Física y Química de $3°ESO$:
The new billet/Tocho

The Strange Doctor

Multiverse of Madness

Índice general

1 El método (científico) 7

1.1 Introducción(en inglés, opcional) . . . 7
1.2 Método científico . . . 11
1.2.1 Fundamentos del método . . . 11
1.2.2 Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio . . . 12
1.2.3 Instrumentos de laboratorio . . . 15
1.3 Herramientas fismáticas . . . 15
1.3.1 Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros. . . . 16
1.3.2 Potencias de 10 y notación científica . . . 22
1.3.3 Cifras significativas (c.s.) . . . 23
1.3.4 Análisis de datos estadísticos. Teoría, gráficas e informe de resultados (avanzado) . . . 23
1.3.5 Linear fits, least squares . . . 26
1.3.6 Escalares, vectores y más allá . . . 29
1.3.7 Trigonometría básica . . . 29
1.3.8 Resolución de ecuaciones básicas de grado 1 y 2 . . . 31
1.3.9 Fórmulas y resultados útiles: miscelánea fismática . . . 31
1.4 Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4 . . . 34
1.4.1 Ecuaciones de primer grado . . . 35
1.4.2 Ecuación de segundo grado . . . 35
1.4.3 Ecuación de tercer grado(cúbica) . . . 36
1.4.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica) . . . 40

2 Sistemas materiales 43

2.1 MATERIA Y SUSTANCIA . . . 43
2.2 MASA, VOLUMEN Y DENSIDAD . . . 43
2.3 ESTADOS DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA . . . 45
2.4 TEORÍA CINÉTICA Y TEMPERATURA . . . 48
2.5 LEYES PONDERALES DE LOS GASES . . . 51
2.6 FORMULARIO . . . 54

3 Sustancias puras y mezclas 67

3.1 LA MATERIA Y SUS FORMAS . . . 67
3.2 MÉTODOS DE SEPARACIÓN Y ANÁLISIS . . . 69
3.2.1 Separación de mezclas homogénas . . . 69
3.2.2 Métodos de separación de mezclas heterogéneas . . . 70
3.3 CONCENTRACIÓN DE DISOLUCIONES . . . 70
3.3.1 Tanto por ciento en masa . . . 70
3.3.2 Tanto por ciento en volumen . . . 70
3.3.3 Gramos por litro (Gramos partido de litro) . . . 70
3.3.4 Molaridad . . . 70
3.3.5 Molalidad . . . 71
3.3.6 Fracción molar . . . 71
3.4 Otros tipos de mezclas . . . 71
3.5 Solubilidad . . . 71

3.6 FORMULARIO . . . 73
3.6.1 Tanto por ciento en masa . . . 73
3.6.2 Tanto por ciento en volumen . . . 73
3.6.3 Gramos por litro (Gramos partido de litro) . . . 73
3.6.4 Molaridad . . . 73
3.6.5 Molalidad . . . 73
3.6.6 Fracción molar . . . 73

4 El átomo: modelos atómicos y subatómicos 75
4.1 Introducción . . . 75
4.2 Modelo de Dalton . . . 75
4.3 Modelo de Thomson . . . 76
4.4 Modelo de Rutherford . . . 76
4.5 Modelo de Bohr . . . 78
4.6 Modelo mecanocuántico . . . 80
4.7 Cálculo del espacio vacío en un átomo . . . 82
4.8 Números cuánticos de los átomos. Radioactividad . . . 82
4.9 Configuración electrónica . . . 85
4.10 Enlace químico . . . 86
4.10.1 Enlace iónico . . . 87
4.10.2 Enlace covalente . . . 88
4.10.3 Enlace metálico . . . 89
4.11 Modelo Estándar: partículas subatómicas . . . 90
4.12 FORMULARIO Y GLOSARIO . . . 92
4.13 Epílogo . . . 93
4.13.1 Otras partículas hipotéticas . . . 93
4.13.2 Otros números cuánticos exóticos . . . 93
4.13.3 El experimento de la doble rendija . . . 93
4.13.4 Usos de la radiaoctividad . . . 94
4.13.5 Sobre los modelos atómicos . . . 94
4.14 Reacciones químicas . . . 95
4.14.1 Introducción a las reacciones químicas . . . 95
4.14.2 Leyes de las reacciones químicas . . . 95
4.14.3 Estequiometría y ecuaciones químicas . . . 96
4.14.4 Tipos de reacciones principales . . . 97
4.15 Moles y masa . . . 98
4.16 Número de partículas y úme . . . 99
4.17 Masa y partículas . . . 99
4.18 Leyes de los gases ideales . . . 99
4.19 Disoluciones . . . 101

5 Física 119
5.1 Breve introducción . . . 119
5.2 Movimiento y trayectoria . . . 119
5.3 Magnitudes cinemáticas . . . 119
5.4 MRU: Movimiento Rectilíneo Uniforme . . . 121
5.5 MRUA . . . 121
5.6 Gráficas del MRU y MRUA . . . 121
5.7 Fuerzas . . . 122
5.8 MCU(ampliación, no entra en tercero de la ESO) . . . 125
5.9 MCUA(ampliación, no entra en tercero de la ESO) . . . 125
5.10 Energía . . . 125
5.11 Ondas . . . 128
5.11.1 Ondas y su descripción . . . 129

5.11.2 Ondas electromagnéticas y gravitacionales 129
5.11.3 Tipos de onda 129
5.11.4 Ondas sonoras y sonido 130
5.11.5 La luz 133
5.11.6 Propiedades generales de las ondas 133
5.12 Conceptos (repaso y ampliaciones) 134

A Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados) 137

B Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas. 139

C Espacios vectoriales 143

Capítulo 1

El método (científico)

1.1 Introducción(en inglés, opcional)

What is the scientific method? There are many definitions out there, but I am providing mine, the one I explain to my students, here in this essay.

SCIENTIFIC METHOD

A (cyclical, iterative, systematic) method/procedure to acquire, gather, organize, check (verify or refute) and test, conserve (preserve) and transmit (communicate) knowledge (both in form of data or organized abstract data/axioms/propositions) or more generally information built from reason and thought.

It is based on the will to know due to ***curiosity*** and it uses:

- Experience. By experience we understand observation of natural phenomena, original thoughts, common sense perceptions and observed data from instruments or data. You can also gather data with emulation or simulation of known data, in a virtual environtment.
- Intuition and imagination. Sometimes scientific ideas come from experience, sometimes from intuitions and abstractions from real world and/or structures. You can also use imagination to test something via gedanken or thought experiments tied to the previous experiences or new experiences, or use computer/AI/machines to creatively check or do inferences.
- Logic and mathematical language. Logic, both inductive and deductive, is necessary for mathematical or scientific proofs. Since Galileo, we already know that Mathematics is the language in which Nature is better described with. We can also say that this includes reasoning or reason as a consequence. Thought and reason are a main tool of Science.

The will to know is basic for scientists. No curiosity, no new experiments, observations, theories or ideas.

The scientific method has some powerful additional tools:

- Computers and numerical simulations. This is new from the 20th century. Now, we can be aided by computer calculations and simulations to check scientific hypothesis or theories. Machine learning (and AI, Artificial Intelligenge) is also included here as subtool.
- Statistics and data analysis. Today, in the era of Big Data and the Rise of AI, this branch and tool from the scientific method gains new importance.
- Experimental devices to measure quantities predicted or expected from observations and or hypotheses, theories or models.
- Rigor. Very important for scientists, and mathematicians even more, is the rigor of the method and analysis.

- Scientific communication, both specialized and plain for everyone. Scientists must communicate and transmit their results and findings for further testing. Furthermore, they must try to make accessible the uses of their findings or why they are going to be useful or not in the future.

Scientific method can begin from data (observations, previous data), or from theories and models. Key ideas are:

- (Scientific) Hypothesis. Idea, proposition, argument or observation that can be tested in any experiment. By experiment, here, we understand also computer simulations, numerical analysis, observation with telescope or data analysis instruments, machine/robotic testing, automatic check and/or formal proof by mathematical induction or deduction.
- An axiom is a statement that is assumed to be true without any proof, based on logical arguments or experience.
- A theory is a set of tested hypotheses subject to be proven before it is considered to be true or false. A theory is also a set of statements that is developed through a process of continued abstractions and experiments. A theory is aimed at a generalized statement or also aimed at explaining a phenomenon.
- A model is a purposeful representation of reality.
- A conjecture is proposition based on inconclusive grounds, and sometimes can not be fully tested.
- A paradigm (Kuhn) is a distinct set of concepts or thought patterns, including theories, research methods, postulates, and standards for what constitutes legitimate contributions to a field.

What properties allow us to say something is scientific and something is not? Philosophy of science is old and some people thought about this question. Some partial answers are known:

- Falsifiability. Any scientific idea or hypothesis or proposition can be refuted and tested. Otherwise is not science. It is a belief. Scientific stuff can be refutable and argued against with. Experiments or proof can be done to check them. Kuhn defended the addition of additional ad hoc hypotheses to sustain a paradigm, Popper gave up this approach.
- Verification of data or hypotheses/theories/arguments. Even when you can refute and prove a theory is wrong, verification of current theories or hypotheses is an important part of scientific instruments.
- Algorithmic truths and/or logical procedures. Science proceeds with algorithms and/or logic to test things. Unordered checking looses credibility. Trial and error is other basic procedure of Science.
- Heuristics arguments based on logic and/or observations. Intuition and imagination can provide access to scientific truths before testing.
- Reproducibility. Any experiment or observation, in order to be scientific, should be reproducible.
- Testable predictions. Usually, theories or hypotheses provide new predictions, not observed before.

The scientific method is an iterative, cyclical process through which information is continually revised. Thus, it can be thought as a set of 4 ingredients as well:

- Characterizations (observations, definitions, and measurements of the subject of inquiry).
- Hypotheses (theoretical, hypothetical explanations of observations and measurements of the subject).
- Predictions (inductive and deductive reasoning from the hypothesis or theory).
- Experiments (tests of all of the above).

Pierce distinguished between three types of procedures:

- Abduction. It is a mere “guess", intuitive and not too formal.

- Deduction. It includes premises, explanations and demonstrations.
- Induction. A set of classification, probations and sentient reasoning.

From a pure mathematical and theorist way, there are only knowing and understanding facts, analysis, synthesis and reviews or extensions of information/knowledge. From the physical or experimentalist viewpoint, however, we have more:

- Characterization of experiences and observations.
- Proposals of hypotheses.
- Deductions and predictions from hypotheses.
- Realization of tests and experiments (gathering data).

Note that, from a simple viewpoint, the scientific method and/or main task of Science is to study:

- Regularities, patterns and relationships between objects and magnitudes.
- Anomalies or oddities, generally hinting something new beyond standard theories.
- Reality as something we measure and the link between observers and that reality.
- What is reality after all? Hard question from the quantum realm side...

By the other hand, a purely bayesianist approach to Science is also possible. In a Bayesian setting, Science is only a set up to test the degree of belief of any proposition/idea/set of hypotheses/model/theory. Theories provide measurable observables and quantities, and scientific predictions are only valid up to certain confidence level with respect some probabilistic distributions. This probabilistic approach to Science does not exclude the existence of purely true or false hypotheses, a frequentist approach to data and error analysis (it complements that tool), and it only focuses on a framework to estimate the probability of propositions, data vectors and experimental parameters fitting certain probability distributions “a prior".

How to elucidate the degree of (scientific) belief of something? W. K. Clifford discussed this topic with Jaynes in order to give a list. In the Ethics of Belief was argued that: rules or standards that properly govern responsible belief-formation and the pursuit of intellectual excellence are what philosophers call epistemic (or “doxastic") norms. Widely accepted epistemic norms include:

1. Don’t believe on insufficient evidence.
2. Proportion your beliefs to the strength of the evidence.
3. Don’t ignore or dismiss relevant evidence.
4. Be willing to revise your beliefs in light of new evidence.
5. Avoid wishful thinking.
6. Be open-minded and fair-minded.
7. Be wary of beliefs that align with your self-interest.
8. Admit how little you know.
9. Be alert to egocentrism, prejudice, and other mental biases.
10. Be careful to draw logical conclusions.
11. Base your beliefs on credible, well-substantiated evidence.
12. Be consistent.

