Física y Química 2ºESO (también 3º y 4º ESO, repaso) Herramientas matemáticas

J. F. G. H.[1]

[1]Space-time Foundation, Multiverse of Madness
Quantum TimeLord Virtual Academy

Earth planet
Milky Way Galaxy
Known Universe
Joki Multiverse

Contenido

Números(I)

¿Qué es un número? Los números son objetos matemáticos que nos permiten "contar". Esta idea intuitiva se formaliza siempre en una serie de propiedades que determina algún tipo de estructura matemática. Así podemos distinguir diferentes clases de números "normales":

Números(II): números naturales

Números naturales

Los números naturales es un conjunto de objetos numéricos que indican la noción básica de contaje. Se suelen simbolizar con la letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\} \tag{1}$$

- Los números naturales generalmente se escriben en cierta base b.
- En una base b con m dígitos, cierto número natural n es una sucesión de dígitos d_i, escritos posicionalmente de derecha a izquierda de forma que n es una suma de dichos coeficientes por potencias sucesivas de la base:

$$n = \cdots d_m d_{m-1} \cdots d_3 d_2 d_1 d_0 = \sum_{i=0}^{M} c_i b^N$$

- El sistema habitual usado por los humanos es el de base 10 o decimal, pero también se usan los sistemas binario, ternario, octal, duodecimal, hexadecimal, vigesimal y otros varios en diferentes contextos

Números(III): números enteros

- Se denotan por la letra $\mathbb{Z}$.
- Incluyen los números naturales, y los números enteros negativos.
- Los números enteros salvo el cero se llaman enteros positivos, los números enteros negativos tampoco incluyen el cero.
- Los números enteros son entonces la unión de los números enteros positivos, el cero y los enteros negativos:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z} \tag{2}$$

Números(IV): números racionales

- Se denotan por la letra $\mathbb{Q}$.
- Incluyen los números enteros como caso particular, y también todos los números que pueden escribirse como fracciones o cocientes.
- Los números racionales incluyen: los números decimales exactos (los números enteros son un caso particular), los números periódicos puros y los números periódicos mixtos.
- Los números decimales exactos, los números periódicos puros y los números periódicos mixtos se pueden escribir con una fracción generatriz.

Números(V): números racionales(II)

$$\mathbb{Q} = \{-\infty, \ldots, -\frac{7}{3}, \ldots, -\frac{3}{4}, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{12}{11}, \ldots, \frac{455}{990}, \ldots, \infty\} \quad (3)$$

Fracciones generatriz de los números racionales:

- Números enteros no decimales: $\frac{\text{número}}{1}$. Ejemplo: $4 = \frac{4}{1}$, $-7 = \frac{-7}{1}$.
- Números enteros decimales exactos: $\frac{\text{número sin decimal}}{10\cdots}$, donde hay tantos ceros como cifras decimales. Ejemplos: $3{,}5 = \frac{35}{10}$, $-0{,}75 = -\frac{75}{100}$, $88{,}976 = \frac{88976}{1000}$. Es decir, la fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y decimal) sin coma, y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Nótese que esto incluye el caso anterior.

$$a, x_1x_2\cdots x_n = \frac{ax_1x_2\cdots x_n}{1\underbrace{0\cdots 0}_{n}}$$

Números (VI): números racionales(III)

- Números decimales periódicos puros: $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0.\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0.\overline{25} = \frac{25}{99}$, $1.\overline{58} = \frac{157}{99}$, $11.\overline{314} = \frac{11303}{999}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y periodo sin coma) menos la parte entera, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo.

$$a, \overline{x_1 \cdots x_n} = \frac{a x_1 \cdots x_n - a}{\underbrace{9 \cdots 9}_{n}}$$

- Números decimales periódicos mixtos. Ejemplo: $5, 17\overline{54}\ldots = \frac{(51754 - 517)}{9900} = \frac{51237}{9900}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera, anteperiodo y periodo sin coma) menos la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras diferentes tenga el anteperiodo.

