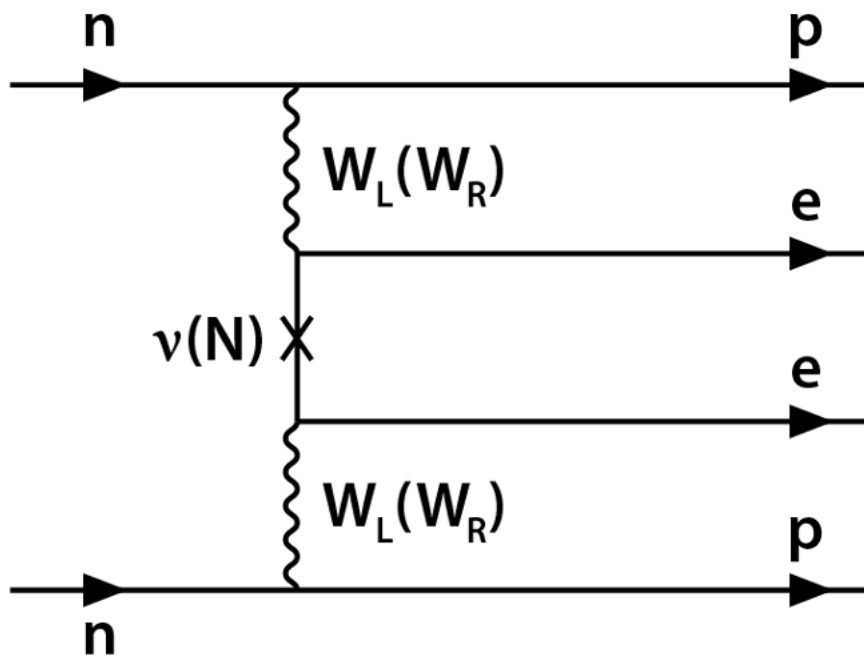
$$\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G_N} \quad (5.108)$$

y la composición del Universo se mide con las fracciones de energía relativas a la densidad crítica, denominadas Ω_i . En general, la conservación de la energía implica que

$$\Omega_B + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda + \Omega_r + \dots = 1$$

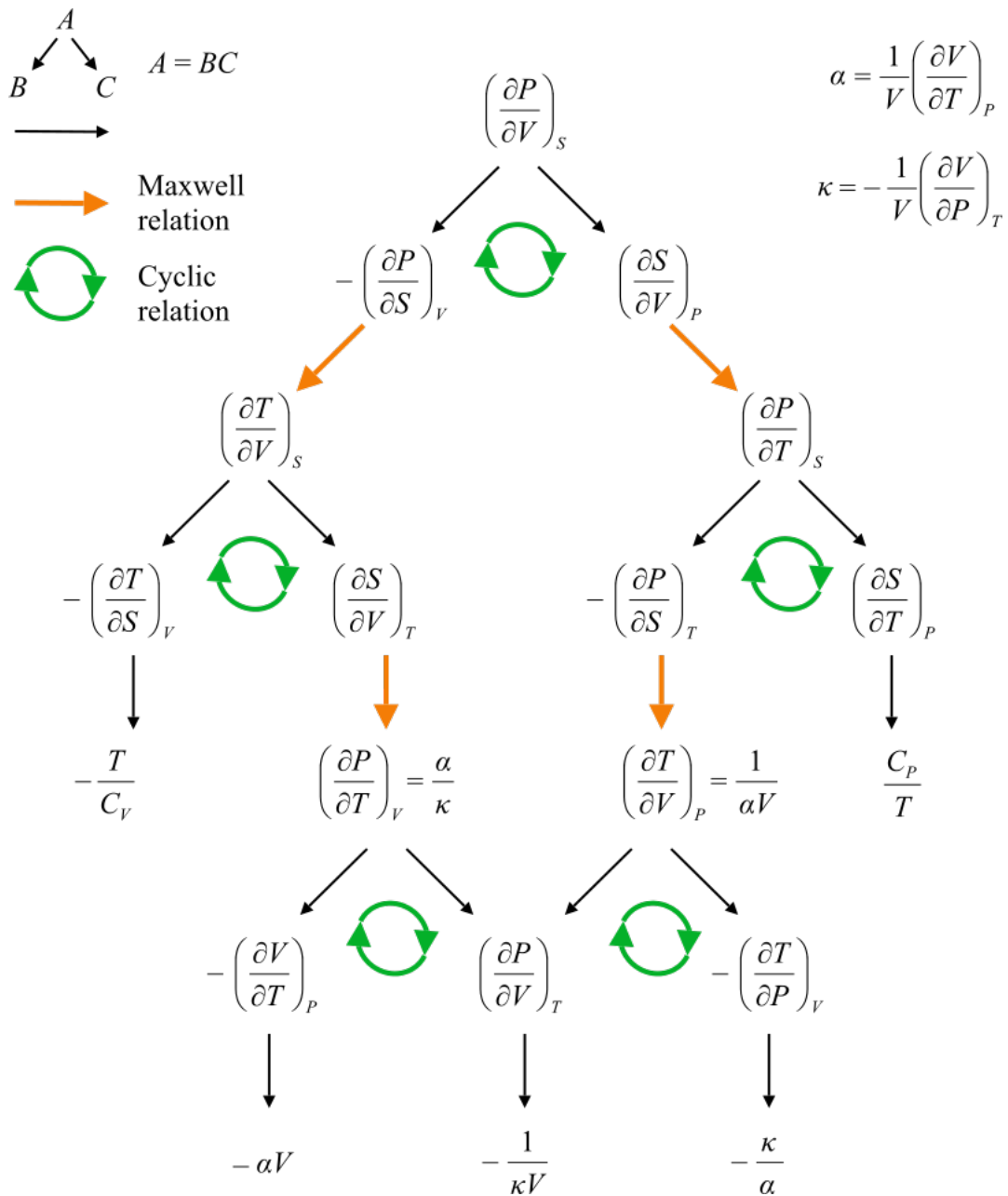
y la constante cosmológica es un caso especial de fluido cósmico, llamado en general energía oscura, dado por la ecuación politrópica $P = \omega\rho$, siendo $\omega = -1$ para la constante cosmológica.

El misterio del neutrino es otra pieza sin resolver. Hoy sabemos que al menos uno de los neutrinos activos es masivo. Pero no sabemos exactamente la masa de los neutrinos. Tampoco sabemos si el neutrino es su propia antipartícula (fermión real de Majorana). Además, sospechamos que la asimetría bariónica podría estar generada por los neutrinos si son partículas de Majorana. Debe, además, haber un fondo cósmico de neutrinos similar al de fotones en microondas. Su temperatura aproximada es de 1.945 kelvin si el Modelo Estándar es válido a suficientemente alta energía (que sabemos no puede ser totalmente cierto). La existencia de neutrinos de Majorana implicaría la existencia de desintegraciones beta doble sin neutrinos y violaciones del número leptónico (y por extensión, derivaría en violaciones del número bariónico).



Capítulo 6

Extras: Termología y Electrónica



6.1. Termología

6.1.1. Dilataciones

Uno de los efectos del calor o energía térmica son las dilataciones. Hay 3 coeficientes térmicos:

Coeficiente de dilatación lineal

Se define el coeficiente de dilatación lineal λ como sigue:

$$L = L_0(1 + \lambda(T - T_0)) \quad (6.1)$$

donde dimensionalmente $[\lambda]=T^{-1}$.

Coeficiente de dilatación superficial

Se define el coeficiente de dilatación superficial σ como sigue:

$$S = S_0(1 + \sigma(T - T_0)) \quad (6.2)$$

donde dimensionalmente $[\sigma]=T^{-1}$.

Coeficiente de dilatación volúmico

Se define el coeficiente de dilatación volúmico γ como sigue:

$$V = V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \quad (6.3)$$

donde dimensionalmente $[\gamma]=T^{-1}$.

Además, se tienen las relaciones $\sigma = 2\lambda$, $\gamma = 3\lambda = 3\sigma/2$. En los gases ideales, $\gamma = 1/273 \text{ K}^{-1}$. Recordemos que $T(K) = T(C) + 273$, y que $T(C)/100 = (T(F) - 32)/180$. Por otra parte, para procesos isócoros (volumen constante) de gases ideales $P/T = k_1$, para procesos isóbaros (presión constante), $V/T = k_2$, para procesos isotérmicos (temperatura constante), $P/T = k_3$, y para procesos a moles constantes (número de partículas constantes) $PV/T = k_4$. Además, la hipótesis de Avogadro para gases $V/N = k_5$, o bien $V/n = k'_5$, donde $N = nN_A$, con $n = m/MM$. Y, también, $k_4 = nR = N_A k_B$.

6.1.2. Cambios de estado o transiciones de fase

Calor por cambio de temperatura

Para cambiar la temperatura de un cuerpo u objeto, se transfiere la energía térmica o calor

$$Q = mc_e \Delta T = mc_e(T - T_0) \quad Q = C \Delta T = C(T - T_0) \quad (6.4)$$

y donde c_e es el calor específico en $J \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, y C es la capacidad calorífica en J/K .

Calor por cambio estado

Para cambiar la temperatura de un cuerpo u objeto, se transfiere la energía térmica o calor denominado calor latente L . Para los cambios progresivos es un calor absorbido, mientras que es un calor cedido en los regresivos, en general:

$$Q = mL_p \quad Q = -mL_r \quad (6.5)$$

y donde L_p es el calor latente de un cambio progresivo en $J \cdot kg^{-1}$, y L_r es el calor latente de un cambio regresivo en las mismas unidades.

