

# Física y Química 2° ESO: The Young preTocho

The Strange Doctor

Multiverse of Madness

Аннотация

Resumen con  $\LaTeX$  en español de contenidos previos para la Física y Química de 2° ESO: el pre-Tocho.



# Índice

<b>1</b>	<b>Números</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Álgebra y aritmética</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Geometría</b>	<b>9</b>
3.1	Longitudes . . . . .	9
3.2	Áreas . . . . .	11
3.3	Volúmenes . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Identidades notables</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Proporcionalidad</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Porcentajes</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Ecuaciones</b>	<b>17</b>
7.1	Ecuaciones lineales . . . . .	17
7.2	Ecuaciones cuadráticas . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Símbolos matemáticos comunes</b>	<b>18</b>
<b>9</b>	<b>Estructuras matemáticas abstractas</b>	<b>18</b>
<b>10</b>	<b>Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.</b>	<b>20</b>
<b>11</b>	<b>Alfabetos (latino, griego, . . .)</b>	<b>23</b>
<b>12</b>	<b>Métodos de razonamiento y pensamiento lógico-matemático</b>	<b>23</b>
<b>13</b>	<b>El método científico</b>	<b>25</b>
<b>14</b>	<b>Ciencia: Algunas definiciones adicionales</b>	<b>26</b>
14.1	Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio . . . . .	27
14.2	Instrumentos de laboratorio . . . . .	29
<b>15</b>	<b>Herramientas fisimáticas</b>	<b>29</b>
15.1	Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros. . . . .	31
15.1.1	Magnitudes base en el S.I. . . . .	32
15.1.2	Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones . . . . .	34
15.1.3	Otras constantes universales . . . . .	37
15.2	Potencias de 10 y notación científica . . . . .	37
15.3	Cifras significativas (c.s.) . . . . .	38
<b>16</b>	<b>Propiedades de la materia</b>	<b>39</b>
<b>17</b>	<b>Sustancias puras y mezclas</b>	<b>40</b>
<b>18</b>	<b>Métodos de separación</b>	<b>40</b>
<b>19</b>	<b>Suspensiones y coloides</b>	<b>41</b>
<b>20</b>	<b>Estados de agregación de la materia</b>	<b>42</b>
<b>21</b>	<b>Forma y volumen</b>	<b>42</b>
<b>22</b>	<b>Teoría cinético-molecular</b>	<b>45</b>

<b>23 LEYES PONDERALES DE LOS GASES(ampliación)</b>	<b>48</b>
<b>24 Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados)</b>	<b>50</b>
<b>25 El átomo</b>	<b>52</b>
<b>26 Modelos atómicos</b>	<b>52</b>
<b>27 Moléculas y cristales</b>	<b>54</b>
<b>28 Cambios químicos y sus efectos</b>	<b>54</b>
<b>29 Reacciones químicas</b>	<b>55</b>
<b>30 Algunos tipos de reacciones químicas</b>	<b>56</b>
<b>31 Fuerzas</b>	<b>57</b>
31.1 Tipos de fuerza . . . . .	57
31.2 Fuerzas cotidianas . . . . .	58
<b>32 Movimiento y tipos de movimientos</b>	<b>58</b>
32.1 Ecuaciones del M.R.U. . . . .	59
32.2 MRUA . . . . .	59
<b>33 Máquinas</b>	<b>60</b>
<b>34 Energía</b>	<b>61</b>
34.1 Tipos de energía . . . . .	62
34.2 Energía cinética, potencial y mecánica . . . . .	62
34.3 Intercambios de energías . . . . .	62
<b>35 Ondas</b>	<b>63</b>
35.1 Tipos de onda . . . . .	63
35.2 Ondas sonoras y sonido . . . . .	64
<b>36 Calor y temperatura</b>	<b>65</b>
36.1 Escalas termométricas . . . . .	65
36.2 Energía en tránsito y calor . . . . .	66
36.3 Efectos del calor . . . . .	66
36.4 Propagación del calor . . . . .	66
<b>37 Ondas electromagnéticas: luz y Óptica</b>	<b>67</b>
<b>A Volúmenes</b>	<b>69</b>
<b>B El método científico(diagramas)</b>	<b>71</b>
<b>C Potencias de diez. Tablas resumen</b>	<b>73</b>
<b>D Factores de conversión</b>	<b>74</b>
<b>E Conceptos adicionales</b>	<b>75</b>
<b>F Concentraciones</b>	<b>76</b>
<b>G FORMULARIO</b>	<b>76</b>
<b>H Diagramas de cambio de estado o transición de fase</b>	<b>79</b>

<b>I</b>	<b>Números en los átomos</b>	<b>82</b>
<b>J</b>	<b>Formulario de reacciones</b>	<b>83</b>
<b>K</b>	<b>Formulario de Física</b>	<b>83</b>
<b>L</b>	<b>Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4</b>	<b>85</b>
L.1	Ecuaciones de primer grado . . . . .	85
L.2	Ecuación de segundo grado . . . . .	85
L.3	Ecuación de tercer grado(cúbica) . . . . .	86
L.3.1	Cardano method(I) . . . . .	86
L.3.2	Cardano's method(II): Cardano formula . . . . .	87
L.3.3	Depressed cubic . . . . .	88
L.3.4	Solución real simple . . . . .	89
L.4	Ecuación de cuarto grado(cuártica) . . . . .	90
L.4.1	Ecuación bicuadrática . . . . .	90
L.4.2	Ecuación cuasi-palindrómica . . . . .	90
L.4.3	General quartic . . . . .	91

## 1 Números

¿Qué es un número? Los números son objetos matemáticos que nos permiten “contar”. Esta idea intuitiva se formaliza siempre en una serie de propiedades que determina algún tipo de estructura matemática. Así podemos distinguir diferentes clases de números “normales”:

### Números naturales

Los números naturales es un conjunto de objetos numéricos que indican la noción básica de contaje. Se suelen simbolizar con la letra  $\mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\} \quad (1)$$

### Números enteros

Se denotan por la letra  $\mathbb{Z}$ . Incluyen los números naturales, y los números enteros negativos. Los números enteros salvo el cero se llaman enteros positivos, los números enteros negativos tampoco incluyen el cero. Los números enteros son entonces la unión de los números enteros positivos, el cero y los enteros negativos:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N} \quad (2)$$



Планета есть колыбель разума, но нельзя вечно жить в колыбели.

## Números racionales

Se denotan por la letra  $\mathbb{Q}$ . Incluyen los números enteros como caso particular, y también todos los números que pueden escribirse como fracciones o cocientes. Los números racionales incluyen: los números decimales exactos (los números enteros son un caso particular), los números periódicos puros y los números periódicos mixtos. Los números decimales exactos, los números periódicos puros y los números periódicos mixtos se pueden escribir con una fracción generatriz.

$$\mathbb{Q} = \{-\infty, \dots, -\frac{7}{3}, \dots, -\frac{3}{4}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{12}{11}, \dots, \frac{455}{990}, \dots, \infty\} \quad (3)$$

Fracciones generatriz de los números racionales:

- Números enteros no decimales:  $\frac{\text{número}}{1}$ . Ejemplo:  $4 = \frac{4}{1}, -7 = \frac{-7}{1}$ .
- Números enteros decimales exactos:  $\frac{\text{número sin decimal}}{10 \dots}$ , donde hay tantos ceros como cifras decimales. Ejemplos:  $3,5 = \frac{35}{10}, -0,75 = -\frac{75}{100}, 88,976 = \frac{88976}{1000}$ . Es decir, la fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y decimal) sin coma, y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Nótese que esto incluye el caso anterior.

$$a, x_1 x_2 \dots x_n = \frac{ax_1 x_2 \dots x_n}{\underbrace{10 \dots 0}_n}$$

- Números decimales periódicos puros:  $0.\bar{3} = \frac{1}{3}, 0.\bar{1} = \frac{1}{9}, 0.\overline{25} = \frac{25}{99}, 1.\overline{58} = \frac{157}{99}, 11.\overline{314} = \frac{11303}{999}$ . La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y periodo sin coma) menos la parte entera, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo.

$$a, \overline{x_1 \dots x_n} = \frac{ax_1 \dots x_n - a}{\underbrace{9 \dots 9}_n}$$

- Números decimales periódicos mixtos. Ejemplo:  $5, 17\overline{54} \dots = \frac{(51754 - 517)}{9900} = \frac{51237}{9900}$ . La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera, anteperiodo y periodo sin coma) menos la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras diferentes tenga el anteperiodo.

Existen números que NO pueden escribirse como una fracción. Por ejemplo:  $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{10}, e, \phi, \dots$  Estos números se llaman irracionales. Algunos son algebraicos porque son soluciones de ecuaciones del álgebra (como las raíces cuadradas, cúbicas o n-ésimas), y otros como  $\pi, e, \dots$  son trascendentes porque NO son soluciones de ninguna ecuación algebraica. Más, precisamente, un número *trascendente*, es un número que no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales. Una ecuación polinómica es una expresión del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \quad (4)$$

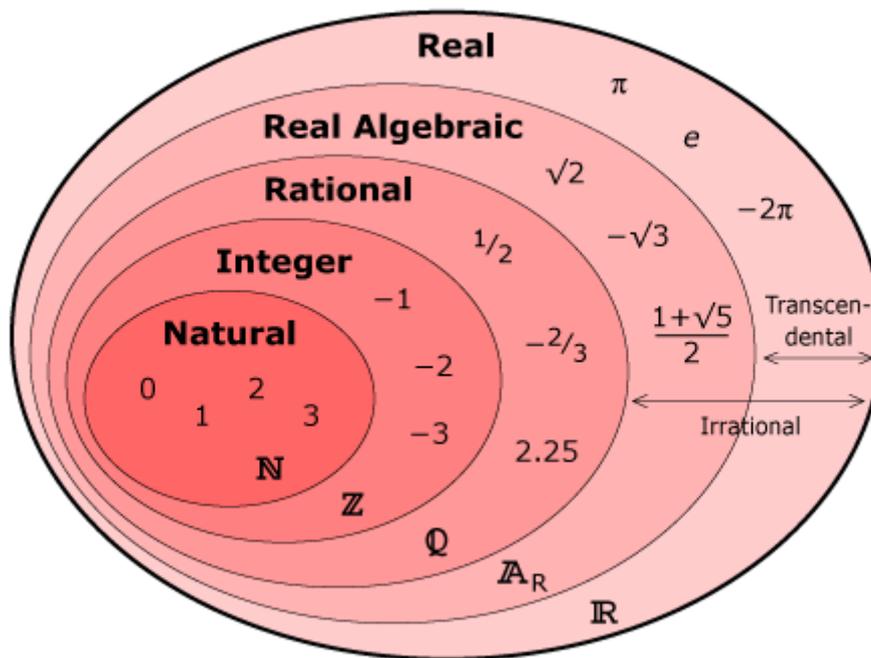
Los números irracionales, combinados con los números racionales, forman un conjunto denominado los números reales.

## Números reales

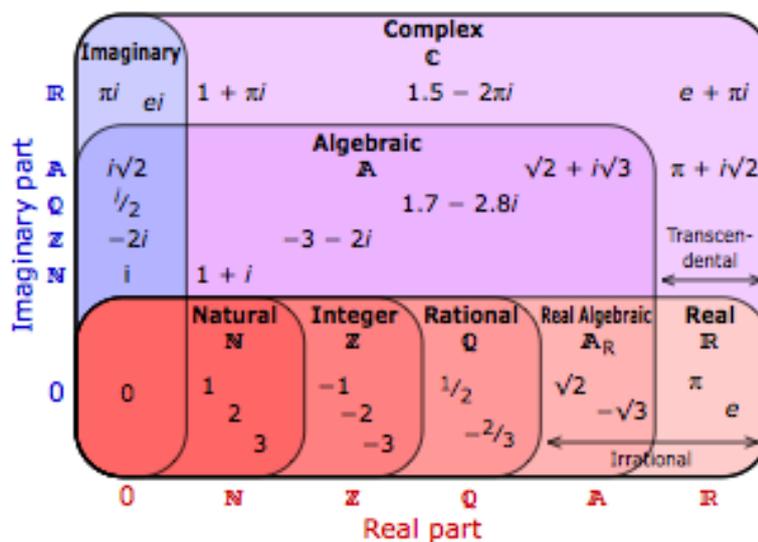
Se denominan números reales  $\mathbb{R}$  al conjunto de todos los números racionales  $\mathbb{Q}$  unidos a los números irracionales  $\mathbb{I}$ , esto es,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \quad (5)$$

Existen números más allá de los números reales con propiedades increíbles.



**Complex Number Venn Diagram**



$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset A_R \subset R \subset C}$$

## 2 Álgebra y aritmética

Con los números reales se pueden realizar TODAS las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división, y además tienen las propiedades conmutativa y distributiva. También se pueden hacer potencias

y raíces. Así, se tiene que:

$$a + b = b + a \quad (6)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (7)$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (8)$$

$$a + (-a) = 0 \quad (9)$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (10)$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (11)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (12)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (13)$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (14)$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad (15)$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \quad (16)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (17)$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (18)$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad (19)$$

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \quad (20)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad (21)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \dots \quad (22)$$

Para obtener la *fracción irreducible* se usa el máximo común divisor (M.C.D.). Para dividir fracciones con diferente denominador, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) para lograr el **común denominador**. Un número primo es un número que solamente es divisible entre sí mismo y el 1. El número 1 generalmente NO se considera primo. Los números primos más pequeños son los siguientes:

$$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \quad (23)$$

### Máximo común divisor

El máximo común divisor de una serie de números  $a, b, c, \dots$  se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes elevados al menor exponente. Se representa como  $M.C.D.(a, b, c, \dots)$ .

### Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de una serie de números  $a, b, c, \dots$  se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes y no comunes elevados a su correspondiente mayor exponente. Se representa como  $m.c.m.(a, b, c, \dots)$ .

Las sumas de varios números definen la multiplicación, y la multiplicación de varios números la potenciación:

$$\underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-veces}} = n \cdot a = na \quad (24)$$

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-veces}} = a^n \quad (25)$$

En esta última expresión,  $a$  se llama base, y  $n$  es el exponente. Las propiedades de las potencias (y raíces  $n$ -ésimas) son las siguientes:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (26)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (27)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (28)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (29)$$

$$a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \quad (30)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (31)$$

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \quad (32)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (33)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b} \quad \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \quad (34)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^b}} = \sqrt[n \cdot m]{a^b} \quad (35)$$

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \quad (36)$$

$$\text{Si } \frac{a}{n} = c + \frac{r}{n} \rightarrow \sqrt[n]{x^a} = x^c \sqrt[n]{x^r} \quad (37)$$

Regla de la multiplicación de los signos:  $+\cdot + = -\cdot - = +$ ,  $+\cdot - = -\cdot + = -$ . Los elementos neutros de la suma y la multiplicación/división son el 0 y el 1, respectivamente, ya que

$$a + 0 = a - 0 = a \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad 1a = a \quad \frac{a}{1} = a$$

### 3 Geometría

En esta sección repasaremos algunas fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas.

#### 3.1 Longitudes

Una circunferencia se define como el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan (una distancia  $R$ , llamada radio) de un punto llamado CENTRO. La longitud de una circunferencia se calcula mediante la fórmula

##### Longitud de una circunferencia

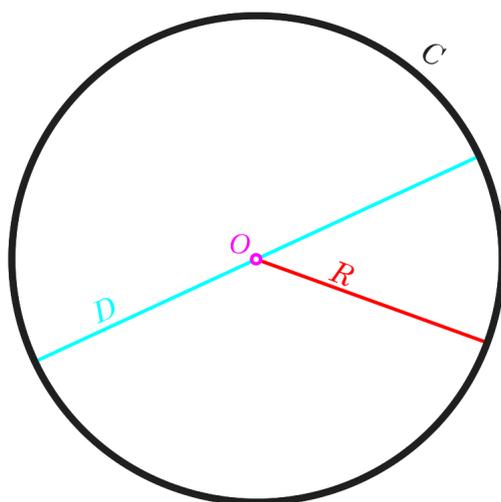
$$L_c = 2\pi R = \pi D_c \quad (38)$$

y donde  $R$  es el radio y  $D_c = 2R$  es el diámetro o mayor cuerda de una circunferencia.  $\pi$  es por tanto el número que se obtiene al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro (dos veces el radio):

$$\pi \equiv \frac{L_c}{D_c} = \frac{L_c}{2R} \approx 3,14$$

La longitud de una circunferencia es también su *perímetro*.

Una circunferencia tiene el siguiente aspecto:



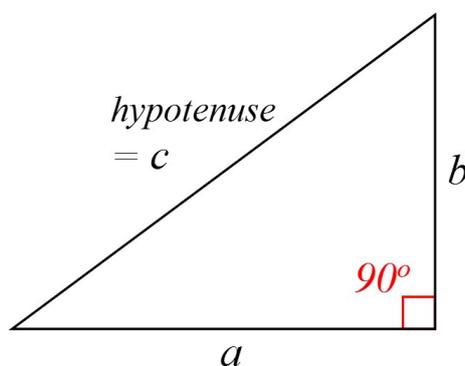
Para un polígono convexo, el perímetro es la longitud total obtenida al sumar la longitud de todos los lados. Si el polígono es regular, el perímetro es  $P_{P.R.} = NL$ , donde  $N$  es el número de lados, y  $L$  es la longitud del lado.

### Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 + b^2 = h^2 = c^2 \quad (39)$$

donde  $a, b$  son los catetos (lados que forman el ángulo recto de  $90^\circ$ ), y  $h = c$  es la hipotenusa, lado opuesto al ángulo recto.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Un triángulo es un polígono sencillo de 3 lados (es también denominado símplex en el plano). Existen varios tipos de triángulos:

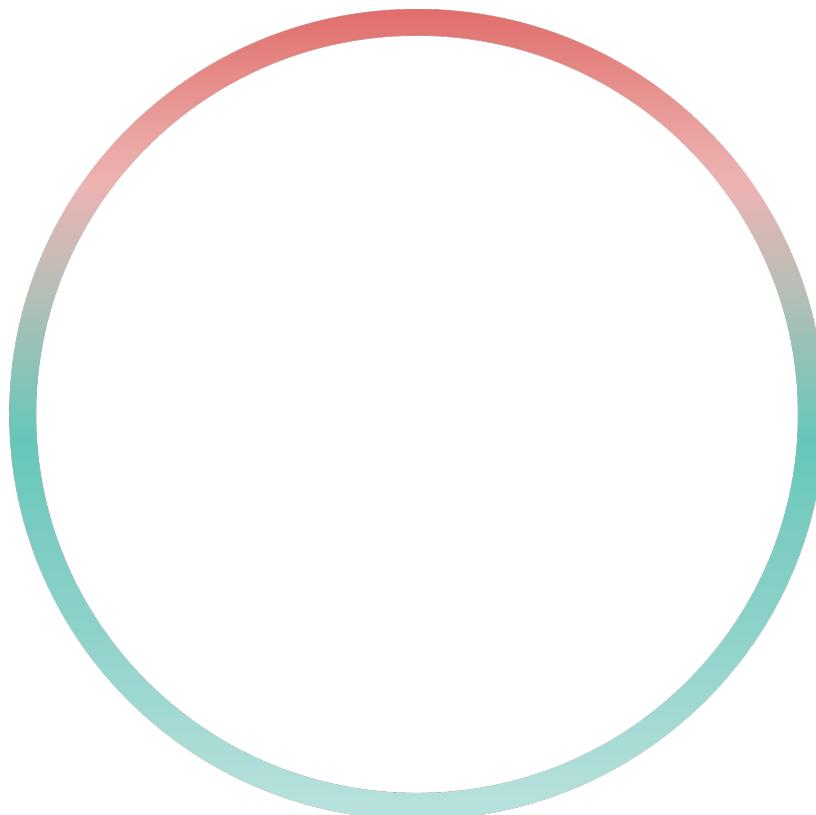
- Según los lados: triángulo equilátero (todos los lados y ángulos son iguales), triángulo isósceles (hay dos lados y ángulos iguales), y triángulos escalenos (todos los ángulos y lados son diferentes). En el plano usual, todos los triángulos tienen ángulos interiores que suman  $180^\circ$ . Es decir, si  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  son los ángulos interiores de un triángulo, opuestos a los lados  $a, b, c$ , la suma de esos ángulos da  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ .
- Según los ángulos: triángulo rectángulo (un ángulo recto), triángulo acutángulo (todos los ángulos agudos, menores de  $180^\circ$ ) y obtusángulo (con un ángulo obtuso mayor de  $180^\circ$ ).

Los polígonos de 4 lados se llaman cuadriláteros. Existen varios tipos de cuadriláteros: cubo, rombo, romboide, trapecio y trapezoide. Algunos cuadriláteros son paralelogramos: tienen lados y ángulos paralelos dos a dos. Son paralelogramos el cubo, el rombo y el romboide. El trapecio tiene solamente un par de lados paralelos y tiene

2 no paralelos. El trapecoide no tiene lados paralelos. La suma de los 4 ángulos interiores de un cuadrilátero,  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ , suma  $360^\circ$ . Es decir  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ .

### 3.2 Áreas

Se llama círculo al área o espacio interior de una circunferencia.



El área del círculo se calcula mediante la expresión siguiente:

#### Área del círculo

$$A_c = \pi R^2 \quad (40)$$

Para polígonos usuales, tenemos las siguientes fórmulas del área:

- Área del triángulo:  $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$ , donde  $b$  es la base y  $h$  es la altura del triángulo.
- Área del cuadrado:  $A_\square = L^2 = L \cdot L$
- Área del rectángulo o del romboide:  $A_R = b \cdot h$ , donde  $b$  es la base, y  $h$  es la altura (height, en inglés).
- Área del rombo:  $A_r = \frac{D \cdot d}{2}$ , donde  $D$  es la diagonal mayor, y  $d$  es la diagonal menor.
- Área del trapecio isósceles:  $A_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ , donde  $B$  es la base mayor y  $b$  es la base menor.
- Área del polígono regular de  $n$ -lados iguales a  $L$ :

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

donde  $p = nL$  es el perímetro y  $a$  es el apotema (segmento que une el centro con el punto medio de cualquier lado del polígono regular).

## TRIÁNGULO



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

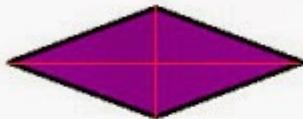
## CUADRILÁTEROS



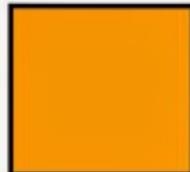
$$A = b \cdot h$$



$$A = b \cdot h$$



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

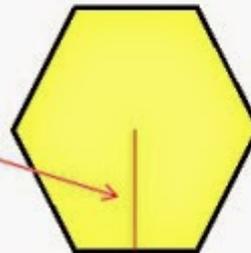
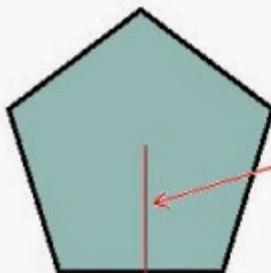


$$A = l \cdot l$$



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

## POLÍGONOS REGULARES



$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

### 3.3 Volúmenes

Se llama esfera al lugar geométrico de todos los puntos en el espacio que equidistan (una distancia  $R$  llamado radio) de un punto llamado CENTRO. La ecuación de una esfera tridimensional, centrada en el punto  $P(a, b, c)$ , y de radio  $R$  es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

El volumen de la esfera tridimensional y su área se calculan de la forma siguiente:

#### Área y volumen de la esfera tridimensional

El área de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

$$A_E = 4\pi R^2 \quad (41)$$

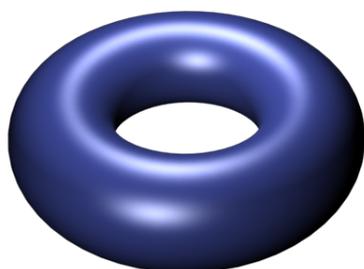
El volumen de la esfera se calcula mediante la expresión o fórmula siguiente:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (42)$$

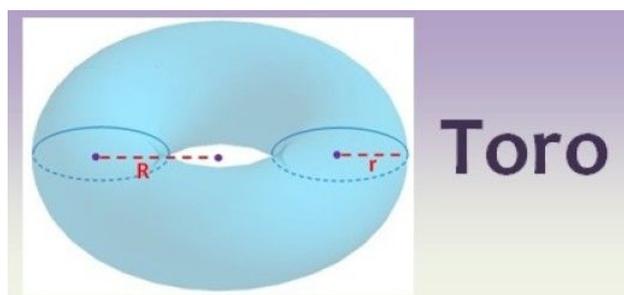
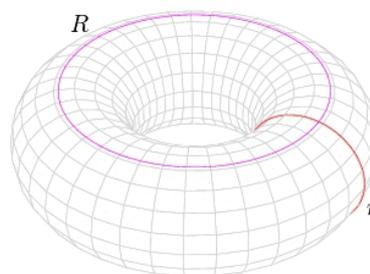


Otros volúmenes importantes:

- Prisma de lados  $a, b, c$ :  $V_p = a \cdot b \cdot c = abc$
- Cubo o hexaedro ( $a=b=c=L$ ):  $V_{cubo} = L^3 = L \cdot L \cdot L$
- Tetraedro o símplex:  $V_t = \frac{L^3}{6}$
- Cilindro:  $V_{cilindro} = A_b \cdot h = \pi R^2 h$ , donde  $A_b$  es el área de la base,  $R$  es el radio de la base, y  $h$  es la altura del cilindro.
- Pirámide:  $V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$ , donde  $A_b$  es la base y  $h$  es la altura de la pirámide.
- Cono recto:  $V_{cono} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$ , donde  $A_b$  es el área de la base y  $R$  es el radio,  $h$  es la altura del cono.
- Dónut o toro:  $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 R r^2$ , donde  $R$  es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y  $r$  es el radio del tubo. El área del toro es igual a  $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 R r$ .