Números(VII): números irracionales y reales

- Existen números que NO pueden escribirse como una fracción. Por ejemplo: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{10}, e, \phi, \ldots$ Estos números se llaman irracionales.
- Algunos son algebraicos porque son soluciones de ecuaciones del álgebra (como las raíces cuadradas, cúbicas o n-ésimas), y otros como $\pi, e, \ldots$ son trascendentes porque NO son soluciones de ninguna ecuación algebraica. Más, precisamente, un número *trascendente*, es un número es que no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales. Una ecuación polinómica es una expresión del tipo
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{4}$$
- Los números irracionales, combinados con los números racionales, forman un conjunto denominado los números reales.

Números(VIII): números reales

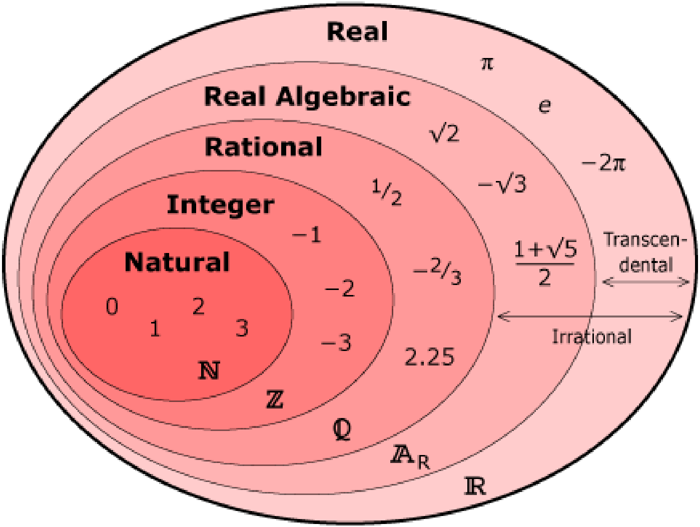
Números reales

Se denominan números reales $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números racionales $\mathbb{Q}$ unidos a los números irracionales $\mathbb{I}$, esto es,

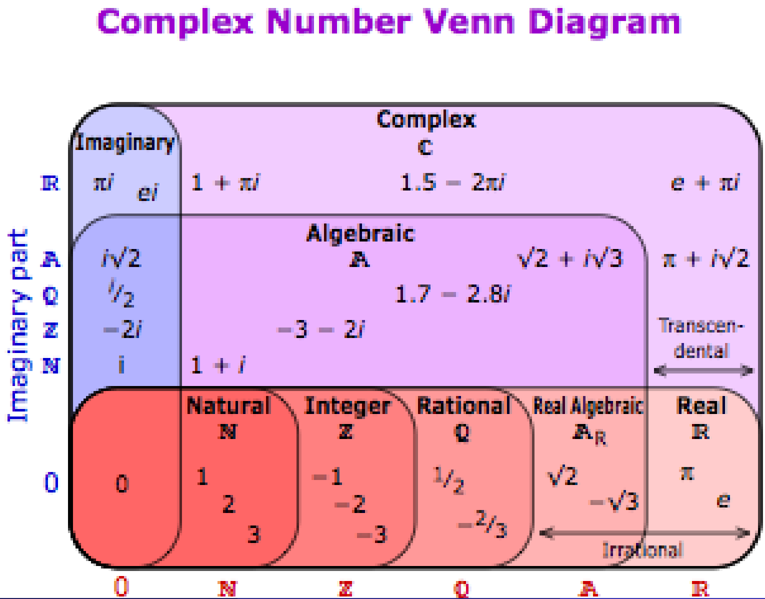
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \tag{5}$$

Otros números: más allá de los reales

Existen números más allá de los números reales con propiedades increibles.



Otros números: más allá de los reales(II)



Álgebra y aritmética(I)

Con los números reales se pueden realizar TODAS las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división, y además tienen las propiedades conmutatitva y distributiva. También se pueden hacer potencias y raíces. Así, se tiene que:

$$a+b=b+a \tag{6}$$
$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{7}$$
$$a+0=0+a=a \tag{8}$$
$$a+(-a)=0 \tag{9}$$
$$a\cdot b=b\cdot a \tag{10}$$
$$a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \tag{11}$$
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \tag{12}$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \tag{13}$$
$$a\cdot 1=1\cdot a=a \tag{14}$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0 \tag{15}$$

Álgebra y aritmética(I)bis

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \tag{16}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{17}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{18}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \tag{19}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \tag{20}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{21}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \cdots \tag{22}$$

Álgebra y aritmética(II)