13. Be curious and passionate in the pursuit of knowledge.

14. Think clearly and precisely.

15. Carefully investigate claims that concern you.

16. Actively seek out views that differ from your own.

17. Be grateful for constructive criticisms.

18. Question your assumptions.

19. Think about the implications of your beliefs.

20. Persevere through boring or difficult intellectual tasks.

21. Be thorough in your intellectual work.

22. Stick up for your beliefs, even in the face of peer pressure, ridicule, or intolerance.

Unanswered questions by Science are yet to be provided:

- Why mathematics is so accurate and precise to describe Nature?
- Why is the Universe comprehensible and non-chaotic but regular and structured in general? It could have been very different!
- Why numbers and structures are so efficient?
- Is Science affected by the Gödel theorems or does it go beyond its applicability?
- Can Science explain everything?
- Are chaos and other mathematical universes possible and physically realizable or ideally are only unfeasible?

Usually, the scientific method contained theory and experiment only. Now, it also includes: computation, big data, machine learning and AI tools!

A shorter 3 step version of the scientific method is the following:

- S1: Make observations, ask questions about them, and gather information.
- S2: Form hypotheses to describe what has been observed, and make predictions.
- S3: Test the predictions against known or new observations, and accept, reject, or modify the hypothesis accordingly.

1.2 Método científico

1.2.1 Fundamentos del método

¿Qué es el método científico? En este curso tomamos como definición la siguiente:

Es un PROCEDIMIENTO para la adquisición, organización, comprobación y conservación (preservación) del CONOCIMIENTO. Está basado en la INTUCIÓN, la LÓGICA, el PENSAMIENTO, la RAZÓN Y LA EXPERIENCIA.

En cualquier momento, dicho procedimiento o método comunica o es capaz de comunicar sus resultados, de forma que se revisan y corrigen los posibles ERRORES.

La corrección de errores y de los resultados (o del método) requiere la REPRODUCIBILIDAD y COMPROBACIÓN DE LOS DATOS o conclusiones de forma INDEPENDIENTE.

En cualquier momento del proceso puede producirse la PUBLICACIÓN Y COMUNICACIÓN DE LOS RESULTADOS EN FORMA DE DATOS, o DESCUBRIMIENTOS, Y/O MODELOS/TEORÍAS/LEYES/PRINCIPIOS, incluso AXIOMAS en Matemáticas, O BIEN nuevas hipótesis o CONJETURAS.

En su versión moderna, comenzó con Galileo Galilei: "(...)Egli è scritto in lingua matematica(...)"

El método científico utiliza las Matemáticas desde entonces pero se fundamenta en la observación de la Naturaleza, los fenómenos naturales, las regularidades y anomalías que en ellos se producen. Está originado por la CURIOSIDAD.

En general, podemos considerar que el método científico está formado por una serie de etapas o pasos. A saber:

- 1. OBSERVACIÓN DE LOS FENÓMENOS NATURALES, sus PATRONES LÓGICOS/TEÓRICOS y las anomalías en los mismos.

- 2. ELABORACIÓN DE HIPÓTESIS CIENTÍFICAS, por inferencia o inducción lógica, en ocasiones por pura intución o sentido común, que se pueden comprobar/verificar o refutar/invalidar, mediante SIMULACIONES COMPUTACIONALES Y TEÓRICAS (en ordenadores, computadoras,...),mediante "experimentos mentales"/"thought experiments"/gedanken experiments.
- 3. Diseño y REALIZACIÓN DE EXPERIMENTOS CIENTÍFICOS, que nos proporcionan DATOS experimentales en laboratorios. Los datos son habitualmente NÚMEROS (cantidades) y las magnitudes físicas de los datos son PROPIEDADES(cualidades) que pueden ser medidas o cuantificadas.
- 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS EXPERIMENTALES mediante pensamiento lógico, matemático y razonado o intuitivo. Esto nos lleva a la refutación/invalidación de la/s hipótesis o la COMPROBACIÓN/VERIFICACIÓN de la/s hipótesis o conjeturas.
- 5. ELABORACIÓN DE UN MODELO.
- 6. FORMULACIÓN DE UNA TEORÍA.
- 7. ESTABLECIMIENTO DE LEYES Y PRINCIPIOS.
- 8. ENUNCIADO DE AXIOMAS Y POSTULADOS.

Comentario: Los pasos o etapas del método científico no siguen necesariamente el orden anterior. Por ejemplo, uno puede comenzar con una teoría y estudiar posibles nuevos fenómenos a observar en vez de elaborar la teoría a partir de la síntesis de unos fenómenos u observaciones.

1) Una **conjetura** es un modelo incompleto, o una analogía (comparación) con otro dominio. Ejemplos: el llamado desplazamiento hacia el rojo cosmológico está causado por la luz que pierde energía cuando viaja a través del espacio (conjetura de la "luz cansada"), las leyes de la Física son constantes en el tiempo y el espacio en todo el Universo (hipótesis de universalidad o uniformización), las especies evolucionan a estadios superiores (evolución).

2) Una **hipótesis** (o conjetura verosímil) es un modelo basado en todos los datos de un determinado dominio, sin contraejemplos e incorporando una nueva predicción que debe ser validad por hechos empíricos o experimentales (o bien lógico-formales en un sistema axiomático usado en las Matemáticas). Ejemplos: el envejecimiento mental puede ser retrasado mediante el uso del "úsalo o piérdelo", "el desplazamiento hacia el rojo es un desplazamiento Doppler".

3) Una **teoría** es una hipótesis refrendada o validada con al menos un dato, idea o predicción no trivial. Ejemplos: relatividad, Cosmología del Big Bang, teoría de la Evolución, teoría cinético-molecular, teoría del caos,. . . .

4) Una **ley** es una teoría que ha recibido validación en todas las posibles ramificaciones y formas, y que es conocida y válida hasta cierto nivel de exactitud o aproximación. Ejemplos: Mecánica newtoniana, gravitación universal, ley de Henry, leyes de la Termodinámica.

5) Un **principio** es una ley verificada que usamos, sin demostrar, en la deducción de nuevas hipótesis o conjeturas, de nuevos fenómenos, por el método lógico-matemático-formal.

6) Un **axioma** es una regla matemática aceptada como universalmente cierta o verdadera. Ejemplo: la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad distributiva, la existencia de un elemento neutro, el axioma de elección,. . .

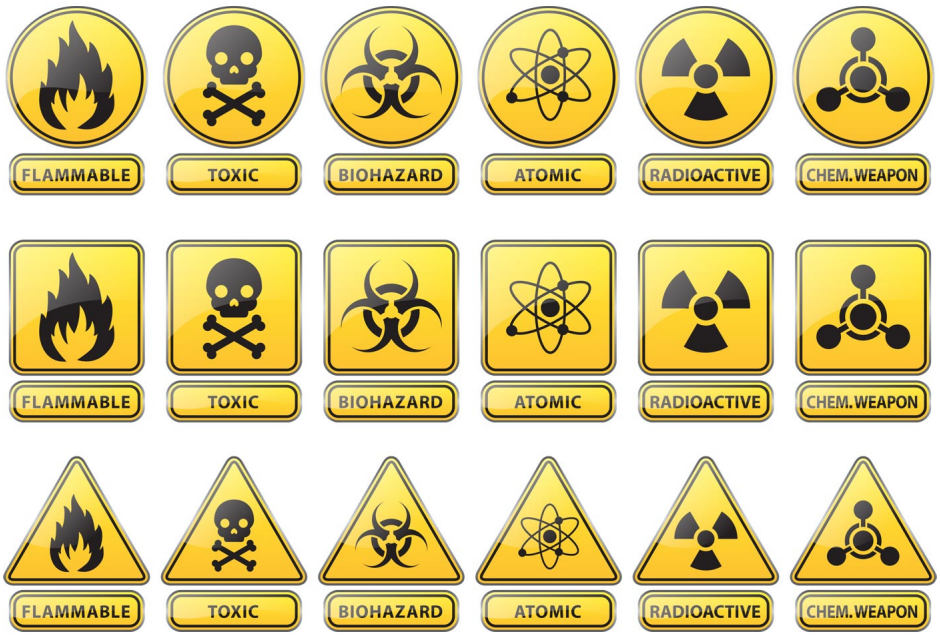
7) Un **modelo** es una representación o "imagen", o aproximación simplificada, simplificación de un sistema (real o imaginario) que usamos para explicar su funcionamiento real (físico) o virtual (imaginario). Ejemplos: Modelo Estándar, Modelo Cosmológico Estándar, Modelo de Capas, Modelo de Bolas, Modelo de Cuerdas, Modelo de Thomson, Modelo de la partícula puntual. . .

8) **Ciencia** es cualquier área del saber que usa el método científico (y no un sucedáneo) para obtener conocimiento. ¡Rechaza imitaciones! No son ciencias ni la Astrología (sí lo es en cambio la Astronomía), ni la religión, ni sectas como la Cienciología y muchas otras "pseudociencias". Atención: esto no significa que la Ciencia pueda explicarlo todo, ni que ésas otras áreas de la Humanidad como la Religión, la Mitología, o la superchería no puedan tener aplicaciones, en ocasiones bastante terribles. Generalmente las ciencias se dividen en **exactas o naturales** e **inexactas o sociales** (aunque es una división algo ad hoc y tal vez obsoleta ya en los tiempos en que vivimos, cada vez más matematizados).

1.2.2 Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio

En todo laboratorio hay unas normas de seguridad que hay que aplicar para evitar accidentes o peligros mortales. Es similar a un trabajo con riesgo por lo que hay legislación al respecto. Además, internacionalmente, hay unos pictogramas de laboratorio que advierten de diferentes peligros a sustancias o situaciones.

A continuación una selección de pictogramas usuales en la vida cotidiana y los laboratorios/trabajos usuales (hay más que estos, como ejercicio pueden buscarse otros pictogramas):



	Materias Inflamables		Peligro en General
	Materias Explosivas		Radiación Láser
	Materias Tóxicas		Materias Comburentes
	Materias Corrosivas		Radiaciones No Ionizantes
	Materias Radioactivas		Campo Magnético Intenso
	Materias Suspendidas		Riesgo de Tropiezo
	Vehículos de Mantenimiento		Riesgo Biológico
	Riego Eléctrico		Materia Nocivas o Irritantes

		bombona de gas	**Gases a presión** en un recipiente (gases comprimidos, licuados o disueltos). Algunos pueden explotar con el calor. Los licuados refrigerados pueden producir quemaduras o heridas relacionadas con el frío, son las llamadas quemaduras o heridas criogénicas.
		Calavera con tibias	**Tóxicos:** sustancias y preparados que, por inhalación, ingestión o penetración cutánea en pequeñas cantidades producen efectos adversos para la salud, Pueden provocar náuseas, vómitos, dolores de cabeza, pérdida de conocimiento e, incluso, la muerte.
		Corrosión	**Corrosivos**: Pueden causar daños irreversibles a la piel u ojos, en caso de contacto o proyección.
Xn Nocivos **Xi Irritantes**		**Exclamación**	Producen efectos adversos en dosis altas. También pueden producir irritación en ojos, garganta, nariz y piel. Provocan alergias cutáneas, somnolencia y vértigo.
		Peligro par la salud	Pueden ser: Cancerígenos (pueden provocar cáncer); Mutágenos (pueden modificar el ADN de las células); Tóxicos para la reproducción; Pueden modificar el funcionamiento de ciertos órganos, como el hígado, el sistema nervioso, etc., provocar alergias respiratorias o entrañar graves efectos sobre los pulmones..
N		**Medio ambiente**	**Peligroso para el medio ambiente**: presentan o puedan presentar un peligro inmediato o futuro. Provocan efectos nefastos para los organismos del medio acuático (peces, crustáceos, algas, otras plantas acuáticas, etc.). Símbolo en el que no suele existir la palabra de advertencia pero, cuando existe, es siempre: "Atención".

	E **Explosivo:** En determinadas condiciones, incluso sin presencia de oxígeno, la sustancia puede detonar o, bajo un calor intenso, explotar.		**E** **Comburente:** Productos químicos que en contacto con sustancias inflamables producen una reacción fuertemente exotérmica.
	F+ **Extremadamente inflamable:** Sustancias que a temperatura y presión normales son inflamables con el aire.		**F** **Fácilmente inflamable:** Productos que pueden inflamarse con aire a temperatura ambiente o sólidos que quemen con un contacto breve con una llama.
	T+ **Muy tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades muy pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.		**T** **Tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.
	Xn **Nocivo:** Productos que por inhalación, ingestión o penetración cutánea pueden producir efectos graves o crónicos.		**Xi** **Irritantes:** Productos que en contacto con la piel o la mucosa pueden producir una reacción inflamatoria.
	C **Corrosivo:** Productos que en contacto con tejidos vivos, como la piel humana, destruyen el tejido.		**N** **Peligroso para el medio ambiente:** Sustancias que pueden producir un efecto nocivo al medio ambiente.