$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$







## 5 Proporcionalidad

### Proporcionalidad directa

Se dice que dos cantidades (o magnitudes)  $X$  e  $Y$  son directamente proporcionales (D.P.), si y solamente si, el aumento (o disminución) de  $X$  implica el aumento (o disminución) de  $Y$ . Equivalentemente, a nivel matemático, dos magnitudes son D.P. si su cociente permanece constante, es decir,

$$\frac{X}{Y} = k = \text{constante} \quad (46)$$

### Proporcionalidad indirecta o inversa

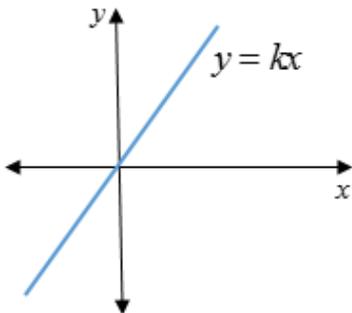
Se dice que dos cantidades (o magnitudes)  $X$  e  $Y$  son indirectamente o inversamente proporcionales (I.P.), si y solamente si, el aumento (o disminución) de  $X$  implica la disminución (o aumento) de  $Y$ . Equivalentemente, a nivel matemático, dos magnitudes son I.P. si su producto permanece constante, es decir,

$$XY = X \cdot Y = k = \text{constante} \quad (47)$$

## Direct or Inverse Variation

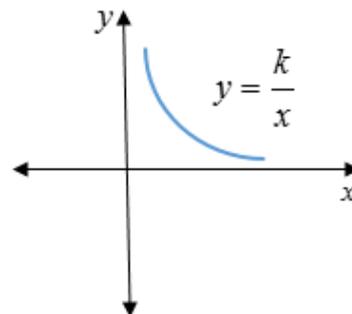
### Directly Variation

$y$  varies directly as  $x$   
 $y$  is directly proportional to  $x$   
 $y \propto x$   
 $y = kx$  for a constant  $k$



### Inverse Variation

$y$  varies inversely as  $x$   
 $y$  is inversely proportional to  $x$   
 $y \propto \frac{1}{x}$   
 $y = \frac{k}{x}$  for a constant  $k$



## 6 Porcentajes

### Tanto por ciento

El  $X\%$  de un número  $N$  se calcula mediante la expresión:

$$X\% \text{ de } N = \frac{X \cdot N}{100}$$

### Tanto por mil

El  $Y\%$  de un número  $N$  se calcula mediante la expresión:

$$Y\% \text{ de } N = \frac{Y \cdot N}{1000}$$

### Tanto por uno

El  $1/Z$  o tanto por uno de un número  $N$  se calcula mediante la expresión:

$$1/Z \text{ de } N = \frac{N}{Z}$$

## 7 Ecuaciones

### 7.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal del tipo  $ax + b = c$ , si  $a \neq 0$ , tiene como solución única:

$$x = \frac{c - b}{a} \quad (48)$$

### 7.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión formal del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de esta ecuación tiene un fórmula general dada por

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (49)$$

y donde  $\Delta = b^2 - 4ac$  es una cantidad numérica llamada *discriminante*. El tipo de solución de la ecuación cuadrática o segundo grado depende del signo del discriminante:

- Si  $\Delta > 0$ , hay dos raíces reales diferentes  $x_+, x_-$ .
- Si  $\Delta = 0$ , hay dos raíces reales iguales  $x_+ = x_- = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$ , no hay solución real. Existirían dos soluciones complejo-conjugadas  $Z_1 = x_+, Z_2 = z_- = Z_1^* = \overline{Z_1}$ , en un sistema de números denominado números complejos  $\mathbb{C}$ , cuyo estudio está más allá de este curso elemental.

Las ecuaciones de primer grado o lineales representan líneas rectas. Las ecuaciones de segundo grado representan curvas que son cónicas (secciones de un cono). Veamos ejemplos. Ecuación de una circunferencia de radio  $R$  centrada en  $(a, b)$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ecuación de una parábola:  $y = ax^2 + b$ .

Ecuación de una hipérbola:  $xy = c$ .

Ecuación de una elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

En general, para una curva cuadrática plana, se tiene que:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$$

También existen curvas cúbicas, con forma general:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H = 0$$

O también curvas elípticas planas, con forma general:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

y más generalmente curvas (hiper)elípticas con  $y^2 = P(x)$ . Existen otras fórmulas para politopos en  $nd$ , para positroides, y también para apeirógonos, apeiroedros, o también para el amplituedro:

$$\mathcal{M}_{n,k,L}[Z_a] = \text{Vol}[\mathcal{A}_{n,k,L}[Z_a]]$$

y

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$$

Además, conviene saber el uso de la circunferencia goniométrica o unidad, el sistema de radianes, grados sexagesimales, y el sistema de gradianes (o gones):  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$ .

## 8 Símbolos matemáticos comunes

Generalmente, en Matemáticas o Física usamos letras de alfabetos (normalmente latino o griego, y de otros excepcionalmente, cuando es necesario) y símbolos de operadores matemáticos. Para los operadores:

$$=, \neq, \approx, \simeq, \cong, \sim, \propto, >, <, \geq, \leq, \gtrsim, \lesssim, \equiv, \doteq, \pm, \mp$$

$$D, \Delta x, \nabla, \square, |x|, \|\cdot\|, \sum_i x_i, +, \cdot, -, \cdot, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r}, f(t), A_{ij}, A_{i_1 \dots i_n}, \rightarrow, \vec{A}, \vec{\vec{A}}, \vec{\vec{\vec{A}}}, \leftrightarrow, \dots$$

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}, \int dt, \int_a^b ()dt, a \cdot b, a \times b, a \wedge b, ab, \frac{a}{b}, a^x, \log_b x, \sqrt[x]{x}$$

## 9 Estructuras matemáticas abstractas

Las Matemáticas estudian también estructuras abstractas que los matemáticos o los físicos nombran con denominaciones que molan:

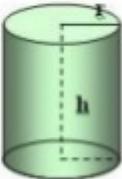
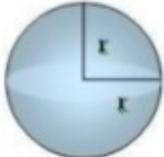
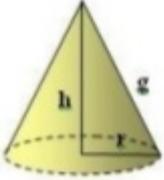
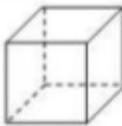
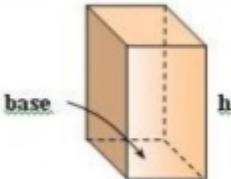
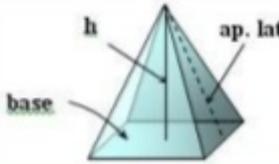
- Cuerpos.
- Anillos.
- Seminillos.

- Grupos.
- Semigrupos.
- Conjuntos y subconjuntos.
- Categorías y funtores.
- Grupoides.
- Espacios vectoriales.
- Variedades diferenciales.
- Espacios funcionales.
- Álgebras.
- Algebroides.
- Espacios tensoriales, matrices e hipermatrices.
- Grafos e hipergrafos, digrafos e hiperdigrafos.
- Matroides.
- ...

## 10 Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.

### ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

#### Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{\text{total}} = 2\pi r (h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{\text{total}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Cono		$A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6 a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim. base} \cdot h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \cdot h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim. base} \times \text{ap. lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$
VOLUMEN	$a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15+\sqrt{3}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

Para una  $N$ -esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \quad (50)$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (51)$$

$$V_N(R) = R \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} V_{N-1}(R) \quad (52)$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} R^N \quad (53)$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \quad (54)$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \quad (55)$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \quad (56)$$

$$V_0(R) = 1, \quad (57)$$

$$A_0(R) = 2, \quad (58)$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \quad (59)$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \quad (60)$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (61)$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio  $R$  es la función

$$V(N, R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} R^N \quad (62)$$

El valor máximo para un  $R$  fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) = \log \pi + 2 \log R \quad (63)$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\log V(N, R)) = \frac{\log \pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2} + 1\right) \quad (64)$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios  $L^p$ . Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (65)$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso  $p = 2$  es el caso usual euclidiano, pero otros valores de  $p$  son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en  $L^p$  está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)R\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para  $p = 1$ , la norma del “taxicab”, o para  $p = \infty$  (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \quad (66)$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \quad (67)$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales  $p_i$ , definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1, \dots, p_n} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1, \dots, p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)}$$

## 11 Alfabetos (latino, griego,...)

ANC.	CLASS.	NAME	CORRESP.	ANC.	CLASS.	NAME	CORRESP.
A	A	α	alpha	a	1	N	N v nu n 50
B	B	β	beta	b	2	Ξ	Ξ ξ xi x 60
Γ	Γ	γ	gamma	g, n <sup>1</sup>	3	Ο	Ο ο omicron o 70
Δ	Δ	δ	delta	d	4	Π	Π π pi p 80
E	E	ε	epsilon	e	5	Ϟ ϙ, Ϛ	Ϟ ϙ, Ϛ qoppa <sup>3</sup> q 90
F	F, Ϛ		digamma, w	w	6	Ρ	Ρ ρ rho r, rh 100
			stigma <sup>2</sup>			Σ	Σ σ, ϛ sigma <sup>4</sup> s 200
Z	Z	ζ	zeta	z	7	Τ	Τ τ tau t 300
H	H	η	eta	e	8	Υ	Υ υ upsilon y, u <sup>5</sup> 400
Θ	Θ	θ	theta	th	9	Φ	Φ φ phi ph, f 500
I	I	ι	iota	i, j	10	Χ	Χ χ chi ch 600
K	K	κ	kappa	k	20	Ψ	Ψ ψ psi ps 700
Λ	Λ	λ	lambda	l	30	Ω	Ω ω omega o 800
M	M	μ	mu	m	40	Ϻ ϻ	Ϻ ϻ sampi <sup>6</sup> s 900

The regional archaic letters yot, sha and san are not included in the table. The letter san was the ancestor of sampi.

1. Only if before velars, i.e., before kappa, gamma, xi and chi.

2. ‘Digamma’ is the name used for the F-shaped form. It was mainly used as a letter (but also sometimes, in its lower-case form, as a number), whereas the shape and name ‘stigma’ is used only for the number. Both names were derived from the respective shapes; in fact, the stigma is a medieval, uncial version of the digamma. The name ‘stigma’ is derived from the fact that the letter looks like a sigma with a tau attached under it – though unfortunately not in all modern fonts. The original letter name, also giving its pronunciation, was ‘waw’.

3. The version of qoppa that looks like a reversed and rotated z is still in occasional use in modern Greek. Unicode calls this version ‘koppa’.

4. The second variant of sigma is used only at the end of words.

5. Upsilon corresponds to ‘u’ only as the second letter in diphthongs.

6. In older times, the letter sampi was positioned between pi and qoppa.

## 12 Métodos de razonamiento y pensamiento lógico-matemático

En Matemáticas, y también en Ciencias Exactas abstractas, hay varios métodos para demostrar e inferir o verificar verdades (veremos algunos de ellos en el método científico):

- Inducción o generalización. A partir de un enunciado particular, se obtiene un enunciado general.
- Deducción. A partir de unos postulados o axiomas se deducen formalmente, por pura lógica, consecuencias lógicas.
- Abducción. Es un tipo de inferencia no deductiva que infiere no una generalización como hace la inducción, sino una hipótesis sobre una estructura o proceso que explica los datos. También se le llama “razonamiento abductivo”, “inferencia abductiva” o “inferencia explicativa”.
- Reducción al absurdo. Es una técnica lógica que permite demostrar algo partiendo de una “verdad” asumida como hipótesis y llegando a una contradicción. Ex contradictione quod libet (E.C.Q.).

- Contraste o verificación de hipótesis empírica. Cualquier afirmación, puede en el fondo ser contrastada “experimentalmente”.
- Análisis de datos. Cualquier afirmación teórica conlleva o puede implicar cierto comportamiento en los datos. Hay métodos estadísticos para estudiar estos datos. Además, hoy día tenemos la computación, no solamente algoritmos humanos, la AI (IA, artificial intelligence/inteligencia artificial), y las Ciencias de Grandes Datos (Big Data), aprendizaje de máquinas (Machine Learning), y otras técnicas poderosas basadas en métodos matemáticos abstractos avanzados de la teoría de la probabilidad, denominados métodos bayesianos, que complementan los más tradicionales métodos frecuentistas.

El razonamiento humano normal funciona mediante lógica booleana o bivaluada. Sin embargo, existen lógicas ternarias, multivaluadas, o incluso lógica cuántica.

## 13 El método científico

¿Qué es el método científico? En este curso tomamos como definición la siguiente:

**Es un PROCEDIMIENTO para la adquisición, organización, comprobación, transmisión y conservación (preservación) del CONOCIMIENTO.** Está basado en la INTUICIÓN, la LÓGICA, el PENSAMIENTO, la RAZÓN Y LA EXPERIENCIA.

En cualquier momento, dicho procedimiento o método comunica o es capaz de comunicar sus resultados, de forma que se revisan y corrigen los posibles ERRORES.

La corrección de errores y de los resultados (o del método) requiere la REPRODUCIBILIDAD y COMPROBACIÓN DE LOS DATOS o conclusiones de forma INDEPENDIENTE.

En cualquier momento del proceso puede producirse la PUBLICACIÓN Y COMUNICACIÓN DE LOS RESULTADOS EN FORMA DE DATOS, o DESCUBRIMIENTOS, Y/O MODELOS/TEORÍAS/LEYES/PRINCIPIOS, incluso AXIOMAS en Matemáticas, O BIEN nuevas hipótesis o CONJETURAS.

En su versión moderna, comenzó con Galileo Galilei: “(...)Egli è scritto in lingua matematica(...)”

El método científico utiliza las Matemáticas desde entonces pero se fundamenta en la observación de la Naturaleza, los fenómenos naturales, las regularidades y anomalías que en ellos se producen. Está originado por la CURIOSIDAD.

En general, podemos considerar que el método científico está formado por una serie de etapas o pasos. A saber:

- 1. OBSERVACIÓN DE LOS FENÓMENOS NATURALES, sus PATRONES LÓGICOS/TEÓRICOS y las anomalías en los mismos.
- 2. ELABORACIÓN DE HIPÓTESIS CIENTÍFICAS, por inferencia o inducción lógica, en ocasiones por pura intuición o sentido común, que se pueden comprobar/verificar o refutar/invalidar, mediante SIMULACIONES COMPUTACIONALES Y TEÓRICAS (en ordenadores, computadoras,...), mediante “experimentos mentales”/“thought experiments”/gedanken experiments.
- 3. Diseño y REALIZACIÓN DE EXPERIMENTOS CIENTÍFICOS, que nos proporcionan DATOS experimentales en laboratorios. Los datos son habitualmente NÚMEROS (cantidades) y las magnitudes físicas de los datos son PROPIEDADES(cualidades) que pueden ser medidas o cuantificadas.
- 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS EXPERIMENTALES mediante pensamiento lógico, matemático y razonado o intuitivo. Esto nos lleva a la refutación/invalidación de la/s hipótesis o la COMPROBACIÓN/VERIFICACIÓN de la/s hipótesis o conjeturas.
- 5. ELABORACIÓN DE UN MODELO.
- 6. FORMULACIÓN DE UNA TEORÍA.
- 7. ESTABLECIMIENTO DE LEYES Y PRINCIPIOS.
- 8. ENUNCIADO DE AXIOMAS Y POSTULADOS.

**Comentario:** Los pasos o etapas del método científico no siguen necesariamente el orden anterior. Por ejemplo, uno puede comenzar con una teoría y estudiar posibles nuevos fenómenos a observar en vez de elaborar la teoría a partir de la síntesis de unos fenómenos u observaciones.

## 14 Ciencia: Algunas definiciones adicionales

1) Una **conjetura** es un modelo incompleto, o una analogía (comparación) con otro dominio. Ejemplos: el llamado desplazamiento hacia el rojo cosmológico está causado por la luz que pierde energía cuando viaja a través del espacio (conjetura de la “luz cansada”), las leyes de la Física son constantes en el tiempo y el espacio en todo el Universo (hipótesis de universalidad o uniformización), las especies evolucionan a estadios superiores (evolución).

2) Una **hipótesis** (o conjetura verosímil) es un modelo basado en todos los datos de un determinado dominio, sin contraejemplos e incorporando una nueva predicción que debe ser validada por hechos empíricos o experimentales (o bien lógico-formales en un sistema axiomático usado en las Matemáticas). Equivalentemente, una hipótesis científica es una IDEA o proposición o afirmación que puedo comprobar experimental o lógica y formalmente mediante deducciones o inducciones matemáticas. Ejemplos: el envejecimiento mental puede ser retrasado mediante el uso del “úsalo o piérdelo”, “el desplazamiento hacia el rojo es un desplazamiento Doppler”.

3) Una **teoría** es una hipótesis refrendada o validada con al menos un dato, idea o predicción no trivial. Ejemplos: relatividad, Cosmología del Big Bang, teoría de la Evolución, teoría cinético-molecular, teoría del caos,...

4) Una **ley** es una teoría que ha recibido validación en todas las posibles ramificaciones y formas, y que es conocida y válida hasta cierto nivel de exactitud o aproximación. Ejemplos: Mecánica newtoniana, gravitación universal, ley de Henry, leyes de la Termodinámica.

5) Un **principio** es una ley verificada que usamos, sin demostrar, en la deducción de nuevas hipótesis o conjeturas, de nuevos fenómenos, por el método lógico-matemático-formal.

6) Un **axioma** es una regla matemática aceptada como universalmente cierta o verdadera. Ejemplo: la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad distributiva, la existencia de un elemento neutro, el axioma de elección,...

7) Un **modelo** es una representación o “imagen”, o aproximación simplificada, simplificación de un sistema (real o imaginario) que usamos para explicar su funcionamiento real (físico) o virtual (imaginario). Ejemplos: Modelo Estándar, Modelo Cosmológico Estándar, Modelo de Capas, Modelo de Bolas, Modelo de Cuerdas, Modelo de Thomson, Modelo de la partícula puntual. . .

8) **Ciencia** es cualquier área del saber que usa el método científico (y no un sucedáneo) para obtener conocimiento. ¡Rechaza imitaciones! No son ciencias ni la Astrología (sí lo es en cambio la Astronomía), ni la religión, ni sectas como la Cienciología y muchas otras “pseudociencias”. Atención: esto no significa que la Ciencia pueda explicarlo todo, ni que esas otras áreas de la Humanidad como la Religión, la Mitología, o la superchería no puedan tener aplicaciones, en ocasiones bastante terribles. Generalmente las ciencias se dividen en **exactas o naturales** e **inexactas o sociales** (aunque es una división algo ad hoc y tal vez obsoleta ya en los tiempos en que vivimos, cada vez más matematizados).

9) Ecuación (a veces fórmula). Es una relación matemática entre variables, generalmente escrito en forma de letras y símbolos matemáticos para mayor brevedad. Ejemplos:

$$E = mc^2, PV = nRT, A = mc^3/h, L_c = 2\pi R, \partial_\sigma^2 X^\mu(\sigma, \tau) + \partial_\tau^2 X^\mu(\sigma, \tau) = 0, \dots$$

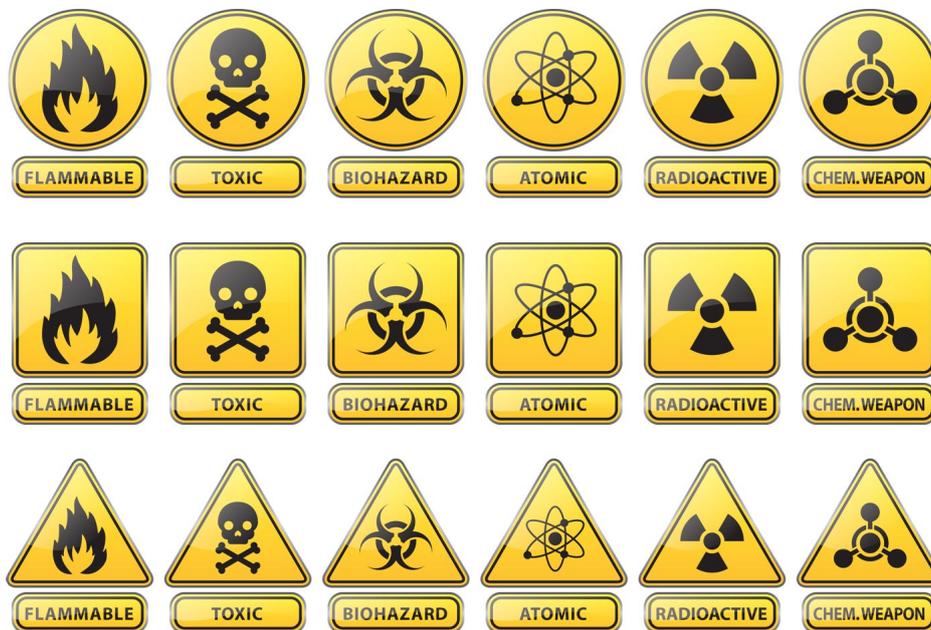
Las ecuaciones también sirven para estudiar datos, mediante el uso de representaciones gráficas bidimensionales o tridimensionales.

10) Gráfica de una función o un conjunto de datos: una representación en el plano o espacio de los valores de cierta función o de un conjunto de datos.

## 14.1 Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio

En todo laboratorio hay unas normas de seguridad que hay que aplicar para evitar accidentes o peligros mortales. Es similar a un trabajo con riesgo por lo que hay legislación al respecto. Además, internacionalmente, hay unos pictogramas de laboratorio que advierten de diferentes peligros a sustancias o situaciones.

A continuación una selección de pictogramas usuales en la vida cotidiana y los laboratorios/trabajos usuales (hay más que estos, como ejercicio pueden buscarse otros pictogramas):



	Materias Inflamables		Peligro en General
	Materias Explosivas		Radiación Láser
	Materias Tóxicas		Materias Comburentes
	Materias Corrosivas		Radiaciones No Ionizantes
	Materias Radioactivas		Campo Magnético Intenso
	Materias Suspendidas		Riesgo de Tropiezo
	Vehículos de Mantenimiento		Riesgo Biológico
	Riego Eléctrico		Materia Nocivas o Irritantes

		<b>bombona de gas</b>	<b>Gases a presión</b> en un recipiente (gases comprimidos, licuados o disueltos). Algunos pueden explotar con el calor. Los licuados refrigerados pueden producir quemaduras o heridas relacionadas con el frío, son las llamadas quemaduras o heridas criogénicas.
		<b>Calavera con tibias</b>	<b>Tóxicos:</b> sustancias y preparados que, por inhalación, ingestión o penetración cutánea en pequeñas cantidades producen efectos adversos para la salud. Pueden provocar náuseas, vómitos, dolores de cabeza, pérdida de conocimiento e, incluso, la muerte.
		<b>Corrosión</b>	<b>Corrosivos:</b> Pueden causar daños irreversibles a la piel u ojos, en caso de contacto o proyección.
 <b>Xn Nocivos</b> <b>Xi Irritantes</b>		<b>Exclamación</b>	Producen efectos adversos en dosis altas. También pueden producir irritación en ojos, garganta, nariz y piel. Provocan alergias cutáneas, somnolencia y vértigo.
		<b>Peligro par la salud</b>	Pueden ser: Cancerígenos (pueden provocar cáncer); Mutágenos (pueden modificar el ADN de las células); Tóxicos para la reproducción; Pueden modificar el funcionamiento de ciertos órganos, como el hígado, el sistema nervioso, etc., provocar alergias respiratorias o entrañar graves efectos sobre los pulmones..
 <b>N</b>		<b>Medio ambiente</b>	<b>Peligroso para el medio ambiente:</b> presentan o pueden presentar un peligro inmediato o futuro. Provocan efectos nefastos para los organismos del medio acuático (peces, crustáceos, algas, otras plantas acuáticas, etc.). Símbolo en el que no suele existir la palabra de advertencia pero, cuando existe, es siempre: "Atención".