- Para obtener la *fracción irreducible* se usa el máximo común divisor (M.C.D.).
- Para dividir fracciones con diferente denominador, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) para lograr el **común denominador**.
- Un número primo es un número que solamente es divisible entre sí mismo y el 1.
- El número 1 generalmente NO se considera primo.
- Los números primos más pequeños son los siguientes:

$$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots \tag{23}$$

Álgebra y aritmética(III)

Máximo común divisor

El máximo común divisor de una serie de números $a, b, c, \dots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes elevados al menor exponente. Se representa como $M.C.D.(a, b, c, \dots)$.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de una serie de números $a, b, c, \dots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes y no comunes elevados a su correspondient mayor exponente. Se representa como $m.c.m.(a, b, c, \dots)$.

Álgebra y aritmética(IV)

Las sumas de varios números definen la multiplicación, y la multiplicación de varios números la potenciación:

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{n-veces} = n \cdot a = na \tag{24}$$

$$\underbrace{a \cdots a}_{n-veces} = a^n \tag{25}$$

En esta última expresión, a se llama base, y n es el exponente. Las propiedades de las potencias (y raíces n-ésimas) son las siguientes:

Álgebra y aritmética(IV)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{26}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{27}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{28}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{29}$$

$$a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{30}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{31}$$

La regla de los signos

Regla de los signos

La regla de la multiplicación de los signos: $+\cdot+=-\cdot-=+$, $+\cdot-=-\cdot+=-$. Los elementos neutros de la suma y la multiplicación/divisió son el 0 y el 1, respectivamente, ya que

$$a+0=a-0=a \quad a\cdot 1=1\cdot a=a1=1a=\frac{a}{1}=a$$

Potencias de 10 en el S.I.

Prefix	Scaling factor
yotta (Y)	10^{24}
zetta (Z)	10^{21}
exa (E)	10^{18}
peta (P)	10^{15}
tera (T)	10^{12}
giga (G)	10^{9}
mega (M)	10^{6}
kilo (k)	10^{3}
hecto (h)	10^{2}
deca (da)	10

Prefix	Scaling factor
deci (d)	10^{-1}
centi (c)	10^{-2}
milli (m)	10^{-3}
micro (μ)	10^{-6}
nano (n)	10^{-9}
pico (p)	10^{-12}
femto (f)	10^{-15}
atto (a)	10^{-18}
zepto (z)	10^{-21}
yocto (y)	10^{-24}

Potencias múltiplo de 10 en el S.I.(2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol=10^{100}, googolplex=$10^{\text{googol}} = 10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Potencias submúltiplo de 10 en el S.I. (2022)

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$	deci (d)
$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$	centi (c)
$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$	mili (m)
$10^{-6} = 1/10^6 = 0{,}000001$	micro (μ)
$10^{-9} = 1/10^9 = 0{,}000000001$	nano (n)
$10^{-12} = 1/10^{12} = 0{,}000000000001$	pico (p)
$10^{-15} = 1/10^{15} = 0{,}000000000000001$	femto (f)
$10^{-18} = 1/10^{18} = 0{,}000000000000000001$	atto (a)
$10^{-21} = 1/10^{21} = 0{,}000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{-24} = 1/10^{24} = 0{,}000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{-27} = 1/10^{27} = 0{,}000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{-30} = 1/10^{30} = 0{,}000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Contenido

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal del tipo $ax + b = c$, si $a \neq 0$, tiene como solución única:

$$x = \frac{c - b}{a} \tag{38}$$

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión formal del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de esta ecuación tiene un fórmula general dada por

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{39}$$

y donde $\Delta = b^2 - 4ac$ es una cantidad numérica llamada *discriminante*.

Ecuaciones cuadráticas(II)

El tipo de solución de la ecuación cuadrática o segundo grado depende del signo del discriminante:

- Si $\Delta > 0$, hay dos raíces reales diferentes x_+, x_-.
- Si $\Delta = 0$, hay dos raíces reales iguales $x_+ = x_- = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, no hay solución real. Existirían dos soluciones complejo-conjugadas $Z_1 = x_+, Z_2 = z_- = Z_1^* = \overline{Z_1}$, en un sistema de números denominado números complejos $\mathbb{C}$, cuyo estudio está más allá de este curso elemental.