1.2.3 Instrumentos de laboratorio

Un laboratorio de Física hoy día es muy variado, además de poder ser también virtual. Instrumentos posibles de medida: telescopio, microscopios (incluso los electrónicos), manómetro, barómetro, teslómetro, multímetro digital, balanzas, osciloscopios, material de Electrónica y circuitería, klystrons, termómetros, calorímetros, cronómetros, cintas métricas, calibradores, y otros varios son instrumentos usuales y populares en los laboratorios de Física convencionales. En los laboratorios de Química, también en los usuales, podemos encontrar probetas, mecheros Bunsen, pipetas, matraces, reactivos químicos, ... Este dibujo ayuda a entender la tipología de materiales en laboratorios de Química:

1.3 Herramientas fismáticas

La Física usa las Matemáticas como su lenguaje formal, aunque no es reducible solamente a éste. La Física tiene diferentes áreas con intersección mutua no vacía en varios casos. Una lista no exhaustiva es la siguiente:

- Mecánica. Puede ser Mecánica de partículas y sistemas. Mecánica de fluidos y campos son lo que junto a la de partículas forman la Mecánica clásica.
- Astronomía, Astrofísica y Cosmología. La Radioastronomía, neutrinología y otras ramas recientes como la astronomía de ondas gravitacionales o de rayos cósmicos están incluidos aquí.

- Mecánica Cuántica.
- Óptica.
- Física de ondas.
- Geofísica.
- Físico-Química.
- Física biológica/Biofísica.
- Física de los sistemas complejos.
- Física no lineal.
- Electrónica.
- Electromagnetismo (parte de la Mecánica Clásica).
- Termodinámica.
- Física relativista.
- Física matemática o física teórica.
- Mecánica estadística.
- Física nuclear y de partículas (altas energías).
- Física atómica.
- Física molecular.
- Espectroscopía.
- Radiofísica.
- Teoría de (super)cuerdas y p-branas.
- Relatividad General.

En la Química hay una división por áreas similar. Así, hablamos de Astroquímica, Química orgánica, Bioquímica, Química-Física, Química cuántica, Química molecular, Electroquímica, Termoquímica, Cinética química, Química de polímeros, Química atómica y nuclear, Química de las reacciones químicas y estequiometría, Química analítica, Química atmosférica,...

Del estudio del movimiento se encargan dos partes de la Física: la **Cinemática** y la **Dinámica**. Juntas forman la Mecánica Clásica de partículas y sistemas de partículas. El modelo de la partícula puntual es usado habitualmente en Física. Aunque hoy día se pueden usar otros modelos (cuerdas y membranas) hasta cierto punto de sofisticación y entendimiento.

1.3.1 Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros.

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ... Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \to Y$, con $y = \phi(X)$.

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs - 133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs - 133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiaciónde 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770}s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta\nu(Cs-133)}} \tag{1.1}$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458m/s$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs-133)$ como sigue:

$$\boxed{1m = \frac{c}{299792458}s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \approx 30{,}663319\frac{c}{\Delta f(Cs-133)}} \tag{1.2}$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg \cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1kg = \frac{h}{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}}\frac{s}{m^2} = \frac{299792458^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)}\frac{h\Delta f}{c^2} = 1{,}4755214 \cdot 10^{40}\frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2}} \tag{1.3}$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}C$ ($1C = 1A \cdot s$) como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1A = \frac{e}{1{,}602176634 \times 10^{-19}}s^{-1} = \frac{e\Delta f(Cs-133)}{(1{,}602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6{,}789687 \cdot 10^8 e\Delta f_{Cs}} \tag{1.4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{1.5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2{,}2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}} \tag{1.6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I_v ó $\mathcal{J}$. La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entre vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683} \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2{,}61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2} \tag{1.7}$$

En el sistema C.G.S. o cegesimal, la unidad fundamental de longitud es el centímetro y la de masa es el gramo. Se mantiene el resto de unidades básicas en general. La dina es la unidad de fuerza, siendo el producto de 1 gramo por $1cm/s^2$ (galileo), dicha unidad de fuerza (1 dina). En el sistema técnico, el kilogramo-fuerza o kilopondio es la unidad de fuerza, manteniéndose el resto de unidades también en general.

Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, 1Å=$10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec=3,26años-luz (lyr)=$3{,}086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1{,}496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M, $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}kg$.

- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA,...)
- Temperatura absoluta Θ, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_v: candela.
- Cantidad de sustancia o materia n: el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales ^{o}C, gradianes (grados centesimalese). $2\pi rad = 360° = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω: estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa M/L.
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondio o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1Nm$.
- Trabajo o energía: $W = Fd$, $ML^2T^{-2}.1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2.
- Momento angular ML^2T^{-1}.
- Potencia ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=$1J/s$. 1 C.V.=$735,4W$.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.

- Tensión superficial M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad η, $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise$\approx 0,1 Pa \cdot s$.
- Número de onda k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D. $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm. ϕ_L. Dimensiones ϕ_L.
- Luminancia B: $\phi_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=$10^4 cd/m^2$.
- Iluminación E: ϕ_L/L^2. lux. Otras: $1 phot = 10^4 lux$.
- Módulo del campo gravitacional g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1}, en K^{-1}.
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2}.
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ε: $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m.
- Carga eléctrica: culombio C. $Q = IT$. $1e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F.
- Módulo de la densidad de corriente j: IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω.
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- Permeabilidad magnética μ. $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss=$10^{-4}T$.
- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber=$1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell=$10^8 Wb$.
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted= $10^3/4\pi$ A/m.

- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio= 1 Ci$\approx 3{,}7 \cdot 10^{10} desintegraciones/s$, o también $1Ci = 6{,}14 \cdot 10^{-14} mol/s$.

Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.
- Constante universal de los gases $R = 8{,}314 J/Kmol$=$0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón $m_e = 0{,}511 keV/c^2 \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$.
- Masa del protón $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón $m_n \approx m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad $g_0(\oplus) = g_\oplus = 9,81 m/s^2$.
- Radio terrestre $R_\oplus = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4ºC, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.
- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2{,}89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5{,}67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2} K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2{,}88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96485 C/mol$.

1.3.2 Potencias de 10 y notación científica

En el S.I., hay unso prefijos universalmente aceptados a nivel internacional de múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad en cualquier sistema de unidades:

- Prefijos para múltiplos: deca (da) 10, hecta (h) 10^2, kilo (k) 10^3, mega (M) 10^6, giga (G) 10^9, tera (T) 10^{12}, peta (P) 10^{15}, exa (E) 10^{18}, zetta (Z) 10^{21}, yotta (Y) 10^{24}.
- Prefijos para submúltiplos: deci (d) 10^{-1}, centi (c) 10^{-2}, mili (m) 10^{-3}, micro (μ) 10^{-6}, nano (n) 10^{-9}, pico (p) 10^{-12}, femto (f) 10^{-15}, atto (a) 10^{-18}, zepto (z) 10^{-21}, yocto (y) 10^{-24}.

Regla mnemotécnica: PEZY-FAZY para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$Z = x.abcdef \cdots 10^{\pm n}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef \cdots$ son números arbitrarios.

1.3.3 Cifras significativas (c.s.)

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

1.3.4 Análisis de datos estadísticos. Teoría, gráficas e informe de resultados (avanzado)

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.

Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.

2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:
1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.
2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.
1. Statistical estimators.
Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{1.8}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{1.9}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{1.10}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{1.11}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{1.12}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.
Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{1.13}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1 \to n$:

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma_{x,n}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}} = s_n} \tag{1.14}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n\,(n-1)}}} \tag{1.15}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{n}} \tag{1.16}$$

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right) = \sigma_{\sigma^2}^2 = \sigma^2\left(\sigma^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{1.17}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right) = \sqrt{\sigma_{\sigma^2}^2} = \sigma\left(\sigma^2\right) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{1.18}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma] \longrightarrow P \approx 68{,}3\,\% \sim \frac{1}{3} \tag{1.19}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma] \longrightarrow P \approx 95{,}4\,\% \sim \frac{1}{22} \tag{1.20}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}7\,\% \sim \frac{1}{370} \tag{1.21}$$

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x}-4\sigma, \overline{x}+4\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}994\,\% \sim \frac{1}{15787} \tag{1.22}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x}-5\sigma, \overline{x}+5\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}99994\,\% \sim \frac{1}{1744278} \tag{1.23}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x} - 6\sigma, \overline{x} + 6\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}9999998\,\% \sim \frac{1}{506797346} \tag{1.24}$$

For a given confidence level *C.L.* (generally 90 %, 95 %, 98 %, 99 %), the interval width will be: $1{,}645\sigma, 1{,}96\sigma, 2{,}326\sigma, 2{,}576\sigma$.

3. Error propagation
Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.
Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{1.25}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:
$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.
$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.
$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{1.26}$$

If $q = x/y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{1.27}$$

3C. Error in powers.

With $x \pm \delta x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|} = |n||x^{n-1}|\delta x \tag{1.28}$$

and if $g = f(x)$, with the error of x being δx, you get

$$\boxed{\delta f = |\frac{df}{dx}|\delta x} \tag{1.29}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}} \tag{1.30}$$

or, equivalently, the errors are combined in quadrature (via standard deviations):

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta^2 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta^2 x_n}} \tag{1.31}$$

since

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{1.32}$$

for independent random errors (no correlations). Some simple examples are provided:
1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = k\delta x}$.
2nd. $q = \pm x \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \delta y + \cdots}$.
3rd. $q = kx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1| \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n| \frac{\delta x_n|}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided, the best estimator for the combined mean is a weighted mean with the variance, i.e.,

$$\overline{X}_{best} = \frac{\sum_{i=n}^{n} \frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{1.33}$$

The best standard deviation from the different combined measurements would be:

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{1.34}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. There, the standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{1.35}$$

1.3.5 Linear fits, least squares

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let (X_i, Y_i) from $i = 1, \ldots, n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with $Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.

We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

Writing $y = \alpha + \beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} \tag{1.36}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=i}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{1.37}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{1.38}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{1.39}$$

$$s_\alpha^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\right]\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{1.40}$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{1.41}$$

Alternatively, all the above can be also written as follows. Define

$$S_x = \sum x_i \tag{1.42}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{1.43}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{1.44}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{1.45}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{1.46}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \hat{\varepsilon}$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}\hat{\alpha} = \frac{1}{n}S_y - \hat{\beta}\frac{1}{n}S_x \tag{1.47}$$

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n(n-2)}\left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2(nS_{xx} - S_x^2)\right] \tag{1.48}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{ns_\varepsilon^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{1.49}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2\frac{1}{n}S_{xx} \tag{1.50}$$

and where the correlation coefficient is

$$r = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nS_{xx} - S_x^2)(nS_{yy} - S_y^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y} \tag{1.51}$$

or equivalently

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{1.52}$$

and where s_x, s_y are the corrected sample standard deviations of x, y. To know what $s_{x,y}$ is in a more general setting, we note that the sample mean vector $\bar{\mathbf{x}}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, K.$$

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_K \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

The sample covariance matrix is a "K"-by-"K" matrix

$$\mathbf{Q} = \left[q_{jk}\right]$$

with entries

$$q_{jk} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$\mathbf{Q} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ are. The t-value has a Student's t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for $\hat{\beta}$:

$$\beta \in \left[\widehat{\beta} - s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2},\ \widehat{\beta} + s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where t^*_{n-2} is the $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\gamma = 0{,}05$, then the C.L. is 95 %.

Similarly, the confidence interval for the intercept coefficient $\hat{\alpha}$ is given by

$$\alpha \in \left[\widehat{\alpha} - s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2},\ \widehat{\alpha} + s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where as before above

$$s_{\widehat{\alpha}} = s_{\widehat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

1.3.6 Escalares, vectores y más allá

- Las magnitudes se pueden clasificar en escalares o vectoriales.
- Las magnitudes escalares quedan totalmente especificadas si aparte de la unidad correspondiente, damos un número. Por ejemplo, son escalares la temperatura, la densidad, la masa, el tiempo,...
- Las magnitudes vectoriales necesitan, aparte de un número, especificar una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Matemáticamente, las magnitudes vectoriales son vectores con ciertas propiedades y físicamente pueden visualizarse como segmentos orientados en el espacio. Son vectoriales, exempli gratia, la posición (o el desplazamiento), la velocidad, la aceleración, la fuerza, ...