	<b>E</b> <b>Explosivo:</b> En determinadas condiciones, incluso sin presencia de oxígeno, la sustancia puede detonar o, bajo un calor intenso, explotar.		<b>E</b> <b>Comburente:</b> Productos químicos que en contacto con sustancias inflamables producen una reacción fuertemente exotérmica.
	<b>F+</b> <b>Extremadamente inflamable:</b> Sustancias que a temperatura y presión normales son inflamables con el aire.		<b>F</b> <b>Fácilmente inflamable:</b> Productos que pueden inflamarse con aire a temperatura ambiente o sólidos que queman con un contacto breve con una llama.
	<b>T+</b> <b>Muy tóxico:</b> Productos que por inhalación o ingestión en cantidades muy pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.		<b>T</b> <b>Tóxico:</b> Productos que por inhalación o ingestión en cantidades pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.
	<b>Xn</b> <b>Nocivo:</b> Productos que por inhalación, ingestión o penetración cutánea pueden producir efectos graves o crónicos.		<b>Xi</b> <b>Irritantes:</b> Productos que en contacto con la piel o la mucosa pueden producir una reacción inflamatoria.
	<b>C</b> <b>Corrosivo:</b> Productos que en contacto con tejidos vivos, como la piel humana, destruyen el tejido.		<b>N</b> <b>Peligroso para el medio ambiente:</b> Sustancias que pueden producir un efecto nocivo al medio ambiente.

## 14.2 Instrumentos de laboratorio

Un laboratorio de Física hoy día es muy variado, además de poder ser también virtual. Instrumentos posibles de medida: telescopio, microscopios (incluso los electrónicos), manómetro, barómetro, teslómetro, multímetro digital, balanzas, osciloscopios, material de Electrónica y circuitería, klystrons, termómetros, calorímetros, cronómetros, cintas métricas, calibradores, y otros varios son instrumentos usuales y populares en los laboratorios de Física convencionales. En los laboratorios de Química, también en los usuales, podemos encontrar probetas, mecheros Bunsen, pipetas, matraces, reactivos químicos, ... Este dibujo ayuda a entender la tipología de materiales en laboratorios de Química:



## 15 Herramientas físicas

La Física usa las Matemáticas como su lenguaje formal, aunque no es reducible solamente a éste. La Física tiene diferentes áreas con intersección mutua no vacía en varios casos. Una lista no exhaustiva es la siguiente:

- Mecánica. Puede ser Mecánica de partículas y sistemas. Mecánica de fluidos y campos son lo que junto a la de partículas forman la Mecánica clásica.
- Astronomía, Astrofísica y Cosmología. La Radioastronomía, neutrínología y otras ramas recientes como la astronomía de ondas gravitacionales o de rayos cósmicos están incluidos aquí.

- Mecánica Cuántica.
- Óptica.
- Física de ondas.
- Geofísica.
- Físico-Química.
- Física biológica/Biofísica.
- Física de los sistemas complejos.
- Física no lineal.
- Electrónica.
- Electromagnetismo (parte de la Mecánica Clásica).
- Termodinámica.
- Física relativista.
- Física matemática o física teórica.
- Mecánica estadística.
- Física nuclear y de partículas (altas energías).
- Física atómica.
- Física molecular.
- Espectroscopía.
- Radiofísica.
- Teoría de (super)cuerdas y p-branas.
- Relatividad General.

En la Química hay una división por áreas similar. Así, hablamos de Astroquímica, Química orgánica, Bioquímica, Química-Física, Química cuántica, Química molecular, Electroquímica, Termoquímica, Cinética química, Química de polímeros, Química atómica y nuclear, Química de las reacciones químicas y estequiometría, Química analítica, Química atmosférica,...

Del estudio del movimiento se encargan dos partes de la Física: la **Cinemática** y la **Dinámica**. Juntas forman la Mecánica Clásica de partículas y sistemas de partículas. El modelo de la partícula puntual es usado habitualmente en Física. Aunque hoy día se pueden usar otros modelos (cuerdas y membranas) hasta cierto punto de sofisticación y entendimiento.

## 15.1 Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros.

### Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad. Existen:

- Magnitudes cualitativas(solamente indican propiedades).
- Magnitudes cuantitativas(especificadas por números de diferente tipo).

Además, hay dos tipos de magnitudes cuantitativas en cualquier sistema de unidades(cantidades patrón que se usan para comparar su valor):

- Magnitudes fundamentales o básicas: no se pueden expresar en términos de otras. Las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional son 7. Hay otros sistemas de unidades además del Sistema Internacional o métrico: el sistema cegesimal (C.G.S.), el sistema técnicos, las unidades naturales de Planck y otros varios.
- Magnitudes derivadas: combinaciones de dos o más magnitudes básicas o fundamentales. Ejemplos de magnitudes derivadas en el sistema internacional:
  - Superficie o área ( $m^2$ , dimensiones  $L^2$ ), volumen ( $m^3$ , dimensiones  $L^3$ )
  - Velocidad(longitud entre tiempo,  $m/s$ , dimensiones  $L/T$ ;  $1m/s=3.6km/h$ ), aceleración (velocidad entre tiempo, unidades  $m/s^2, km/h^2$ , dimensiones  $L/T^2$ ,  $g = 9,81m/s^2$ ).
  - fuerza(masa por aceleración, dimensiones  $ML/T^2 = MLT^{-2}$ , unidades  $N$ , newtons,  $1N = 1kgm/s^2$ ; 1kilopondio= $1kp=9.81m/s^2$ ; 1 dina= $1kgcm/s^2$ ,  $1N = 10^5dinas$ ).
  - Energía(masa por cuadrado de velocidad, dimensiones  $ML^2T^{-2}$ , unidades julios  $1J = 1kgm^2/s^2$ , ergios  $1J = 10^7erg$ , kilovatios-hora o kWh:  $1kWh = 3,6MJ$ ), presión(fuerza entre superficie, unidad del S.I.:  $1Pa = 1N/1m^2$  es el pascal, dimensiones  $F/A = ML^{-1}T^{-2} = \frac{M}{LT^2}$ ), densidad (masa entre volumen,  $M/V$ ,  $ML^{-3}$ ,  $kg/m^3$  ó  $g/cm^3$ ;  $10^3kg/m^3 = 1g/cm^3$ , potencia (energía entre tiempo, dimensiones  $ML^2T^{-3}$ ,  $W$ , vatios,  $E/T = J/s = W$ ).
  - Capacidad (litros,  $L$ ,  $1dm^3 = 1L$ ,  $1cm^3 = 1mL$ ,  $1kL = 1m^3$ ).

Curiosidad, es que hay diferentes tipos de magnitudes según el tipo de números que tratemos(el siguiente cuadro NO hay que estudiarlo):

### Tipos de magnitudes según los tipos de números

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).

Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un “espacio” abstracto o espacio “target” se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ... Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos  $\phi(X)$  son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías:  $\phi : X \rightarrow Y$ , con  $y = \phi(X)$ .

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una “constante fundamental universal”. Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ).
- La constante de Planck ( $h$ ).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ( $\Delta f(Cs - 133)$ ).
- La constante de Boltzmann ( $k_B$ ).
- La carga eléctrica elemental del electrón ( $e$ ).
- La constante de Avogadro ( $N_A$ ).
- La eficacia luminosa  $K_{cd}$  de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck  $h$ , y la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón  $e$ , corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina  $\alpha = e^2/2c\epsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\epsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$ . La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microestados accesibles mecanocuánticos mediante  $S = k_B \ln \Omega$ . La frecuencia  $\Delta f(Cs - 133)$  corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa  $K_{cd}$  de la radiación de 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios  $W$ , y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de un observador estándar, medido en lúmenes  $lm$ , a una frecuencia de 540 THz.

### 15.1.1 Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

#### Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es  $T$ . La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$1\text{Hz} = \frac{\Delta f(Cs - 133)}{9192631770} s^{-1} \leftrightarrow 1s = \frac{9192631770}{\Delta \nu(Cs - 133)} \quad (68)$$

### Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es  $L$ . La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en  $1/299792458$  segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia  $\Delta(Cs - 133)$ . Esto da como valor exacto  $c = 299792458m/s$ , mientras que la longitud del metro queda definida en función de  $c$  y de  $\Delta f(Cs - 133)$  como sigue:

$$1m = \frac{c}{299792458} s = \frac{9192631770}{299792458} \frac{c}{\Delta f(Cs - 133)} \approx 30,663319 \frac{c}{\Delta f(Cs - 133)} \quad (69)$$

### Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es  $M$ . La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck  $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$  como fija en unidades de  $J \cdot s$  ó  $J/Hz$ , o bien  $kg \cdot m^2/s$ . Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$1kg = \frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34} \frac{s}{m^2}} = \frac{299792458^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{c^2} = 1,4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2} \quad (70)$$

### Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es  $I$ . La unidad base es el amperio  $A$  definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón  $Q(e) = e = 1,602176634 \times 10^{-19}C$  ( $A \cdot s$ ) como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$1A = \frac{e}{1,602176634 \times 10^{-19} s} = \frac{e\Delta f(Cs - 133)}{(1,602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6,789687 \cdot 10^8 e\Delta f_{Cs} \quad (71)$$

### Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es  $n$ . La unidad base es el mol ( $mol$ ), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro  $N_A$ , fijada al valor  $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ . De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$1mol = \frac{6,02214076 \cdot 10^{23}}{N_A} \quad (72)$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

### Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es  $T$  ó  $\Theta$ . La unidad base es el grado kelvin  $K$  definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como  $k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23}$  como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como  $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$ . Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$1K = \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2,2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}$$

(73)

### Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es  $I_L$ , o también  $I_v$  ó  $\mathcal{J}$ . La unidad base de intensidad luminosa es la candela  $cd$ , definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz,  $K_{cd}$ , ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio,  $lm \cdot W^{-1}$ , o bien en candelas por estereoradián entre vatio  $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$ , o también  $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$ , donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes  $h, c, \Delta f_{Cs}$ . Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando  $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$  a:

$$1cd = \frac{K_{cd} kg \cdot m^2}{683 s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2,61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2$$

(74)

En el sistema C.G.S. o cegesimal, la unidad fundamental de longitud es el centímetro y la de masa es el gramo. Se mantiene el resto de unidades básicas en general. La dina es la unidad de fuerza, siendo el producto de 1 gramo por  $1cm/s^2$  (galileo), dicha unidad de fuerza (1 dina). En el sistema técnico, el kilogramo-fuerza o kilopondio es la unidad de fuerza, manteniéndose el resto de unidades también en general.

#### 15.1.2 Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud  $L$ , metro,  $1\text{Å} = 10^{-10}m$  o angström, 1 pc o parsec = 3,26 años-luz (lyr) =  $3,086 \cdot 10^{-10}m$ , unidad astronómica ( $1UA = 1,496 \cdot 10^{11}m$ ), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa  $M$ ,  $1utm = 9,8kg$ ,  $1g = 10^{-3}kg$ ,  $1u \approx 1,66 \cdot 10^{-27}kg$ .
- Tiempo  $T$ : años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica  $A$  (mA, ...)
- Temperatura absoluta  $\Theta$ , kelvin  $K$ . Otras: grados roemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa  $I_v, J$ : candela.
- Cantidad de sustancia o materia  $n$ : el mol.
- Ángulo plano  $\theta$  (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales °C, gradianes (grados centesimales).  $2\pi rad = 360^\circ = 400^g$ .
- Ángulo sólido  $\Omega$ : estereoradián (sr).
- Superficie:  $L^2$ . Metros cuadrados. Hectáreas  $ha$ .  $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$ .

- Volumen:  $L^3$ . Metro cúbico. Relacionado con capacidad:  $1L = dm^3$ ,  $1m^3 = 1kL$ ,  $1mL = 1cm^3$ .
- Densidad (volúmica) de masa  $M/L^3$ .
- Densidad (superficial) de masa  $M/L^2$ .
- Densidad (lineal) de masa  $M/L$ .
- Densidad (volúmica) de carga  $Q/L^3$ .  $Q = IT$ .
- Densidad (superficial) de carga  $Q/L^2$ .  $Q = IT$ .
- Densidad (lineal) de carga  $Q/L$ .  $Q = IT$ .
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente):  $L^{-3}$ ,  $L^{-2}$ ,  $L^{-1}$ .
- Velocidad  $L/T = LT^{-1}$ . m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración:  $LT^{-2}$ .  $m/s^2$ . Los galileos o gal  $1gal = 1cm/s^2$ .
- Jerk:  $LT^{-3}$ .
- Absent/absition:  $L \cdot T = L/T^{-1}$  (m/Hz).
- Velocidad angular:  $T^{-1}$ .  $rad/s$  ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios  $T^{-1}$  (vueltas por segundo, c.p.s.).  $1Hz = 1s^{-1}$ .
- Aceleración angular:  $rad/s^2$ . Dimensiones  $T^{-2}$ .
- Fuerza:  $1N = 1kg \cdot m/s^2$ , newton N. Otras: dina  $1dina = 10^{-5}N$ , kilopondio o kilogramo-fuerza  $1kp = 9,81N$ . Dimensiones:  $MLT^{-2}$ .
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso:  $p = mv$ ,  $MLT^{-1}$ .
- Momento de una fuerza  $M = Fd$ ,  $ML^2T^{-2}$ .  $1Nm$ .
- Trabajo o energía:  $W = Fd$ ,  $ML^2T^{-2}$ .  $1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$ , julio. Otras: foes,  $1FOE = 10^{51}erg$ , ergios  $1J = 10^7ergs$ ,  $1kWh = 3,6MJ$ ,  $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$ .
- Momento de inercia  $ML^2$ .
- Momento angular  $ML^2T^{-1}$ .
- Potencia  $ML^2T^{-3}$ . Vatio:  $1W=1J/s$ . 1 C.V.=735,4W.
- Presión  $ML^{-1}T^{-2}$ . S.I.: 1 pascal= $N/m^2$ . Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.
- Tensión superficial  $M/T^2$ .
- Coeficiente de viscosidad  $\eta$ ,  $ML^{-1}T^{-1}$ .  $Pa \cdot s$ . 1 poise $\approx 0,1Pa \cdot s$ .
- Número de onda  $k$ ,  $L^{-1}$ .
- Intensidad de ondas  $MT^{-3}$ , vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías  $D$ .  $1D = 1m^{-1}$ .  $C = L^{-1}$ .
- Flujo luminoso, lúmenes  $lm$ .  $\phi_L$ . Dimensiones  $\phi_L$ .
- Luminancia  $B$ :  $\phi_L L^2$ .  $cd/m^2$ , 1 stilb= $10^4cd/m^2$ .
- Iluminación  $E$ :  $\phi_L/L^2$ . lux. Otras:  $1phot = 10^4lux$ .
- Módulo del campo gravitacional  $g$ .  $LT^{-2}$ .

- Potencial gravitacional  $V_g$ ,  $L^2T^{-2}$ , cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica):  $\phi_g = L^3/T^2$ .
- Coeficientes de dilatación:  $\Theta^{-1}$ , en  $K^{-1}$ .
- Calor específico:  $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ ,  $J/(kg \cdot K)$ .
- Calor latente o de cambio de estado:  $L^2T^{-2}$ . Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica:  $MLT^{-3}\Theta^{-1}$ . Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios  $ML^2T^{-2}$ .
- Entropía S:  $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$ : julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica  $\epsilon$ :  $L^3M^{-1}T^4I^2$ . Faradio partido (por) metro.  $F/m$ .
- Carga eléctrica: culombio  $C$ .  $Q = IT$ .  $1e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}C$ .
- Módulo del campo eléctrico:  $MLT^{-3}I^{-1}$ .  $N/C$ , newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico:  $ML^2T^{-3}I^{-1}$ . Voltio.  $1V = Nm/C = 1J/1C$ .
- Flujo del campo eléctrico:  $Nm^2/C$ , dimensiones  $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$ .
- Capacidad de condensadores o carga:  $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$ . Faradio  $F$ .
- Módulo de la densidad de corriente  $j$ :  $IL^{-2}$ .
- Resistencia eléctrica:  $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$ . Ohmios  $\Omega$ .
- Resistividad eléctrica:  $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$ .  $\Omega \cdot m$ , ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica  $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$ .  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ .
- Permeabilidad magnética  $\mu$ .  $LMT^{-2}I^{-2}$ .  $H/m$ , henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética  $B$ :  $MT^{-2}I^{-1}$ , tesla  $1T$ .  $1 \text{ gauss} = 10^{-4}T$ .
- Flujo del campo magnético  $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$ .  $1 \text{ weber} = 1T \cdot m^2$ . Otras:  $1 \text{ maxwell} = 10^8 Wb$ .
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M):  $L^2MT^{-2}I^{-2}$ . henrios  $H$ .
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico  $D$ :  $ITL^{-2}$ , culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético  $H$ :  $IL^{-1}$ , amperio partido (por) metro.  $1 \text{ oersted} = 10^3/4\pi \text{ A/m}$ .
- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas:  $nT^{-1}$ , mol partido por segundo. También más frecuentemente:  $1 \text{ curio} = 1 \text{ Ci} \approx 3,7 \cdot 10^{10} \text{ desintegraciones/s}$ , o también  $1 \text{ Ci} = 6,14 \cdot 10^{-14} \text{ mol/s}$ .

### 15.1.3 Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal:  $G_N = 6,674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ .
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío:  $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\epsilon_0$ .  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$  ó  $F/m$ .
- Constante universal de los gases  $R = 8,314 J/Kmol = 0,082 atmL/Kmol$ .
- Permitividad magnética del vacío  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$ , o también  $K_m = \mu_0/4\pi$ .
- Masa del electrón  $m_e = 0,511 keV/c^2 \approx 9,11 \cdot 10^{-31} kg$ .
- Masa del protón  $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1,673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$ .
- Masa del neutrón  $m_n \approx m_p = 1,675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$ .
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad  $g_0(\oplus) = g_{\oplus} = 9,81 m/s^2$ .
- Radio terrestre  $R_{\oplus} = 6400 km$ .
- Densidad del agua a 4°C,  $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$ .
- Calor específico del agua:  $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$ .
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire:  $2,89 \cdot 10^{-2} kg/mol$ . Densidad del aire 1.3 kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann:  $5,67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} = \sigma_{SB}$ .
- Constante de la ley de Wien:  $C_W = 2,88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$ .
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis:  $1F = N_A e = 96485 C/mol$ .

### 15.2 Potencias de 10 y notación científica

En el S.I., hay unso prefijos universalmente aceptados a nivel internacional de múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad en cualquier sistema de unidades:

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$ : unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol= $10^{100}$ , googolplex= $10^{\text{googol}}$ = $10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$ : unit/unidad
$10^{-1} = 1/10 = 0,1$	deci (d)
$10^{-2} = 1/10^2 = 0,01$	centi (c)
$10^{-3} = 1/10^3 = 0,001$	mili (m)
$10^{-6} = 1/10^6 = 0,000001$	micro ( $\mu$ )
$10^{-9} = 1/10^9 = 0,000000001$	nano (n)
$10^{-12} = 1/10^{12} = 0,000000000001$	pico (p)
$10^{-15} = 1/10^{15} = 0,000000000000001$	femto (f)
$10^{-18} = 1/10^{18} = 0,000000000000000001$	atto (a)
$10^{-21} = 1/10^{21} = 0,000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{-24} = 1/10^{24} = 0,000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{-27} = 1/10^{27} = 0,000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{-30} = 1/10^{30} = 0,000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Regla mnemotécnica: PEZYRQ-fazyrq para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

### Notación científica

$$Z = x.abcdef \cdots 10^{\pm n}$$

donde  $x \neq 0$ , y  $abcdef \cdots$  son números arbitrarios.

### 15.3 Cifras significativas (c.s.)

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

## 16 Propiedades de la materia

### La materia

Materia o sistema material es toda sustancia que posee masa  $M$  y ocupa un volumen  $V$ .

La materia o sistemas materiales pueden tener una forma fija o no, pero generalmente tienen una extensión, y se denominan también **cuerpos materiales**. Toda parte de la materia o cuerpo sometido a estudio es pues un sistema o sustancia material.

En la descripción de un cuerpo y la materia, hay varios tipos de propiedades.

### Propiedades generales

Son propiedades que nos sirven para identificar y caracterizar la materia, no para decidir sobre qué tipo de materia es. Ejemplos: masa, carga eléctrica, temperatura, volumen, área.

### Propiedades específicas

Son propiedades que permiten identificar el tipo de materia o sustancia. Por ejemplo: densidad, conductividad eléctrica, conductividad térmica,...

Algunos tipos particulares de propiedades:

### Masa

La masa está relacionada con la cantidad de materia que tiene un cuerpo o sistema. Es una magnitud básica en el S.I. que suele medirse en kg, g o bien otro múltiplos o submúltiplos.

### Volumen y capacidad

El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo. En el S.I. es una magnitud derivada general que se mide en  $m^3$  o bien en múltiplos o submúltiplos de esta cantidad. La capacidad de un recipiente mide el volumen de un fluido que puede contener, y este volumen se expresa en litros. Hay una relación entre volumen y capacidad dada por  $1m^3 = 1kL$ ,  $1dm^3 = 1L$ ,  $1cm^3 = 1mL$ .

Los volúmenes de cuerpos regulares se miden con regla o cintas métricas. Los volúmenes de cuerpos irregulares se pueden medir usando volumen desplazado de agua, antes y después de una medida...

### Densidad

Es una magnitud derivada y específica. En el S.I. se suele medir en  $kg/m^3$  y en  $g/cm^3$ . Mide la cantidad de espacio que ocupa una determinada cantidad de materia específica. Matemáticamente:

$$d = \rho = \frac{M}{V} = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} \quad (75)$$

## 17 Sustancias puras y mezclas

### Sustancias puras

Una sustancia pura es aquella que NO puede descomponerse en otra más simple por medios físicos convencionales. Hay dos tipos de sustancias puras: elementos y compuestos. Los elementos se clasifican en la Tabla Periódica (actualmente, circa 2020, hay 118 elementos). Los compuestos son combinaciones de dos o más elementos (iguales o distintos) con una determinada composición química fija que se determine mediante una fórmula química.

### Mezclas

Mezclas son aquellas sustancias que se componen de varias sustancias pero en proporción variable, lo que las hace carecer de una composición química concreta. Pueden ser de dos tipos:

- Mezclas homogéneas o disoluciones. Son aquellas en las que no se puede diferenciar a simple vista sus componentes.
- Mezclas heterogéneas. Son aquellas en las que se se pueden distinguir las componentes a simple vista.

Ejemplos de mezclas: aire (disolución gaseosa), arena (mezcla heterogénea), agua potable (disolución en estado líquido), acero (disolución en estado sólido). Además de los dos tipos anteriores de mezclas, hay varios tipos de mezclas intermedias que se denominan suspensiones, coloides y dispersiones.