Ecuaciones lineales vs. cuadráticas y más allá

Las ecuaciones de primer grado o lineales representan líneas rectas. Las ecuaciones de segundo grado representan curvas que son cónicas (secciones de un cono). Veamos ejemplos. Ecuación de una circunferencia de radio R centrada en (a, b):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Ecuación de una parábola: $y = ax^2 + b$.
Ecuación de una hipérbola: $xy = c$.
Ecuación de una elipse: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ En general, para una curva cuadrática plana, se tiene que: $Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$. También existen curvas cúbicas, con forma general:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H = 0$$

O también curvas elípticas planas, con forma general:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

y más generalmente curvas (hiper)elípticas con $y^2 = P(x)$.

Identidades notables(I)

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{40}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{41}$$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{42}$$

Para otras potencias, existe una fórmula más general denominada identidad binomial. Para recordar las identidades notables y los llamados coeficientes binomiales del desarrollo de $(a+b)^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se usa el llamado triángulo de Pascal o Tartaglia:

Identidades notables(II): triángulo de Pascal o Tartaglia

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

$$(x+y)^0 \qquad 1$$
$$(x+y)^1 \qquad 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 \qquad 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 \qquad 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$(x+y)^4 \qquad 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$
$$(x+y)^5 \qquad 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

Triángulo de Pascal en detalle

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

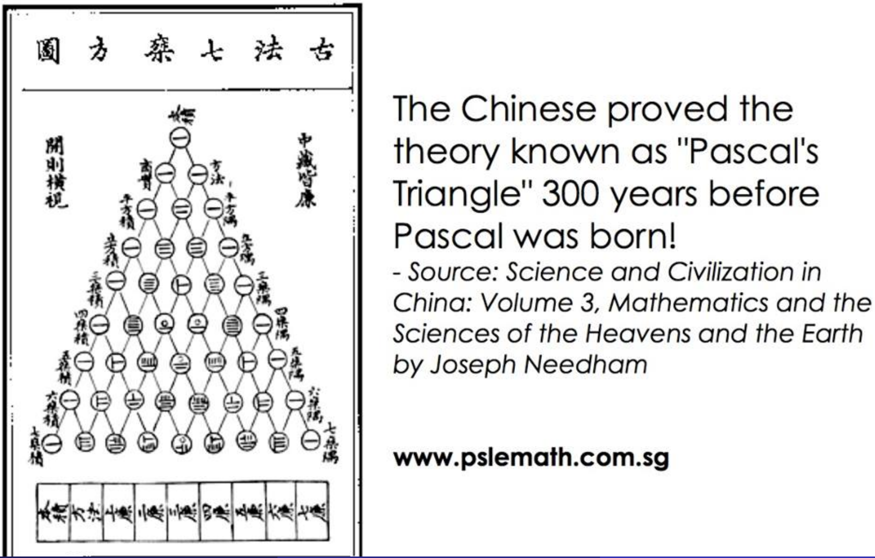
1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Triángulo de Pascal en China

Este triángulo ya se conocía en China antes que en Europa:



Proporcionalidad(I)

Proporcionalidad directa

Se dice que dos cantidades(o magnitudes) X e Y son directamente proporcionales (D.P.), si y sólo si, el aumento (o disminución) de X implica el aumento (o disminución) de Y. Equivalentemente, a nivel matemático, dos magnitudes son D.P. si su cociente permanece constante, es decir,

$$\frac{X}{Y} = k = \text{constante} \tag{43}$$

Proporcionalidad indirecta o inversa

Se dice que dos cantidades(o magnitudes) X e Y son indirectamente o inversamente proporcionales (I.P.), si y solamente si, el aumento (o disminución) de X implica la disminución (o aumento) de Y. A nivel matemático, dos magnitudes son I.P. si su producto permanece constante, es decir,

$$XY = X \cdot Y = k = \text{constante} \tag{44}$$

DP e IP son gráficamente rectas e hipérbolas

Direct or Inverse Variation

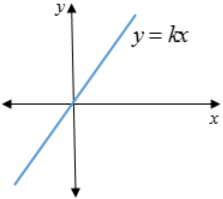
Directly Variation

y varies directly as x

y is directly proportional to x

$$y \propto x$$

$$y = kx \quad \text{for a constant } k$$



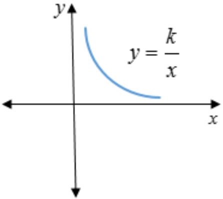
Inverse Variation

y varies inversely as x

y is inversely proportional to x

$$y \propto \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{for a constant } k$$