Ley de Fourier del calor

La propagación del calor en sólidos es relativamente simple si no consideramos efectos no lineales y otras complicaciones. La cantidad de calor por unidad de tiempo que se transmite entre dos puntos separados una distancia Δx es igual a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.6)$$

donde λ es ahora la conductividad calorífica del material, S es la sección del sólido y T , la temperatura. Se observa que el flujo de calor se origina por el gradiente local de temperatura en una determinada dirección. Se puede ver que $\lambda S = c_e \rho$, donde c_e es la capacidad calorífica específica y ρ es la densidad.

6.1.3. Magnitudes termodinámicas**Funciones de estado extensivas**

Son magnitudes que dependen de la cantidad de materia. Son: la energía interna U , la entalpía H , la entropía S , la energía libre de Helmholtz F (energía libre), la energía libre de Gibbs G , el volumen V , y las capacidades caloríficas C_v, C_p a volumen y presión constantes (entre otras).

Funciones de estado intensivas

Son funciones y magnitudes que son independientes de la cantidad de materia. Son: la presión P , la temperatura absoluta T , la energía interna molar u , la entalpía molar h , la entropía molar s , la energía libre molar f , la energía de Gibbs molar g , el volumen molar v , y los calores molares a presión y volumen constantes c_p, c_v , entre otras.

Además, hay funciones que no son de estado, puesto que su valor depende del camino seguido en su transformación. Son el calor Q absorbido o cedido por un sistema, y el trabajo de expansión o contracción en una transformación W .

Primer principio de la Termodinámica

La variación de energía interna de todo sistema es igual a la suma

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad dQ = \delta Q + \delta W \quad (6.7)$$

Segundo principio de la Termodinámica

Enunciado A: No es posible construir una máquina térmica que, funcionando cíclicamente, produzca como único resultado la transformación de calor en trabajo mecánico.

Enunciado B: La entropía de un sistema aislado nunca disminuye en una transformación del sistema.

Se llama transformación reversible a aquella que experimenta un sistema cuando evoluciona de manera suficientemente lenta (cuasiestáticamente), para poderse considerar que todos los estados por los que va pasando son estados de equilibrio del sistema.

6.1.4. Aplicaciones a gases ideales

La expresión de la entropía de un gas ideal puede calcularse si se conoce su entropía S en unas condiciones particulares (p, V, T), la entropía S' y su variación $\Delta S = S' - S$ en cualquier otro estado (p', V', T'), con $S' = S + \Delta S$ satisface

$$\Delta S = nc_v \ln \frac{T'}{T} + nR \ln \frac{V'}{V} = nc_p \ln \frac{T'}{T} - nR \ln \frac{p'}{p} = nc_p \ln \frac{V'}{V} + nc_v \ln \frac{p'}{p} \quad (6.8)$$

$$\Delta s = \Delta S/n = c_v \ln \frac{T'}{T} + R \ln \frac{V'}{V} = c_p \ln \frac{T'}{T} - R \ln \frac{p'}{p} = c_p \ln \frac{V'}{V} + c_v \ln \frac{p'}{p} \quad (6.9)$$

Los gases poseen varias transformaciones reversibles conocidas:

- Transformaciones isócoras, a volumen constante:

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'} \quad (6.10)$$

$$W_v = 0 \quad (6.11)$$

$$Q_v = nc_v \Delta T = nc_v(T' - T) = \Delta U = U' - U \quad (6.12)$$

$$\Delta U = Q_v = nc_v \Delta T \quad (6.13)$$

$$\Delta H_v = \Delta H = nc_p \Delta T \quad H = U + pV \quad (6.14)$$

- Transformaciones isóbaras, a presión constante:

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \quad (6.15)$$

$$W_v = -p\Delta V = -p(V' - V) \quad (6.16)$$

$$Q_p = nc_p \Delta T = nc_v(T' - T) = \Delta H = H' - H \quad H = U + pV \quad (6.17)$$

$$\Delta U = nc_v \Delta T \quad (6.18)$$

$$\Delta H_p = \Delta H = nc_p \Delta T \quad H = U + pV \quad (6.19)$$

- Transformaciones isotermas o isotérmicas, a temperatura constante:

$$pV = p'V' \quad (6.20)$$

$$W_T = -nRT \ln \frac{p}{p'} = -nRT \ln \frac{V'}{V} \quad (6.21)$$

$$Q_T = W_T \quad (6.22)$$

$$\Delta U = 0 \quad (6.23)$$

$$\Delta H_T = \Delta H = 0 \quad H = U + pV \quad (6.24)$$

- Transformaciones adiabáticas, con $\Delta Q = 0$:

$$pV^\gamma = p'V'^\gamma \quad (6.25)$$

$$W_Q = \frac{p'V' - pV}{\gamma - 1} = \frac{R(T' - T)}{\gamma - 1} \quad (6.26)$$

$$Q_Q = \Delta Q_Q = 0 \quad (6.27)$$

$$\Delta U = -\Delta W = nc_v\Delta T \quad (6.28)$$

$$\Delta H_Q = pV - p'V' = nc_p(T' - T) = nc_p\Delta T \quad H = U + pV \quad (6.29)$$

y donde se define $\gamma = c_p/c_v$ como el coeficiente adiabático. La relación de Mayer entre calores específicos molares reza

$$c_p - c_v = R \quad (6.30)$$

Ciclo de Carnot

Un ciclo termodinámico simple, funcionando entre un foco frío a temperatura T_c y un foco caliente a temperatura T_h , ideal, presenta un rendimiento

$$\eta_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = \frac{\Delta W_u}{\Delta W_t} \quad (6.31)$$

como máquina térmica. Como máquina frigorífica o “heat pump” (bomba de calor), el rendimiento “se invierte” de forma que el coeficiente de funcionamiento puede ser de congelador o de enfriamiento, tal que

$$\eta_{C\text{freezer}} = \frac{T_c}{T_h - T_c} = \frac{1}{\frac{T_h}{T_c} - 1} \quad \text{o también} \quad \eta_{C\text{heating}} = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_h}} \quad (6.32)$$

Los procesos de transferencia de calor o energía térmica suelen ser irreversibles. Una parte de la Termodinámica moderna irreversible ha desarrollado la denominada Termodinámica endoreversible. En este framework, el rendimiento obtenido de una máquina con dos focos, uno frío y uno caliente, puede demostrarse igual a

$$\eta_N = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}} \quad (6.33)$$

donde la fórmula se denomina habitualmente eficiencia de Chambadal-Novikov-Curzon-Ahlborn, o simplemente de Chambadal-Novikov.

6.1.5. Otras relaciones termodinámicas

Relación entre calores específicos molares y otras magnitudes termodinámicas:

Ecuación de Clausius-Clapeyron

La ecuación que relaciona la presión de vapor p y el calor latente de vaporización de un líquido es:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L_v}{T(V_g - V_l)} \quad (6.34)$$

Un potencial termodinámico tiene una expansión

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X_i} dX_i = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial X_i} dX_i \quad (6.35)$$

Si consideramos válido el criterio de Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \right) \quad (6.36)$$

se pueden obtener unas relaciones denominadas relaciones de Maxwell. A continuación una lista no exhaustiva:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (6.37)$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (6.38)$$

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p \quad (6.39)$$

$$p = - \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T \quad (6.40)$$

$$v = \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s \quad (6.41)$$

$$s = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v = - \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_p \quad (6.42)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_v = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_s \quad (6.43)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (6.44)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (6.45)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s \quad (6.46)$$

Los potenciales termodinámicos usuales son:

- Energía interna $U = \int TdS - pdV + \mu dN$.

$$dU(S, V, N) = TdS - pdV + \sum \mu dN \quad (6.47)$$

- Energía libre $F = U - TS$.

$$dF(T, V, N) = -SdT - pdV + \sum \mu dN \quad (6.48)$$

- Entalpía $H = U + PV$.

$$dH(S, P, N) = TdS + VdP + \sum \mu dN \quad (6.49)$$

- Energía libre de Gibbs $G = H - TS = U + PV - TS$.

$$dG(T, P, N) = -SdT + VdP + \sum \mu dN \quad (6.50)$$

Como todas las variables naturales de la energía interna son extensivas, se sigue por el teorema de Euler de las funciones homogéneas que:

$$U = TS - pV + \sum_i \mu_i N_i \quad (6.51)$$

Sustituyendo en las expresiones de los potenciales termodinámicos tenemos que:

$$F = -pV + \sum_i \mu_i N_i \quad (6.52)$$

$$H = TS + \sum_i \mu_i N_i \quad (6.53)$$

$$G = \sum_i \mu_i N_i \quad (6.54)$$

Estas 4 últimas ecuaciones se llaman **ecuaciones fundamentales** o **integrales de Euler**. Finalmente, se tiene la relación de Gibbs-Duhem:

$$0 = SdT - Vdp + \sum_i N_i d\mu_i \quad (6.55)$$

válida para los parámetros intensivos del sistema. Para un sistema de r -componentes habrá $r + 1$ parámetros independientes, o grados de libertad. Para un sistema que un componente, habrá dos grados de libertad, que pueden tomarse como presión y volumen, por ejemplo.