### Concentración de una disolución

Una disolución o mezcla homogénea consta de dos partes: soluto (componente de menor cantidad) y disolvente (componente mayoritario o de mayor cantidad). Para medir la cantidad de soluto en una mezcla homogénea se usa la magnitud llamada concentración:

$$C(m(g), V) = \frac{m(g)}{V(L)} \quad C(\%, m) = \frac{m(g)_s}{m(g)_D} \cdot 100 \quad C(\%, V) = \frac{V_s}{V_D} \cdot 100 \quad (76)$$

y donde  $m_s$ ,  $V_s$  son la masa y volumen de soluto, generalmente en gramos o mL, y  $m_D$ ,  $V_D$  son la masa y volumen de disolución, obtenidas como la suma de las masas de soluto y disolvente, y la suma del volumen de soluto y disolvente, i.e.,  $m_D = m_s + m_d$ ,  $V_D = V_s + V_d$ .

Una disolución, según la cantidad de soluto, puede ser diluida, concentrada, saturada y sobresaturada. Es diluida si hay poco soluto (concentración menor del 5 %)

### Solubilidad

La solubilidad es la concentración de la disolución saturada, o la máxima cantidad de soluto que puedo disolver en 100 mL de disolución (habitualmente agua). Su valor depende del tipo de soluto, del disolvente, de la temperatura, de la presión, del tipo o forma en que se hace la disolución.

## 18 Métodos de separación

Para sustancias puras, existen métodos de separación de los constituyentes (átomos): electrólisis, reacciones químicas.

Para mezclas homogéneas, las componentes se pueden separar, por ejemplo, mediante procesos denominados de cristalización (vaporización de líquidos) o destilación (diferente punto de vaporización de componentes).

Para mezclas heterogéneas, las componentes se pueden separar mediante decantación (usando densidad), filtración (por tamaño de partículas), centrifugación (mediante diferencias de densidad).

Existen otros métodos de separación de mezclas.

## 19 Suspensiones y coloides

### Suspensión

Mezcla heterogénea formada por fase dispersa y fase dispersante. La fase dispersa es habitualmente una sustancia sólida y la fase dispersante es la sustancia en la que se deposita el sólido. Las suspensiones se clasifican según el estado físico de la fase dispersante y de la fase dispersa. Ejemplos: contaminantes atmosféricos (gas-sólido), horchata (líquido-sólido).

### Coloide

Mezcla que está entre una disolución y una mezcla heterogénea o una suspensión. Ejemplos: nubes, humos, leche, mahonesa.

Para diferenciar un coloide de una disolución se usa un fenómeno denominado efecto Tyndall: las partículas sólidas de un coloide son capaces de reflejar la luz y dispersarla. Así, los rayos de luz pueden ser vistos al atravesar la mezcla de la suspensión, distinguiendo fase dispersa y dispersante.

## 20 Estados de agregación de la materia

La materia se presenta en diferentes formas denominadas estados de agregación o estados de la materia

### Estados básicos de la materia

La materia se presenta en 3 (4) estados básicos de la materia: sólido, líquido, gas (y plasma).

La materia se puede presentar, pues principalmente<sup>1</sup>, en tres estados de agregación: sólido, líquido y gas<sup>2</sup>.

## 21 Forma y volumen

En condiciones “normales” de presión y temperatura, podemos decir que la forma de un sólido es aproximadamente constante, independientemente de dónde se ubiquen. Los líquidos y gases adaptan su forma a la del recipiente que los contiene. Son *fluidos*. Por tanto, un líquido o un gas (también un plasma y otros estados) no tienen forma ni volumen propios.

Fluir es la capacidad de moverse de un lugar a otro y adaptarse a la forma del recipiente que les contiene. Los líquidos y gases son fluidos. Además, los líquidos y gases se pueden comprimir (los gases más que los líquidos). Los sólidos apenas pueden comprimirse (aunque “pueden”). Además, los fluidos tienen la capacidad para difundirse. La **difusión** es el fenómeno que tiene lugar cuando una sustancia se entremezcla con otra y puede pasar a través de orificios. Los líquidos y gases pueden difundirse. En sólidos, la difusión es lenta, prácticamente inexistente.

Los tres estados más comunes de la materia presentan las siguientes propiedades:

---

<sup>1</sup>Existen otros estados de agregación menos convencionales. A temperatura ambiente también existen el estado de *crystal líquido*, el estado de *sólido amorfo* o el estado *magnéticamente ordenado* de materiales ferromagnéticos y “antiferromagnéticos”. A temperaturas muy altas existen el estado de *plasma* o gas ionizado, y el estado de *plasma de quark-gluón*. A muy baja temperatura existen el estado *condensado de Bose-Einstein*, el estado *superconductor*, el estado *superfluido* o el estado *condensado fermiónico*. Y aún podrían existir otros estados de la materia en situaciones de extremas de densidad, denominados generalmente *materia degenerada*, pero que no conocemos aún.

<sup>2</sup>A líquidos y gases, debido a la propiedad que tienen de *fluir*, se les llama generalmente *fluidos*. **Fluir** es la propiedad que poseen líquidos y gases de adaptarse a la forma del recipiente que los contiene.

- **SÓLIDOS.**

1. Son rígidos y difícilmente deformables, porque las fuerzas entre sus partículas es tan fuerte que impide muchísimo su desplazamiento. Sólo pueden desplazarse mediante “vibraciones” o “pequeños desplazamientos” en torno a posiciones de equilibrio.
2. Su volumen es casi constante, y apenas se pueden comprimir, porque hay muy poco espacio libre entre las partículas y es muy difícil que puedan juntarse más.
3. Se dilatan al calentarse un poco, porque al suministrar energía en forma de calor aumenta la vibración de las partículas, y, por lo tanto, el sólido ocupa algo más de volumen.

- **LÍQUIDOS.**

1. Son fluidos y adoptan la forma del recipiente que los contiene, porque la fuerza de las partículas es débil, de modo que “resbalan” entre ellas según la forma del contenedor.
2. Su volumen es casi constante, y apenas se comprimen, porque no tienen apenas espacio entre sus partículas, aunque se comprimen algo debido a que pueden “resbalar” unas partículas y otras entre sí.
3. Se dilatan mucho al calentarse, porque la energía suministrada en forma de calor hace que las partículas aumenten su movimiento y ocupen aún más espacio.

- **GASES.**

1. Son fluidos y adoptan la forma del recipiente que los contiene, ocupando todo el espacio disponible, porque la fuerza de cohesión entre las partículas es tan débil que cada partícula se mueve de forma independiente, muy rápido y al azar.
2. Su volumen **no** es constante y se pueden comprimir fácilmente, porque hay mucho espacio vacío entre las partículas y pueden juntarse más, reduciendo el volumen si comprimimos el gas, aumentando si descomprimos el gas.
3. Si se calientan se dilatan mucho, porque al suministrar energía en forma de calor aumentamos la velocidad de las partículas que forman el gas.

Estos tres estados pueden cambiar de estado entre sí, si modificamos la temperatura, la presión o ambas a la vez. Estos cambios de estado son:

- **Cambios de estado progresivos.** Aquellos que se producen por absorción de energía, y son favorecidos al aumentar la temperatura, o disminuir la presión.

1. *Fusión*: cambio de estado, a temperatura constante, de sólido a líquido.
2. *Vaporización*: cambio de estado, a temperatura constante, de líquido a gas.

Si se realiza de forma lenta en la superficie de cualquier líquido a cualquier temperatura se llama **evaporación**.

Si se realiza de forma tumultuosa o abrupta, en toda la masa del líquido, a una temperatura característica según la sustancia, se llama **ebullición**.

3. *Sublimación*: cambio de estado, a temperatura constante, de sólido a gas.

A presión atmosférica normal o estándar sólo subliman unas pocas sustancias como el yodo o la naftalina. A menor presión subliman más sustancias y, en el vacío, toda sustancia puede sublimar.

- **Cambios de estado regresivos.** Aquellos que se producen por desprendimiento de energía, y se ven favorecidos al disminuir la temperatura, o aumentar la presión.

1. *Solidificación*: cambio de estado, a temperatura constante, de líquido a sólido.

2. *Condensación*: cambio de estado, a temperatura constante, de gas a líquido.
3. *Sublimación regresiva*: cambio de estado, a temperatura constante, de gas a sólido.

### Aclaraciones importantes:

La *temperatura de fusión*, a **presión constante**, es igual a la *temperatura de solidificación*.

La *temperatura de vaporización* se llama normalmente *temperatura de ebullición*, o de cambio de líquido a gas, a **presión constante**, es igual a la *temperatura de condensación* o *temperatura de licuación*.

La *temperatura de sublimación*, a **presión constante**, es igual a la *temperatura de sublimación regresiva*.

Durante un cambio de estado, es *muy importante* notar que la temperatura se mantiene ¡**constante!**, solamente se produce una transferencia de energía en forma de *calor*, absorbido o cedido al entorno de la sustancia.

El calor necesario para que una sustancia cambie de estado se denomina **calor latente**, se representa por **L**, tiene unidades de  $\frac{J}{kg}$  y tiene por fórmula

### Calor latente

$$Q = mL$$

Las magnitudes físicas que determinan que la materia se encuentre en un determinado estado de agregación son la *presión* y la *temperatura*.

La **presión**, desde un punto de vista macroscópico o externo, mide la fuerza ejercida por unidad de área o superficie. Matemáticamente:

### Presión

$$\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Superficie}} \longleftrightarrow P = \frac{F}{S}$$

Sus unidades en el Sistema Internacional (S.I.) son el pascal (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad poco útil en situaciones típicas, por lo que usan otras unidades de presión en Química y Física. Las unidades más comunes son el centímetro de mercurio (**cm Hg**), el milímetro de mercurio (**mm Hg**), la atmósfera (**atm**) y el bar (**b**) o su múltiplo el milibar (**mb**). También hay otras unidades ya casi en desuso como el torricelli <sup>3</sup>(**torr**). En el mundo anglosajón se usan las PSI (Pounds per Squared Inch, libras por pulgada cuadrado). Las equivalencias entre alguna de estas unidades son las siguientes:

### Unidades de presión

$$\begin{aligned} 1 Pa &= 10^{-5} \text{bar} = 0,00001 \text{bar} \\ 1 Pa &= 9,8692 \cdot 10^{-6} \text{atm} \\ 1 \text{atm} &= 7,5006 \cdot 10^{-3} \text{torr} \approx 7,5006 \cdot 10^{-3} \text{mmHg} \\ 1 \text{b} &= 1000 \text{mb} = 10^5 Pa = 0,98692 \text{atm} \\ 1 \text{atm} &= 1013 \text{mb} = 101325 Pa = 760 \text{torr} \approx 760 \text{mmHg} \end{aligned}$$

Un cuadro resumen visual:

<sup>3</sup>Aunque *no* son exactamente lo mismo, consideraremos equivalentes los torricellis a los mmHg. Es decir, 1torr = 1 mmHg.

	Pa	bar	atm	torr	psi
Pa	1	0.00001	$9.8692 \cdot 10^{-6}$	0.007506	0.0001450377
bar	100000	1	0.98692	750.06	14.50377
atm	101325	1.01325	1	760	14.69594
torr	133.322	0.00133322	0.00131579	1	0.01933672
psi	6894.757	0.06894757	0.068046	51.7151	1

Pa: Pascal = Newtons per square meter.  
 bar: Bar =  $10^5$  Pascal.  
 atm: Atmosphere = 760 torr = 760 millimeters of mercury at 0°C.  
 torr: Torr = 1 millimeter of mercury at 0°C.  
 psi: Psi = Pounds per square inches.

La **temperatura**, **T**, es una *propiedad general* de los cuerpos que se mide con “termómetros”. La escala habitual de temperatura es el celsius (°C), aunque en algunos países se usan el fahrenheit (°F), especialmente los de ámbito e influencia anglosajona (Estados Unidos, Australia, Reino Unido,...). La relación entre ambas escalas se encuentra en el formulario de estos apuntes.

Sin embargo, la *temperatura de fusión* o *de ebullición* son propiedades específicas de una sustancia, es decir, características de la mismas, a presión constante.

Si se quiere cambiar de temperatura, la materia dependiendo de su tipo específico cambia de temperatura de forma diferente. Hay dos expresiones matemáticas para el calor desprendido o absorbido en un cambio de temperatura.

#### Calor transferido en cambio de temperatura.

$$Q = mc_e \Delta T = C \Delta T.$$

y donde  $c_e$  es el denominado calor específico de cambio de temperatura (unidades  $Jkg^{-1}K^{-1}$ ), y  $C$  la llamada capacidad calorífica de la sustancia (unidades  $J/K$ ).  $\Delta T = T_2 - T_1 = T_f - T_0$  es la diferencia de temperatura, final menos inicial. Para subir de temperatura, se absorbe energía  $Q > 0$ , para descender de temperatura se desprende energía  $Q < 0$ . La equivalencia entre calor y energía transferida corresponde a una equivalencia mecánica del calor  $1cal = 4,186J$ . Se tiene la relación  $C = mc_e$ .

## 22 Teoría cinético-molecular

Para explicar el comportamiento de los gases, los físicos Clausius, Maxwell y Boltzman desarrollaron en el siglo XIX la denominada **Teoría Cinética**, también llamada cinético-atómica o cinético-molecular por otros autores. Esta teoría está basada en una serie de hipótesis o postulados.



### 1. Principio corpuscular o atómico-molecular:

“Todos los gases están constituidos por un gran número, enorme, de partículas<sup>4</sup> (átomos o moléculas)”.

### 2. Principio de dilución molecular:

“El volumen que ocupan las partículas comparado con el volumen del recipiente es muy pequeño”.

Esto significa que el gas está muy diluido en el recipiente y que entre partícula y partícula sólo existe espacio “vacío”.

### 3. Principio del caos molecular o “Stoßzahlansatz”:

“Las partículas que forman el gas chocan o colisionan aleatoriamente entre sí, de forma *caótica* (desordenada o azarosamente), y contra las paredes del recipiente que las contiene”.

En los choques o colisiones entre partículas y contra las paredes del recipiente *no se pierde energía*, y las velocidades de las partículas son *independientes* de la posición que ocupan en el recipiente y de la velocidad que posean cada partícula por separado ( es decir, no hay relación alguna entre las velocidades de cada partícula, ni con la posición que ocupan en el espacio del recipiente).

### 4. Principio dinámico de cohesión-dispersión molecular:

“El movimiento en zig-zag de las partículas, llamado *movimiento térmico*, está causado por fuerzas”.

Estas fuerzas son de dos tipos distintos, pero de igual origen:

- **Fuerzas de atracción o cohesión.** Son las que tienden a unir a las partículas. Su origen es **electrostático** y *cuántico*.
- **Fuerzas de repulsión o dispersión.** Son las que tienden a separar a las partículas. Su origen es también **electrostático** y *cuántico*.

La Teoría Cinética lleva a una interpretación novedosa y “microscópica” de los conceptos “macroscópicos” de temperatura, presión y cambios de estado.

---

<sup>4</sup>Originariamente se pensaba que nunca se podrían ver al microscopio. Sin embargo, el denominado *movimiento browniano* generado por el movimiento aleatorio de “granos” o “polvo” en suspensión en un fluido, constituyó finalmente una prueba irrefutable de la Teoría Cinética y, en último lugar, de los átomos. Hoy existen métodos diversos para “ver” a las moléculas o partículas cuya existencia proclama la teoría Cinética.

**Temperatura como energía.**

1ª. La temperatura absoluta es una medida proporcional a la energía cinética media de las partículas.

Como la energía cinética, que se mide como cualquier forma de energía en julios (J), es en términos mecánicos

$$E_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

la consecuencia de este postulado es la definición de temperatura *absoluta* por comparación con la energía cinética media de las partículas<sup>5</sup>

**Ecuación de la energía cinética no relativista**

$$\langle E_c \rangle = \text{constante} \cdot T = \frac{3}{2} k_B \cdot T$$

en donde T está medida en la llamada escala absoluta. Se define, así, la **escala absoluta** de *temperatura* o **escala Kelvin** en función de la “agitación térmica” o “movimiento térmico” de las partículas según la Teoría Cinética. Las unidades de esta escala son el grado kelvin, o simplemente **kelvin**, y se simboliza por **K**. Nótese que no se le pone el círculo de grado como en la escala Celsius o la Fahrenheit.

El **cero absoluto** de temperatura se define como aquella temperatura en la que el movimiento de las partículas se ha detenido y la energía cinética es cero<sup>6</sup>.

La relación entre la escala Celsius y la escala Kelvin de temperatura viene dada por una ecuación sencilla:

**Escalas de temperatura**

$$T(K) = T^\circ C + 273,15, \quad 0 K = -273,15^\circ C$$

**Presión como choques moleculares.**

2ª. La presión es consecuencia de los choques de las partículas en el recipiente.

De hecho, la presión es siempre el cociente entre una fuerza ejercida sobre una superficie, en este caso la fuerza la ejercen las partículas y la superficie es la del contenedor o recipiente del gas. De esta forma:

- Si *disminuye* el volumen, a temperatura constante, *aumenta* la frecuencia de choques y *aumenta* la presión.
- Si *aumenta* el volumen, a temperatura constante, *disminuye* la frecuencia de choques y *disminuye* la presión.
- Si *disminuye* la temperatura, a volumen constante, *disminuyen* la energía cinética media y el número de choques, y, por lo tanto, *disminuye* la presión.
- Si *aumenta* la temperatura, a volumen constante, *aumentan* la energía cinética media y el número de choques, y, por lo tanto, *aumenta* la presión.

<sup>5</sup>El factor de proporcionalidad se llama constante de Boltzman, y aparece también en otra fórmula de la Física Estadística que se encuentra en la lápida del científico que le da nombre y quien la calculó,  $S = k_B \ln(W)$ . En unidades del Sistema Internacional,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ .

<sup>6</sup>Realmente, el cero absoluto es inalcanzable, por mucho que nos gusten los dibujos animados o cómics de *Los Caballeros del Zodiaco*, y ataques como el Polvo de Diamantes, debido a los fundamentos de la Teoría Cuántica. Una definición más precisa de “cero absoluto” sería la de aquella temperatura a la cual la energía cinética media de las partículas alcanza un valor mínimo.

### Cambios de estado y condiciones favorables(I)

3ª. Al *aumentar* la temperatura, se favorecen los *cambios de estado progresivos*.

La razón es que al *aumentar* la energía cinética media, las partículas tienen *mayor movilidad* y la vibración de las partículas sólidas o líquidas hace que **pierdan** *rigidez y cohesión*.

### Cambios de estado y condiciones favorables(II)

4ª. Al *aumentar* la presión, se favorecen los *cambios de estado regresivos*.

La razón es que al *aumentar* la presión se está aumentando la fuerza con la que se mantienen cohesionadas o unidas las partículas, que tienen *mayor acercamiento o proximidad* y la vibración de las partículas sólidas o líquidas será **mayor** al aumentar el número de choques. Durante un cambio de estado (también llamado transición de fase), la temperatura (o presión) no cambia. Para representar los estados de agregación en diferentes fases se usan las llamadas gráficas de cambio de estado o transición de fase.

## 23 LEYES PONDERALES DE LOS GASES(ampliación)

- **Ley de Boyle-Mariotte:**

“A temperatura constante, el producto de presión y volumen de un gas es constante.”

Esto significa que si la temperatura se mantiene constante en un gas, su presión y volumen son *inversamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

#### Ley de Boyle-Mariotte

$$T = \text{constante} \leftrightarrow PV = \text{constante} \longleftrightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

- **Ley de Charles:**

“A presión constante, el cociente entre volumen y temperatura de un gas es constante.”

Esto significa que si la presión se mantiene constante en un gas, su volumen y temperatura son *directamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

#### Ley de Charles

$$P = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

- **Ley de Gay-Lussac:**

“A volumen constante, el cociente entre presión y temperatura de un gas es constante.”

Esto significa que si el volumen se mantiene constante en un gas, su presión y temperatura son *directamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

#### Ley de Gay-Lussac

$$V = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

- **Ley de Avogadro:**

“En cualquier gas ideal, a presión y temperatura constantes, el cociente del volumen y el número de partículas (o de moles) del gas es constante.”

Matemáticamente, esto significa que en unas condiciones fijas de presión y temperatura del gas, volúmenes iguales de gases ideales (aunque fueran diferentes), contienen el mismo número de partículas (o de moles).

#### Ley de Avogadro

$$\frac{V}{n} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

$$\frac{V}{N} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

- **Ley general o combinada de los gases:**

“En cualquier gas, el producto de la presión por el volumen, dividido por su temperatura, es constante.”

Matemáticamente, esto significa que aunque varíen la presión, volumen y temperatura de un gas, una *combinación* adecuada de estas tres magnitudes se mantiene *constante*. Matemáticamente, la ley combinada dice que:

#### Ley general o de Clapeyron

$$\frac{PV}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

- **Ecuación de estado del gas ideal:**

“En cualquier gas ideal, el producto de la presión por el volumen es igual al producto del número de moles por la constante de los gases ideales y la temperatura absoluta.”

Además, hay una relación profunda entre la constante de los gases y el número de Avogadro. El número de Avogadro es una constante fundamental o básica de la Naturaleza que nos dice el número de partículas elementales por mol de sustancia, definiendo el mol como la cantidad de sustancia que contiene tantas unidades como átomos en 12 gramos de carbono-12, o bien definiendo exactamente el número de Avogadro como el factor de conversión entre el número de partículas y el mol o cantidad de sustancia:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{partículas} \times \text{mol}^{-1}$$

$$R = 8,31 \text{J/Kmol} = 0,082 \text{atmL/Kmol} = k_B N_A$$

Matemáticamente,

#### Ecuación del gas ideal

$$PV = nRT$$

$$PV = Nk_B T$$

$$R = N_A k_B$$

Para estas relaciones matemáticas se tiene que  $N = nN_A$ , y  $R = N_A k_B$  para una total identidad. Se llaman condiciones normales (c.n.) de presión y temperatura (P,T) a la situación concreta que se produce cuando  $P = 1 \text{atm}$  y  $T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{K}$ . Se llaman condiciones estándar (c.e.) de presión y temperatura, a la situación que se produce cuando  $P = 1 \text{atm}$  y  $T = 25^\circ \text{C} = 298 \text{K}$ . En situaciones no normales o no estándar, se usa la ecuación de estado anterior. Para condiciones normales, se puede saber que 1 mol ocupa unos 22.4L; en condiciones estándar, se puede usar también la ecuación de estado del gas ideal para deducir que 1 mol de gas ideal en condiciones estándar ocupan 24.4L.

Gases no ideales, que no satisfacen las condiciones de la teoría cinética totalmente, cumplen ecuaciones de estado diferentes a la del gas ideal. Dos ejemplos de ecuaciones de estado no ideales:

- Ecuación de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

- Gas de Chaplygin ( $\rho$  es la densidad del gas):

$$P = \frac{k}{\rho}$$

Otras dos ecuaciones de los gases ideales son la denominada Ley de Graham y la ley de Dalton de las presiones parciales.

### Ley de Graham:

“En cualquier gas ideal no relativista, el cociente de velocidades de las partículas del gas es inversamente proporcional a las masas de las partículas constituyentes del gas, o equivalentemente, el producto de la velocidad y la raíz cuadrada de las masas de las partículas (o el producto del cuadrado de la velocidad y la masa) es constante si la temperatura y la presión es constante.”

Las masas son molares en general en la expresión matemática de esta ley que explica la difusión de un gas en otro, y la efusión de los gases por aberturas y orificios. Matemáticamente,

#### Ley de Graham

$$v^2 m = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$v \sqrt{m} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

### Ley de Dalton:

En una mezcla de gases, la presión total es igual a la suma de las presiones parciales. Matemáticamente:

#### Ley de Dalton

$$P_{Total} = \sum_i^n P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

## 24 Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados)

1. Ley de Boyle-Mariotte.  $PV = \text{constante}$ .
2. Ley de Charles.  $\frac{V}{T} = \text{constante}$ .
3. Ley de Gay-Lussac.  $\frac{P}{T} = \text{constante}$ .
4. Ley de Avogadro.  $\frac{V}{n} = \text{constante}$  ó  $\frac{V}{N} = \text{constante}$ .
5. Ley de Diver.  $\frac{P}{n} = \text{constante}$  ó  $\frac{P}{N} = \text{constante}$ .
6. Ley sin nombre.  $nT = \text{constante}$  ó  $NT = \text{constante}$ .
7. Ley general de Clapeyron.  $\frac{PV}{T} = \text{constante}$ .