Porcentajes

Tanto por ciento

El $X\,\%$ de un número N se calcula mediante la expresión:

$$X\,\% \quad \text{de N} = \frac{X \cdot N}{100}$$

Tanto por mil

El $Y\,‰$ de un número N se calcula mediante la expresión:

$$Y\,‰ \quad \text{de N} = \frac{Y \cdot N}{1000}$$

Tanto por uno

El $1/Z$ o tanto por uno de un número N se calcula mediante la expresión:

$$1/Z \quad \text{de N} = \frac{N}{Z}$$

Contenido

Geometría básica y elemental(I)

En esta sección repasaremos algunas fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

Circunferencia

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan (una distancia R, llamada radio) de un punto llamado CENTRO. La longitud de una circunferencia se calcula mediante la fórmula

$$L_c = 2\pi R = \pi D_c \tag{45}$$

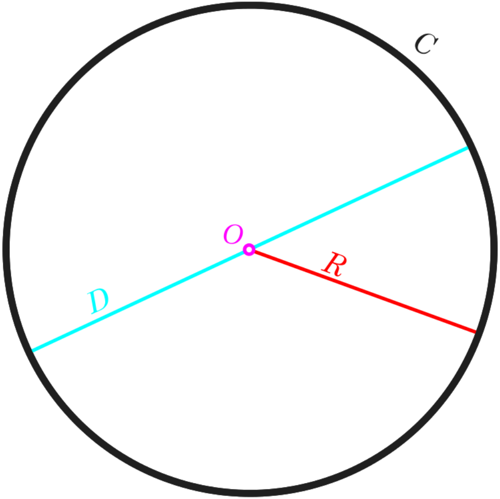
y donde R es el radio y $D_c = 2R$ es el diámetro o mayor cuerda de una circunferencia. π es por tanto el número que se obtiene al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro (dos veces el radio)

$$\pi \equiv \frac{L_c}{D_c} = \frac{L_c}{2R} \approx 3{,}14$$

La longitud de una circunferencia es también su *perímetro*.

Circunferencia

Una circunferencia tiene el siguiente aspecto:



Polígono convexo

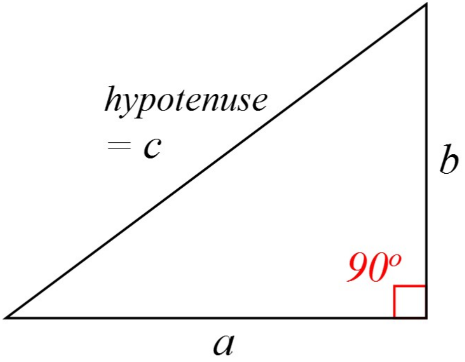
- Para un polígono convexo, el perímetro es la longitud total obtenida al sumar la longitud de todos los lados.
- Si el polígono es regular, el perímetro es $P_{P.R.} = NL$, donde N es el número de lados, y L es la longitud del lado.

Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 + b^2 = h^2 = c^2 \tag{46}$$

donde a, b son los catetos (lados que forman el ángulo recto de 90°), y $h = c$ es la hipotenusa, lado opuesto al ángulo recto.



Triángulos

Un triángulo es un polígono sencillo de 3 lados (es también denominado símplex en el plano). Existen varios tipos de triángulos:

- Según los lados: triángulo equilátero (todos los lados y ángulos son iguales), triángulo isósceles (hay dos lados y ángulos iguales), y triángulos escalenos (todos los ángulos y lados son diferentes). En el plano usual, todos los triángulos tienen ángulos interiores que suman 180°. Es decir, si $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ son los ángulos interiores de un triángulo, opuestos a los lados a, b, c, la suma de esos ángulos da $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.
- Según los ángulos: triángulo rectángulo (un ángulo recto), triángulo acutángulo (todos los ángulos agudos, menores de 180°) y obtusángulo (con un ángulo obtuso mayor de 180°).