Curiosidad: existen, además de las magnitudes escalares y vectoriales, otras magnitudes más complicadas. Son los denominados pseudoescalares, los pseudovectores, los tensores y los pseudotensores. También en ciertas teorías se usan cantidades de tipo "espinorial", "twistorial" y otros tipos más sutiles de magnitudes de tipo matemático que no entran en este curso.

Propiedades y operaciones básicas con vectores en el plano. Los vectores, en un sistema cartesiano rectangular de coordendas, se pueden representar por segmentos orientados de tipo

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

con $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\sin\varphi$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. La suma (or resta) de vectores se realiza gráficamente con la ley del paralelogramo, o matemáticamente, si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$, $\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B}$ es tal que:

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j}$$

Además, multiplicar un número por un vector es prolongarlo tantas veces como el número indica (con el signo menos indicando inversión de sentido):

$$\lambda\vec{C} = \lambda C_x\vec{i} + \lambda C_y\vec{j}$$

Entre dos vectores planos también existe un producto llamado producto escalar, que define ortogonalidad y proyecciones:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\varphi$$

y donde

$$|\vec{A}| = +\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

1.3.7 Trigonometría básica

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{H} \tag{1.54}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{H} \tag{1.55}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B} \tag{1.56}$$

$$\operatorname{co\,sec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{H}{A} \tag{1.57}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{B} \tag{1.58}$$

$$\operatorname{co}\tan\alpha = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A} \tag{1.59}$$

Razones trigonométricas de ángulos más importantes del primer cuadrante (el resto se sacan por simetría mediante circunferencia goniométrica):

$\varphi(^\circ, rad)$	sin	cos	tan
$0, 0$	0	1	0
$30, \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45, \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60, \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90, \pi/2$	1	0	∞

Equivalencia entre radianes y grados

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$$

Identidades trigonométricas notables:

Teorema fundamental

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{co}\sec^2 x$$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{1.60}$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{1.61}$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{1.62}$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{1.63}$$

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{1.64}$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{1.65}$$

$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1 - \tan^2(X)} \tag{1.66}$$

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{2}} \tag{1.67}$$

$$\cos(X/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos(X)}{2}} \tag{1.68}$$

$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{1 + \cos(X)}} \tag{1.69}$$

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1-\cos(2X)}{2} \tag{1.70}$$

$$\cos^2 X = \frac{1+\cos(2X)}{2} \tag{1.71}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{1.72}$$

$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{1.73}$$

$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{1.74}$$

$$\sin(X)-\sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{1.75}$$

$$\cos(X)+\cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{1.76}$$

$$\cos(X)-\cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{1.77}$$

1.3.8 Resolución de ecuaciones básicas de grado 1 y 2

Las ecuaciones lineales de variable real y compleja se resuelven de forma sencilla.
Ecuaciones lineales: $ax+b=c$. Si $a \neq 0 \to x = \frac{c-b}{a}$. Ecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c=0$. La resolución es mediante la conocida fórmula:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac \text{ es el discriminante.}$$

Si $\Delta > 0$, las soluciones son simples y diferente $x_\pm$. Si $\Delta = 0$, las soluciones son iguales $x_\pm = x_+ = x_- = -\frac{b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, las soluciones son simples pero complejas conjugadas (en los complejos). Una ecuación bicuadrática $ax^4+bx^2+c=0$ se resuelve mediante el cambio $z=x^2$. Hay 4 soluciones en general. Hay fórmulas complicadas para la resolución de las ecuaciones de cuarto y tercer grado. Para las de grado quinto o superior, no se puede hacer mediante funciones "elementales".

1.3.9 Fórmulas y resultados útiles: miscelánea fismática

Áreas

Rectángulo: $A = bh$
Cuadrado: $A = L^2$
Paralelogramo: $A = bh$
Triángulo: $A = bh/2$
Trapecio de lados paralelos a y b, altura h: $A = \frac{(a+b)h}{2}$
Polígono regular de n lados de longitud L: $A = \frac{1}{4}nL^2 \operatorname{co}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$
Círculo de longitud $L_c = 2\pi R = \pi d$: $A_C = \pi R^2$
Elipse de semiejes a, b: $A = \pi ab$
Cono circular recto de radio R y altura h con generatriz L:
$A = \pi RL = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$
Cilindro circular recto de altura h y radio R: $A = 2\pi Rh$

Esfera de radio R: $A = 4\pi R^2$
Sector circular de ángulo θ: $A = R^2\theta/2$
Área de un hipercubo D-dimensional: $A_{D-1} = D!L^{D-1}$

Volúmenes

Paralelepípedo: $V = abc = \det(OA, OB, OC)$
Hiperparalelepípedo, politopo rectangular de lados X_i: $V_n = \prod_i X_i$
Esfera 3d: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Esfera nd: $V_n = \frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Esfera nd, área: $A_{d-1} = \frac{dV_n}{dR} = \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}$
Cilindro recto 3d: $V = \pi R^2 h$
Pirámide de área A y altura h en 3d: $V = \frac{Ah}{3}$
Cono circular recto de radio R, altura h: $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
Elipsoide de semiejes a, b, c: $V = \frac{4}{3}\pi abc$
Volumen del hipercubo nd: $V = L^n$.
Dónut o toro: $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 R r^2$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo. El área del toro es igual a $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 R r$.
Volumen del hipertoro hiperdimensional isótropo ($R_i = R, \forall i = 1, 2, \ldots, n$): $V_t(nd) = (2\pi R)^n$.

Densidad

Densidades de masa:

$$\rho = \frac{M}{V}, \sigma = \frac{M}{S}, \lambda = \frac{M}{L}$$

Densidades de carga:

$$\rho = \frac{Q}{V}, \sigma = \frac{Q}{S}, \lambda = \frac{Q}{L}$$

Densidades de energía:

$$\rho = \frac{E}{V}, \sigma = \frac{E}{S}, \lambda = \frac{E}{L}$$

Densidades de partículas:

$$\rho = \frac{N}{V}, \sigma = \frac{N}{S}, \lambda = \frac{N}{L}$$

Densidades de cantidad de sustancia (concentración):

$$\rho = \frac{n}{V}, \sigma = \frac{n}{S}, \lambda = \frac{n}{L}$$

Para una $N-$esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \tag{1.78}$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{1.79}$$

$$V_N(R) = R\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+}{2}+1\right)} V_{N-1}(R) \tag{1.80}$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} R^N \tag{1.81}$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \tag{1.82}$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \tag{1.83}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \tag{1.84}$$

$$V_0(R) = 1, \tag{1.85}$$

$$A_0(R) = 2, \tag{1.86}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \tag{1.87}$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \tag{1.88}$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad si \quad n \to \infty \tag{1.89}$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N,R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} R^N \tag{1.90}$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) = \log\pi + 2\log R \tag{1.91}$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\log V(N,R)) = \frac{\log\pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) \tag{1.92}$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p. Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.93}$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del "taxicab", o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \tag{1.94}$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \tag{1.95}$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i, definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1,\ldots,p_n} = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

1.4 Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es $\mathbb{C}$, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación de n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas...

1.4.1 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c-b}{a}} \tag{1.96}$$

1.4.2 Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida "en general". Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \to x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \dfrac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

1.4.3 Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a "discriminant" whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the "irreducible case" of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- "Eliminate the square term" by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution x = 1 in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$

$$ST = -Q$$
$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$
$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that m+nm+nm+n must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$
$$y_2 = Sw + Tw^2$$
$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions.
Q.E.D.

Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$
$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q, R, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$
$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

1.4.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$
$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.
- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.
- Reescribe la ecuación como
$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$
- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2. Esto da dos soluciones:
$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$
- Para cada z, z_1, z_2, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,:
$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \tag{1.97}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \tag{1.98}$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \tag{1.99}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \tag{1.100}$$

and where

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{1.101}$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \tag{1.102}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \tag{1.103}$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \tag{1.104}$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for "Q", any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

Capítulo 2

Sistemas materiales

2.1 MATERIA Y SUSTANCIA

Tenemos que establecer la diferencia entre materia y sustancia:

Materia

Todo objeto o cuerpo que **posee** *masa* y **ocupa** un determinado *espacio*

Sustancia

Es un tipo *concreto* o *particular* de materia.

Los sistemas materiales tienen una serie de propiedades que pueden ser de los siguientes tipos:

- **Propiedades generales**. Son aquellas propiedades que poseen ***todos*** los cuerpos materiales.
  Ejemplos: masa (m), volumen (V), temperatura (T), ... Su conocimiento no aporta información sobre el tipo concreto de sustancia, ya que si se dice que un cuerpo una cantidad de masa o volumen, podría ser cobre, caucho, o cualquier otro material.

- **Propiedades específicas**. Son aquellas propiedades que *dependen* del tipo de sustancia que constituye un sistema u objeto, pero no de su cantidad o forma.
  Ejemplos: densidad(d), color, brillo, dureza, temperatura de fusión, conductividad eléctrica,...

2.2 MASA, VOLUMEN Y DENSIDAD

Masa

Es la propiedad de los cuerpos que *mide* la **cantidad de materia** que poseen

La *unidad fundamental* de *masa* en el Sistema Internacional (S.I.) es el *kilogramo* (**kg**).

La *masa* se mide con la **balanza**.

Volumen

Es la propiedad de las sustancias que *mide* la **cantidad de espacio** que ocupan

La *unidad fundamental* de *volumen* en el Sistema Internacional (S.I.) es el *metro cúbico* ($\mathbf{m^3}$).

El *volumen* de un cuerpo líquido se mide en *recipientes graduados* adecuados.

El *volumen* de un cuerpo sólido o gaseoso se obtiene midiendo el *volumen desplazado* en un recipiente preparado para este fin.
El volumen se puede relacionar con la *capacidad* mediante una de las siguientes equivalencias:

$$\boxed{1dm^3 = 1\ l} \quad \boxed{1m^3 = 1\ kl} \quad \boxed{1cm^3 = 1\ ml}$$

Densidad

Es la masa que corresponde a la unidad de volumen de una sustancia particular

En el Sistema Internacional (S.I.) se mide en $\frac{kg}{m^3}$, aunque también se emplea el $\frac{g}{cm^3}$.

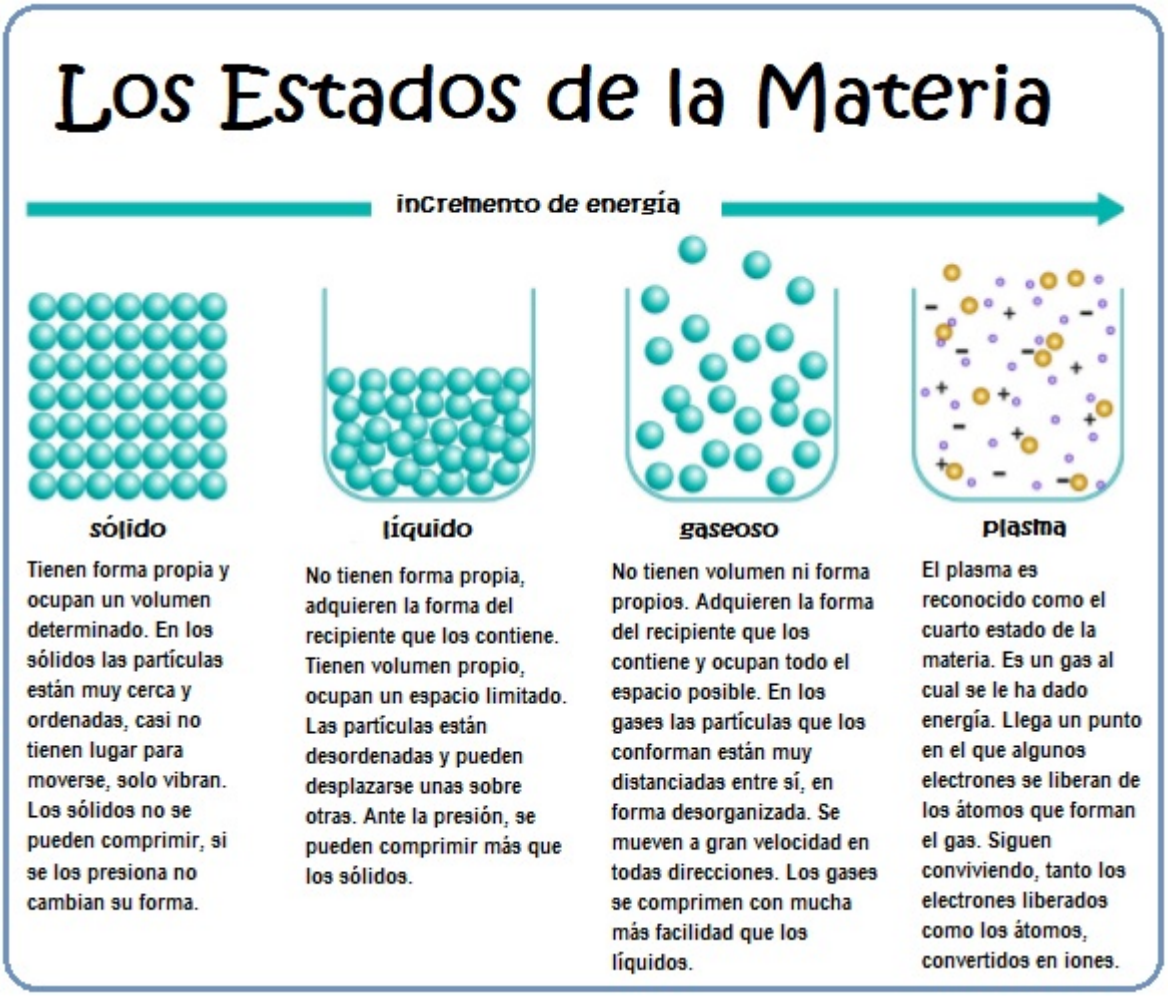
Para cambiar las unidades de densidad, hay que transformar a la vez (simultáneamente), las unidades de masa y volumen en la densidad.