6.1.6. Condiciones de equilibrio de un sistema

Un sistema que no esté en equilibrio tenderá a evolucionar hacia él. Las condiciones de evolución espontánea y de equilibrio de un sistema, expresadas en función de magnitudes termodinámicas extensivos, es como sigue:

- Un sistema aislado evoluciona en general con $\Delta S > 0$, y en equilibrio resulta que $\Delta S = 0$.
- Un sistema con S y V constantes (isoentrópico, isócoro) evoluciona de forma que $\Delta U < 0$, y en equilibrio $\Delta U = 0$.
- Un sistema con S y P constantes (isoentrópico, isóbaro) evoluciona de forma que $\Delta H < 0$, y en equilibrio $\Delta H = 0$.
- Un sistema con T y V constantes (isotérmico, isócoro) evoluciona de forma que $\Delta F < 0$, y en equilibrio $\Delta F = 0$.
- Un sistema con T y P constantes (isotérmico, isóbaro) evoluciona de forma que $\Delta G < 0$, y en equilibrio $\Delta G = 0$.

Las condiciones de equilibrio también requieren condiciones sobre las variables intensivas:

- En un sistema aislado $T_1 = T_2$.
- En un sistema con sus partes 1 y 2 separadas por una pared móvil, se tiene que $p_1 = p_2$.
- En un sistema químico, formado por dos fases 1 y 2, el potencial químico debe igualarse $\mu_1 = \mu_2$.

6.1.7. Teoría cinética de gases

La teoría cinética de gases ideales considera un gas formado por moléculas puntuales perfectamente duras que tan solo interactúan instantáneamente a través de los choques que tienen lugar entre ellas o con las paredes del recipiente.

La energía cinética media se puede expresar a través de la presión de un gas ideal como sigue:

$$p = \frac{2}{3} k_B N \overline{E_c} \quad R = k_B N_A \quad (6.56)$$

Para cada molécula, se tiene que

$$\overline{E_c} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T \quad (6.57)$$

Además, la velocidad cuadrática media se define por la expresión:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\sum_i N_i v_i^2}{\sum_i N_i}} \quad (6.58)$$

El principio de equipartición de la energía señala que la energía media por cada grado de libertad en el movimiento de las moléculas es igual a $k_B T/2$ por molécula. La expresión de la velocidad cuadrática media de las moléculas a partir de la temperatura del gas proporciona:

$$\sqrt{\overline{v_i^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (6.59)$$

Otras relaciones para gases deducibles de la teoría cinética de gases:

- Energía total media, cinética más vibracional, por mol: para el gas monoatómico $\overline{E_c} = 3RT/2$. Para el gas diatómico: $\overline{E_c} = 5RT/2$.
- Energía interna molar: para el gas monoatómico $u = 3RT/2$, para el gas diatómico $u = 5RT/2$.
- Entalpía molar: para el gas monoatómico $h = 5RT/2$, para el gas diatómico: $h = 7RT/2$.
- Calor específico molar a volumen constante: para el gas monoatómico $c_v = 3R/2$, para el gas diatómico $c_v = 5R/2$.
- Calor específico molar a presión constante: para el gas monoatómico $c_p = 5R/2$, para el gas diatómico $c_p = 7R/2$.
- Coeficiente de calores específicos o adiabático para gases ideales: para el gas monoatómico $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, y para el gas diatómico $\gamma = 7/5$.
- Ecuación de estado de un gas ideal $PV = nRT$, o también $pV = Nk_B T$.
- Ecuación de estado de Clausius, para un gas no ideal que tiene en cuenta el volumen no nulo de las moléculas de un gas $p(V - b) = nRT$.
- Ecuación de estado de Van der Waals, para un gas real, que tiene en cuenta el volumen no nulo de las moléculas y una cierta interacción a corta distancia entre las moléculas:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (6.60)$$

- Ecuación de Chaplygin de un gas exótico $P = \frac{A}{\rho}$. Es generalizable a la ecuación más general

$$P = \frac{A}{\rho^\alpha} \quad (6.61)$$

6.1.8. Escalas de temperatura

- Escala absoluta o Kelvin: OK es la temperatura donde cesa todo movimiento atómico-molecular. Habitualmente se usa: $T(K) = T(^{\circ}C) + 273$.
- Escala Celsius o centígrada: $0^{\circ}C$ corresponde al punto de fusión del agua, y $100^{\circ}C$ a la temperatura de vaporización del agua.
- Escala Fahrenheit o anglosajona: $32^{\circ}F$ es la temperatura de fusión del agua, y $180^{\circ}F$ la temperatura de vaporización del agua.
- Escala Rankine o $^{\circ}Ra$ ($^{\circ}R$ si no se confunde con Roemer o Réaumur) corresponde a la equivalente absoluta para la fahrenheit, tal que $T(^{\circ}Ra) = T(F) + 459,67$.
- Escala Réaumur. Escala octogenaria. Punto de fusión del agua a $0^{\circ}Re$, y punto de vaporización a $80^{\circ}Re$.
- Escala Rømer. Asigna $7,5^{\circ}R\varnothing$ al punto de fusión del agua, y $60^{\circ}R\varnothing$ a la temperatura de vaporización de la misma.

- Escala de Delisle. Sus unidades son los grados Delisle, se representan con el símbolo °D y cada uno vale $-2/3$ de un grado Celsius o Kelvin. El cero de la escala está a la temperatura de ebullición del agua y mide $150^{\circ}D$ para la fusión del agua, va aumentando según descenden las otras escalas hasta llegar al cero absoluto a $559,725^{\circ}D$.
- Escala de Newton. Newton definió el “grado cero de calor” como la temperatura a la cual se derrite la nieve, y “33 grados de calor” como la temperatura de ebullición del agua. De esta manera, su escala sería precursora de la escala de Celsius, que también se define usando como puntos de referencia las temperaturas de congelación y ebullición del agua. Es probable que Anders Celsius conociera la escala termométrica de Newton cuando inventó la suya. Por consiguiente, la unidad de esta escala, el grado Newton, equivale a $\frac{100}{33}$ (aproximadamente 3,03) kelvines o grados Celsius y tiene el mismo cero de la escala de Celsius.

Temperature conversions

	from Celsius	to Celsius
Fahrenheit	$[^{\circ}F] = [^{\circ}C] \times \frac{9}{5} + 32$	$[^{\circ}C] = ([^{\circ}F] - 32) \times \frac{5}{9}$
Kelvin	$[K] = [^{\circ}C] + 273.15$	$[^{\circ}C] = [K] - 273.15$
Rankine	$[^{\circ}R] = ([^{\circ}C] + 273.15) \times \frac{9}{5}$	$[^{\circ}C] = ([^{\circ}R] - 491.67) \times \frac{5}{9}$
Delisle	$[^{\circ}De] = (100 - [^{\circ}C]) \times \frac{3}{2}$	$[^{\circ}C] = 100 - [^{\circ}De] \times \frac{2}{3}$
Newton	$[^{\circ}N] = [^{\circ}C] \times \frac{33}{100}$	$[^{\circ}C] = [^{\circ}N] \times \frac{100}{33}$
Réaumur	$[^{\circ}Ré] = [^{\circ}C] \times \frac{4}{5}$	$[^{\circ}C] = [^{\circ}Ré] \times \frac{5}{4}$
Rømer	$[^{\circ}R\emptyset] = [^{\circ}C] \times \frac{21}{40} + 7.5$	$[^{\circ}C] = ([^{\circ}R\emptyset] - 7.5) \times \frac{40}{21}$

Temperature conversions

	from Fahrenheit	to Fahrenheit
Celsius	$[^{\circ}C] = ([^{\circ}F] - 32) \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}F] = [^{\circ}C] \times \frac{9}{5} + 32$
Kelvin	$[K] = ([^{\circ}F] + 459.67) \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}F] = [K] \times \frac{9}{5} - 459.67$
Rankine	$[^{\circ}R] = [^{\circ}F] + 459.67$	$[^{\circ}F] = [^{\circ}R] - 459.67$
Delisle	$[^{\circ}De] = (212 - [^{\circ}F]) \times \frac{5}{6}$	$[^{\circ}F] = 212 - [^{\circ}De] \times \frac{6}{5}$
Newton	$[^{\circ}N] = ([^{\circ}F] - 32) \times \frac{11}{60}$	$[^{\circ}F] = [^{\circ}N] \times \frac{60}{11} + 32$
Réaumur	$[^{\circ}Ré] = ([^{\circ}F] - 32) \times \frac{4}{9}$	$[^{\circ}F] = [^{\circ}Ré] \times \frac{9}{4} + 32$
Rømer	$[^{\circ}R\emptyset] = ([^{\circ}F] - 32) \times \frac{7}{24} + 7.5$	$[^{\circ}F] = ([^{\circ}R\emptyset] - 7.5) \times \frac{24}{7} + 32$

Temperature conversions

	from Kelvin	to Kelvin
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = [\text{K}] - 273.15$	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{C}] + 273.15$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = [\text{K}] \times \frac{9}{5} - 459.67$	$[\text{K}] = ([^{\circ}\text{F}] + 459.67) \times \frac{5}{9}$
Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = [\text{K}] \times \frac{9}{5}$	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{R}] \times \frac{5}{9}$
Delisle	$[^{\circ}\text{De}] = (373.15 - [\text{K}]) \times \frac{3}{2}$	$[\text{K}] = 373.15 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{2}{3}$
Newton	$[^{\circ}\text{N}] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{33}{100}$	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{100}{33} + 273.15$
Réaumur	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{4}{5}$	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{5}{4} + 273.15$
Rømer	$[^{\circ}\text{Rø}] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{21}{40} + 7.5$	$[\text{K}] = ([^{\circ}\text{Rø}] - 7.5) \times \frac{40}{21} + 273.15$