Polígonos(I)

- Los polígonos de 4 lados se llaman cuadriláteros.
- Existen varios tipos de cuadriláteros: cubo, rombo, romboide, trapecio y trapezoide.
- Algunos cuadriláteros son paralelogramos: tienen lados y ángulos paralelos dos a dos. Son paralelogramos el cubo, el rombo y el romboide. El trapecio tiene solamente un par de lados paralelos y tiene 2 no paralelos. El trapezoide no tiene lados paralelos.
- La suma de los 4 ángulos interiores de un cuadrilátero, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, suma 360°. Es decir $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$.

Círculo

Se llama círculo al área o espacio interior de una circunferencia.

El área del círculo se calcula mediante la expresión siguiente:

$$A_c = \pi R^2 \tag{47}$$

Polígonos(II)

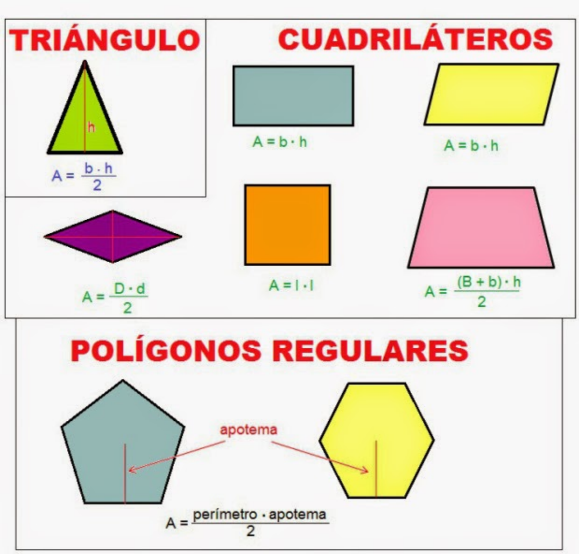
Para polígonos usuales, tenemos las siguientes fórmulas del área:

- Área del triángulo: $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$, donde b es la base y h es la altura del triángulo.
- Área del cuadrado: $A_\square = L^2 = L \cdot L$
- Área del rectángulo o del romboide: $A_R = b \cdot h$, donde b es la base, y h es la altura (height, en inglés).
- Área del rombo: $A_r = \frac{D \cdot d}{2}$, donde D es la diagonal mayor, y d es la diagonal menor.
- Área del trapecio isósceles: $A_T = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$, donde B es la base mayor y b es la base menor.
- Área del polígono regular de n-lados iguales a L:

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

donde $p = nL$ es el perímetro y a es el apotema (segmento que une el centro con el punto medio de cualquier lado del polígono regular).

Polígonos(III)



Esfera(I)

Esfera

Se llama esfera al lugar geométrico de todos los puntos en el espacio que equidistan (una distancia R llamado radio) de un punto llamado CENTRO. La ecuación de una esfera tridimensional, centrada en el punto $P(a, b, c)$, y de radio R es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Área y volumen de la esfera tridimensional

El área de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

$$A_E = 4\pi R^2 \tag{48}$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

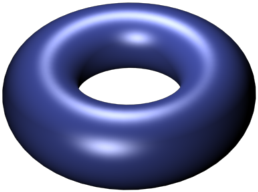
$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{49}$$

Esfera(II)

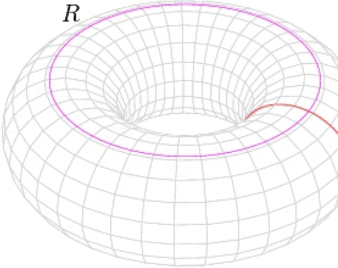
Otros volúmenes importantes

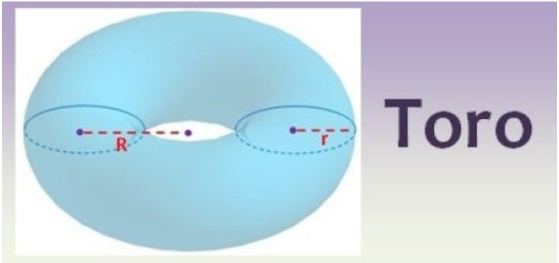
- Prisma de lados a, b, c: $V_p = a \cdot b \cdot c = abc$
- Cubo o hexaedro (a=b=c=L): $V_{cubo} = L^3 = L \cdot L \cdot L$
- Tetraedro o símplex: $V_t = \dfrac{L^3}{6}$
- Cilindro: $V_{cilindro} = A_b \cdot h = \pi R^2 h$, donde A_b es el área de la base, R es el radio de la base, y h es la altura del cilindro.
- Pirámide: $V_P = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$, donde A_b es la base y h es la altura de la pirámide.
- Cono recto: $V_{cono} = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$, donde A_b es el área de la base y R es el radio, h es la altura del cono.
- Dónut o toro: $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 R r^2$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo. El área del toro es igual a $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 R r$.