8. Ley combinada(I).  $\frac{PV}{n} = \text{constante}$  ó  $\frac{PV}{N} = \text{constante}$
9. Ley combinada(II).  $\frac{P}{nT} = \text{constante}$  ó  $\frac{P}{NT} = \text{constante}$
10. Ley combinada(III).  $\frac{V}{nT} = \text{constante}$  ó  $\frac{V}{NT} = \text{constante}$
11. Ley fundamental.  $\frac{PV}{nT} = \text{constante}$  ó  $\frac{PV}{NT} = \text{constante}$
12. Ley o ecuación de estado del gas ideal.  $PV = nRT$  ó  $PV = Nk_B T$ .
13. Ley de Graham.  $\sqrt{\frac{MM_1}{MM_2}} = \frac{r_2}{r_1}$  o bien  $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \frac{v_2}{v_1}$
14. Ley de las presiones parciales de Dalton.  $P_T = \sum_i P_i$ , con  $P_i = X_i P_T$ .
15. Ley de los volúmenes parciales de Amagat.  $V_T = \sum_i V_i$ .
16. Ley de Henry.  $p_i = K_H^{pc} c_i = \frac{c_i}{K_H^{cp}}$ .
17. Ley de Raoult.  $\Delta p = p_A - p = p_A^* X_S$ .
18. Ley del gas real de Van der Waals.  $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ .
19. Ley del gas de Chaplygin.  $P = \frac{A}{\rho}$ .
20. Gas de Chaplygin generalizado  $P = \frac{A}{\rho^\alpha}$ .
21. Gas de Chaplygin extendido generalizado:  $P = \frac{A}{\rho^\alpha} + B\rho^\beta$ .

## 25 El átomo

La materia tiene apariencia de ser continua. Sin embargo, en realidad, es discreta. Esta idea ya fue concebida por los griegos, chinos e hindúes hace siglos (milenios). La naturaleza atómica y subatómica de la materia explica hoy día innumerables fenómenos: la electricidad y magnetismo, la energía nuclear, la radioactividad, las reacciones químicas y los compuestos químicos, e innumerables otras propiedades. La teoría atómica y subatómica está basada en la reunión de cientos de observaciones al cabo de siglos, y en la actualidad, el modelo atómico (subatómico) subyacente se denomina modelo mecano-cuántico (o de la Mecánica Cuántica). El modelo mecano-cuántico del Universo (o incluso del Multiverso), permite elaborar teorías como el llamado Modelo Estándar de las interacciones fundamentales, que describe 3 de las 4 fuerzas fundamentales cósmicas: electromagnetismo (responsable de la electricidad, el magnetismo y las atracciones y repulsiones que gobiernan los compuestos químicos), fuerza nuclear fuerte (responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos) y la fuerza nuclear débil (responsable del fenómeno de la radioactividad). La cuarta fuerza es la gravitación, que no puede describirse aún mediante una teoría cuántica de forma coherente salvo mediante la teoría o modelo de supercuerdas (teoría M, F, S, ...) o la gravitación cuántica de bucles (o loop quantum gravity). Se especula con la existencia de una quinta fuerza que causa una especie de repulsión cósmica universal (hoy día denominada energía oscura).

## 26 Modelos atómicos

A principios del siglo XIX, John Dalton recupera la idea de los átomos para explicar las leyes de la Química moderna. Así, estableció una serie de postulados:

- La materia está formada por átomos, partículas indivisibles (en griego, *ατομος* significa “sin partes”).
- Existen átomos diferentes, con propiedades distintas, que corresponde a los actuales átomos de la Tabla Periódica. Átomos diferentes poseen propiedades distintas. Átomos del mismo elemento, tienen las mismas propiedades.
- Si se unen dos o más átomos del mismo o distinto elemento, tenemos un compuesto o molécula. Moléculas diferentes del mismo átomo se denominan alótropos.
- Cuando tienen lugar cambios químicos entre elementos y compuestos químicos, se debe a que los átomos se unen en proporciones distintas de números enteros sencillos. Los cambios físicos no implican cambio de la estructura molecular o fórmula química.

La teoría atómica de Dalton permite explicar algunos fenómenos, como los cambios químicos. También permite entender la separación de mezclas y la composición simple de sustancias de un solo elemento y de varios elementos, bajo fórmulas químicas.

La mayor parte del átomo está vacío. El experimento de J. J. Thomson reveló la existencia de pequeñas partículas en el interior de los átomos, que conocemos hoy día bajo el nombre de **electrones**. Thomson propuso un modelo atómico similar al de un pudín con pasas (plumcake model). Sin embargo, este modelo fue demostrado incorrecto por Ernest Rutherford y sus colaboradores, Marsden y Geiger.

Los electrones, que sepamos, no tienen estructura interna, y si la tienen es muy pequeña, menor que el núcleo o el átomo ( $am = 10^{-18}m$ ) o zeptómetro ( $1zp = 10^{-21}m$ ).

### Partículas subatómicas básicas del átomo

El átomo está formado por dos zonas diferenciadas, hecho establecido por el experimento de Rutherford. En la zona externa o corteza orbitan los electrones. En la zona interna, unas 100 mil veces más pequeña que el tamaño atómico, está el núcleo, constituido por partículas llamadas protones y neutrones. Los electrones orbitan el núcleo como consecuencia de la fuerza eléctrica de atracción entre cargas positivas del núcleo, y la carga negativa de los electrones de la corteza. El núcleo se mantiene junto debido a la fuerza nuclear fuerte, aunque en ocasiones, pueden producirse transmutaciones de núcleos o partículas como consecuencia de la llamada fuerza nuclear débil.

## Propiedades de las partículas subatómicas básicas

Toda partícula subatómica puede clasificarse mediante una serie de números sencillos. En general, una partícula subatómica tiene masa (energía), carga eléctrica y espín (también llamado momento angular intrínseco), aunque también tiene otras propiedades como simetría de carga o simetría de inversión temporal, o la simetría de paridad (de espejo o especular). Limitándonos a las tres primeras propiedades, y a las 3 partículas subatómicas básicas, se tiene que:

- Electrón: masa  $M_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $Q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $S = \pm \frac{1}{2} \hbar \sim \pm \frac{1}{2}$ .
- Protón: masa  $M_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $Q = +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $S = \pm \frac{1}{2} \hbar \sim \pm \frac{1}{2}$ .
- Neutrón: masa  $M_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $Q = +0 \text{ C}$ ,  $S = \pm \frac{1}{2} \hbar \sim \pm \frac{1}{2}$ .

Se observa que la masa del protón es similar a la del neutrón  $M_p \approx M_n$ . La masa del protón es unas 2000 veces (unas  $6\pi^5 = 1836$  veces la masa del electrón). La carga eléctrica del protón es igual pero de signo contrario a la del electrón. El neutrón no tiene carga eléctrica neta. Además, un átomo debe ser eléctricamente neutro por equilibrio natural, así que los átomos, por el balance de cargas positivas y negativas del Universo, contienen en mismo número de protones que de electrones en general. Es decir, el estado fundamental de un átomo contiene igual número de electrones que de protones. Es el llamado principio del balance de cargas.

El Modelo de Rutherford (1911) o planetario tenía dos principales problemas teóricos y experimentales:

- No explicaba los llamados espectros atómicos que ya se conocían del s.XIX.
- La teoría electromagnética de Maxwell predecía que las partículas cargadas eléctricamente como los electrones debían emitir ondas electromagnéticas, perder energía, y caer al núcleo en un tiempo finito. Ese tiempo es del orden de  $ps$  (picosegundos) incluso para el átomo más simple, el hidrógeno. Esto era absurdo, porque los átomos observados eran estables.

La incorporación parcial de la llamada teoría cuántica a los átomos, por parte de Bohr, y de las ideas de la teoría de la relatividad, en la llamada corrección de Bohr-Sommerfeld, también se mostró ineficaz para explicar toda la fenomenología acumulada y la nueva que emergió en el s.XX. Como resultado, se elaboró una síntesis de ideas que acabó creando el Modelo actual o mecánico-cuántico del átomo. En su versión más sofisticada, el modelo mecano-cuántico incluye el denominado Modelo Estándar de las partículas subatómicas. Este modelo establece que (circa 2020) las partículas que forman el Universo se dividen en dos tipos:

- Fermiones o partículas de materia (con espín semientero o múltiplo de  $1/2$ ). A su vez, se dividen en dos clases de partículas. **Leptones** (no interactúan vía la fuerza nuclear fuerte): electrón  $e^-$ , neutrino electrón  $\nu_e$ , muón  $\mu^-$ , neutrino muón  $\nu_\mu$ , tauón  $\tau^-$ , neutrino tauón  $\nu_\tau$ . **Quarks** (interactúan vía la fuerza nuclear fuerte): quark arriba ( $q_u, u$ ; up quark), quark abajo ( $q_d, d$ ; down quark), quark encanto ( $q_c, c$ ; charm quark), quark extraño ( $q_s, s$ ; strange quark), quark cima o verdad ( $q_t, t$ ; truth or top quark), quark fondo o belleza ( $q_b, b$ ; botton or beauty quark). Los quarks tienen carga eléctrica fraccional respecto del electrón, por ejemplo  $Q(u) = +2e/3$ ,  $Q(d) = -e/3$  y una propiedad llamada color que explica su peculiar interacción (el color de la fuerza nuclear se etiqueta con las letras R-red, G-green, B-blue, pero no tiene nada que ver con el color ordinario).
- Bosones o partículas de fuerza/transmisoras de energía o interacción. Son el fotón ( $\gamma$ , sin masa ni carga), el bosón  $W^+$ ,  $W^-$  y el bosón  $Z$  (de la interacción nuclear débil), y el gluón  $g$  (de la interacción nuclear fuerte). Adicionalmente, existe el llamado bosón de Higgs o dador de masa  $H$ , sin carga eléctrica. La masa de los bosones vectoriales masivos y el Higgs es (en kg):  $M_H = 2,23 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ ,  $M_Z = 1,63 \cdot 10^{25} \text{ kg}$ ,  $M_W = 1,43 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ . El bosón  $W$  puede tener carga positiva o negativa, mientras que el  $H$  y  $Z$  son neutros, carga eléctrica nula.

## Tabla periódica

La Tabla Periódica es una disposición ordenada de los elementos químicos en filas y columnas. Hay 8 filas actualmente, llamadas periodos, y 18 columnas llamadas grupos. En total, hay (circa 2020) 118 elementos químicos.

## Iones

Átomos de un mismo elemento químico que pierden o ganan electrones quedan cargados eléctricamente de forma positiva o negativa. Un átomo que pierde electrones, se queda cargado positivamente y se llama catión. Un átomo que gana electrones, se queda cargado negativamente y se llama anión.

Los átomos quedan especificados por el número de partículas que poseen. En equilibrio o balance, un átomo es neutro y posee el mismo número de protones que de electrones. El número de protones de un átomo se llama número atómico y se representa por la letra  $Z$ . El número de neutrones se llama número de neutrones  $N$ . La suma de número de neutrones y de protones (número atómico) es el número másico  $A$  o de nucleones. Se llama número másico porque es bastante similar a la masa del núcleo. El núcleo contiene casi toda la masa (pero no toda, dado que el electrón tiene masa).

## Isótopos

Átomos del mismo elemento que se diferencian en el número de neutrones, y por tanto en el número másico  $A = Z + N$ , se llaman isótopos. Hay miles de isótopos en la Tabla Periódica (circa 2020).

En la Tabla o Sistema Periódico se diferencian varias zonas. La zona de los metales, la zona de los semimetales o metaloides, la zona de los gases nobles y la zona de los no metales.

## 27 Moléculas y cristales

### Cristales

Un cristal es una disposición ordenada de átomos, discreta y repetitiva en el espacio. Los cristales se clasifican según sus simetrías o patrones usando la rama de las Matemáticas llamada teoría de grupos.

Se ha especulado con la existencia de estructuras ordenadas en el tiempo (o en el espacio-tiempo) llamadas cristales de tiempo (F. Wilczek). Además de los cristales, existen otras estructuras ordenadas de átomos hasta llegar al estado amorfo (sin simetrías). Son los llamados cuasicristales. También, en ocasiones, hay varios tipos de cristales en una misma forma de materia simultáneamente. Se llama entonces a esto **policristal**. Las unidades de cada tipo de cristal se llaman **granos** (grains). Existen cristales asociados a los principales tipos de enlace químico entre átomos: cristales metálicos, cristales covalentes y cristales iónicos. Existen también sustancias aparentemente cristalinas que son en realidad desordenadas, y que se llaman vidrios (glass).

### Molécula

Es la unión de dos o más átomos del mismo o distinto elemento con ciertas propiedades físico-químicas características y una determinada fórmula química o molecular. La fórmula molecular indica el número de átomos de cada elemento que la integran. Generalmente, las fórmulas moleculares involucran solamente números enteros (compuestos daltónidos). Sin embargo, existen fórmulas químicas atípicas con estequiometría no entera (compuestos bertólidos). En este y sucesivos cursos, nos centraremos solamente en compuestos daltónidos y no en compuestos bertólidos (con impurezas).

## 28 Cambios químicos y sus efectos

Los cambios químicos resultan de la aparición de nuevas sustancias que estaban ausentes previamente, a partir del cambio de la naturaleza de las sustancias previas. El cambio de estado físico o transición de fase no es un

cambio químico, como hemos visto en temas anteriores. Tampoco lo son los procesos de disolución que dan lugar a mezclas homogéneas o disoluciones.

Hay varios indicadores que caracterizan a un cambio químico:

- Desprendimiento de gases.
- Cambio de color en la sustancia.
- Intercambio de energía térmica (desprendimiento o absorción de energía en forma de calor).
- Liberación de energía en forma de luz (llamas, plasmas o bioluminiscencia, también en química nuclear la radiactividad puede indicar una reacción química de tipo nuclear).

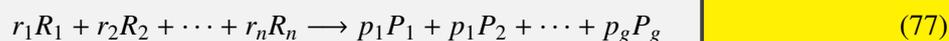
## 29 Reacciones químicas

### Reacciones químicas

Una reacción química es una transformación de unas sustancias llamadas reactivos en otras diferentes llamadas productos:

Reactivos  $\rightarrow$  Productos

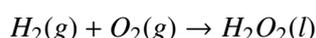
o bien



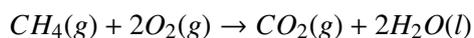
Las reacciones químicas son, en realidad, una reordenación de los átomos dentro de las moléculas. Equivalentemente, una transformación de los diferentes enlaces químicos de las sustancias reactivos en otros enlaces de las sustancias productos.

A nivel matemático y físico-químico, una reacción química está indicada por una ecuación química: una expresión de los reactivos y sus fórmulas químicas, separados de los productos y sus fórmulas químicas por una flecha.

Ejemplos de reacciones y ecuaciones químicas:



En este ejemplo se ha indicado además el estado gaseoso o líquido de los reactivos y productos.



En este caso, además, se han incluido unos coeficientes delante de algunos de los reactivos y productos. Esto ocurre por el balance de átomos: en toda reacción química (no nuclear) el número de átomos de cada tipo en reactivos y productos debe ser idéntico. Esto se debe a una ley importante en la naturaleza: la ley de conservación del número de átomos o de la masa, debida a Lavoisier.

## Ley de Lavoisier de conservación de la masa

En toda reacción química, la masa total de reactivos debe ser igual a la masa total de productos (la suma del número de átomos de cada tipo en reactivos y productos debe ser la misma). Matemáticamente si:



entonces

$$\sum_{i=1}^n M(R_i) = \sum_{j=1}^g P_j \quad (79)$$

o bien

$$M(R_1) + M(R_2) + \cdots + M(R_n) = M(P_1) + M(P_2) + \cdots + M(P_g) \quad (80)$$

Los coeficientes  $r_1, r_2, \dots$ , y  $p_1, p_2, \dots$  se llaman **coeficientes estequiométricos**. Se introducen para lograr que el número de átomos de cada tipo en reactivos y productos sean el mismo. El proceso por el que se produce este balance de átomos de cada tipo en los dos miembros o lados de la ecuación o reacción química se llama ajuste o balance de la reacción química.

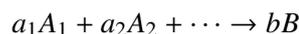
La relación experimental que indica que hay una proporción fija definida entre la masa de los reactivos y de los productos, se entiende desde el punto de vista atómico-molecular. Además, toda reacción química tiene una “velocidad”. Determinando el tiempo que tardan en aparecer los productos a partir de los reactivos, midiendo las concentraciones de reactivos y productos, y su cambio. A la velocidad de reacción química le afectan algunos factores:

- La temperatura. En general, las reacciones químicas aumentan de velocidad con la temperatura.
- La concentración de reactivos. En general, al aumentar la concentración de reactivos, aumenta la velocidad de reacción.
- Catalizadores. A veces, la presencia de ciertas sustancias llamadas catalizadores (que no intervienen químicamente en la reacción) altera la velocidad de reacción. Los catalizadores que aumentan la velocidad se llaman activadores, los que la disminuyen se llaman inhibidores. Los catalizadores biológicos se llaman enzimas.
- Sustrato o superficie de reacción. Otra forma de modificar la velocidad de reacción química es modificar el lugar, generalmente superficie, donde tiene lugar la reacción química.

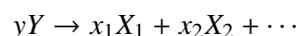
## 30 Algunos tipos de reacciones químicas

A continuación un listado no exhaustivo de tipos de reacciones químicas elementales:

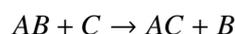
- Reacciones de síntesis: cuando hay solamente una sustancia en los productos.



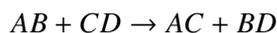
- Reacciones de descomposición o desintegración: cuando hay solamente un reactivo.



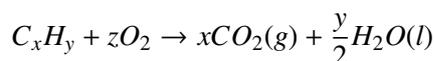
- Reacciones de desplazamiento. Cuando hay un intercambio simple de átomos o grupo de átomos.



- Reacciones de doble sustitución o metátesis. Cuando hay dos intercambios de grupos de átomos o átomos.



- Reacciones de combustión. Cuando se agrega oxígeno molecular a una sustancia, generalmente un hidrocarburo o derivados.



donde  $z = \frac{2x + y}{2} = x + \frac{y}{2}$ .

La industria química depende en gran medida del estudio de las reacciones químicas. Así, la industria farmacéutica, la industria petroquímica y otras industrias como la alimentaria deben mucho a la Química. Los productos naturales y artificiales que nos rodean son resultado de las transformaciones químicas naturales o artificiales de los diferentes átomos. La Química ambiental hoy día intenta cuidar el medio ambiente, de forma que se desarrolla desde hace algún tiempo la Química sostenible. Hay fertilizantes, aditivos, plásticos, medicinas, detergentes y gasolinas que son peligrosas para el medio ambiente y que requieren tratamiento. El agujero de la capa de ozono se produjo como consecuencia de los CFCs (clorofluorocarbonocompuestos) del ser humano. El calentamiento global actual se deben en gran medida al ser humano y se han tomado medidas para su mitigación y reducción paulatina, no sin problemas. La lluvia ácida es también consecuencia de la presencia en la atmósfera de gases de las reacciones de combustión de nuestra máquinas desde tiempos de la Revolución Industrial.

## 31 Fuerzas

### Fuerza

Se llama fuerza a toda causa o agente capaz de modificar el estado de movimiento o reposo de un cuerpo, partícula o sistema de partículas.

Los efectos de las fuerzas son, por tanto, la modificación del estado de movimiento, o las deformaciones de los objetos.

### 31.1 Tipos de fuerza

Según la necesidad o no de contacto se clasifican en:

- De contacto. Si es necesario que haya contacto físico entre cuerpos. Ejemplos: fuerzas de rozamiento, fuerzas elásticas, fuerzas de torsión o deformación en un sólido.
- A distancia. Si no es necesario contacto: fuerza gravitacional, fuerza electromagnética (fuerza eléctrica, fuerza magnética), fuerza nuclear fuerte, fuerza nuclear débil.

Según la propiedad característica (fundamental):

- Fuerza de gravitación universal. Característica: masa o energía.
- Fuerza electromagnética (fuerza eléctrica, fuerza magnética). Características: carga eléctrica, corrientes eléctricas.
- Fuerza nuclear fuerte: color o carga fuerte (rojo, verde, azul).
- Fuerza nuclear débil: sabor o carga débil (u,d,c,s,t,b),  $e$ ,  $\nu_e$ ,  $\mu$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\tau$ ,  $\nu_\tau$ .

## 31.2 Fuerzas cotidianas

### Fuerza normal y fuerza de rozamiento

La fuerza normal es una fuerza de reacción al peso del cuerpo sobre una superficie. Es perpendicular a la superficie de contacto, y está relacionada con otra fuerza cotidiana, la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento se debe a la interacción entre las superficies de contacto, por sus interacciones interatómicas entre superficies, y se opone al movimiento. Hay fuerzas de rozamiento estático (en reposo) y dinámico o cinético (en movimiento). La fuerza de rozamiento estática o dinámica es proporcional a la fuerza normal:  $F_r(e) = \mu_e N$ ,  $F_r(d) = \mu_d N$ .

### Peso

Es la fuerza con que la Tierra, o cualquier objeto cósmico, atrae un objeto hacia su superficie. Matemáticamente:

$$P = mg = G_N \frac{M_c m}{R_c^2}$$

donde  $m$  es la masa gravitacional y  $g$  es la gravedad superficial. En la Tierra,  $g \approx 9,81 m/s^2$ . El peso es consecuencia de la llamada Ley de Gravitación Universal de Newton:

$$F_N = G_N \frac{Mm}{d^2}$$

donde  $G_N = 6,674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$  es la constante de gravitación universal.  $M, m$  son las masas y  $d$  la distancia que las separa.

Otras fuerzas usuales son la tensión de una cuerda  $T = T_s$  o la fuerza de rozamiento en un fluido (proporcional a una potencia de la velocidad, i.e.,  $F_r(f) = kv^n$ , donde  $n$  es un entero positivo).

### Fuerza elástica o de Hooke

Un cuerpo elástico o deformable, tiende a reaccionar para recuperar su forma inicial. La fuerza elástica o deformadora sigue la llamada ley de Hooke

$$F = kx$$

y donde  $k$  es una constante con unidades de  $N/m$ , dimensiones  $MT^{-2}$ .  $x$  es la llamada elongación, o cantidad que se ha deformado el muelle o cuerpo elástico. Este mismo tipo de fuerza, aplicado al Universo, es generado por la energía oscura o fuerza de repulsión cósmica

$$F_\Lambda = -\Lambda R$$

### Fuerza electrostática o de Coulomb

Entre dos cargas eléctricas cualesquiera, hay una fuerza de atracción o repulsión igual a

$$F_C = K_C \frac{Qq}{d^2}$$

donde  $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$  es la constante de Coulomb,  $Q, q$  cargas en culombios y  $d$  la distancia que separa las cargas.

## 32 Movimiento y tipos de movimientos

Un sistema de referencia es un lugar en el espacio, determinado por una serie de números, respecto de un punto de origen. Se llama trayectoria al conjunto de posiciones o puntos por los que pasa un cuerpo móvil en su movimiento. Según la trayectoria, un movimiento o cambio de posición de un objeto respecto un sistema de referencia puede ser:

- Rectilíneo. La trayectoria es una línea recta.
- Curvilíneo. La trayectoria es una línea curva. Dentro de estos movimientos, destacan los movimientos circulares, los movimientos parabólicos, los movimientos hiperbólicos y los movimientos elípticos. Hay otros movimientos curvilíneos más complicados, como los helicoidales, espirales o lemniscáticos, y otros varios.

El espacio recorrido por un móvil es la diferencia entre la posición final e inicial del objeto. Matemáticamente:

$$\Delta s = s_f - s_0$$

Otra magnitud importante es la rapidez o celeridad media, definida como el cambio de la posición respecto del tiempo en un intervalo concreto

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0}$$

Las unidades de la rapidez o velocidad/celeridad media es  $m/s$  ó  $km/h$  (m.p.h, miles per hour, millas partido por hora en países anglosajones). La rapidez puede no ser constante y entonces se habla de rapidez, celeridad o velocidad instantánea. Las dimensiones de la velocidad son  $L/T = LT^{-1}$ . El cambio de la rapidez o velocidad en un tiempo dado es la aceleración:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$

Sus unidades son los  $m/s^2$ , o bien los  $km/h^2$ . Si un movimiento es uniforme, no cambia la velocidad y la aceleración es nula. Si un movimiento es de aceleración constante, se dice uniformemente acelerado (o decelerado si es la aceleración negativa). Si un movimiento tiene aceleración no constante, se dice que tiene movimiento variado.