La densidad mide, intuitivamente hablando, lo concentrada que está la masa de una sustancia en el volumen que ocupa. Una *densidad grande*, significa que una sustancia en poco espacio o volumen tiene mucha masa. Una *densidad pequeña*, significa que una sustancia ocupa mucho espacio o volumen pero tiene poca masa.

Propiedad (*¡muy interesante!*): un cuerpo *flota* en la superficie de un líquido o gas solamente si su densidad es *menor* que la de dicho líquido o gas. Si la densidad del cuerpo es *mayor o igual* que la del fluido, el cuerpo se *hunde*.

2.3 ESTADOS DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

La materia se puede presentar, principalmente[1], en tres estados de agregación: sólido, líquido y gas[2].



Los tres estados más comunes de la materia presentan las siguientes propiedades:

[1]Existen otros estados de agregación menos convencionales. A temperatura ambiente también existen el estado de *cristal líquido*, el estado de *sólido amorfo* o el estado *magnéticamente ordenado* de materiales ferromagnéticos y "antiferromagnéticos". A temperaturas muy altas existen el estado de *plasma* o gas ionizado, y el estado de *plasma de quark-gluón*. A muy baja temperatura existen el estado *condensado de Bose-Einstein*, el estado *superconductor*, el estado *superfluido* o el estado *condensado fermiónico*. Y aún podrían existir otros estados de la materia en situaciones de extremas de densidad, denominados generalmente *materia degenerada*, pero que no conocemos aún.

[2]A líquidos y gases, debido a la propiedad que tienen de *fluir*, se les llama generalmente ***fluidos***. **Fluir** es la propiedad que poseen líquidos y gases de adaptarse a la *forma* del recipiente que los contiene. Además pueden difundirse y por efusión pasar a través de orificios y huecos.

- **SÓLIDOS**.

  1. *Son rígidos y difícilmente deformables*, porque las fuerzas entres sus partículas es tan fuerte que impide muchísimo su desplazamiento. Sólo pueden desplazarse mediante "vibraciones" o "pequeños desplazamientos" en torno a posiciones de equilibrio.
  2. *Su volumen es casi constante, y apenas se pueden comprimir*, porque hay muy poco espacio libre entre las partículas y es muy difícil que puedan juntarse más.
  3. *Se dilatan al calentarse un poco*, porque al suministrar energía en forma de calor aumenta la vibración de las partículas, y, por lo tanto, el sólido ocupa algo más de volumen.

- **LÍQUIDOS**.

  1. *Son fluidos y adoptan la forma del recipiente que los contiene*, porque la fuerza de las partículas es débil, de modo que "resbalan" entre ellas según la forma del contenedor.
  2. *Su volumen es casi constante, y apenas se comprimen*, porque no tienen apenas espacio entre sus partículas, aunque se comprimen algo debido a que pueden "resbalar" unas partículas y otras entre sí.
  3. *Se dilatan mucho al calentarse*, porque la energía suministrada en forma de calor hace que las partículas aumenten su movimiento y ocupen aún más espacio.

- **GASES**.

  1. *Son fluidos y adoptan la forma del recipiente que los contiene*, ocupando todo el espacio disponible, porque la fuerza de cohesión entre las partículas es tan débil que cada partícula se mueve de forma independiene, muy rápido y al azar.
  2. *Su volumen **no** es constante y se pueden comprimir fácilmente*, porque hay mucho espacio vacío entre las partículas y pueden juntarse más, reduciendo el volumen si comprimimos el gas, aumentando si descomprimimos el gas.
  3. *Si se calientan se dilatan mucho*, porque al suministrar enegía en forma de calor aumentamos la velocidad de las partículas que forman el gas.

Estos tres estados pueden cambiar de estado entre sí, si modificamos la temperatura, la presión o ambas a la vez. Estos cambios de estado son:

- **Cambios de estado progresivos**. Aquellos que se producen por absorción de energía, y son favorecidos al aumentar la temperatura, o disminuir la presión.

  1. *Fusión*: cambio de estado, a temperatura constante, de sólido a líquido.
  2. *Vaporización*: cambio de estado, a temperatura constante, de líquido a gas.

     Si se realiza de forma lenta en la superficie de cualquier líquido a cualquier temperatura se llama **evaporación**.

     Si se realiza de forma tumultuosa o abrupta,en toda la masa del líquido, a una temperatura característica según la sustancia, se llama **ebullición**.
  3. *Sublimación*: cambio de estado, a temperatura constante, de sólido a gas.

     A presión atmosférica normal o estándar sólo subliman unas pocas sustancias como el yodo o la naftalina. A menor presión subliman más sustancias y, en el vacío, toda sustancia puede sublimar.

- **Cambios de estado regresivos**. Aquellos que se producen por desprendimiento de energía, y se ven favorecidos al disminuir la temperatura, o aumentar la presión.

  1. *Solidificación*: cambio de estado, a temperatura constante, de líquido a sólido.

2. *Condensación*: cambio de estado, a tempereatura constante, de gas a líquido.
3. *Sublimación regresiva*: cambio de estado, a temperatura constante, de gas a sólido.

Aclaraciones importantes:

La *temperatura de fusión*, a **presión constante**, *es igual* a la *temperatura de solidificación*.

La *temperatura de vaporización* se llama normalmente *temperatura* de *ebullición*, o de cambio de líquido a gas, a **presión constante**, *es igual* a la *temperatura de condensación* o *temperatura de licuación*.

La *temperatura de sublimación*, a **presión constante**, *es igual* a la *temperatura de sublimación regresiva*.

Durante un cambio de estado, es *muy importante notar* que la temperatura se mantiene ¡**constante**!, solamente se produce una transferencia de energía en forma de *calor*, absorbido o cedido al entorno de la sustancia.

El calor necesario para que una sustancia cambie de estado se denomina **calor latente**, se representa por **L**, tiene unidades de $\frac{J}{kg}$ y tiene por fórmula

Calor latente

$$Q = mL$$

Las magnitudes físicas que determinan que la materia se encuentre en un determinado estado de agregación son la *presión* y la *temperatura*.

La **presión**, desde un punto de vista macroscópico o externo, mide la fuerza ejercida por unidad de área o superficie. Matemáticamente:

Presión

$$\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Superficie}} \longleftrightarrow P = \frac{F}{S}$$

Sus unidades en el Sistema Internacional (S.I.) son el pascal (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad poco útil en situaciones típicas, por lo que usan otras unidades de presión en Química y Física. Las unidades más comunes son el centímetro de mercurio (**cm Hg**), el milímetro de mercurio (**mm Hg**), la atmósfera (**atm**) y el bar (**b**) o su múltiplo el milibar (**mb**). También hay otras unidades ya casi en desuso como el torricelli [3](**torr**). En el mundo anglosajón se usan las PSI (Pounds per Squared Inch, libras por pulgada cuadrado). Las equivalencias entre alguna de estas unidades son las siguientes:

Unidades de presión

$1\ Pa = 10^{-5}\text{bar} = 0{,}00001\text{bar}$
$1Pa = 9{,}8692 \cdot 10^{-6} atm$
$1atm = 7{,}5006 \cdot 10^{-3}\ \text{torr} \approx 7{,}5006 \cdot 10^{-3}\text{mmHg}$
$1\text{b} = 1000\text{mb} = 10^5 Pa = 0{,}98692\text{atm}$
$1\text{atm} = 1013\text{mb} = 101325\text{Pa} = 760\text{torr} \approx 760\text{mmHg}$

Un cuadro resumen visual:

[3] Aunque *no* son exactamente lo mismo, consideraremos equivalentes los torricellis a los mmHg. Es decir, 1torr =1 mmHg.

	Pa	bar	atm	torr	psi
Pa	1	0.00001	$9.8692 \cdot 10^{-6}$	0.007506	0.0001450377
bar	100000	1	0.98692	750.06	14.50377
atm	101325	1.01325	1	760	14.69594
torr	133.322	0.00133322	0.00131579	1	0.01933672
psi	6894.757	0.06894757	0.068046	51.7151	1

Pa: Pascal = Newtons per square meter.
bar: Bar = 10^5 Pascal.
atm: Atmosphere = 760 torr = 760 millimeters of mercury at 0°C.
torr: Torr = 1 millimeter of mercury at 0°C.
psi: Psi = Pounds per square inches.

La **temperatura**, **T**, es una *propiedad general* de los cuerpos que se mide con "termómetros". La escala habitual de temperatura es el celsius (**ºC**), aunque en algunos países se usan el fahrenheit (**ºF**), especialmente los de ámbito e influencia anglosajona (Estados Unidos, Australia, Reino Unido,...). La relación entre ambas escalas se encuentra en el formulario de estos apuntes.

Sin embargo, la *temperatura de fusión* o *de ebullición* son propiedades específicas de una sustancia, es decir, características de la mismas, a presión constante.

Si se quiere cambiar de temperatura, la materia dependiendo de su tipo específico cambia de temperatura de forma diferente. Hay dos expresiones matemáticas para el calor desprendido o absorbido en un cambio de temperatura.

Calor transferido en cambio de temperatura.

$$Q = mc_e\Delta T = C\Delta T.$$

y donde c_e es el denominado calor específico de cambio de temperatura (unidades $Jkg^{-1}K^{-1}$), y C la llamada capacidad calorífica de la sustancia (unidades J/K). $\Delta T = T_2 - T_1 = T_f - T_0$ es la diferencia de temperatura, final menos inicial. Para subir de temperatura, se absorbe energía $Q > 0$, para descender de temperatura se desprende energía $Q < 0$. La equivalencia entre calor y energía transferida corresponde a una equivalencia mecánica del calor $1cal = 4{,}186J$. Se tiene la relación $C = mc_e$.

2.4 TEORÍA CINÉTICA Y TEMPERATURA

Para explicar el comportamiento de los gases, los físicos Clausius, Maxwell y Boltzman desarrollaron en el siglo XIX la denominada **Teoría Cinética**, también llamada cinético-atómica o cinético-molecular por otros autores. Esta teoría está basada en una serie de hipótesis o postulados.

☺Teoría Cinética: Principios

1. **Principio corpuscular o atómico-molecular**:
   "Todos los gases están constituidos por un gran número, enorme, de partículas[4] (átomos o moléculas)" .

2. **Principio de dilución molecular**:
   "El volumen que ocupan las partículas comparado con el volumen del recipiente es muy pequeño".

   Esto significa que el gas está muy diluido en el recipiente y que entre partícula y partícula sólo existe espacio "vacío".

3. **Principio del caos molecular** o **"Stoßzahlansatz"**:
   "Las partículas que forman el gas chocan o colisionan aleatoriamente entre sí, de forma *caótica*(desordenada o azarosamente), y contra las paredes del recipiente que las contiene".

   En los choques o colisiones entre partículas y contra las paredes del recipiente *no se pierde energía*, y las velocidades de las partículas son *independientes* de la posición que ocupan en el recipiente y de la velocidad que posean cada partícula por separado (es decir, no hay relación alguna entre las velocidades de cada partícula, ni con la posición que ocupan en el espacio del recipiente).

4. **Principio dinámico de cohesión-dispersión molecular**:
   "El movimiento en zig-zag de las partículas, llamado *movimiento térmico*, está causado por fuerzas".