Temperature conversions

	from Rankine	to Rankine
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}\text{R}] = ([^{\circ}\text{C}] + 273.15) \times \frac{9}{5}$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = [^{\circ}\text{R}] - 459.67$	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{F}] + 459.67$
Kelvin	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{R}] \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}\text{R}] = [\text{K}] \times \frac{9}{5}$
Delisle	$[^{\circ}\text{De}] = (671.67 - [^{\circ}\text{R}]) \times \frac{5}{6}$	$[^{\circ}\text{R}] = 671.67 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{6}{5}$
Newton	$[^{\circ}\text{N}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{11}{60}$	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{60}{11} + 491.67$
Réaumur	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{4}{9}$	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{9}{4} + 491.67$
Rømer	$[^{\circ}\text{Rø}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{7}{24} + 7.5$	$[^{\circ}\text{R}] = ([^{\circ}\text{Rø}] - 7.5) \times \frac{24}{7} + 491.67$

Temperature conversions

	from Delisle	to Delisle
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = 100 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{2}{3}$	$[^{\circ}\text{De}] = (100 - [^{\circ}\text{C}]) \times \frac{3}{2}$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = 212 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{6}{5}$	$[^{\circ}\text{De}] = (212 - [^{\circ}\text{F}]) \times \frac{5}{6}$
Kelvin	$[\text{K}] = 373.15 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{2}{3}$	$[^{\circ}\text{De}] = (373.15 - [\text{K}]) \times \frac{3}{2}$
Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = 671.67 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{6}{5}$	$[^{\circ}\text{De}] = (671.67 - [^{\circ}\text{R}]) \times \frac{5}{6}$
Newton	$[^{\circ}\text{N}] = 33 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{11}{50}$	$[^{\circ}\text{De}] = (33 - [^{\circ}\text{N}]) \times \frac{50}{11}$
Réaumur	$[^{\circ}\text{Ré}] = 80 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{8}{15}$	$[^{\circ}\text{De}] = (80 - [^{\circ}\text{Ré}]) \times \frac{15}{8}$
Rømer	$[^{\circ}\text{Rø}] = 60 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{7}{20}$	$[^{\circ}\text{De}] = (60 - [^{\circ}\text{Rø}]) \times \frac{20}{7}$

Temperature conversions

	from Newton	to Newton
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{100}{33}$	$[^{\circ}\text{N}] = [^{\circ}\text{C}] \times \frac{33}{100}$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{60}{11} + 32$	$[^{\circ}\text{N}] = ([^{\circ}\text{F}] - 32) \times \frac{11}{60}$
Kelvin	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{100}{33} + 273.15$	$[^{\circ}\text{N}] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{33}{100}$
Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{60}{11} + 491.67$	$[^{\circ}\text{N}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{11}{60}$
Delisle	$[^{\circ}\text{De}] = (33 - [^{\circ}\text{N}]) \times \frac{50}{11}$	$[^{\circ}\text{N}] = 33 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{11}{50}$
Réaumur	$[^{\circ}\text{Ré}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{80}{33}$	$[^{\circ}\text{N}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{33}{80}$
Rømer	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{35}{22} + 7.5$	$[^{\circ}\text{N}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{22}{35}$

Temperature conversions

	from Réaumur	to Réaumur
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{5}{4}$	$[^{\circ}\text{Ré}] = [^{\circ}\text{C}] \times \frac{4}{5}$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{9}{4} + 32$	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([^{\circ}\text{F}] - 32) \times \frac{4}{9}$
Kelvin	$[\text{K}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{5}{4} + 273.15$	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{4}{5}$
Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{9}{4} + 491.67$	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{4}{9}$
Delisle	$[^{\circ}\text{De}] = (80 - [^{\circ}\text{Ré}]) \times \frac{15}{8}$	$[^{\circ}\text{Ré}] = 80 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{8}{15}$
Newton	$[^{\circ}\text{N}] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{33}{80}$	$[^{\circ}\text{Ré}] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{80}{33}$
Rømer	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{21}{32} + 7.5$	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{32}{21}$

Temperature conversions

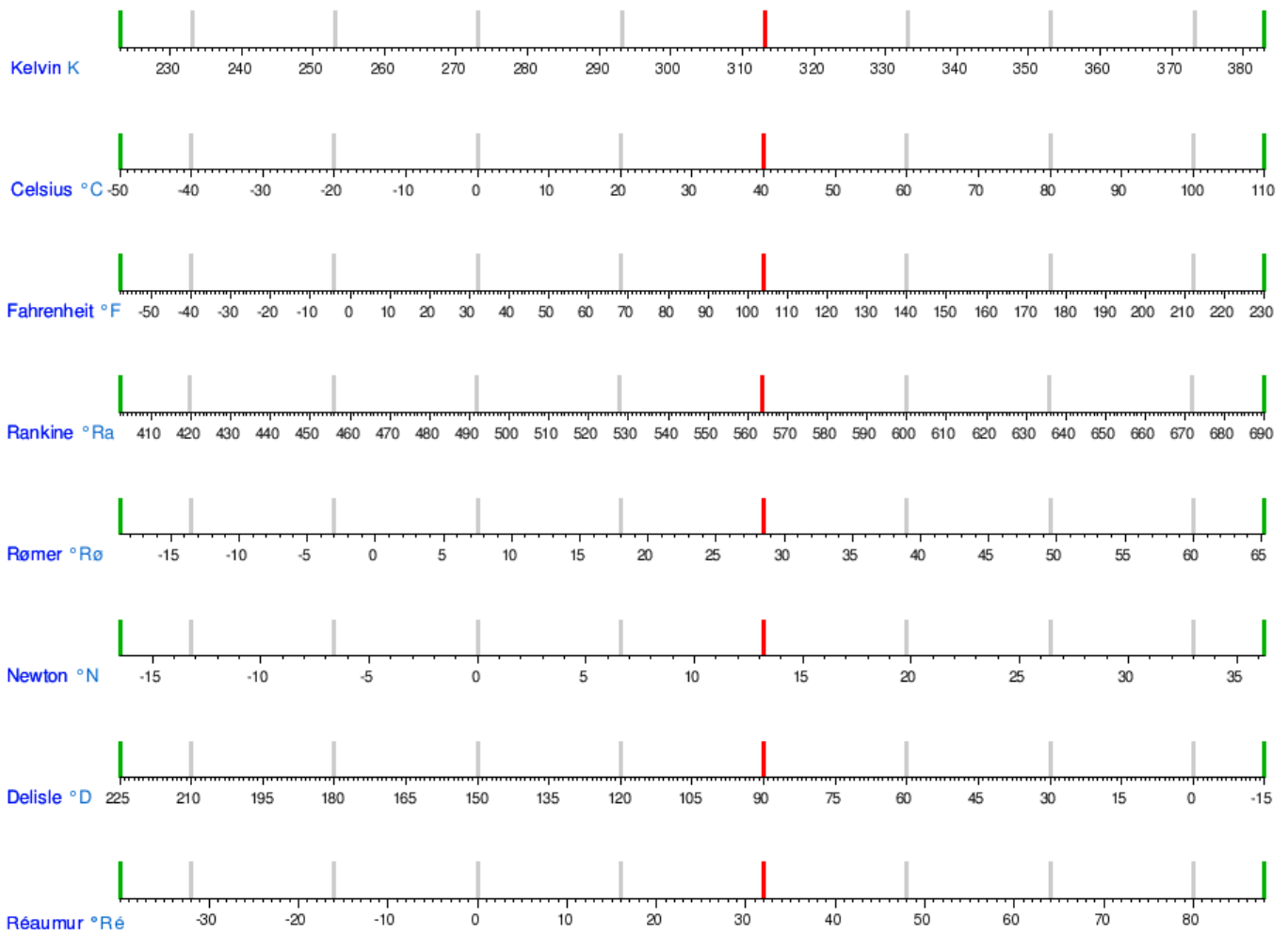
	from Rømer	to Rømer
Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{40}{21}$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = [^{\circ}\text{C}] \times \frac{21}{40} + 7.5$
Fahrenheit	$[^{\circ}\text{F}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{24}{7} + 32$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = ([^{\circ}\text{F}] - 32) \times \frac{7}{24} + 7.5$
Kelvin	$[\text{K}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{40}{21} + 273.15$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = ([\text{K}] - 273.15) \times \frac{21}{40} + 7.5$
Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{24}{7} + 491.67$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = ([^{\circ}\text{R}] - 491.67) \times \frac{7}{24} + 7.5$
Delisle	$[^{\circ}\text{De}] = (60 - [^{\circ}\text{R}\emptyset]) \times \frac{20}{7}$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = 60 - [^{\circ}\text{De}] \times \frac{7}{20}$
Newton	$[^{\circ}\text{N}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{22}{35}$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = [^{\circ}\text{N}] \times \frac{35}{22} + 7.5$
Réaumur	$[^{\circ}\text{Ré}] = ([^{\circ}\text{R}\emptyset] - 7.5) \times \frac{32}{21}$	$[^{\circ}\text{R}\emptyset] = [^{\circ}\text{Ré}] \times \frac{21}{32} + 7.5$