Otros volúmenes importantes(II)



$$\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$$





Otros volúmenes importantes(III)

- Hiperesfera (curiosidad "complicada"), hipervolumen e hiperárea ($\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$):

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2} R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad A_n = \frac{n\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2} R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

- Hipercubo o teseracto 4d: $V_4 = L^4$, el n-cubo tiene hipervolumen igual a $V_n = L^n$, donde n es el número de dimensiones del hipercubo. Para el hipertetraedro o n-símplex es una fórmula más rara que se escribe $V_t(n) = \frac{L^n}{n!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ es una cantidad llamada factorial de n.

Fórmulas de volúmenes de poliedros platónicos

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6\,a^2$	$\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

Existen otras fórmulas para politopos en *nd*, para positroides, y también para apeirógonos, apeiroedros, o también para el amplituedro:

$$\boxed{\mathcal{M}_{n,k,L}\left[Z_a\right] = \mathrm{Vol}\left[\mathcal{A}_{n,k,L}\left[Z_a\right]\right]}$$

y

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$$

Además, conviene saber el uso de la circunferencia goniométrica o unidad, el sistema de radianes, grados sexagesimales, y el sistema de gradianes (o gones): $2\pi\ rad = 360^\circ = 400^g$.

Contenido

Símbolos

Generalmente, en Matemáticas o Física usamos letras de alfabetos (normalmente latino o griego, y de otros excepcionalmente, cuando es necesario) y símbolos de operadores matemáticos. Para los operadores:

$$=, \neq, \approx, \simeq, \approxeq, \sim, \propto, >, <, \geq, \leq, \gtrsim, \lesssim, \equiv, \doteq, \pm, \mp$$

$$D, \Delta x, \nabla, \Box, |x|, \|, \sum_i x_i, +, \cdot, -, :, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r}, f(t), A_{ij}, A_{i_1\cdots i_n}, \rightarrow, \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{\vec{A}}}, \overleftrightarrow{A}, \ldots$$

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}, \int dt, \int_a^b ()dt, a\cdot b, a\times b, a\wedge b, ab, \frac{a}{b}, a^x, \log_b x, \sqrt[n]{x}$$

Estructuras

Las Matemáticas estudian también estructuras abstractas que los matemáticos o los físicos nombran con denominaciones que molan:

- Cuerpos. Anillos. Semianillos.
- Grupos. Semigrupos. Grupoides. Cuasigrupos.
- Conjuntos y subconjuntos. Categorías y functores.
- Espacios vectoriales. Álgebras (de Lie, de Virasoro, de Grassmann,...). Superálgebras. Algebroides.
- Espacios tensoriales, matrices, hipermatrices. Grafos, hipergrafos, digrafos, multidigrafos, hipermultidigrafos, redes. Matroides.
- Variedades diferenciales. Espacios funcionales.
- ...

Anc.	Class.		Name	Corresp.	
Α	Α	α	alpha	a	1
Β	Β	β	beta	b	2
Γ	Γ	γ	gamma	g, n[1]	3
Δ	Δ	δ	delta	d	4
Ε	Ε	ε	epsilon	e	5
Ϝ	ϝ, ϛ		digamma, stigma[2]	w	6
Ζ	Ζ	ζ	zeta	z	7
Η	Η	η	eta	e	8
Θ	Θ	θ	theta	th	9
Ι	Ι	ι	iota	i, j	10
Κ	Κ	κ	kappa	k	20
Λ	Λ	λ	lambda	l	30
Μ	Μ	μ	mu	m	40