   Estas fuerzas son de dos tipos distintos, pero de igual origen:

   - **Fuerzas de atracción o cohesión**. Son las que tienden a unir a las partículas. Su origen es **electrostático** y *cuántico*.
   - **Fuerzas de repulsión o dispersión**. Son las que tienden a separar a las partículas. Su origen es también **electrostático** y *cuántico*.

La Teoría Cinética lleva a una interpretación novedosa y "microscópica" de los conceptos "macroscópicos" de temperatura, presión y cambios de estado.

[4]Originariamente se pensaba que nunca se podrían ver al microscopio. Sin embargo, el denominado *movimiento browniano* generado por el movimiento aleatorio de "granos" o "polvo" en suspensión en un fluido , constituyó finalmente una prueba irrefutable de la Teoría Cinética y, en último lugar, de los átomos. Hoy existen métodos diversos para "ver" a las moléculas o partículas cuya existencia proclama la teoría Cinética.

☺ Teoría Cinética: consecuencias

Temperatura como energía.

1ª. La temperatura absoluta es una medida proporcional a la energía cinética media de las partículas.

Como la energía cinética, que se mide como cualquier forma de energía en julios (J), es en términos mecánicos

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

la consecuencia de este postulado es la definición de temperatura *absoluta* por comparación con la energía cinética media de las partículas[5]

Ecuación de la energía cinética no relativista

$$\langle E_c \rangle = \text{constante} \cdot T = k_B \cdot T$$

en donde T está medida en la llamada escala absoluta. Se define, así, la **escala absoluta** de *temperatura* o **escala Kelvin** en función de la "agitación térmica" o "movimiento térmico" de las partículas según la Teoría Cinética. Las unidades de esta escala son el grado kelvin, o simplemente **kelvin**, y se simboliza por **K**. Nótese que no se le pone el círculo de grado como en la escala Celsius o la Fahrenheit.

El ***cero absoluto*** de temperatura se define como aquella temperatura en la que el movimiento de las partículas se ha detenido y la energía cinética es cero[6].

La relación entre la escala Celsius y la escala Kelvin de temperatura viene dada por una ecuación sencilla:

Escalas de temperatura

$$(K) = T°C + 273{,}15 \quad 0\,K = -273{,}15°C$$

Presión como choques moleculares.

2ª. La presión es consecuencia de los choques de las partículas en el recipiente.

De hecho, la presión es siempre el cociente entre una fuerza ejercida sobre una superficie, en este caso la fuerza la ejercen las partículas y la superficie es la del contenedor o recipiente del gas. De esta forma:

- Si *disminuye* el volumen, a temperatura constante, *aumenta* la frecuencia de choques y *aumenta* la presión.
- Si *aumenta* el volumen, a temperatura constante, *disminuye* la frecuencia de choques y *disminuye* la presión.
- Si *disminuye* la temperatura, a volumen constante, *disminuyen* la energía cinética media y el número de choques, y, por lo tanto, *disminuye* la presión.
- Si *aumenta* la temperatura, a volumen constante, *aumentan* la energía cinética media y el número de choques, y, por lo tanto, *aumenta* la presión.

[5] El factor de proporcionalidad se llama constante de Boltzman, y aparece también en otra fórmula de la Física Estadística que se encuenra en la lápida del científico que le da nombre y quien la calculó, $S = k_B \ln(W)$. En unidades del Sistema Internacional, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$.

[6] Realmente, el cero absoluto es inalcanzable, por mucho que nos gusten los dibujos animados o cómics de *Los Caballeros del Zodíaco*, y ataques como el Polvo de Diamantes, debido a los fundamentos de la Teoría Cuántica. Una definición más precisa de "cero absoluto" sería la de aquella temperatura a la cual la energía cinética media de las partículas alcanza un valor mínimo.

Cambios de estado y condiciones favorables(I)

3ª.Al *aumentar* la temperatura, se favorecen los *cambios de estado progresivos*.

La razón es que al *aumentar* la energía cinética media, las partículas tienen *mayor movilidad* y la vibración de las partículas sólidas o líquidas hace que **pierdan** *rigidez y cohesión*.

Cambios de estado y condiciones favorables(II)

4ª.Al *aumentar* la presión, se favorecen los *cambios de estado regresivos*.

La razón es que al *aumentar* la presión se está aumentando la fuerza con la que se mantienen cohesionadas o unidas las partículas, que tienen *mayor acercamiento o proximidad* y la vibración de las partículas sólidas o líquidas será **mayor** al aumentar el número de choques.

2.5 LEYES PONDERALES DE LOS GASES

- **Ley de Boyle-Mariotte**:
  "A temperatura constante, el producto de presión y volumen de un gas es constante."

  Esto significa que si la temperatura se mantiene constante en un gas, su presión y volumen son *inversamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

  Ley de Boyle-Mariotte

  $$T = \text{constante} \leftrightarrow PV = \text{constante} \longleftrightarrow P_1V_1 = P_2V_2$$

- **Ley de Charles**:
  "A presión constante, el cociente entre volumen y temperatura de un gas es constante."

  Esto significa que si la presión se mantiene constante en un gas, su volumen y temperatura son *directamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

  Ley de Charles

  $$P = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

- **Ley de Gay-Lussac**:
  "A volumen constante, el cociente entre presión y temperatura de un gas es constante."

  Esto significa que si el volumen se mantiene constante en un gas, su presión y temperatura son *directamente* proporcionales. Matemáticamente, esta ley se expresa de la siguiente forma:

  Ley de Gay-Lussac

  $$V = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

- **Ley de Avogadro**:
  "En cualquier gas ideal, a presión y temperatura constantes, el cociente del volumen y el número de partículas (o de moles) del gas es constante."

Matemáticamente, esto significa que en unas condiciones fijas de presión y temperatura del gas, volúmenes iguales de gases ideales (aunque fueran diferentes), contienen el mismo número de partículas (o de moles).

Ley de Avogadro

$$\frac{V}{n} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$
$$\frac{V}{N} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

- **Ley general o combinada de los gases**:
  "En cualquier gas, el producto de la presión por el volumen, dividido por su temperatura, es constante."

  Matemáticamente, esto significa que aunque varíen la presión, volumen y temperatura de un gas, una *combinación* adecuada de estas tres magnitudes se mantiente *constante*. Matemáticamente, la ley combinada dice que:

Ley general o de Clapeyron

$$\frac{PV}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

- **Ecuación de estado del gas ideal**:
  "En cualquier gas ideal, el producto de la presión por el volumen es igual al producto del número de moles por la constante de los gases ideales y la temperatura absoluta."
  Además, hay una relación profunda entre la constante de los gases y el número de Avogadro. El número de Avogadro es una constante fundamental o básica de la Naturaleza que nos dice el número de partículas elementales por mol de sustancia, definiendo el mol como la cantidad de sustancia que contiene tantas unidades como átomos en 12 gramos de carbono-12, o bien definiendo exactamente el número de Avogadro como el factor de conversión entre el número de partículas y el mol o cantidad de sustancia:

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{partículas} \times \text{mol}^{-1}$$

$$R = 8{,}31 J/Kmol = 0{,}082 atmL/Kmol = k_B N_A$$

  Matemáticamente,

Ecuación del gas ideal

$$PV = nRT$$
$$PV = Nk_BT$$
$$R = N_Ak_B$$

  Para estas relaciones matemáticas se tiene que $N = nN_A$, y $R = N_Ak_B$ para una total identidad. Se llaman condiciones normales (c.n.) de presión y temperatura (P,T) a la situación concreta que se produce cuando $P = 1atm$ y $T = 0°C = 273K$. Se llaman condiciones estándar (c.e.) de presión y temperatura, a la situación que se produce cuando $P = 1atm$ y $T = 25°C = 298K$. En situaciones no normales o no estándar, se usa la ecuación de estado anterior. Para condiciones normales, se puede saber que 1 mol ocupa unos 22.4L; en condiciones estándar, se puede usar también la ecuación de estado del gas ideal para deducir que 1 mol de gas ideal en condiciones estándar ocupan 24.4L.

Gases no ideales, que no satisfacen las condiciones de la teoría cinética totalmente, cumplen ecuaciones de estado diferentes a la del gas ideal. Dos ejemplos de ecuaciones de estado no ideales:

- Ecuación de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

- Gas de Chaplygin (ρ es la densidad del gas):

$$P = \frac{k}{\rho}$$

Otras dos ecuaciones de los gases ideales son la denominada Ley de Graham y la ley de Dalton de las presiones parciales.

Ley de Graham:
"En cualquier gas ideal no relativista, el cociente de velocidades de las partículas del gas es inversamente proporcional a las masas de las partículas constituyentes del gas, o equivalentemente, el producto de la velocidad y la raíz cuadrada de las masas de las partículas (o el producto del cuadrado de la velocidad y la masa) es constante si la temperatura y la presión es constante."

Las masas son molares en general en la expresión matemática de esta ley que explica la difusión de un gas en otro, y la efusión de los gases por aberturas y orificios. Matemáticamente,

Ley de Graham

$$v^2 m = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$v\sqrt{m} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

Ley de Dalton:
En una mezcla de gases, la presión total es igual a la suma de las presiones parciales. Matemáticamente:

Ley de Dalton

$$P_{Total} = \sum_i^n P_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

2.6 FORMULARIO

Densidad

$$d = \frac{m}{V}$$

Densidad del agua

$$d_{\text{agua}} = 1\frac{kg}{dm^3} = 1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3} = 1000\frac{g}{dm^3}$$

Cambios de escalas de temperatura

Cambios de escala

$$T(K) = T(^\circ C) + 273$$
$$T(^\circ C) = \frac{5}{9}(T(^\circ F) - 32)$$

También puede usarse la relación entre los termómetros de Fahrenheit y Celsius:

Cambio de escala(II)

$$\frac{T(^\circ C)}{100} = \frac{T(^\circ F) - 32}{180}$$

Ley de Boyle-Mariotte

$$T = \text{constante} \leftrightarrow PV = \text{constante} \longleftrightarrow P_1V_1 = P_2V_2$$

Ley de Charles

$$P = \text{constante} \leftrightarrow \frac{V}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Ley de Gay-Lussac

$$V = \text{constante} \leftrightarrow \frac{P}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Ley de Avogadro

$$P, T = \text{constantes} \leftrightarrow \frac{V}{N} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$
$$P, T = \text{constantes} \leftrightarrow \frac{V}{n} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

Ley general o combinada de los gases, de Clapeyron

$$\frac{PV}{T} = \text{constante} \longleftrightarrow \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

Ecuación de estado del gas ideal

$$PV = nRT$$

$$PV = Nk_BT$$

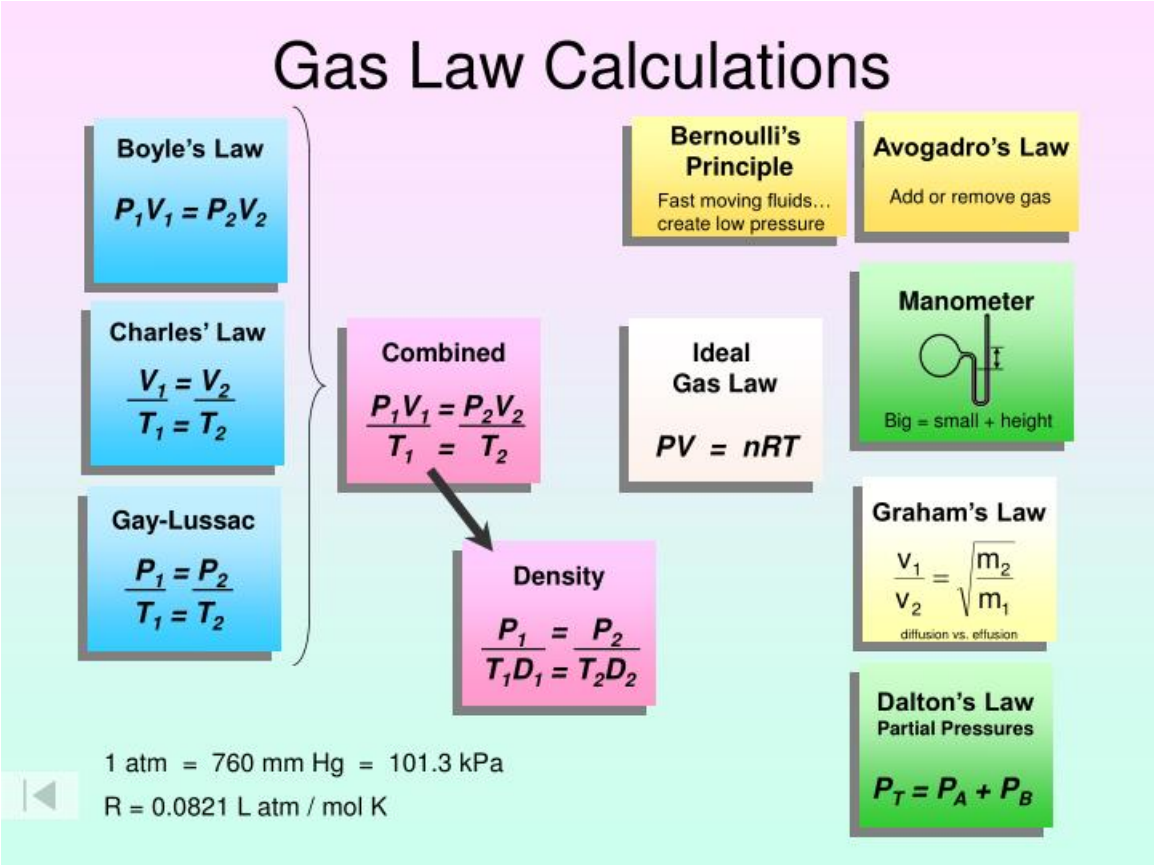
Calor latente o transferido por cambio de estado

$$Q = mL.$$

L es en esta fórmula el *calor latente* para el cambio de fase que estemos considerando,y se mide en $\frac{J}{kg}$.