Comparison of temperature scales

Comment	Kelvin	Celsius	Fahrenheit	Rankine	Delisle	Newton	Réaumur	Rømer
Absolute zero	0.00	-273.15	-459.67	0.00	559.73	-90.14	-218.52	-135.90
Lowest recorded surface temperature on Earth ^[1]	184	-89.2 ^[1]	-128.6 ^[1]	331	284	-29	-71	-39
Fahrenheit's ice/salt mixture	255.37	-17.78	0.00	459.67	176.67	-5.87	-14.22	-1.83
Ice melts (at standard pressure)	273.15	0.00	32.00	491.67	150.00	0.00	0.00	7.50
Triple point of water	273.16	0.01	32.018	491.688	149.985	0.0033	0.008	7.50525
Average surface temperature on Earth	288	15	59	519	128	5	12	15
Average human body temperature*	310	37	98	558	95	12	29	27
Highest recorded surface temperature on Earth ^[2]	331	58 ^[2]	136.4 ^[2]	596	63	19	46	38
Water boils (at standard pressure)	373.1339	99.9839	211.97102 ^[3]	671.64102 ^[3]	0.00	33.00	80.00	60.00
Titanium melts	1941	1668	3034	3494	-2352	550	1334	883
The surface of the Sun	5800	5500	9900	10400	-8100	1800	4400	2900

* Normal human body temperature is 36.8 °C ±0.7 °C, or 98.2 °F ±1.3 °F. The commonly given value 98.6 °F is simply the exact conversion of the nineteenth-century German standard of 37 °C.

Some numbers in this table have been rounded.



$$313.15 \text{ K} = 40 \text{ °C} = 104 \text{ °F} = 563.67 \text{ °Ra} = 28.5 \text{ °Rø} = 13.2 \text{ °N} = 90 \text{ °D} = 32 \text{ °Ré}$$

6.2. Electrónica

6.2.1. Leyes de Kirchhoff

Ley de los nodos o nudos

La suma de las intensidades de corriente eléctrica que confluyen en un nudo o nodo es nula, tomando positivas las entrantes y negativas las salientes:

$$\sum_{\text{nodos},i} I_i = 0 \quad (6.62)$$

Ley de las mallas

La suma de las fuerzas electromotrices de una malla, para conductores óhmicos, vale

$$\sum_{\text{malla},i} V_i = \sum_{\text{malla},i} R_i I_i \quad (6.63)$$

donde cada I_i es la intensidad que circula por la resistencia R_i siempre con un convenio adecuado, que generalmente se toma un sentido de recorrido para toda la malla, y todas las fuerzas electromotrices e intensidades se toman positivas en ese sentido.

Los circuitos básicos lineales son resistencias R , bobinas o inductancias L , y los condensadores o capacidades eléctricas (en inglés capacitors) C .

Ley de Ohm: $V = IR$. Efecto Joule $P = RI^2 = V^2/R = VI$.

$E_p(C) = Q\Delta V/2 = C\Delta V^2/2 = Q^2/2C$.

Asociaciones en paralelo: $C = C_1 + C_2$, $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$.

Asociaciones en serie: $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$, $R = R_1 + R_2$.

Ley de Ohm generalizada: $V_1 - V_2 = \sum R_i I_i - \sum \varepsilon_i$.

Transformadores: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$.

Impedancia de resistencia óhmica: $Z = R$. Binómica: $Z = R$.

Impedancia de bobina ideal: $Z = L\omega$. Binómica: $Z = L\omega j$.

Impedancia de bobina real: $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$. Binómica $Z = R + j\omega L$.

Impedancia de condensador ideal: $Z = (C\omega)^{-1}$. Binómica: $Z = -j\frac{1}{C\omega}$.

Impedancia de condensador real: $Z = \sqrt{R^2 + (C\omega)^{-2}}$. Binómica: $Z = R - j\frac{1}{C\omega}$.

Impedancia de circuito R,L,C en serie: $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - (C\omega)^{-1})^2}$. Binómica: $Z = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$.

Existen otros circuitos más generales y no lineales. También hay diodos o triodos, y circuitos de varias puertas. Circuitos lógicos booleanos y de lógicas polivalentes.

6.2.2. Conceptos de emisión y recepción de radiofrecuencias

- Micrófono: aparato que transforma vibraciones sonoras en señales eléctricas de la misma frecuencia (audiofrecuencias).
- Amplificador: sistema que aumenta la amplitud de las señales eléctricas conservando sus características de frecuencia.
- Amplificador realimentado: sistema amplificador que usa una parte de la potencia de su señal de salida para alimentar de nuevo la entrada.

- Oscilador: sistema que genera señales eléctricas de frecuencia determinada; básicamente, es un amplificador que usa sólo como señal de entrada parte de la señal de salida.
- Modulador de amplitud: sistema que modifica la amplitud de una onda (onda portadora) de alta frecuencia, produciéndole alteraciones que siguen el patrón de una frecuencia menor (onda moduladora).
- Modulador de frecuencia: sistema que modifica la frecuencia de una onda (onda portadora), produciéndole alteraciones que siguen el patrón de una frecuencia menor (onda moduladora).
- Demodulador o detector: sistema que, a partir de una onda modulada, separa la onda moduladora de la onda portadora (y se queda con la primera, que transporta la información).
- Sintonizador: sistema capaz de seleccionar una onda portadora de determinada frecuencia (característica de una emisora) entre las diversas ondas que son captadas por la antena del receptor.
- Heterodinaje (heterodinos). Sistema de disminución de la frecuencia de una señal modulada sin perder la información que transporta.

Apéndice A

Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados)

1. Ley de Boyle-Mariotte. $PV = \text{constante}$.
2. Ley de Charles. $\frac{V}{T} = \text{constante}$.
3. Ley de Gay-Lussac. $\frac{P}{T} = \text{constante}$.
4. Ley de Avogadro. $\frac{V}{n} = \text{constante}$ ó $\frac{V}{N} = \text{constante}$.
5. Ley de Diver. $\frac{P}{n} = \text{constante}$ ó $\frac{P}{N} = \text{constante}$.
6. Ley sin nombre. $nT = \text{constante}$ ó $NT = \text{constante}$.
7. Ley general de Clapeyron. $\frac{PV}{T} = \text{constante}$.
8. Ley combinada(I). $\frac{PV}{n} = \text{constante}$ ó $\frac{PV}{N} = \text{constante}$
9. Ley combinada(II). $\frac{P}{nT} = \text{constante}$ ó $\frac{P}{NT} = \text{constante}$
10. Ley combinada(III). $\frac{V}{nT} = \text{constante}$ ó $\frac{V}{NT} = \text{constante}$
11. Ley fundamental. $\frac{PV}{nT} = \text{constante}$ ó $\frac{PV}{NT} = \text{constante}$
12. Ley o ecuación de estado del gas ideal. $PV = nRT$ ó $PV = Nk_B T$.
13. Ley de Graham. $\sqrt{\frac{MM_1}{MM_2}} = \frac{r_2}{r_1}$ o bien $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \frac{v_2}{v_1}$
14. Ley de las presiones parciales de Dalton. $P_T = \sum_i P_i$, con $P_i = X_i P_T$.
15. Ley de los volúmenes parciales de Amagat. $V_T = \sum_i V_i$.
16. Ley de Henry. $p_i = K_H^{pc} c_i = \frac{c_i}{K_H^{cp}}$.
17. Ley de Raoult. $\Delta p = p_A - p = p_A^* X_s$.
18. Ley del gas real de Van der Waals. $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$.

19. Ley del gas de Chaplygin. $P = \frac{A}{\rho}$.

20. Gas de Chaplygin generalizado $P = \frac{A}{\rho^\alpha}$.

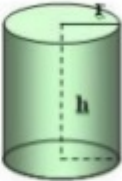

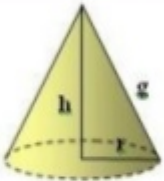
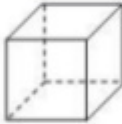
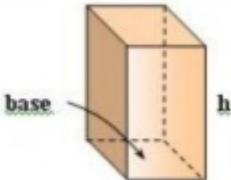
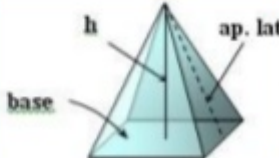
21. Gas de Chaplygin extendido generalizado: $P = \frac{A}{\rho^\alpha} + B\rho^\beta$.






Apéndice B

Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.

ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{\text{total}} = 2\pi r (h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{\text{total}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Cono		$A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6 a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim. base} \cdot h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \square h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim. base} \times \text{ap. lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15+\sqrt{3}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

Para una N -esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \quad (\text{B.1})$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{B.2})$$

$$V_N(R) = R \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} V_{N-1}(R) \quad (\text{B.3})$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} R^N \quad (\text{B.4})$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \quad (\text{B.5})$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \quad (\text{B.6})$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \quad (\text{B.7})$$

$$V_0(R) = 1, \quad (\text{B.8})$$

$$A_0(R) = 2, \quad (\text{B.9})$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \quad (\text{B.10})$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \quad (\text{B.11})$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.12})$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N, R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} R^N \quad (\text{B.13})$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) = \log \pi + 2 \log R \quad (\text{B.14})$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\log V(N, R)) = \frac{\log \pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) \quad (\text{B.15})$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p . Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{B.16})$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del “taxicab”, o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \quad (\text{B.17})$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \quad (\text{B.18})$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i , definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1, \dots, p_n} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1, \dots, p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \cdots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)}$$

Apéndice C

Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n , es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

En general, si un cuerpo \mathbb{K} algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es \mathbb{C} , los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p -ádicos. Una ecuación de n -ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quinticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas. . .