Observación importante: el movimiento de todo cuerpo, partícula o sistema es siempre relativo al observador. No existe el movimiento absoluto.

### 32.1 Ecuaciones del M.R.U.

Un M.R.U. es un movimiento rectilíneo y uniforme, es decir, un movimiento de trayectoria rectilínea, y velocidad constante, con aceleración nula. Las ecuaciones de este movimiento son las siguientes:

#### Ecuaciones del MRU

$$a = 0m/s^2 \quad (81)$$

$$v = \text{constante } m/s \quad (82)$$

$$x = x_0 + v(t - t_0) \quad (83)$$

y donde la velocidad media es

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

### 32.2 MRUA

Un M.R.U.A. es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es decir, un movimiento de trayectoria rectilínea, y de aceleración constante no nula. Matemáticamente, las ecuaciones que definen el movimiento son las siguientes:

## Ecuaciones del MRUA

$$a = \text{constante } m/s^2 \quad (84)$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad m/s \quad (85)$$

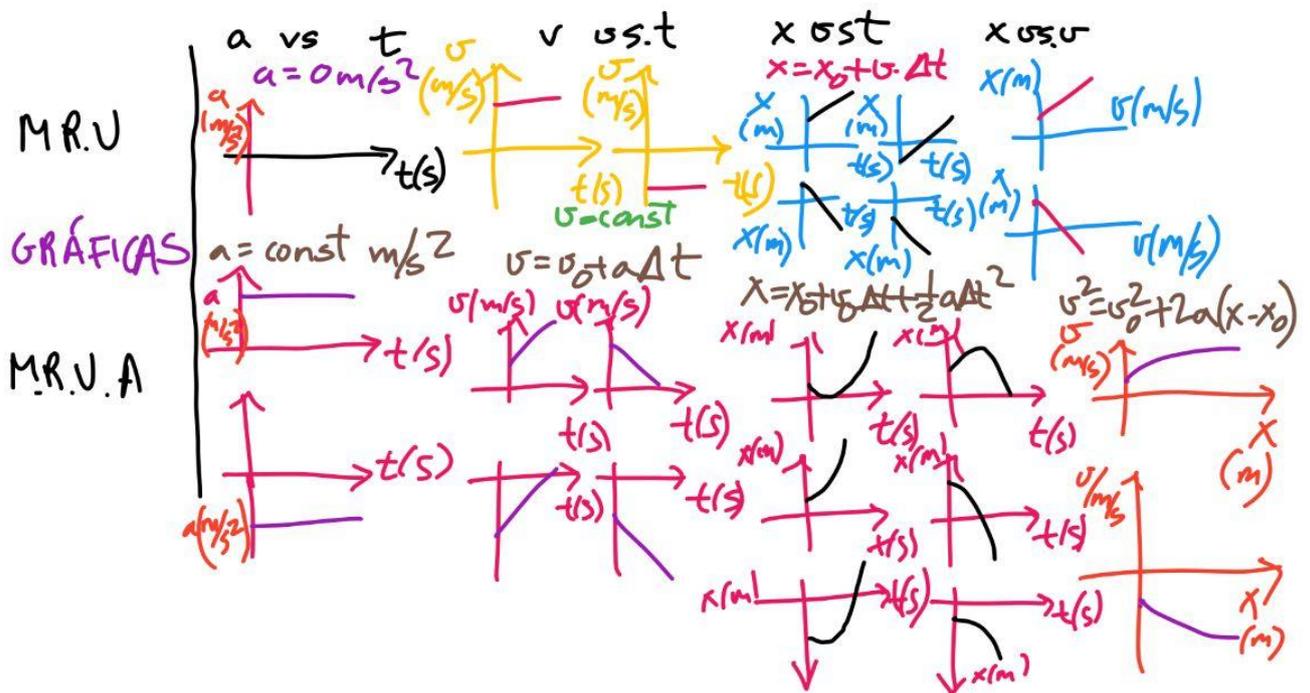
$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (86)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (87)$$

y donde la velocidad y aceleración medias son

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$



## 33 Máquinas

### Máquina simple

Una máquina simple es un instrumento, artefacto o dispositivo mecánico que transforma fuerzas. Ejemplos de máquinas simples: palanca, plano inclinado y polea, así como algunas variantes de éstas.

## Palanca

Hay 3 tipos de palancas, denominadas de primer, segundo y tercer tipo. Las de primer tipo, son una barra rígida que apoyada en un punto puede girar libremente a su alrededor. La fuerza aplicada se llama potencia y la que se quiere vencer se llama resistencia, el punto de apoyo se llama fulcro. La distancia sobre la barra que separa el fulcro del punto al que se aplica fuerza se llama brazo. Se cumple que el producto de la fuerza por el brazo es constante, hecho llamado ley de la palanca. Matemáticamente:

$$Fd_f = Rd_R$$

En términos modernos, la ley de la palanca es un ejemplo de la conservación de una magnitud llamada momento angular.

Para el plano inclinado, la relación matemática entre fuerza y resistencia, con la altura del plano, está dada por la expresión

$$Fd = Rh$$

donde  $h$  es la altura del plano y  $d$  es la longitud del plano sobre la cuña (no la distancia horizontal).  $R$  sería el peso, y  $F$  la fuerza aplicada. Para la polea, se cumple que  $F = R$ .

## 34 Energía

### Energía

Energía es la capacidad que tiene un sistema material de producir cambios en otro sistema material o sobre sí mismo. Cuando hablamos de cambios, hablamos de cambios en el movimiento, desplazamientos, giros o deformaciones.

Otras unidades de energía los ergios (erg), los kWh (kilovatios-hora) y los FOE (fifty-one-ergs).  $1J = 10^7 erg$ ,  $1kWh = 3,6MJ$ ,  $1FOE = 10^{51} erg$ . La energía tiene una serie de propiedades interesantes fascinantes:

- La energía puede transformarse. Hay diferentes tipos de energía y esos tipos de energía pueden interconvertirse entre sí.
- La energía puede transferirse. La energía puede pasar de un cuerpo a otro de diferentes formas, por todo el cuerpo, o por partes de él.
- La energía se conserva. El primer principio de la Termodinámica es la Ley de Conservación de la energía, que dice que en ausencia de disipación, la cantidad total de energía ni se crea ni se destruye, solamente se transforma.
- La transferencia de energía tiene cierta eficiencia. Cuando se involucra la energía térmica, es imposible transformar todo el calor íntegramente en energía útil. Esto lleva a definir la eficiencia como el cociente entre la energía aprovechable para realizar cambios y la energía total. Este hecho de que cuando hay transferencia por calor no se pueda alcanzar el rendimiento del 100 % se llama segunda Ley de la Termodinámica, y está asociada al incremento de una magnitud termodinámica y cósmica llamada **entropía**.
- La potencia es la energía por unidad de tiempo transferida, y es una magnitud que mide la rapidez con la que fluye o cambia la cantidad de energía, y que mide en vatios:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E - E_0}{t - t_0} = \frac{\text{Variación de energía}}{\text{Variación del tiempo}}$$

### 34.1 Tipos de energía

### 34.2 Energía cinética, potencial y mecánica

Se llama energía cinética a la energía asociada a su movimiento o velocidad. Matemáticamente, en una teoría no relativista<sup>7</sup>:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (88)$$

Se llama energía potencial gravitacional a la energía que tiene un cuerpo bajo la acción de la fuerza gravitacional. A baja altura<sup>8</sup>, la energía potencial gravitacional es

$$E_p = mgh \quad (89)$$

La energía potencial eléctrica es

$$E_p = K_C \frac{Qq}{r} \quad (90)$$

La suma de energías cinética y potencial se llama energía mecánica, y en ausencia de fuerzas disipativas, es una cantidad constante o que se conserva en el tiempo. Matemáticamente, la energía mecánica es por tanto:

$$E_m = E_c + E_p$$

Otro tipo de energía es la llamada energía química, que se asocia a los enlaces químicos que mantienen unidos a los átomos como sustancia pura (o moléculas en las interacciones intermoleculares). La energía química está relacionada con una magnitud termodinámica llamada entalpía  $H = U + PV$ . La energía nuclear es una energía relacionada: es la energía asociada a las fuerzas que mantienen unidos a los núcleos atómicos. Esta energía puede ser liberada mediante la fragmentación de los átomos, o fisión nuclear, o mediante la unión de los átomos, o fusión nuclear. La fusión nuclear tiene lugar solamente a millones de grados.

Finalmente la energía asociada al movimiento de sus partículas constituyentes es la llamada energía térmica. La agitación desordenada de las partículas es la energía térmica.

### 34.3 Intercambios de energías

El fenómeno de la transferencia de energía tiene lugar por diferentes mecanismos:

- Calor o energía térmica. Cuando dos sistemas están a diferente temperatura (de equilibrio separadamente), el sistema de mayor temperatura cede energía en forma de calor al sistema de menor temperatura hasta que la temperatura del conjunto se iguala. El proceso térmico tiene lugar hasta que se alcanza dicha **temperatura de equilibrio**.
- Trabajo. Cuando dos sistemas materiales interactúan entre sí mediante fuerzas que producen diversos desplazamientos o movimientos.

Calor y trabajo no son formas de energía sino formas de transferencia de energía, o energía en tránsito, entre sistemas materiales.

---

<sup>7</sup>En una teoría relativista, la energía cinética tiene una expresión más complicada:  $E_k = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) mc^2$ .

Cuando las velocidades son pequeñas comparadas a la velocidad de la luz  $c$ , la expresión relativista se aproxima a la no relativista. Para partículas sin masa invariante en reposo, la energía es proporcional al llamado momento  $p$  via  $E = pc$ .

<sup>8</sup>A altura arbitraria sobre la superficie, la energía potencial gravitacional es  $E_p = -GMm/r$ , donde  $r = R + h$ , donde  $R$  es el radio del objeto gravitacional.

## Ley de conservación de la energía mecánica

En ausencia de fuerzas de rozamiento o disipativas, se cumple el llamado principio de conservación de la energía mecánica: la energía mecánica del sistema inicial, es igual a la energía mecánica del sistema final. Matemáticamente:

$$\Delta E_m = E_m(f) - E_m(0) = 0 \leftrightarrow E_m(\text{inicial}) = E_m(\text{final}) \leftrightarrow E_c(f) + E_p(f) = E_c(0) + E_p(0) \quad (91)$$

Si hubiera fuerzas disipativas, el cambio de energía mecánica sería precisamente igual al trabajo realizado por las fuerzas disipativas o rozamiento. Este principio es útil para hallar velocidades de objetos en caída libre y otros problemas. Si  $E_c(f) = E_p(h)$ , entonces  $v_f = \sqrt{2gh}$ .

## 35 Ondas

Una **onda** es una perturbación que se genera en un punto del espacio o espacio-tiempo, llamado foco emisor, y que se propaga siguiendo una determinada forma de onda  $\Psi(x, t)$  siguiendo una ecuación de onda. Existen ecuaciones de onda lineales y no lineales. Muchas veces, se dice que el movimiento ondulatorio es el transporte de energía sin transporte de materia pero eso es incorrecto, ya que materia y energía son magnitudes intercambiables según la teoría de la relatividad. Las magnitudes que tipifican o caracterizan las ondas son:

- Amplitud(A). Es la máxima separación de puntos que oscilan o vibran respecto a su posición de equilibrio. En el S.I. se mide en metros.
- Longitud de onda  $\lambda$ . Es la distancia mínima entre dos puntos con el mismo estado de vibración, equivalentemente, la mínima distancia entre dos crestas o valles. Unidades: metro.
- Período(T). Es el tiempo que tarda una onda en recorrer una longitud igual a su longitud de onda. Unidad: segundo (SI).
- Frecuencia(f):  $f = 1/T$ , es el número de oscilaciones que realiza en un segundo. Unidades: hertzio (Hz),  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .
- Frecuencia angular:  $\omega = 2\pi/T$ , número de vueltas circulares en un tiempo dado.
- Número de onda:  $k = 2\pi/\lambda$ , es la periodicidad espacial de la onda (unidades: radianes partido por metro,  $\text{rad/m}$ ). El número de onda por oscilación circular, o bien, el desplazamiento de la onda por cada longitud de onda es el llamado número de onda.  $\bar{k} = \frac{1}{\lambda}$ . Unidades:  $\text{m}^{-1}$ .
- Velocidad de propagación de la onda.  $v_p = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ , es la velocidad con la que se mueve o desplaza la onda.

### 35.1 Tipos de onda

Según la dirección de vibración y propagación:

- Ondas longitudinales. Son aquellas en las que la velocidad de vibración y propagación son paralelas. Ejemplos: sonido, ondas sísmicas de tipo P.
- Ondas transversales. Son aquellas en las que la velocidad de vibración y propagación son perpendiculares. Ejemplos: ondas en una cuerda, luz (onda electromagnética), ondas electromagnéticas arbitrarias (rayos X, rayos gamma, ondas de radio, microondas, ...), ondas gravitacionales, ...

Según el medio en que se propagan:

- Ondas mecánicas. Son también llamadas ondas materiales, y necesitan medio material para propagarse. Ejemplos: ondas sonoras, ondas en una cuerda, ondas de presión en un sólido o fluido, ...

- Ondas electromagnéticas. Se propagan en el vacío.
- Ondas gravitacionales. Se propagan en el vacío.
- Ondas de campos materiales fundamentales (espinoriales). Son ondas de campos de materia. La materia de estos, fundamentales si no entidades compuestas como los hadrones, viene de interacción con el campo de Higgs.
- Ondas de campos bosónicos (ondas del campo de Higgs, ondas W, Z, ondas de color). Se propagan en el vacío, pero son de corto alcance, en el caso de la interacción nuclear, salvo el caso del Higgs, cuyo valor de vacío permea todo el Universo.

## 35.2 Ondas sonoras y sonido

El sonido es la propagación de la vibración de los cuerpos a través de un medio material como el aire, el agua, . . . El sonido tiene una serie de propiedades interesantes:

- Intensidad. Está relacionada con la energía que transporta la onda sonora. El término cotidiano de volumen es impreciso. La intensidad sonora se mide en escala de dB (decibelios).
- Tono. El tono está relacionado con la frecuencia de la onda sonora. El oído humano percibe generalmente frecuencias entre 20Hz y 20kHz. Las frecuencias bajas son graves, las frecuencias altas son agudas.
- Timbre. Si dos instrumentos musicales tienen o emiten la misma nota, con el mismo volumen, podemos diferenciarlos. Esto se debe a que las ondas que generan son diferentes y sus sonidos tienen distinto timbre.
- Reflexión y eco. Si el sonido alcanza una barrera, parte de la energía se transfiere a la pared, pero otra se refleja y vuelve. Este fenómeno se llama eco.
- La reverberación es el fenómeno que tiene lugar cuando el sonido en un lugar permanece como consecuencia de la llegada de diversas reflexiones. Es decir, la reverberación es la persistencia del sonido en un lugar como consecuencia de la superposición o unión de diferentes reflexiones del mismo.

La contaminación acústica o ruido hace referencia al exceso de sonido molesto creado por la actividad humana o natural (explosión de volcán, etcétera). Los sonidos se clasifican según su intensidad sonora en una escala de **decibelios**.

140 dB	Disparo de escopeta / Umbral de dolor
130 dB	Avión despegando / fuegos artificiales
120 dB	Motor de avión / martillo neumático
110 dB	Concierto de rock
100 dB	Taladro
90 dB	Atasco de tráfico en una ciudad
80 dB	Tren / secador de pelo
70 dB	Tráfico tranquilo / aspiradora
60 dB	Conversación normal
50 dB	Sonido ambiental en una oficina
40 dB	Conversación susurrada / lluvia
30 dB	Sonido ambiental en el campo
20 dB	Estudio de grabación vacío
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición normal

## 36 Calor y temperatura

### Energía térmica

La energía térmica es la energía que posee un cuerpo o partícula (sistema de partículas) debido al movimiento o agitación desordenada de las partículas o entidades que lo forman. La magnitud que mide la agitación térmica es la temperatura absoluta. La relación entre energía térmica (cinética) y temperatura es:

$$E_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

donde  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$  es la constante de Boltzmann, ligada a la entropía  $S$  de un sistema.

La energía térmica depende de su velocidad y de su masa (en un contexto no relativista; en un contexto relativista la energía cinética es el momento del fotón equivalente, y su energía es su temperatura via  $E = pc = k_B T$ ).

### 36.1 Escalas termométricas

Además de la escala absoluta o de Kelvin, históricamente se establecieron varias escalas de temperatura: la centígrada o de Celsius, la de Fahrenheit, y otras varias debidas a Newton, Delisle, Rømer, Rankine, Réaumur. Las habituales son la centígrada y la de Fahrenheit, que se establecen por las relaciones siguientes con la absoluta:

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273$$

$$\frac{T(^{\circ}C)}{100} = \frac{T(^{\circ}F) - 32}{180}$$

### 36.2 Energía en tránsito y calor

Se dice que dos cuerpos A y B están en equilibrio térmico cuando sus temperaturas  $T_A$  y  $T_B$  son iguales. Si dos cuerpos no tienen la misma temperatura, hay una cesión de energía del más caliente (a mayor temperatura) al menos caliente y más frío (a menor temperatura) hasta que se alcanza una nueva temperatura  $T_e$  llamada temperatura de equilibrio.

El calor  $Q$  (heat en inglés) es la energía térmica que se transmite o transita entre dos sistemas materiales a diferente temperatura. Antiguamente, el calor era una magnitud diferente a la energía. El experimento de Joule demostró la equivalencia de las unidades de calor, las calorías (cal), y los julios:

$$1\text{cal} = 4,186\text{J} \leftrightarrow 1\text{J} = 0,24\text{cal}$$

Así pues, calor y energía están relacionados, pero calor y temperatura son magnitudes diferentes, aunque también están relacionadas (vía la constante de Boltzmann,  $E \sim k_B T$ ).

### 36.3 Efectos del calor

Los efectos del calor son:

- Variación en la temperatura.  $\Delta T$ . El calor por cambio de temperatura introduce magnitudes específicas llamadas capacidad calorífica y calor específico, vía  $\Delta Q = C\Delta T$ ,  $\Delta Q = mc_e\Delta T$ .
- Cambio de estado. Para cambiar de estado o transicionar de fase (a temperatura o presión constantes), hace falta una energía intrínseca de cambio de estado llamada **calor latente**  $L$ . Hay calores latentes de fusión, vaporización, sublimación, etcétera. Matemáticamente,  $\Delta Q = mL$ , donde  $m$  es la cantidad de materia que cambia de fase.
- Variación en las dimensiones (lineales, superficiales, volúmicas) de un cuerpo. Cuando un cuerpo se calienta o enfría, se dilata y contrae. Eso lleva a introducir unos coeficientes de dilatación lineal, superficial o volúmica:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\Delta T$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \beta\Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma\Delta T$$

Para cuerpos isótropos, se cumple que  $\gamma = 3\alpha$ , y que  $\beta = 2\alpha$ .

- Cambios químicos. El calor puede usarse, mediante una entalpía, en producir cierta reacción química, vía  $\Delta Q = \Delta H_R^0$ .

### 36.4 Propagación del calor

Hay 3 mecanismos esenciales de propagación del calor:

- Conducción. Es el mecanismo básico en sólidos. En la conducción no hay transporte de materia y se produce por contacto.
- Convección. Es el mecanismo de transferencia en fluidos. El calor se propaga por transporte de materia y diferencias de densidad.
- Radiación. El calor se propaga mediante emisión de ondas electromagnéticas (o incluso gravitacionales) en el vacío, en ausencia de medio material, aunque también puede transmitirse por éste. Todos los cuerpos que poseen temperatura emiten ondas electromagnéticas.

Los cuerpos son más o menos permeables o conductores (aislantes) del calor (o de la electricidad). Un buen conductor térmico es aquel a través del cual la conducción térmica es rápida. Uno malo es aquel a través del cual la conducción es lenta, muy lenta o casi nula. La importancia de los conductores y aislantes térmicos es evidente para la protección de los cuerpos humanos frente a las variaciones del clima. El aislamiento térmico del hogar también es importante a la hora del consumo y eficiencia energética de una casa.

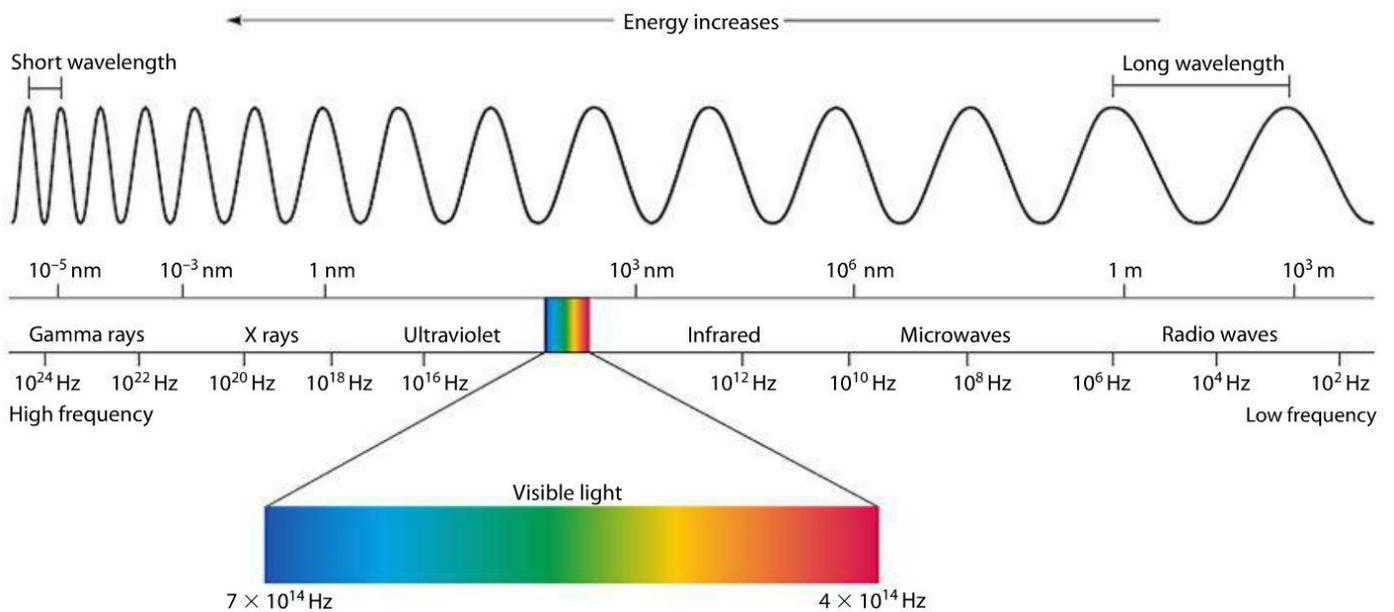
### 37 Ondas electromagnéticas: luz y Óptica

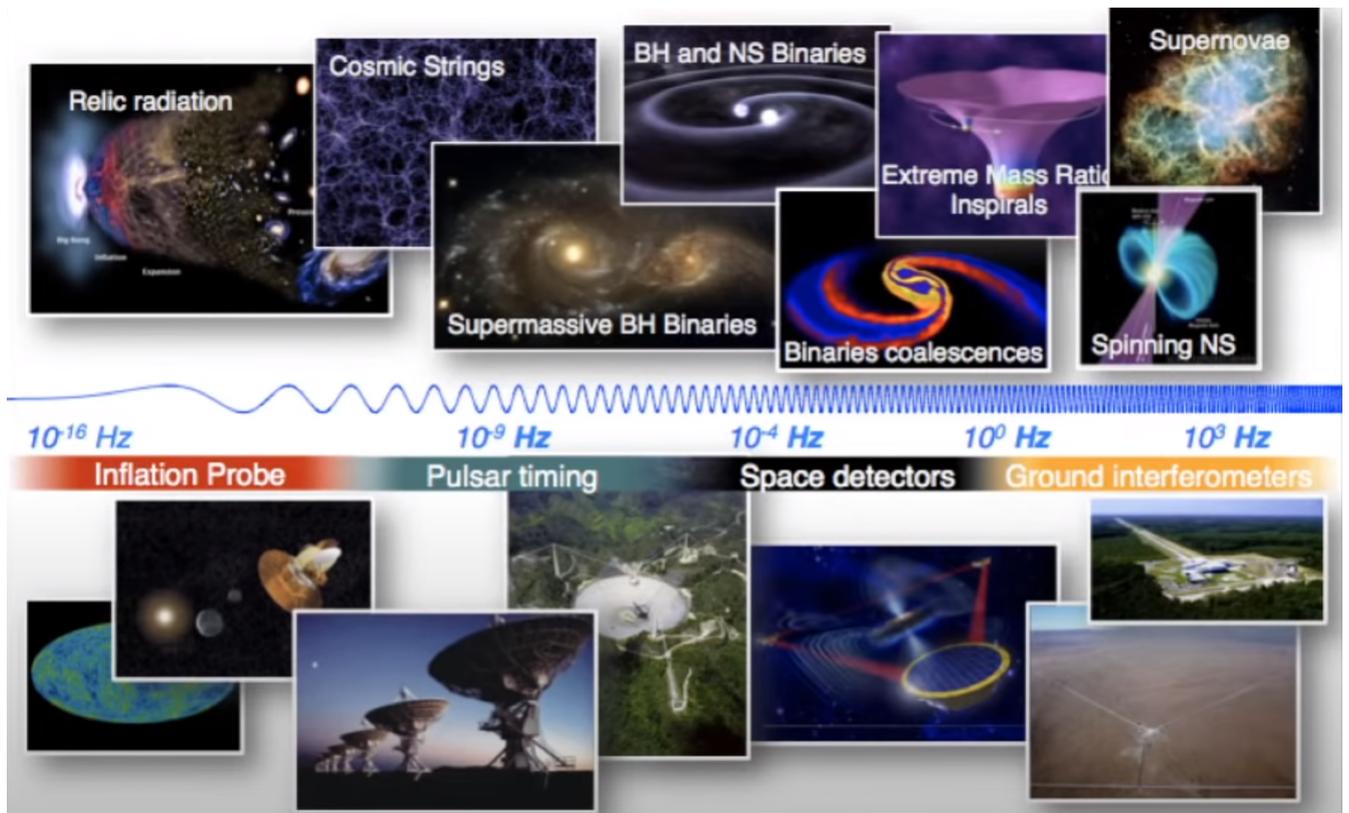
Una onda electromagnética es un conjunto de campos eléctricos y magnéticos, generados por cargas eléctricas y corrientes eléctricas (cargas en movimiento), que se propagan incluso en el vacío. La luz es un caso especial de onda electromagnética. En términos más mundanos, la luz es una onda electromagnética de cuerpos incandescentes. La velocidad de la luz en el vacío es de forma exacta:  $c = v_l = 299792458m/s$ , o unos  $300000km/s$  ( $3 \cdot 10^5 km/s$ ).