Anc.	Class.		Name	Corresp.	
Ν	Ν	ν	nu	n	50
Ξ	Ξ	ξ	xi	x	60
Ο	Ο	ο	omicron	o	70
Π	Π	π	pi	p	80
Ϙ	ϙ, ϟ		qoppa[3]	q	90
Ρ	Ρ	ρ	rho	r, rh	100
Σ	Σ	σ, ς	sigma[4]	s	200
Τ	Τ	τ	tau	t	300
	Υ	υ	upsilon	y, u[5]	400
	Φ	φ	phi	ph, f	500
	Χ	χ	chi	ch	600
	Ψ	ψ	psi	ps	700
	Ω	ω	omega	o	800
Ͳ	ϡ		sampi[6]	s	900

Alfabeto griego(II)

Contenido

En Matemáticas, y también en Ciencias Exactas abstractas, hay varios métodos para demostrar e inferir o verificar verdades (veremos algunos de ellos en el método científico):

Pensamiento matemático(II)

- Inducción o generalización. A partir de un enunciado particular, se obtiene un enunciado general.
- Deducción. A partir de unos postulados o axiomas se deducen formalmente, por pura lógica, consecuencias lógicas.
- Abducción. Es un tipo de inferencia no deductiva que infiere no una generalización como hace la inducción, sino una hipótesis sobre una estructura o proceso que explica los datos. También se le llama "razonamiento abductivo", "inferencia abductiva" o "inferencia explicativa".
- Reducción al absurdo. Es una técnica lógica que permite demostrar algo partiendo de una "verdad" asumida como hipótesis y llegando a una contradicción. Ex contradictione quod libet (E.C.Q.).

Pensamiento matemático(III)

- Contraste o verificación de hipótesis empírica. Cualquier afirmación, puede en el fondo ser contrastada "experimentalmente".
- Análisis de datos. Cualquier afirmación teórica conlleva o puede implicar cierto comportamiento en los datos. Hay métodos estadísticos para estudiar estos datos. Además, hoy día tenemos la computación, no solamente algoritmos humanos, la AI (IA, artificial intelligence/inteligencia artificial), y las Ciencias de Grandes Datos (Big Data), aprendizaje de máquinas (Machine Learning), y otras técnicas poderosas basadas en métodos matemáticos abstractos avanzados de la teoría de la probabilidad, denominados métodos bayesianos, que complementan los más tradicionales métodos frecuentistas.

El razonamiento humano normal funciona mediante lógica booleana o bivaluada. Sin embargo, existen lógicas ternarias, multivaluadas, o incluso lógica cuántica.

Contenido

Data analysis(I)

Here, we will review formulae to handle them with experimental data. Errors can be generally speaking:

- **1st. Random**. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.
- **2nd. Systematic**. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:

- 1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometimes accuracy is defined (ISO) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, higher trueness and high precision.
- 2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.

1. Statistical estimators.

Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{50}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{51}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{52}$$

Data analysis(III)

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{53}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{54}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.

Data analysis(IV)

Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{55}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1 \rightarrow n$:

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma_{x,n}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = s_n} \tag{56}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}}} \tag{57}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}{n}} \tag{58}$$

Data analysis(VI)

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right)=\sigma^2_{\sigma^2}=\sigma^2\left(\sigma^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{59}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right)=\sqrt{\sigma^2_{\sigma^2}}=\sigma\left(\sigma^2\right)=\sigma_{\sigma^2}=\sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{60}$$

Contenido

¿Alguna pregunta o duda?

¿Alguna pregunta o duda?

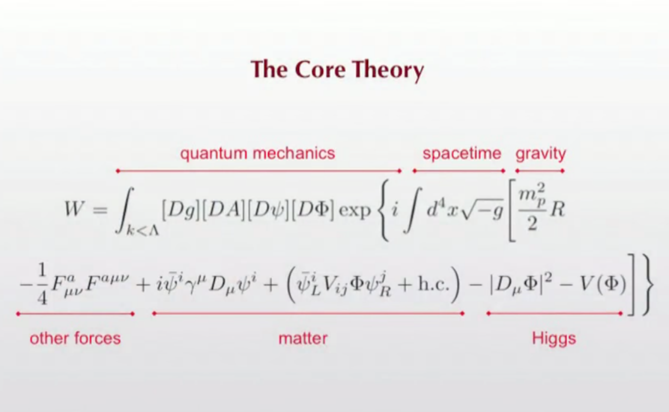


Figura 1: Core equation!

Gracias por vuestra atención

Figura 2: Loki is pleased!

Figura 3: Sylvie is pleased!