C.0.1. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c números reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$x = \frac{c - b}{a} \tag{C.1}$$

C.0.2. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida “en general”. Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \frac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

C.0.3. Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a “discriminant” whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the “irreducible case” of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- “Eliminate the square term” by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3 , it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3 . This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v , we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution $x = 1$ in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$\begin{aligned}x_1 &= S + T - \frac{b}{3a} \\x_2 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T) \\x_3 &= -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}S &= \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}} \\T &= \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}Q &= \frac{3ac - b^2}{9a^2} \\R &= \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}\end{aligned}$$

Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$\begin{aligned}p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} \\q &= \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}\end{aligned}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:

After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$

$$ST = -Q$$

$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3 . Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T , so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that $m+nm+nm+n$ must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$

$$y_2 = Sw + Tw^2$$

$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x , we obtain the wished soludions.

Q.E.D.

Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a , b , and c :

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q , R , calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$x_1 = S + T - \frac{a}{3}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

C.0.4. Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), z_{\pm} . Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm \sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm \sqrt{z_2}$$

Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \frac{x^4}{m^2}P\left(\frac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m , o general m , la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2}$.

- Realiza el cambio de variable $z = x + \frac{m}{x}$.

- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2 . Esto da dos soluciones:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada z, z_1, z_2 , usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \quad (\text{C.2})$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \quad (\text{C.3})$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \quad (\text{C.4})$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \quad (\text{C.5})$$

and where

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a} \left(Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)} \quad (\text{C.6})$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (\text{C.7})$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \quad (\text{C.8})$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \quad (\text{C.9})$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for “ Q ”, any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

Apéndice D

Formulario

Parte 0. Herramientas fismáticas.

Vector en el espacio 3d: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$. Módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Producto escalar: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$. Vector unitario: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

Proyección:

$$\text{Proy} \left(\frac{\vec{u}}{\vec{v}} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (\text{D.1})$$

Cosenos directores:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (\text{D.2})$$

Producto vectorial:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{D.3})$$

Módulo del producto vectorial: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = A_{\square}(\vec{a}, \vec{b})$. Identidad de Lagrange: $a^2 b^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2$.
 $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Desplazamiento:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \quad (\text{D.4})$$

Velocidad y aceleración medias

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{D.5})$$

Velocidad y aceleración instantáneas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{D.6})$$

Componentes intrínsecas de la aceleración:

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2 \quad (\text{D.7})$$

Magnitudes angulares medias e instantáneas (MCU, MCUA):

$$\omega_m = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (\text{D.8})$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{D.9})$$

Relación entre magnitudes lineales y angulares en el MCU:

$$s = \varphi R \quad v = \omega R \quad a_t = \alpha R \quad (\text{D.10})$$

Aceleración total en un MCUA:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\alpha^2 R^2 + (\omega^2 R)^2} = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (\text{D.11})$$

Ecuaciones del MRU:

$$\Delta x = v\Delta t \quad x = x_0 + v(t - t_0) \quad v = \text{cte.} \quad a = 0 \quad (\text{D.12})$$

Ecuaciones del MRUA:

$$\Delta x = x - x_0 = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \quad v = v_0 + a\Delta t \quad a = \text{cte.} \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad (\text{D.13})$$

Ecuaciones del MCU:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \quad \varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) \quad \omega = \text{cte.} \quad \alpha = 0 \quad (\text{D.14})$$

Ecuaciones del MCUA:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t \quad \alpha = \text{cte.} \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\varphi \quad (\text{D.15})$$

Momento lineal, cantidad de movimiento, ímpetu, impulso:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{D.16})$$

Momento angular, momento cinético:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{D.17})$$

Momento o torque de una fuerza:

$$\vec{M} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{D.18})$$

Fuerza media e instantánea:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{D.19})$$

Segunda ley de Newton de la Dinámica:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{D.20})$$

Tercera ley de Newton: $\vec{F}(i \rightarrow j) = -\vec{F}(j \rightarrow i)$.

Ley fundamental de la Dinámica de rotación:

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} \quad (\text{D.21})$$

Energía/trabajo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W(A \rightarrow B) = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{D.22})$$

Energía cinética (no relativista):

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{D.23})$$

Energía potencial (fuerzas conservativas):

$$\vec{F} = -\nabla E_p \quad \vec{F} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta r} \vec{u}_r \quad (\text{D.24})$$

Energía potencial gravitacional, energía potencial eléctrica, energía potencial elástica:

$$E_p(g) = -G\frac{Mm}{r} \approx mgh \quad E_p(e) = K_C \frac{Qq}{r} \quad E_p(e) = \frac{k\Delta x^2}{2} \quad (\text{D.25})$$

Energía mecánica: $E_m = E_c + E_p$. Potencia: $P = \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Teorema de la energía mecánica (fuerzas conservativas solamente):

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow E_m = \text{constante} \quad (\text{D.26})$$

Teorema de la energía mecánica generalizado:

$$\Delta E_m = W(F_r) \quad (\text{D.27})$$

$F_r = \mu N$ es la fuerza de rozamiento (estática o dinámica). El peso es $\vec{P} = m\vec{g}$. Fuerza centrípeta: $F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$. Momento de inercia:

$$I = mr^2 \quad (\text{D.28})$$

Energía cinética de rotación:

$$E_c(\text{rot}) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega = \frac{L^2}{2I} \quad (\text{D.29})$$

Centro de masas: $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$, $\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$, $\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$. Volumen y área de la esfera: $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, $A =$

$4\pi R^2 = \frac{dV}{dR}$. Área del círculo y longitud de circunferencia: $A = \pi R^2$, $L = 2\pi R = \frac{dA}{dR}$.

Volumen del cilindro: $V = A_b h = \pi R^2 h$. Volumen del prisma recto: $V = abc$. Volumen del cubo: $V = L^3$.

Densidad volúmica (superficial y lineal) de masa: $\rho = \frac{M}{V}$, $\sigma = \frac{M}{S}$, $\lambda = \frac{M}{L}$.

Densidad volúmica (superficial y lineal) de carga: $\rho = \frac{Q}{V}$, $\sigma = \frac{Q}{S}$, $\lambda = \frac{Q}{L}$.

Densidad volúmica (superficial y lineal) de número de partículas: $\rho = \frac{N}{V}$, $\sigma = \frac{N}{S}$, $\lambda = \frac{N}{L}$.

Choques elásticos: conservación de \vec{p} y E_c . Choques inelásticos: conservación de \vec{p} .

Giros: conservación del momento angular \vec{L} . Fuerzas de rozamiento en medios fluidicos: $\vec{F} = -k\nu^n \vec{v}$.

Ley de Hooke: $\vec{F} = -k\Delta\vec{r}$. Repulsión cósmica del vacío (energía oscura): $\vec{F} = +\Lambda\Delta\vec{r}$.

Ley de Hubble: $v = Hd$, $t_U = \frac{1}{H}$, $R_U = ct_U = \frac{c}{H}$, $\rho_c(U) = \frac{3H^2}{8\pi G}$, $M_U = \frac{c^3}{2GH}$, $E_U = \frac{c^5}{2GH}$.

Nabla en coordenadas rectangulares o cartesianas: $\nabla = \partial_x \vec{i} + \partial_y \vec{j} + \partial_z \vec{k} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Gradiente, divergencia y rotacional de campos $f(\vec{r})$, $\vec{v}(\vec{r})$, $\vec{F}(\vec{r})$:

$\text{grad} f = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$. $\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

$\text{rot} \vec{F} = \text{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$. Laplaciano: $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \text{div}(\text{grad} f)$. $\text{rotgrad} f = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$.

$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$.

D'Alembertiano (operador de ondas): $\square \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x^\mu) = (-c^{-2} \partial_t^2 + \partial_i^2) \phi(x, t)$.

Parte 1. Campos.

Ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_N = -G_N \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{D.30})$$

Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_C = K_C \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{D.31})$$

Campo gravitacional:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_N}{m} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{D.32})$$

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q} = K_C \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{D.33})$$

Principio de superposición:

$$\vec{g}(P) = -G_N \sum_i \frac{M_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (\text{D.34})$$

$$\vec{E}(P) = K_C \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (\text{D.35})$$

Variación del campo gravitacional con la altura:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G_N \frac{M}{(R_p + h)^2} \vec{u}_r \quad (\text{D.36})$$

Energía potencial gravitacional:

$$E_p(g) = -\frac{G_N M m}{r} \approx mgh \quad \vec{F} = -\nabla E_p(g) \quad (\text{D.37})$$

Energía potencial eléctrica:

$$E_p(e) = \frac{K_C Q q}{r} \quad \vec{F} = -\nabla E_p(e) \quad (\text{D.38})$$

Potencial gravitacional:

$$V_g(P) = -G_N \frac{M}{r} = -\int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad V_g = \frac{E_p}{m} \quad \vec{g} = -\nabla V_g \quad (\text{D.39})$$

Potencial eléctrico:

$$V_e(P) = K_C \frac{Q}{r} = -\int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad V_e = \frac{E_p(e)}{q} \quad \vec{E} = -\nabla V_e \quad (\text{D.40})$$