#### Espectro electromagnético

El conjunto de todas las frecuencias (o longitudes de onda) de las ondas electromagnéticas se llama espectro electromagnético.

Frecuencias generales del visible están comprendidas entre unos 400 y 700 nanómetros. Según la opacidad de la luz, los cuerpos pueden ser transparentes, translúcidos u opacos. Generalmente, la luz se propaga en línea recta. A continuación una imagen del espectro de frecuencias electromagnético y gravitacional:





## Reflexión y refracción

La reflexión es el fenómeno que ocurre cuando la luz incide sobre un objeto y vuelve al medio por el que se propagaba. Existe reflexión especular, reflexión difusa y reflexión parcial o total. La refracción es el fenómeno que ocurre cuando la luz cambia la dirección de propagación al pasar de un medio a otro, por ejemplo de agua a aire, de vacío a aire, de aire a aceite o agua a aceite, etcétera.

## Dispersión

La dispersión de la luz es el fenómeno que ocurre cuando las ondas de distinta frecuencia se separan al atravesar un material.

Un fenómeno similar es la difracción: que ocurre cuando las ondas pasan un orificio o rendija (una o varias) y se superponen o anulan sus intensidades.

El color de los objetos no es una propiedad de los cuerpos, sino el resultado de su interacción con la luz. Si un cuerpo refleja toda la luz, entonces la luz es blanca. Si absorbe toda la luz, el cuerpo será negro.

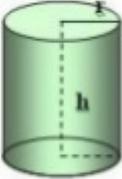
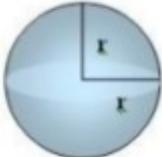
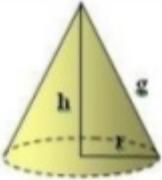
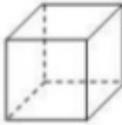
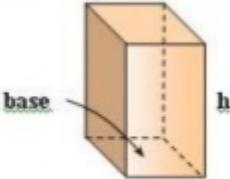
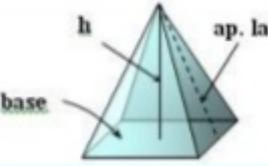
Se llama contaminación lumínica al exceso de luz nocturna provocado por las actividades humanas. Consecuencias de esta contaminación:

- El desperdicio de importantes cantidades de energía.
- Daño a ecosistemas nocturnos.
- Dificultades para el estudio científico de los astros, la Astronomía.

## A Volúmenes

### ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

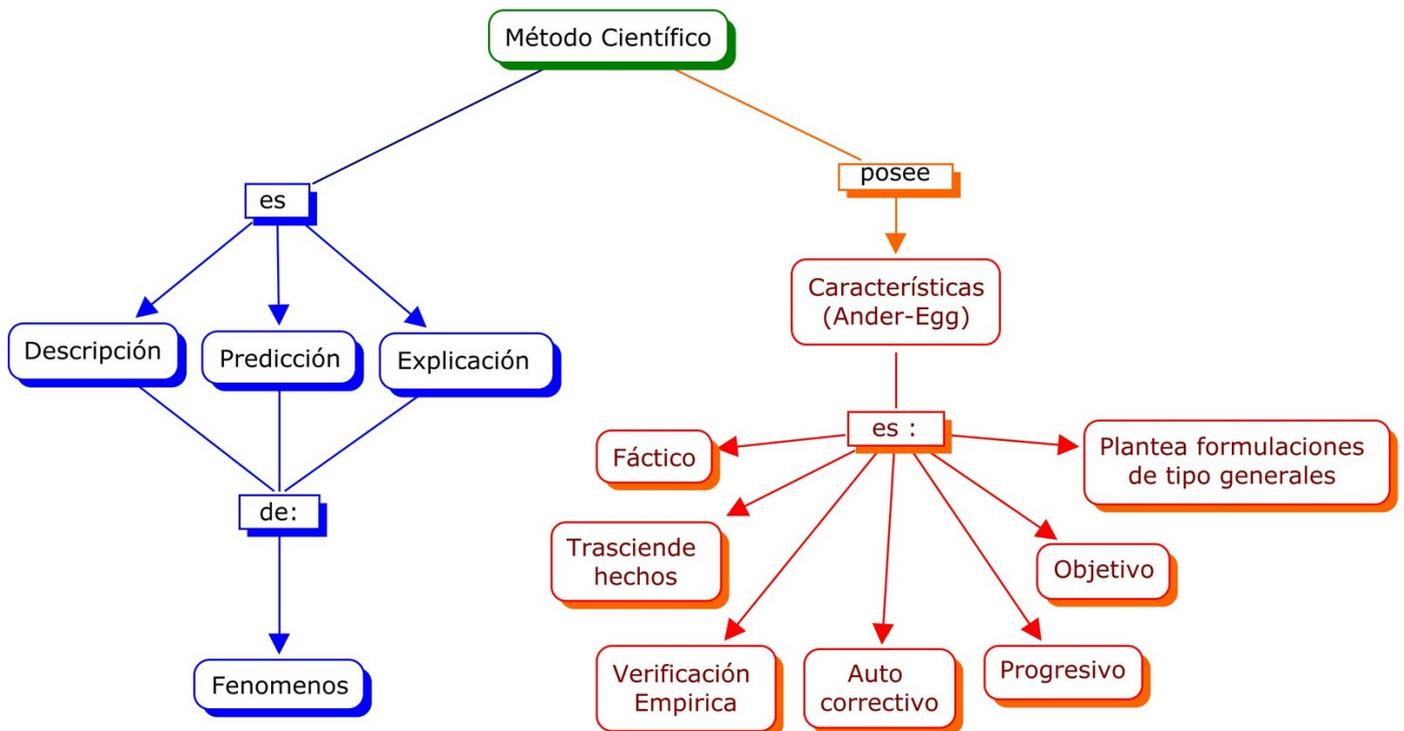
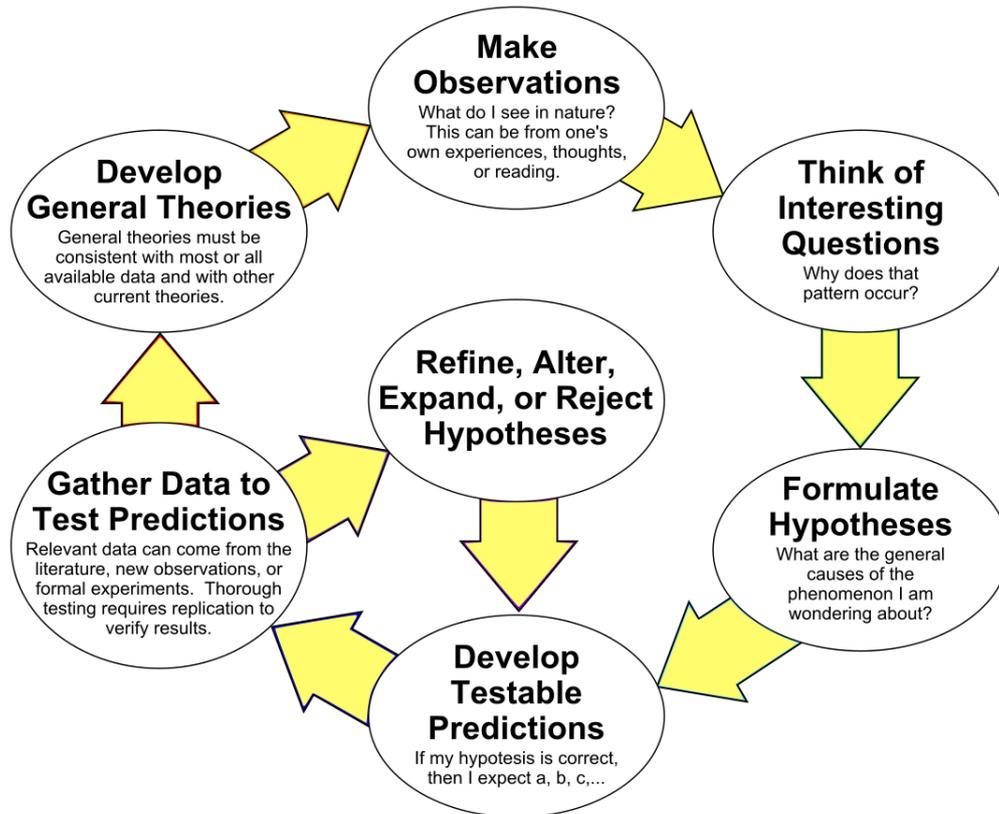
#### Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

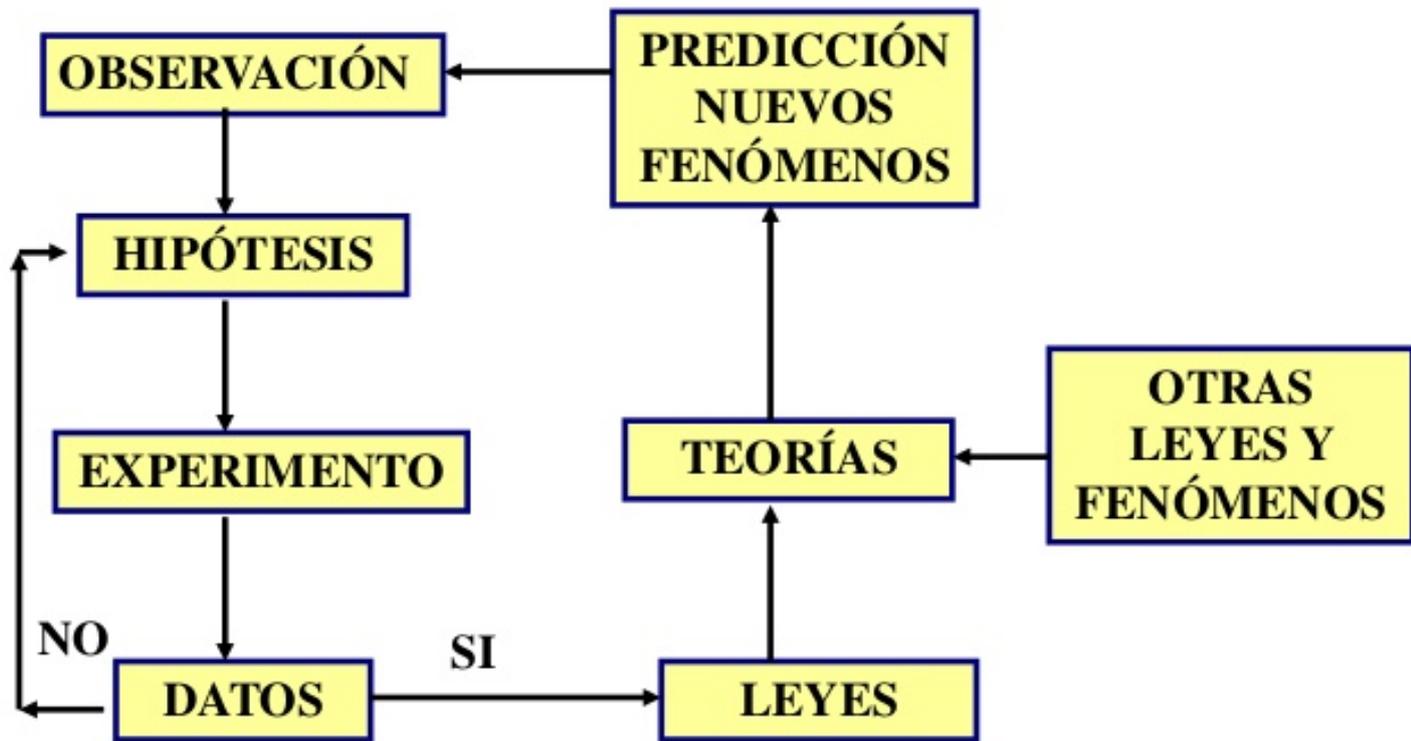
Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{\text{total}} = 2\pi r (h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{\text{total}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6 a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim. base} \cdot h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \cdot h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim. base} \times \text{ap. lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$	$2\sqrt{3}a^2$
VOLUMEN	$a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15+\sqrt{3}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

## B El método científico(diagramas)

# The Scientific Method as an Ongoing Process





**El método científico al completo**

## C Potencias de diez. Tablas resumen

Para múltiplos y submúltiplos de unidades en cualquier sistema de medida, se suelen usar unos prefijos universales. Las potencias de 10 positivas son *da, h, k, M, G, T, P, E, Z, Y* y las potencias de 10 negativas son *d, c, m, μ, n, p, f, a, z, y*. Un resumen de estas potencias en forma de tabla:

METRIC PREFIXES			
Power of Ten	Exponential Notation	Metric Prefix	Abbreviation
septillion	$10^{24}$	yotta	Y
sextillion	$10^{21}$	zetta	Z
quintillion	$10^{18}$	exa	E
quadrillion	$10^{15}$	peta	P
trillion	$10^{12}$	tera	T
billion	$10^9$	giga	G
million	$10^6$	mega	M
thousand	$10^3$	kilo	k
hundred	$10^2$	hecto	h
ten	$10^1$	deca	da
tenth	$10^{-1}$	deci	d
hundredth	$10^{-2}$	centi	c
thousandth	$10^{-3}$	milli	m
millionth	$10^{-6}$	micro	μ
billionth	$10^{-9}$	nano	n
trillionth	$10^{-12}$	pico	p
quadrillionth	$10^{-15}$	femto	f
quintillionth	$10^{-18}$	atto	a
sextillionth	$10^{-21}$	zepto	z
septillionth	$10^{-24}$	yocto	y

**Table 2. Proposed prefixes for powers of ten larger than 24 and smaller than -24.**

Power of ten	Prefix	Symbol	Origin
-27	xenno	x	Gr, ennea, nine
-30	weko	w	Gr, deka, ten
-33	vendeko	v	Gr, hendeka, eleven
-36	udeko	u	Gr, dodeka, twelve
27	xenta	X	Gr, ennea, nine
30	wekta	W	Gr, deka, ten
33	vendekta	V	Gr, hendeka, eleven
36	udekta	U	Gr, dodeka, twelve

Q1. Familiarization with prefixes and abbreviations.

$10^n$	Prefix	Abbreviation	$10^n$	Prefix	Abbreviation
$10^0$					
$10^3$	kilo-	k	$10^{-3}$	milli-	m
$10^6$	mega-	M	$10^{-6}$	micro-	$\mu$
$10^9$	giga-	G	$10^{-9}$	nano-	n
$10^{12}$	tera-	T	$10^{-12}$	pico-	p
$10^{15}$	peta-	P	$10^{-15}$	femto-	f
$10^{18}$	exa-	E	$10^{-18}$	atto-	a
$10^{21}$	zetta-	Z	$10^{-21}$	zepto-	z
$10^{24}$	yotta-	Y	$10^{-24}$	yocto-	y

Suppose,  $x = ay^4$  where  $a = 2.00 \text{ ng/Pm}$ . Determine the value of  $y$  when  $x = 16.0 \text{ (Zg fm}^2\text{)/(ms}^3\text{)}$ . Express the result in scientific notation and simplify the units.

(Hint: Refer to the table above, and note that SI prefixes are never used to multiply powers of units. For example, the abbreviation  $\text{cm}^2$  means  $(10^{-2} \text{ m})^2$ , not  $10^{-2} \text{ m}^2$ , and  $\text{ns}^{-1}$  is  $1/\text{ns}$  or  $10^9 \text{ s}^{-1}$ , not  $10^{-9} \text{ s}^{-1}$ . Also note  $m$  that can stand for meter or for milli, depending on the context.)

## D Factores de conversión

Las unidades se transforman unas en otras por medio de factores de conversión (fracciones) o mediante fórmulas complicadas en algunos casos. Factores de conversión que encontraremos habitualmente en este curso:

$$1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h} \leftrightarrow 1 \frac{km}{h} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s} \quad (92)$$

$$1 \frac{g}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{kg}{\text{m}^3} \leftrightarrow 1 \frac{kg}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{g}{\text{cm}^3} = \frac{1g}{10^3 \text{cm}^3} \quad (93)$$

$$1L = 1\text{dm}^3 \leftrightarrow 1\text{kL} = 1\text{m}^3 \leftrightarrow 1\text{mL} = 1\text{cm}^3 \quad (94)$$

$$1\text{atm} = 760\text{mmHg} = 1013\text{mb} = 101,3\text{hPa} = 760\text{torr} \quad (95)$$

$$1N(\text{newton}) = 10^5 \text{dinas}; \quad 1\text{kp} = 9,81\text{kp} \quad (96)$$

$$1\text{kWh} = 3,6\text{MJ}; \quad 1\text{J} = 10^7 \text{ergs}; \quad 1\text{FOE} = 10^{51} \text{ergs} \quad (97)$$

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273; \quad \frac{T(^{\circ}\text{C})}{100} = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{180} \quad (98)$$

## E Conceptos adicionales

Una observación de la Naturaleza es que las cosas y sustancias cambian. Podemos distinguir dos tipos generales de cambios o transformaciones:

- Transformaciones físicas: la naturaleza de la sustancia no cambia. Por ejemplo el cambio de agua a hielo o gas. La identidad de la molécula de agua se mantiene.
- Transformaciones químicas: la naturaleza de la sustancia cambia. Ocurre en las reacciones químicas, por ejemplo en la oxidación del hierro, la disociación del agua en hidrógeno y oxígeno, etcétera.

Además, en el laboratorio hay varios conceptos interesantes:

- Sensibilidad: la mínima medida que puede hacer un instrumento.
- Precisión: número de cifras significativas de una medida.
- Error absoluto: diferencia del valor medido con el valor exacto(supuesto conocido) o medio.
- Error relativo, porcentaje obtenido de dividir el error absoluto entre el valor exacto.
- Incertidumbre: medida de la ignorancia o reproducibilidad de un experimento.

Otras palabras y conceptos relacionados con el método científico son hipótesis, deducción, inducción, o abducción (razonamiento hacia atrás), inferencia y reducción al absurdo (método de demostración de algunos teoremas matemáticos).

## F Concentraciones

### Concentración de una disolución

Una disolución o mezcla homogénea consta de dos partes: soluto (componente de menor cantidad) y disolvente (componente mayoritario o de mayor cantidad). Para medir la cantidad de soluto en una mezcla homogénea se usa la magnitud llamada concentración:

$$C(m(g), V) = \frac{m(g)}{V(L)} \quad C(\%, m) = \frac{m(g)_s}{m(g)_D} \cdot 100 \quad C(\%, V) = \frac{V_s}{V_D} \cdot 100 \quad (99)$$

y donde  $m_s$ ,  $V_s$  son la masa y volumen de soluto, generalmente en gramos o mL, y  $m_D$ ,  $V_D$  son la masa y volumen de disolución, obtenidas como la suma de las masas de soluto y disolvente, y la suma del volumen de soluto y disolvente, i.e.,  $m_D = m_s + m_d$ ,  $V_D = V_s + V_d$ .

## G FORMULARIO

### Densidad 😊

$$d = \frac{m}{V} \quad (100)$$

### Densidad del agua

$$d_{\text{agua}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1000 \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$$

### Cambios de escalas de temperatura 😊

#### Cambios de escala

$$T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273 \quad (101)$$

$$T(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9}(T(^{\circ}\text{F}) - 32) \quad (102)$$

También puede usarse la relación entre los termómetros de Fahrenheit y Celsius:

#### Otras relaciones

$$\frac{T(^{\circ}\text{C})}{100} = \frac{T(^{\circ}\text{F}) - 32}{180} \quad (103)$$

### Ley de Boyle-Mariotte 😊

$$T = \text{constante} \leftrightarrow PV = \text{constante} \longleftrightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

### Ley de Charles 😊

$$P = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

### Ley de Gay-Lussac 😊

$$V = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P}{T} = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

### Ley de Avogadro

$$P, T = \text{constantes} \leftrightarrow \frac{V}{N} = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$P, T = \text{constantes} \leftrightarrow \frac{V}{n} = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

### Ley general o combinada de los gases, de Clapeyron 😊

$$\frac{PV}{T} = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

### Ecuación de estado del gas ideal 😊

$$PV = nRT$$

$$PV = Nk_B T$$

### Calor latente o transferido por cambio de estado

$$Q = mL.$$

**L** es en esta fórmula el *calor latente* para el cambio de fase que estemos considerando, y se mide en  $\frac{J}{kg}$ .