Principio de superposición para el potencial:

$$V_g(P) = \sum_i V_i(P) = -G_N \sum_i \frac{M_i}{r_i} \quad V_e(P) = \sum_i V_i(P) = K_C \sum_i \frac{Q_i}{r_i} \quad (\text{D.41})$$

Trabajo externo para transportar partícula de masa m o carga q desde A hasta B:

$$W_g(A \rightarrow B) = m\Delta V = m(V_B - V_A) \quad W_e(A \rightarrow B) = q\Delta V = q(V_B - V_A) \quad (\text{D.42})$$

Trabajo del campo para transportar partícula de masa m o carga q desde A hasta B:

$$W_g(A \rightarrow B) = -m\Delta V = m(V_A - V_B) \quad W_e(A \rightarrow B) = -q\Delta V = q(V_A - V_B) \quad (\text{D.43})$$

Leyes de Kepler:

$$r(\varphi) = \frac{\mathcal{P}}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad V_A = \frac{dA}{dt} = \frac{vR}{2} = \frac{L}{2m} = \text{constante}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad (\text{D.44})$$

Velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (\text{D.45})$$

Velocidad de escape ($E_m = 0$):

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{r}} \quad (\text{D.46})$$

Energía de satelización:

$$E_s = G_N M_p m_s \left(\frac{1}{R_p + h_0} - \frac{1}{2(R_p + h)} \right) \quad (\text{D.47})$$

Satélite geosíncrono (T igual al período del planeta orbitado):

$$r = R_p + h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \quad (\text{D.48})$$

Energía gravitacional orbital y de transferencia orbital

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} = -\frac{G_N M m_s}{2r} = -\frac{1}{2}E_c = +\frac{1}{2}E_p \rightarrow \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) \quad (\text{D.49})$$

Densidad y aceleración de la gravedad superficial de un planeta:

$$\rho_p = \frac{M_p}{V_p} \quad a_s = \frac{G_N M_p}{R_p^2} \quad (\text{D.50})$$

Densidad efectiva de un agujero negro de Schwarzschild con radio $R_S = \frac{2G_N}{c^2}$, masa M_{BH} y gravedad superficial κ_{BH}

$$\rho_{BH} = \frac{M_p}{V_p} = \frac{3c^6}{32\pi G_N^3 M_{BH}^2} \quad \kappa_{BH} = \frac{c^4}{4GM_{BH}} \quad (\text{D.51})$$

Flujo de un campo vectorial \vec{A} :

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} \rightarrow \phi = \int_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} \rightarrow \phi = \vec{A} \cdot \vec{S} = AS \cos \varphi \quad (\text{D.52})$$

Teorema de Gauss del campo gravitacional:

$$\phi_g = \int_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G_N M_{in} \quad (\text{D.53})$$

Teorema de Gauss del campo eléctrico:

$$\phi_e = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi K_C Q_{in} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (\text{D.54})$$

Campo eléctrico (gravitacional) de la esfera uniforme de carga(masa):

$$\vec{E} = \begin{cases} K_C \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ K_C \frac{4\pi\rho r}{3} \vec{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r, & \text{si } r < R \end{cases} \quad (\text{D.55})$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ -G_N \frac{4\pi\rho r}{3} \vec{u}_r, & \text{si } r < R \end{cases} \quad (\text{D.56})$$

Campo eléctrico (gravitacional) de la esfera hueca con carga uniforme de carga(masa) superficial:

$$\vec{E} = \begin{cases} K_C \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ \vec{0}, & \text{si } r < R \end{cases} \quad (\text{D.57})$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r, & \text{si } r \geq R \\ \vec{0}, & \text{si } r < R \end{cases} \quad (\text{D.58})$$

Campo eléctrico del plano infinito de carga(masa), con densidad superficial uniforme(constante) σ :

$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_n = 2\pi K_C \sigma \vec{u}_n, & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_n = -2\pi K_C \sigma \vec{u}_n, & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (\text{D.59})$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -2\pi G_N \sigma \vec{u}_n, & \text{si } z > 0 \\ +2\pi G_N \sigma \vec{u}_n, & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (\text{D.60})$$

Campo eléctrico (gravitacional) del hilo infinito de carga:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_Q}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{2\pi K_C \lambda}{r} \vec{u}_r \quad (\text{D.61})$$

$$\vec{g} = -\frac{2\pi G_N \lambda_M}{r} \vec{u}_r \quad (\text{D.62})$$

Energía potencial eléctrica(gravitacional) para la esfera, plano e hilo:

$$E_p(e) = \frac{K_C Qq}{r}, \quad E_p(e) = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{x}, \quad E_p(e) = -\frac{\lambda_Q}{2\pi\epsilon_0} \ln r = -2\pi\lambda_Q K_C \ln r \quad (\text{D.63})$$

$$E_p(g) = -\frac{G_N Mm}{r}, \quad E_p(g) = -\vec{g} \cdot \Delta \vec{x}, \quad E_p(g) = 2\pi G_N \lambda_M \ln r \quad (\text{D.64})$$

Energía potencial electrostática (gravitacional) total de una esfera de carga Q (masa M), densidad ρ y radio R :

$$U_e = \frac{3}{5} K_C \frac{Q^2}{R} = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} = \frac{16\pi^2 K_C \rho^2 R^5}{15} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \quad (\text{D.65})$$

$$U_g = -\frac{3}{5} G_N \frac{M^2}{R} = -\frac{16\pi^2 G_N \rho^2 R^5}{15} \quad (\text{D.66})$$

Conductores conectados en equilibrio: $V_1 = V_2$.

Ley de Ohm: $V = IR$.

Asociación de resistencias en serie: $R_T = \sum_i R_i$. Asociación de resistencias en paralelo: $R_T^{-1} = \sum_i 1/R_i$.

Resistencia y resistividad: $R = \rho \frac{L}{A}$. La carga eléctrica viene en dos tipos (positiva y negativa), y está cuantificada, ya que $Q = Ne$, donde e es la carga elemental, que puede tomarse la del electrón o uno de los quarks de la primera familia con carga $+e/3$. La carga eléctrica ni se crea ni se destruye, solamente es transforma o fluye mediante corrientes entre cuerpos y sistemas materiales.

Campo magnético: \vec{B} .

Fuerza magnética de partícula de masa M , carga Q y velocidad \vec{v} :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{D.67})$$

Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{D.68})$$

Selector de velocidades:

$$F_e = F_m \rightarrow E = vB \quad (\text{D.69})$$

Principio del ciclotrón:

$$F_c = F_m \rightarrow R = \frac{mv}{qB} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (\text{D.70})$$

Ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{r} \times \vec{u}_r}{r^2} \rightarrow \vec{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{r} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (\text{D.71})$$

Campo magnético de un hilo infinito:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad (\text{D.72})$$

Campo magnético de una espira circular de radio R en un punto de su centro:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2R} \vec{u}_\perp \quad (\text{D.73})$$

Campo magnético de un solenoide recto, con $n = N/L$ espiras por unidad de longitud, en un punto de su eje:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{n}{L} = \mu_0 \frac{NI}{L} \quad (\text{D.74})$$

Momento magnético de una espira:

$$\vec{m} = I\vec{S} \rightarrow \vec{\tau} = I\vec{S} \times \vec{B} \quad (\text{D.75})$$

Ley de Ampère (circulación del campo magnético):

$$\Gamma(\vec{B}) = \int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{en} \quad (\text{D.76})$$

Inducción electromagnética (ley de Faraday-Lenz):

$$\varepsilon = f.e.m. = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad (\text{D.77})$$

y donde $\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \varphi$ es el flujo del campo magnético. Para una espira rotatoria: $\varepsilon = BS\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$. Para un carril de anchura L con velocidad constante perpendicular al carril: $\varepsilon = BLv$. Para un carril que se mueve con MRUA de forma perpendicular, con anchura L y velocidad inicial v_0 , se tiene que $\varepsilon = BL(v_0 + at)$.

Autoinducción: $\phi = LI$, $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$. Durante el siglo XIX se fundamentaron las leyes del electromagnetismo, en forma condensada en las denominadas ecuaciones de Maxwell: 1) Ley de Gauss del campo eléctrico, 2) Ley de Gauss del campo magnético, 3) Ley de Ampère generalizada, 4) Ley de Faraday-Lenz general. También se puede formular el electromagnetismo no solamente en el vacío sino en medios materiales. Así, hay ecuaciones de Maxwell macroscópicas y microscópicas.

Parte 2. MAS y ondas

Ecuación del MAS, para $k = m\omega^2$, movimiento oscilatorio proyección de un MCU:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{D.78})$$

Fuerza elástica: $F = -k\Delta x = -k(x - x_0)$. Las energías cinética, potencial y mecánica del oscilador:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (\text{D.79})$$

Ondas armónicas (planas):

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (\text{D.80})$$

Velocidad de propagación, frecuencia angular, número de onda, longitud de onda, período, frecuencia (relaciones útiles):

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \bar{k} = \frac{1}{\lambda} = \bar{v} \quad (\text{D.81})$$

Velocidad y aceleración de vibración de la onda:

$$v_v = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad a_v = \frac{\partial v_v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t \mp kx + \varphi_0) \quad (\text{D.82})$$

Ecuación de onda:

$$\frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (\text{D.83})$$

Para ondas en cuerdas, acústicas y electromagnéticas (gravitacionales):

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad v_p = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{K_C}{K_m}} \quad (\text{D.84})$$

Principio de superposición para ondas:

$$\Psi = \sum_i \Psi_i = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n \quad (\text{D.85})$$

Potencia de una onda: $P = IS$.