### Calor transferido en cambio de temperatura.

$$Q = mc_e \Delta T = C \Delta T.$$

# Gas Law Calculations

**Boyle's Law**  
 $P_1V_1 = P_2V_2$

**Charles' Law**  
 $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

**Gay-Lussac**  
 $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

**Combined**  
 $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$

**Density**  
 $\frac{P_1}{T_1D_1} = \frac{P_2}{T_2D_2}$

**Bernoulli's Principle**  
Fast moving fluids... create low pressure

**Avogadro's Law**  
Add or remove gas

**Manometer**  
Big = small + height

**Ideal Gas Law**  
 $PV = nRT$

**Graham's Law**  
 $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$   
diffusion vs. effusion

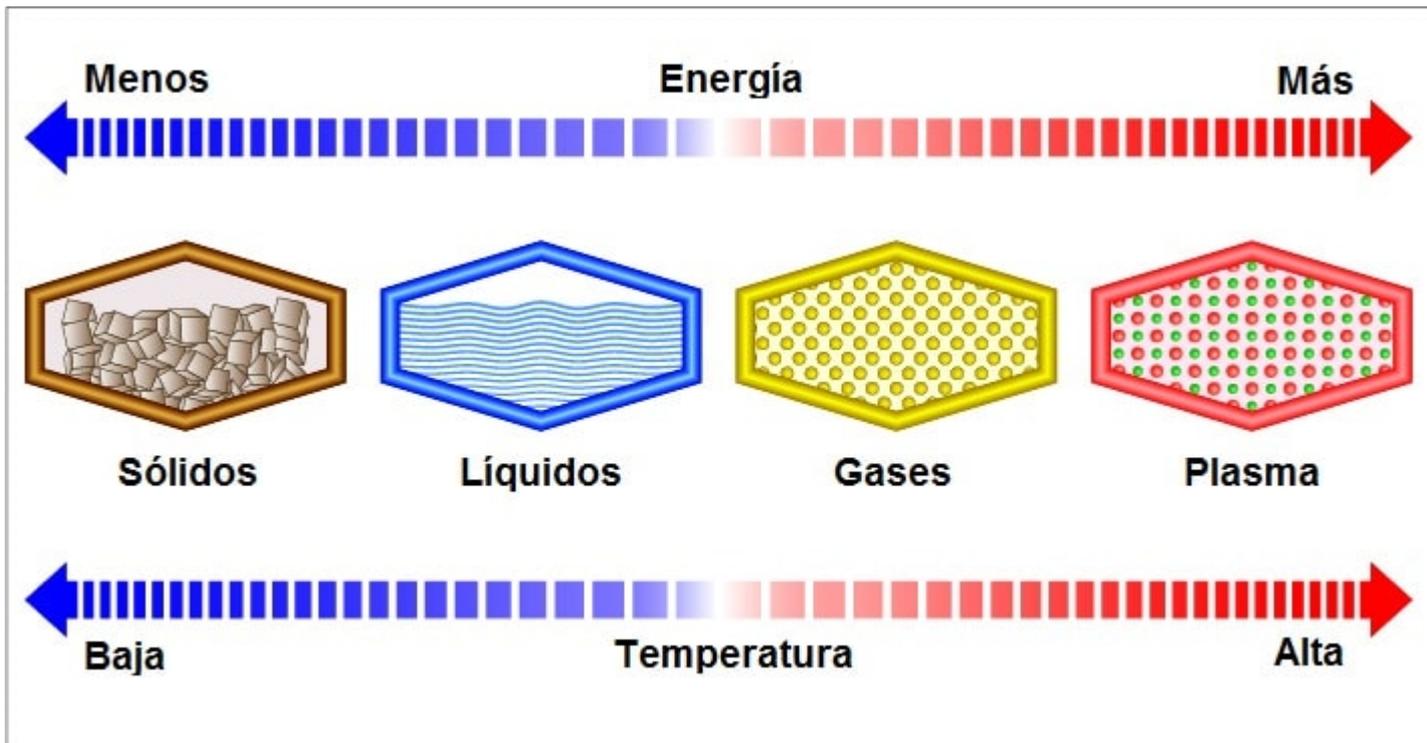
**Dalton's Law Partial Pressures**  
 $P_T = P_A + P_B$

1 atm = 760 mm Hg = 101.3 kPa  
R = 0.0821 L atm / mol K

La ley de Graham indica que la velocidad de las partículas que forman un gas ideal no relativista es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de las masas de las partículas. La ley de Dalton señala que en una mezcla de gases ideales, la presión total es la suma de las presiones parciales de cada gas. Así pues, el total de leyes de los gases es:

- Ley de Boyle-Mariotte.
- Ley de Charles.
- Ley de Gay-Lussac.
- Ley de Avogadro.
- Ley de Graham.
- Ley de Dalton.
- Ley de Clapeyron.
- Ecuación del gas ideal.
- Ecuaciones de gases no ideales (Van del Waals, Claplygin,...)

## H Diagramas de cambio de estado o transición de fase



### ESTADOS DE LA MATERIA

SOLIDO	LIQUIDO	GASEOSO
 Cubo de hielo 1. Tiene su propia forma 2. Tiene volumen 3. Tiene masa	 Gota de agua 1. Toma la forma de su contenedor 2. Tiene volumen 3. Tiene masa	 Nubes 1. No tiene su propia forma 2. NO tiene volumen 3. Tiene masa

 Cubo de hielo  
 lata  
 lapiz  
 mesa

 bola  
 **SOLIDO**  
 bicicleta  
 silla

 hueso  
 roca  
 guitarra

 Gota de agua  
 leche  
 piscina

 Chocolate caliente  
 Jugo de naranja  
 ESTADOS DE LA MATERIA

 Lluvia  
 Agua  
 sopa  
 Zarzaparrilla

 aire  
 vapor

 **GASEOSO**  
 ESTADOS DE LA MATERIA

 globo  
 viento  
 Globo de aire



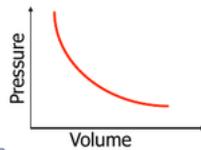
### Gas Laws

#### 1662 – Boyle's Law

For a given *constant* temperature

$$p \propto \frac{1}{V} \quad PV = \text{constant}$$

$p$  – absolute pressure



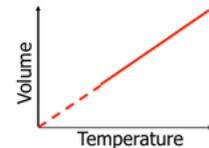
An air piston has a volume of 0.3 ft<sup>3</sup> pressure 0 psig. The piston slowly compresses the air (temperature = constant) to a volume of 0.15 ft<sup>3</sup>. What is the final pressure? ( $p_{\text{atm}} = 14.7$  psi).

### Gas Laws

#### 1787 – Charles's Law

For a given *constant* pressure

$$V \propto T \quad \frac{V}{T} = \text{constant}$$



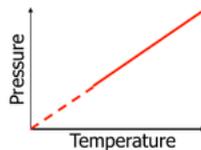
An air piston has a volume of 0.5 m<sup>3</sup> and a temperature of 20°C. The temperature is increased to 40°C under constant pressure. What is the final volume?

### Gas Laws

#### 1802 – Gay-Lussac's Law

For a given *constant* volume

$$p \propto T \quad \frac{p}{T} = \text{constant}$$



Tires are filled to a pressure of 200 kPa(g) (29 psig) at 10°C. After a drive of 100 km, the temperature in the tires is 40°C (constant volume). Assume a constant volume. What is the final pressure in the tires? ( $p_{\text{atm}} = 101$  kPa).

### Ideal Gas Law

Combine Boyle's, Charles's and Gay Lussac's Laws

$$pV \propto T$$

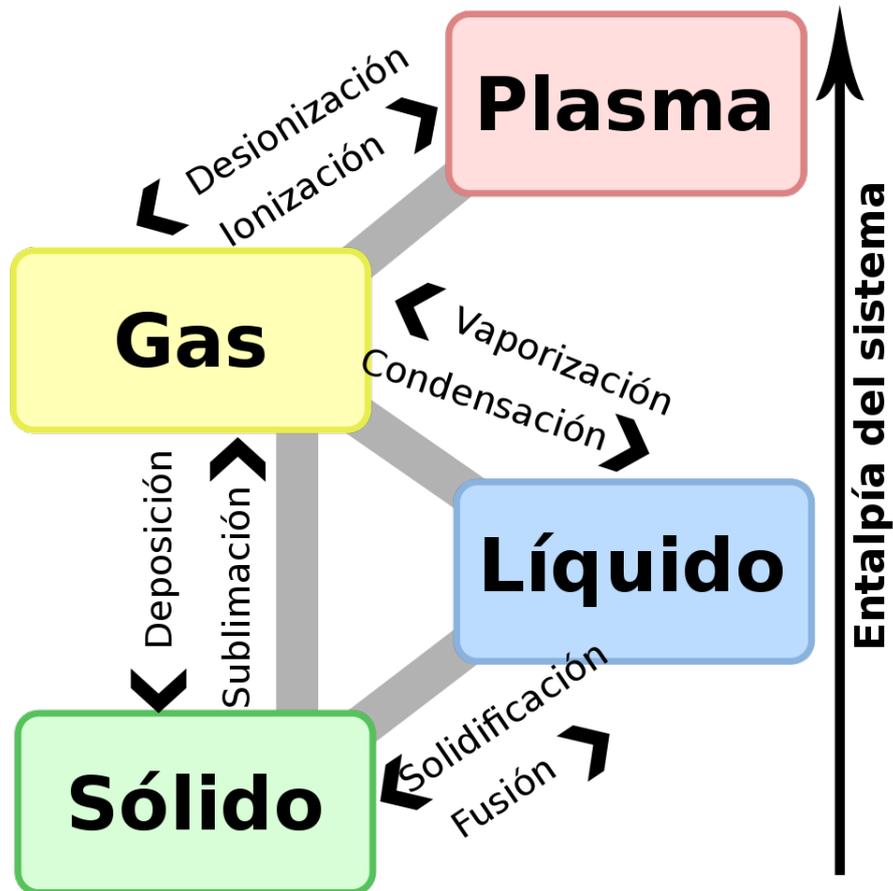
Also need to incorporate the amount of gas present, or the mass.

$$pV \propto mT \quad pV = CmT$$

- The proportionality constant, C, varies for different gases.
- The proportionality constant is the same for all gases if we express the amount of gas in terms of moles instead of in mass.

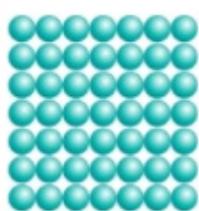
## Phase transitions of matter (V · T · E)

		To			
		Solid	Liquid	Gas	Plasma
From	Solid		Melting	Sublimation	
	Liquid	Freezing		Vaporization	
	Gas	Deposition	Condensation		Ionization
	Plasma			Recombination	



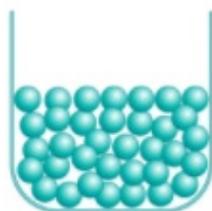
## Los Estados de la Materia

incremento de energía →



**sólido**

Tienen forma propia y ocupan un volumen determinado. En los sólidos las partículas están muy cerca y ordenadas, casi no tienen lugar para moverse, solo vibran. Los sólidos no se pueden comprimir, si se los presiona no cambian su forma.



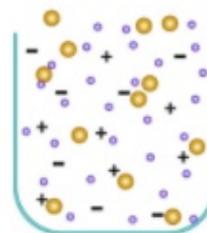
**líquido**

No tienen forma propia, adquieren la forma del recipiente que los contiene. Tienen volumen propio, ocupan un espacio limitado. Las partículas están desordenadas y pueden desplazarse unas sobre otras. Ante la presión, se pueden comprimir más que los sólidos.



**gaseoso**

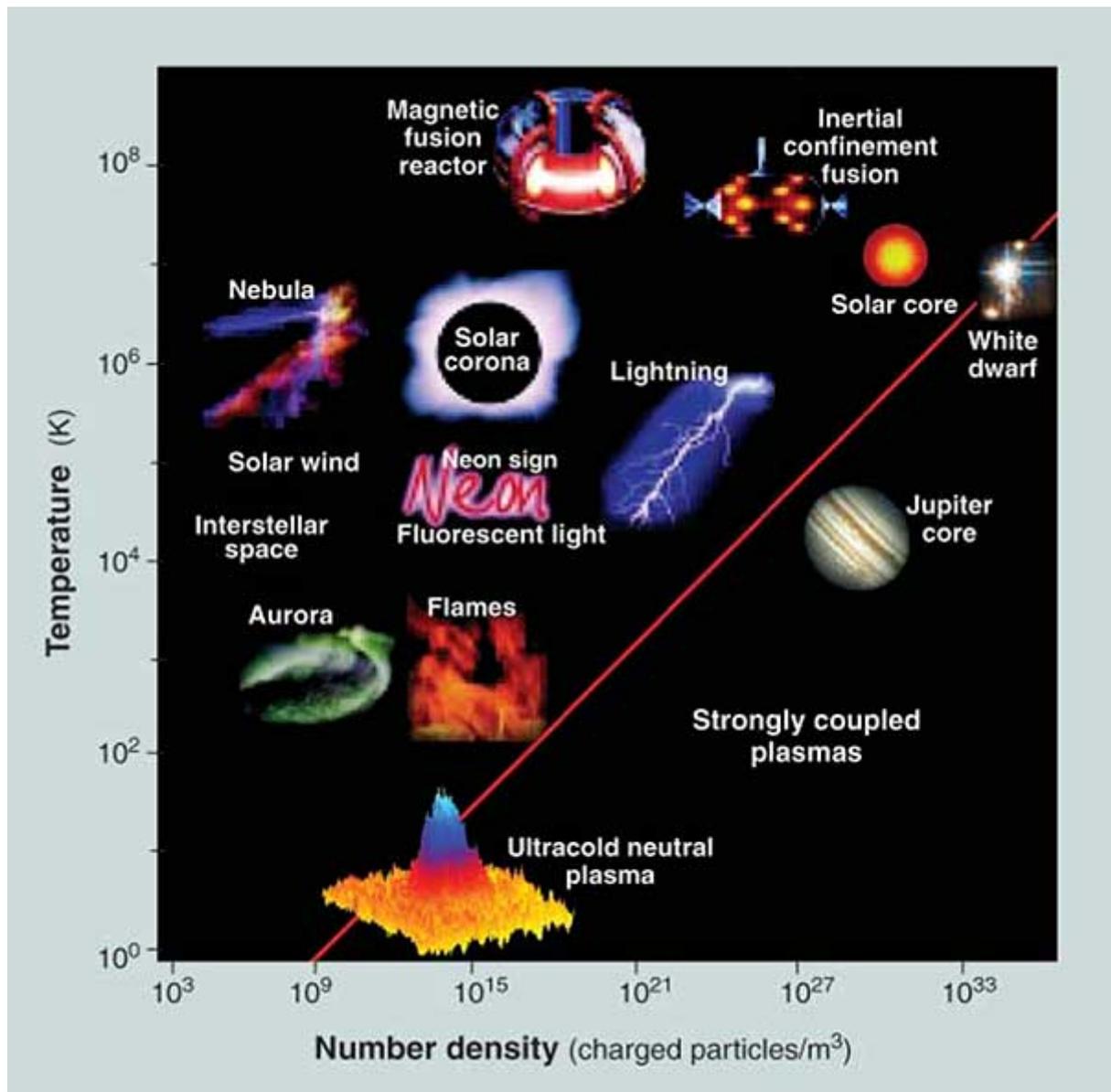
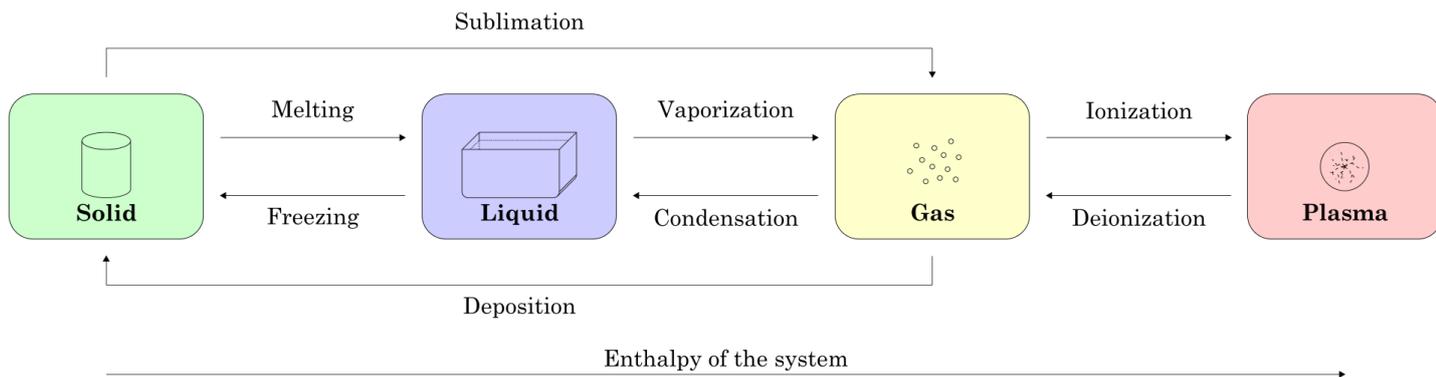
No tienen volumen ni forma propios. Adquieren la forma del recipiente que los contiene y ocupan todo el espacio posible. En los gases las partículas que los conforman están muy distanciadas entre sí, en forma desorganizada. Se mueven a gran velocidad en todas direcciones. Los gases se comprimen con mucha más facilidad que los líquidos.



**plasma**

El plasma es reconocido como el cuarto estado de la materia. Es un gas al cual se le ha dado energía. Llega un punto en el que algunos electrones se liberan de los átomos que forman el gas. Siguen conviviendo, tanto los electrones liberados como los átomos, convertidos en iones.

A la deposición se le llama también sublimación inversa. A la desionización se le llama también recombinación.



Los plasmas pueden clasificarse por la densidad del número de partículas que presentan. La entalpía  $H$  es una función de estado relacionada con la energía interna  $U$ , la presión  $P$  y el volumen  $V$ , de forma que  $H = U + PV$ .

## I Números en los átomos

Número másico

$$A = Z + N.$$

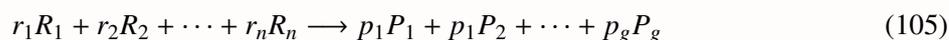
A (número másico) es la suma del número atómico Z (número de protones) y del número de neutrones de un átomo. También se puede llamar número de nucleones al número másico, entendiendo nucleones como las partículas básicas del núcleo, protones y neutrones.

## J Formulario de reacciones

### Reacción química



### Ley de Lavoisier de conservación de la masa



implica que

$$\sum_{i=1}^n M(R_i) = \sum_{j=1}^g P_j \quad (106)$$

o bien

$$M(R_1) + M(R_2) + \cdots + M(R_n) = M(P_1) + M(P_2) + \cdots + M(P_g) \quad (107)$$

## K Formulario de Física

### Peso y fuerza normal-fuerza de rozamiento

$$P = mg \quad F_r(e) = \mu_e N \quad F_r(d) = \mu_d N \quad (108)$$

### Peso y ley de gravitación universal

$$P = mg = \frac{GM_c m}{R_c^2} \quad F_N = G_N \frac{Mm}{r^2} \quad (109)$$

### Fuerza de rozamiento en fluidos

$$F_r(f) = kv^n \quad (110)$$

### Fuerzas en palancas(planos y poleas)

$$Fd_f = Rd_R \quad Rh = Fd \quad (111)$$

### Velocidad y aceleración medias

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad (112)$$

### Fuerza elástica o de Hooke y de repulsión cósmica

$$F = -kx \quad (113)$$

$$F_{\Lambda} = \Lambda R \quad (114)$$

### Energía cinética (potencial y mecánica)

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (115)$$

$$E_p = mgh \quad (116)$$

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \quad (117)$$

$$E_p = K_C\frac{Qq}{r} \quad (118)$$

$$E_m = E_c + E_p \quad (119)$$

### Ley de conservación de la energía mecánica

Si  $F_d = 0$ :

$$\Delta E_m = 0 \leftrightarrow E_m(i) = E_m(f) \leftrightarrow E_c(i) + E_p(i) = E_c(f) + E_p(f) \quad (120)$$

Potencia:  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ .

Calor y temperatura:

$$E_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (121)$$

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273 \quad (122)$$

$$\frac{T(^{\circ}C)}{100} = \frac{T(^{\circ}F) - 32}{180} \quad (123)$$

$$1\text{cal} = 4,186\text{J} \leftrightarrow 1\text{J} = 0,24\text{cal} \quad (124)$$

$$\Delta Q = C\Delta T, \quad \Delta Q = mc_e\Delta T \quad (125)$$

$$\Delta Q = mL \quad (126)$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\Delta T \quad (127)$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \beta\Delta T \quad (128)$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma\Delta T \quad (129)$$

$$\Delta Q = \Delta H_R^0 \quad (130)$$

### Velocidad de la luz en el vacío

$$c = v_l = 299792458\text{m/s} \sim 3 \cdot 10^8\text{m/s} = 3 \cdot 10^5\text{km/s} \quad (131)$$

## L Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado  $n$  es una expresión polinómica  $P(x) = 0$ , donde  $P(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

En general, si un cuerpo  $\mathbb{K}$  algebraicamente cerrado implica que una ecuación  $P(x) = 0$  tiene  $n$  soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es  $\mathbb{C}$ , los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números  $p$ -ádicos. Una ecuación de  $n$ -ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quinticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas. . .

### L.1 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado  $ax + b = c$ , con  $a, b, c$  números reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo  $K$ ), se soluciona mediante la expresión ( $a \neq 0$  sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}} \quad (132)$$

### L.2 Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión  $P(x) = 0$ , con  $P(x)$  un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida "en general". Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso  $b = 0$ . Entonces,  $ax^2 + c = 0$  tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso  $c = 0$ . Entonces  $ax^2 + bx = 0$  tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso  $b = c = 0$ . Entonces  $ax^2 = 0$  tiene por solución doble  $x_1 = x_2 = 0$ .

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ . Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ . Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa  $ax^2 + bx + c = 0$ , cuando  $a \neq 0$  como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde  $p = b/a$  y  $q = c/a$ . En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como  $\Delta = \frac{p^2}{4} - q$ , pero no cambia la discusión previa.

### L.3 Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que  $a \neq 0$ .

#### L.3.1 Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a "discriminant" whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the "irreducible case" of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- "Eliminate the square term" by the substitution  $y = x + b/3a$ . Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting  $x = u + v$ , rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting  $3uv + p = 0$ , the above equation becomes  $u^3 + v^3 = -q$ . In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of  $u^3$  and  $v^3$ , it enables us to determine a quadratic equation whose roots are  $u^3$  and  $v^3$ . This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find  $u$  and  $v$ , we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case  $27q^2 + 4p^3 > 0$ , there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which  $x = 1$  is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution  $x = 1$  in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

### L.3.2 Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

### L.3.3 Depressed cubic

To erase the  $x^2$  part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug  $x = y + b/3a$ , or equivalently, make the change  $y = x - b/3a$ .

Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that,  $p, q$  are related to  $R, Q$  from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:

After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$\begin{aligned}y &= S + T \\ST &= -Q \\S^3 + T^3 &= 2R\end{aligned}$$

Cube both sides of the second equation to get  $S^3T^3 = -Q^3$ . Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial  $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$  will have roots  $S^3$  and  $T^3$ . Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in  $S, T$ , so the order we choose doesn't matter, and the value of  $y$  will be the same. So, therefore

$$\begin{aligned}S &= w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}} \\T &= w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}\end{aligned}$$

wherer  $0 \leq m, n \leq 2$  is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of  $S + T$ , but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that  $m+nm+nm+n$  must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$\begin{aligned}y_1 &= S + T \\y_2 &= Sw + Tw^2 \\y_3 &= Sw^2 + Tw\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}w &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\w^2 &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

From this, and making the traslation to get from  $y$  to  $x$ , we obtain the wished soludions. Q.E.D.

### L.3.4 Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if  $A \neq 0$ ,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients  $a, b$ , and  $c$ :

$$\begin{aligned}Q &= \frac{3b - a^2}{9} \\R &= \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}\end{aligned}$$

- Secondly, from these values of  $Q, R$ , calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$x_1 = S + T - \frac{a}{3}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

#### L.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que  $a \neq 0$ . Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

##### L.4.1 Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos  $b = d = 0$ , y que  $a = A, c = B, e = C$ . Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar  $z = x^2$ , transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas),  $z_{\pm}$ . Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm \sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm \sqrt{z_2}$$

##### L.4.2 Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría  $P(mx) = \frac{x^4}{m^2}P\left(\frac{m}{x}\right)$ . Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si  $m = 1$ , y casi-simétrica si  $m = -1$ . Para ambos valores de  $m$ , o general  $m$ , la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula  $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2}$ .
- Realiza el cambio de variable  $z = x + \frac{m}{x}$ .
- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación  $Q(z) = 0$ , obteniendo dos raíces  $z_1, z_2$ . Esto da dos soluciones:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada  $z, z_1, z_2$ , usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática  $x^2 - zx + m = 0$ . Entonces, las soluciones serán, para cada valor de  $z$  hallado de  $Q(z) = 0$ :

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

### L.4.3 General quartic

Solution of  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots  $x_1, x_2, x_3, x_4$  for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with  $a \neq 0$  are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \quad (133)$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \quad (134)$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \quad (135)$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \quad (136)$$

and where

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a} \left( Q + \frac{\Delta_0}{Q} \right)} \quad (137)$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (138)$$

If  $Q$  and/or  $S$  are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \quad (139)$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \quad (140)$$

and  $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$  where  $\Delta$  is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for “ $Q$ ”, any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

Doctor Who?

ϺΔΞΘΣΠΧΚΙΟ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\spadesuit\spadesuit\rangle) \quad \oint_{\partial\Sigma} \Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$