Potencia media e intensidad media de una onda armónica plana:

$$\bar{P} = 2\pi^2 \rho S v_p f^2 A^2 \quad \bar{I} = 2\pi^2 \rho v_p f^2 A^2 \quad (\text{D.86})$$

Ondas esféricas: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$. Escala de decibelios (nivel de intensidad de una onda sonora):

$$\beta = dB = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{D.87})$$

donde $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ es la intensidad umbral.

Ley de absorción:

$$I = I_0 e^{-\beta x} \quad (\text{D.88})$$

Principio de Huygens: Toda frente de onda es a su vez origen de fuentes secundarias de ondas.

Ondas estacionarias en una cuerda:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi_2) + A \sin(\omega t + kx + \varphi_2) = 2A \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (\text{D.89})$$

Vientres: $x_v(N) = \frac{N\lambda}{2}$. Nodos: $x_n(N) = \frac{\lambda}{2} \left(N + \frac{1}{2}\right)$.

Armónicos de ondas transversales en una cuerda de densidad lineal ρ , tensión T , longitud L_s y $v = \sqrt{T/\rho}$:

$$\lambda_n = \frac{2L_s}{n}, \quad f_n = \frac{nv}{2L_s}$$

Ondas en tubos (o cuerdas extremos fijos/libres): $f_N = Nf_1$. En el caso del tubo abierto solo por un extremo (cuerda 1 extremo libre solamente), $\lambda_N = \frac{4L_s}{2N+1}$, y $f_N = \frac{2N+1}{4L_s} v$.

Batido y modulación:

$$\Psi = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \quad (\text{D.90})$$

donde las frecuencias de batido y modulación son $f_b = |f_1 - f_2|$, modulación $f_m = \frac{f_1 + f_2}{2}$.

Ley de la reflexión:

$$\varphi_i = \varphi_r \quad (\text{D.91})$$

Ley de la refracción (Snell):

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i} \quad (\text{D.92})$$

Difracción por una rendija (Franhofer), mínimos: $a \sin \theta = n\lambda \rightarrow y_m \approx \frac{n\lambda D}{a}$.

Difracción por una doble rendija, máximos: $y_M \approx \frac{n\lambda D}{a}$.

Red de difracción(máximos): $d \sin \theta = m\lambda$, n entero. $d = 1/N$ es la constante de la red.

Efecto Doppler (variación de la frecuencia de observación de la onda según el movimiento relativo de fuente, source, y observador, observer):

$$f' = f \cdot \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) \quad (\text{D.93})$$

Parte 3. Óptica física y geométrica

Ley de la reflexión: $\varphi_i = \varphi_r$.

Ley de la refracción (Snell):

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i} \quad (\text{D.94})$$

Dioptrios esféricos:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R} \quad (\text{D.95})$$

Espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} \quad (\text{D.96})$$

Espejos planos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 0 \quad (\text{D.97})$$

Ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad (\text{D.98})$$

Aumento lateral: $\beta_L = A_L = \frac{s'}{s}$. Para el dioptrio esférico, $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}$. Para el espejo esférico, $A_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$.

Para el espejo plano, $A_L = 1$. Para la lente delgada, $A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$.

Potencia de una lente o sistema óptico: $P = \frac{1}{f'}$, P en dioptrías si f' en metros.

Parte 4. Física moderna

Relatividad

Transformaciones de Lorentz (1d):

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = v/c \quad (\text{D.99})$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (\text{D.100})$$

Momento relativista:

$$p = m\gamma v = mc\beta\gamma = mc \sinh \varphi \leftrightarrow \varphi = \sinh^{-1} \frac{p}{mc}, \quad \beta\gamma = \sinh \varphi \quad (\text{D.101})$$

Energía relativista:

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 \cosh \varphi = mc^2 \cosh \tanh^{-1} \beta \leftrightarrow \frac{E}{mc^2} = \gamma = \cosh \varphi = \cosh \tanh^{-1} \beta \leftrightarrow \varphi = \cosh^{-1} \frac{E}{mc^2} = \cosh^{-1} \gamma \quad (\text{D.102})$$

Energía cinética relativista:

$$E_c(\text{rel}) = E - E_0 = E - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2 \quad (\text{D.103})$$

Relación de dispersión relativista:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \quad \frac{pc}{E} = \beta = \frac{v}{c} = \tanh \varphi, \quad v = c \tanh \varphi = c \tanh \cosh^{-1} \frac{E}{mc^2} = c \tanh \sinh^{-1} \frac{p}{mc} \quad (\text{D.104})$$

Dilatación del tiempo: $\Delta t' = \gamma t$.

Contracción de longitudes: $L = L_0/\gamma = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$.

Masa relativista: $M = m\gamma$.

Física cuántica

Ley de cuantización de la energía de Planck:

$$E = hf \quad (\text{D.105})$$

Ley de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$hf = hf_0 + E_c(\text{max}) = W_0 + E_c(\text{max}) \quad (\text{D.106})$$

Potencial de frenado: $V_f = \frac{W_0}{e} = \frac{hf_0}{e}$, o bien $V_f = \frac{h(f - f_0)}{e}$, si $v \neq 0$.

Longitud de de Broglie:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (\text{D.107})$$

Para fotones, $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = hf$.

En el caso relativista:

$$\lambda(r, dB) = \frac{h}{p_r} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{D.108})$$

Principio de indeterminación de Heisenberg:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{D.109})$$

Tiempo propio: $x^2 - c^2 t^2 = -c^2 \tau^2$.

Física nuclear y de partículas

Defecto de masa (átomo o núcleo):

$$\Delta m_a = M_f - M_0 = Zm_p + Nm_n + Zm_e - m_a \quad \Delta M_N = Zm_p + Nm_n - m_N \quad (\text{D.110})$$

Energía de enlace por nucleón:

$$\Delta E = \frac{\Delta mc^2}{A} \quad (\text{D.111})$$

Ley de desintegración:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \text{o con la masa} \quad m(t) = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (\text{D.112})$$

Período de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \quad (\text{D.113})$$

donde τ es la vida media $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Modelo de la gota líquida: $R = R_0 A^{1/3}$.

Actividad:

$$A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right| = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (\text{D.114})$$

y donde $A_0 = N_0 \lambda$. Nótese que $n = \frac{M(g)}{MM}$ y que $N = n N_A$, luego $N = \frac{M(g) N_A}{MM}$, o bien $M(g) = \frac{N \cdot MM}{N_A}$.

Cosmología y Modelo Estándar

El Universo se expande, y se puede considerar como homogéneo e isótropo para todos los propósitos prácticas a muy grandes escalas. Para el Universo conocido, se tiene que la ley de expansión (modelo cosmológico estándar) sigue una métrica de Friedmann-Robertson-Walker. La expansión cósmica fue comprobada por E. Hubble y recibe su nombre en su honor.

Ley de Hubble y propiedades cósmicas: $v = Hd$. $t_U = \frac{1}{H}$, $R_U = ct_U = \frac{c}{H}$, $\rho_c(U) = \frac{3H^2}{8\pi G}$, $M_U = \frac{c^3}{2GH}$,
 $E_U = \frac{c^5}{2GH}$.

El Universo subatómico está gobernado por el llamado Modelo Estándar, que agrupa las partículas en bosones (portadores de fuerza) y materia (fermiones). Los fermiones son leptones y quarks. Los leptones son 6 (electrón, muón y tau, más sus antipartículas), y los quarks 6 (up, down, charm, strange, top o truth, bottom o beauty). Además, los bosones son el fotón (electromagnetismo), gluón (interacción nuclear fuerte de color), bosones electrodébiles masivos W (W^+ , W^- , tienen carga eléctrica), bosones electrodébiles masivos Z (sin carga eléctrica), y el llamado bosón de Higgs o dador de masa H_0 . El Modelo Estándar es una teoría Yang-Mills cuántica no abeliana de 3 interacciones (2 a energía mayores que 100 GeV), el Modelo Cosmológico Estándar es una teoría cosmológica basada en la teoría de la Relatividad General (teoría relativista de la gravitación). No hay aún una teoría cuántica de la gravedad consistente verificada experimentalmente exceptuando los modelos y teorías de cuerdas (testados a nivel teórico), o la gravitación cuántica de bucles (loop quantum gravity), ni una teoría unificada coherente de todas las interacciones no gravitacionales a cualquier energía (GUT), o de todas las interacciones a todas las energías (TOE).

Ecuaciones condensadas de la TGR :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{D.115})$$

De estas ecuaciones se derivan las ecuaciones del Modelo Cosmológico Estándar, también denominadas ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho + \Lambda c^2}{3} - K \frac{c^2}{a^2} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} \Lambda c^2 - \frac{4}{3} \pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (\text{D.116})$$

Ecuaciones condensadas del Modelo Estándar subatómico:

$$L_{SM} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - \frac{1}{4}F^2 + g_Y\phi\bar{\Psi}\Psi + D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - V(\phi) + h.c. \quad V(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4 = m_H^2 H^2 + \lambda_3 H^3 + \lambda_4 H^4 \quad (\text{D.117})$$

Licencia copy-left. La única condición es que se indique su origen para poder usarse. Documento escrito por

Doctor Who?

ϱΔΞΘΣΠΧΚΙΟ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\spadesuit\spadesuit\rangle) \quad \oint_{\partial\Sigma} \Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$