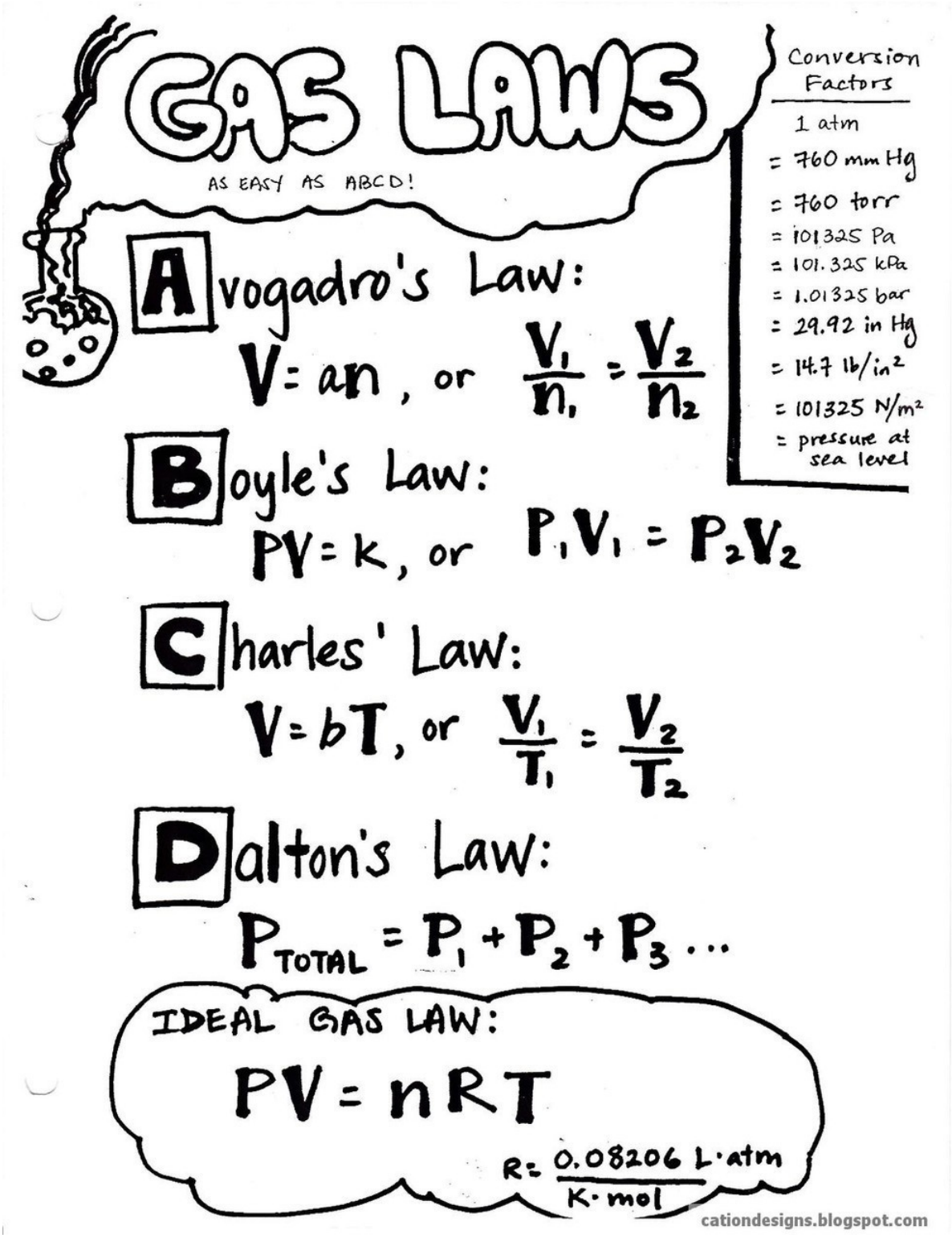
Calor transferido en cambio de temperatura.

$$Q = mc_e\Delta T = C\Delta T.$$

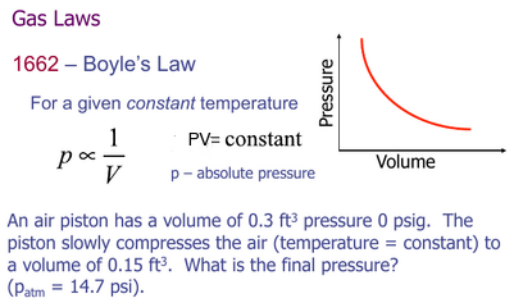


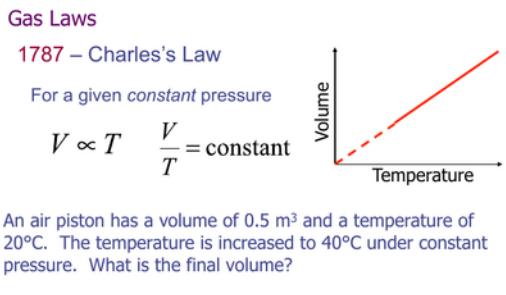
La ley de Graham indica que la velocidad de las partículas que forman un gas ideal no relativista es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de las masas de las partículas. La ley de Dalton señala que en una mezcla de gases ideales, la presión total es la suma de las presiones parciales de cada gas. Así pues, el total de leyes de los gases es:

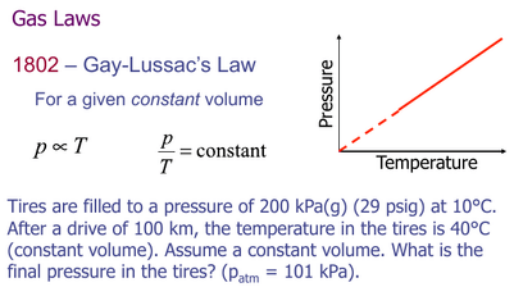
- Ley de Boyle-Mariotte.
- Ley de Charles.
- Ley de Gay-Lussac.
- Ley de Avogadro.
- Ley de Graham.
- Ley de Dalton.
- Ley de Clapeyron.
- Ecuación del gas ideal.
- Ecuaciones de gases no ideales (Van del Waals, Claplygin,. . .)

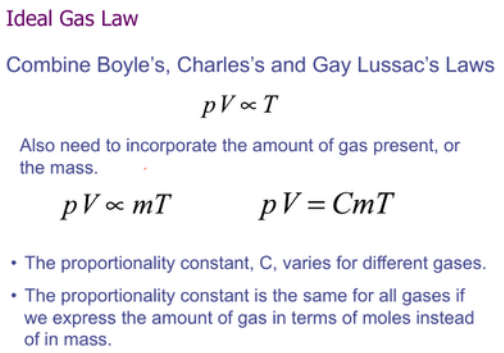

GAS LAWS
AS EASY AS ABCD!
Conversion Factors
1 atm
= 760 mm Hg
= 760 torr
= 101325 Pa
= 101.325 kPa
= 1.01325 bar
= 29.92 in Hg
= 14.7 lb/in²
= 101325 N/m²
= pressure at sea level
Avogadro's Law:
V = an, or V1/n1 = V2/n2
Boyle's Law:
PV = k, or P1V1 = P2V2
Charles' Law:
V = bT, or V1/T1 = V2/T2
Dalton's Law:
PTOTAL = P1 + P2 + P3 ...
IDEAL GAS LAW:
PV = nRT
R = 0.08206 L·atm / K·mol
cationdesigns.blogspot.com

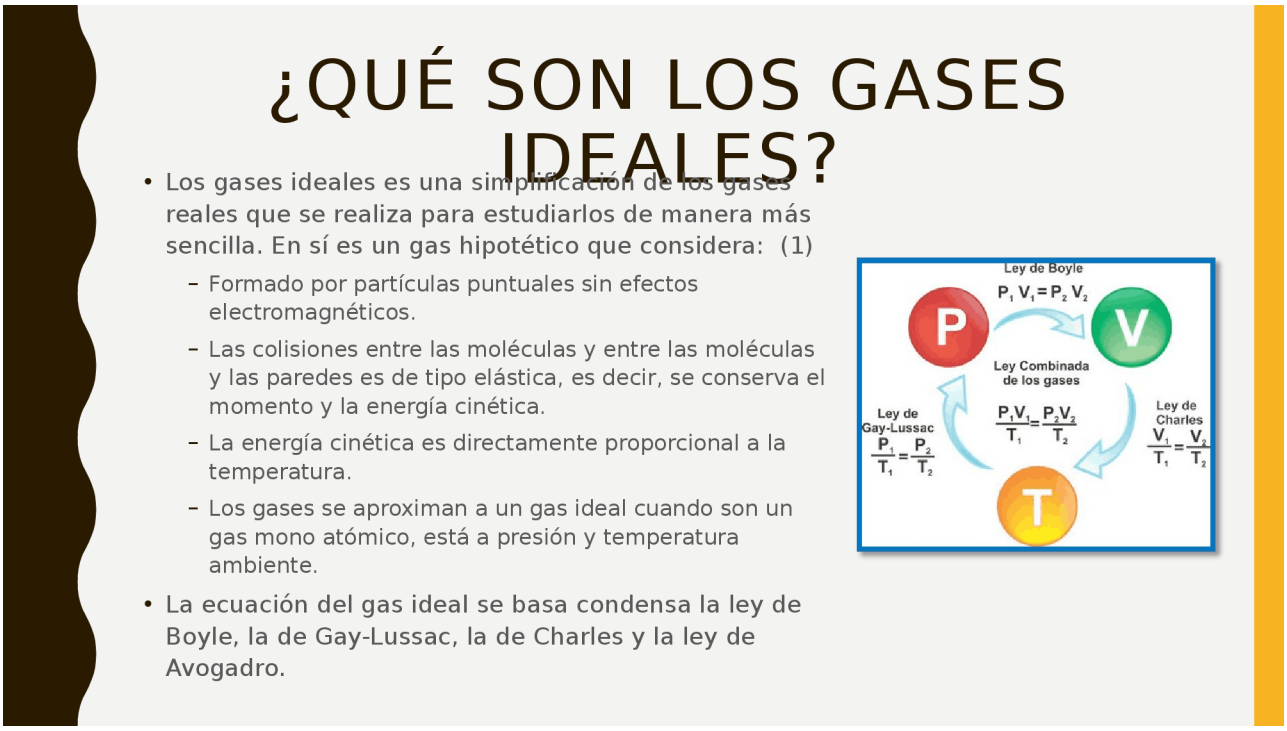
Algunas imágenes de pinterest:

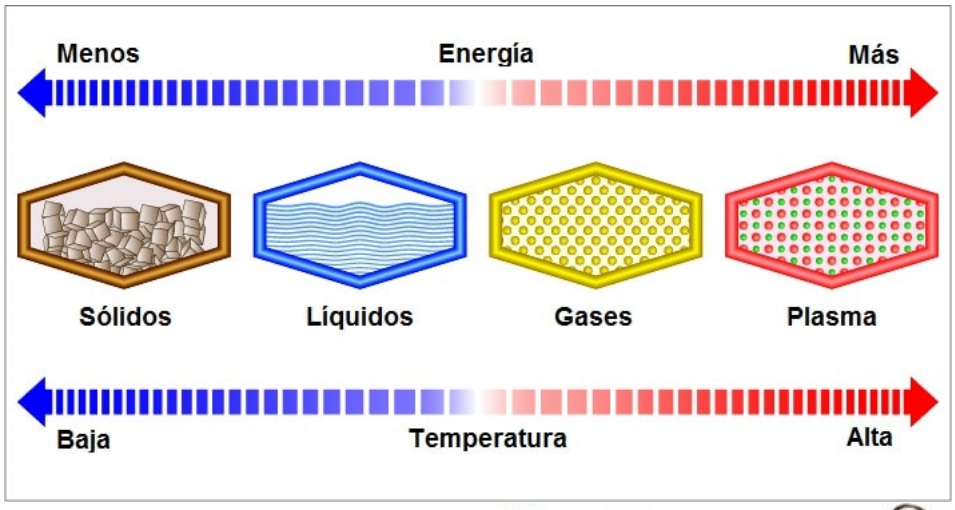






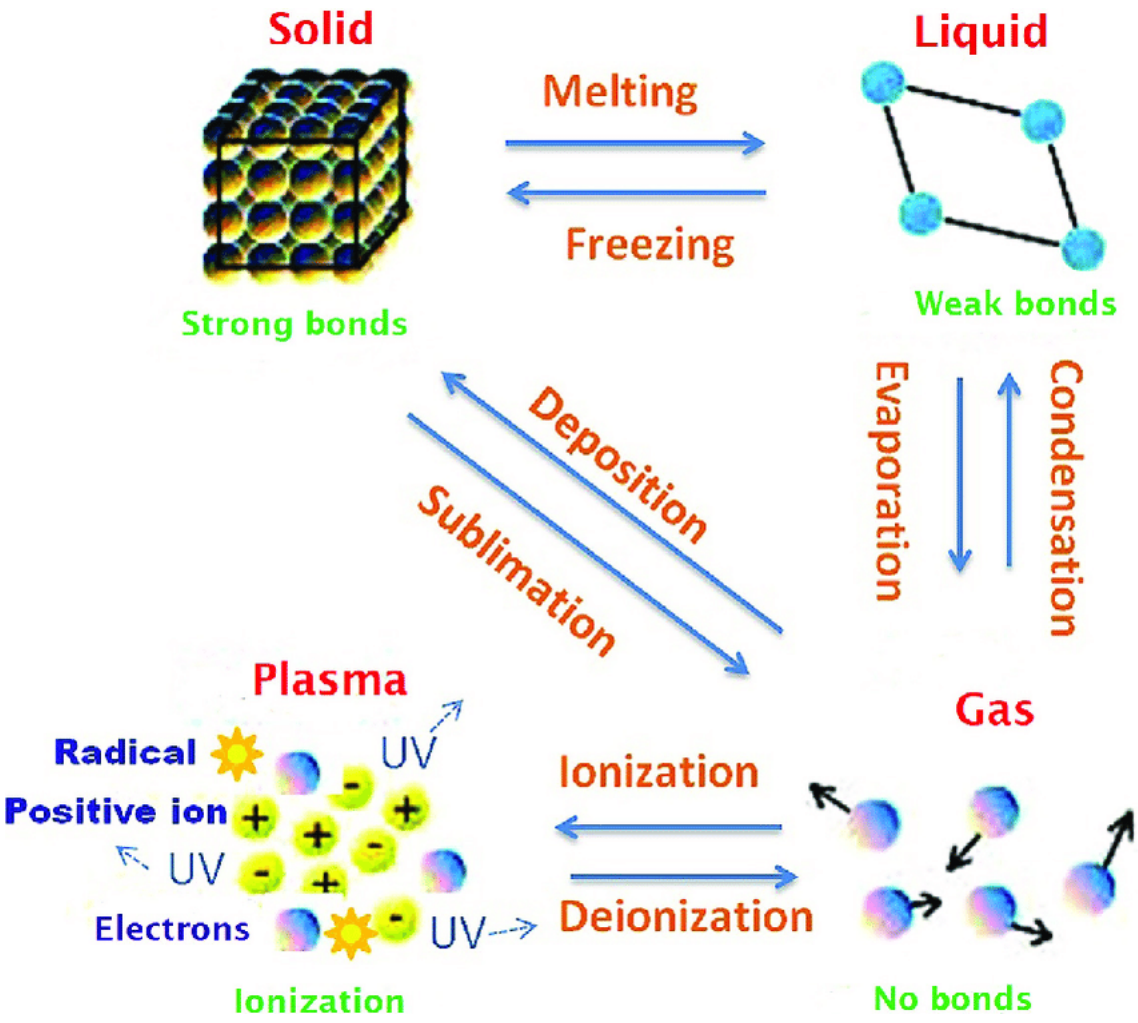


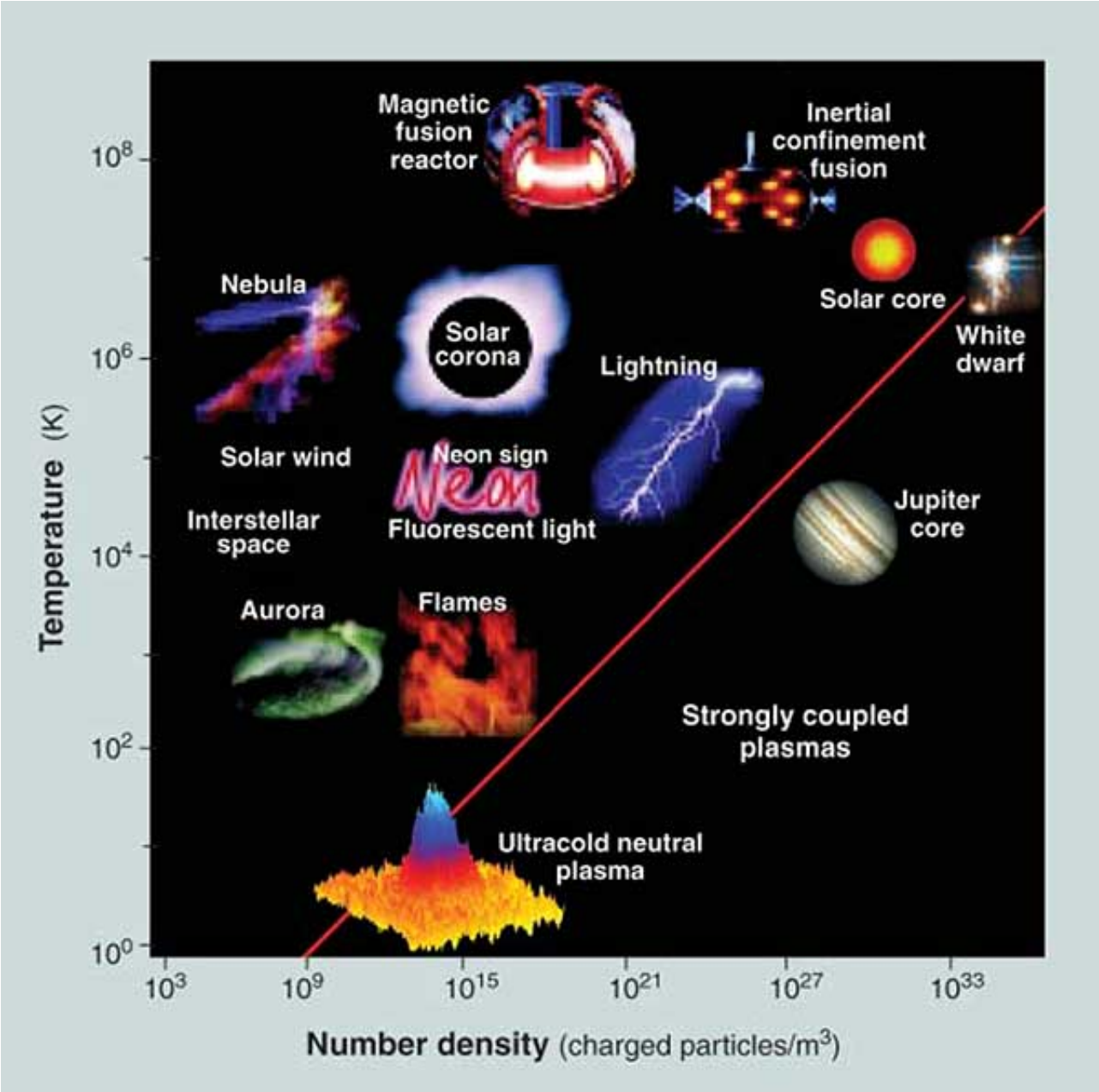


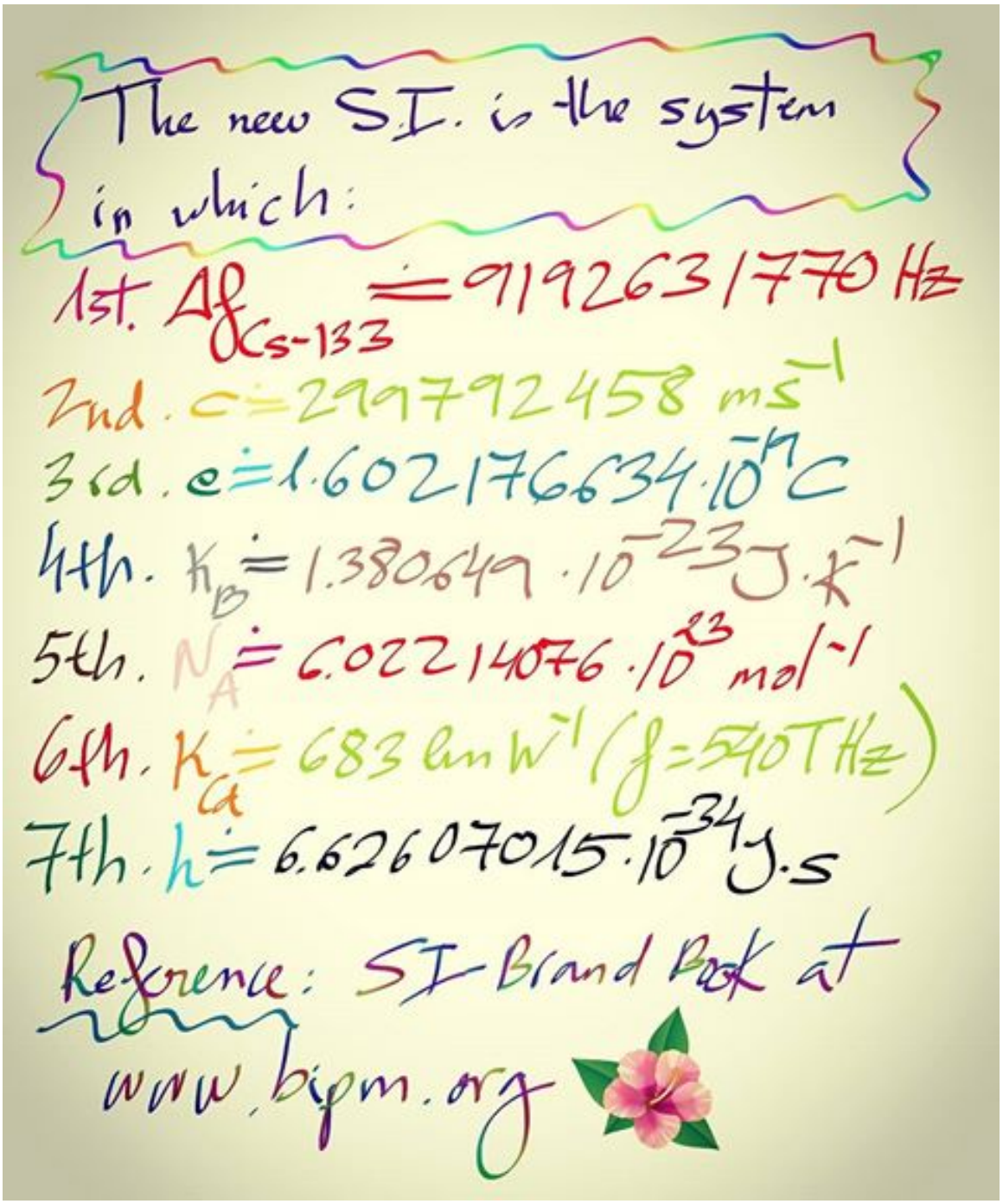

Menos
Energía
Más
Sólidos
Líquidos
Gases
Plasma
Baja
Temperatura
Alta

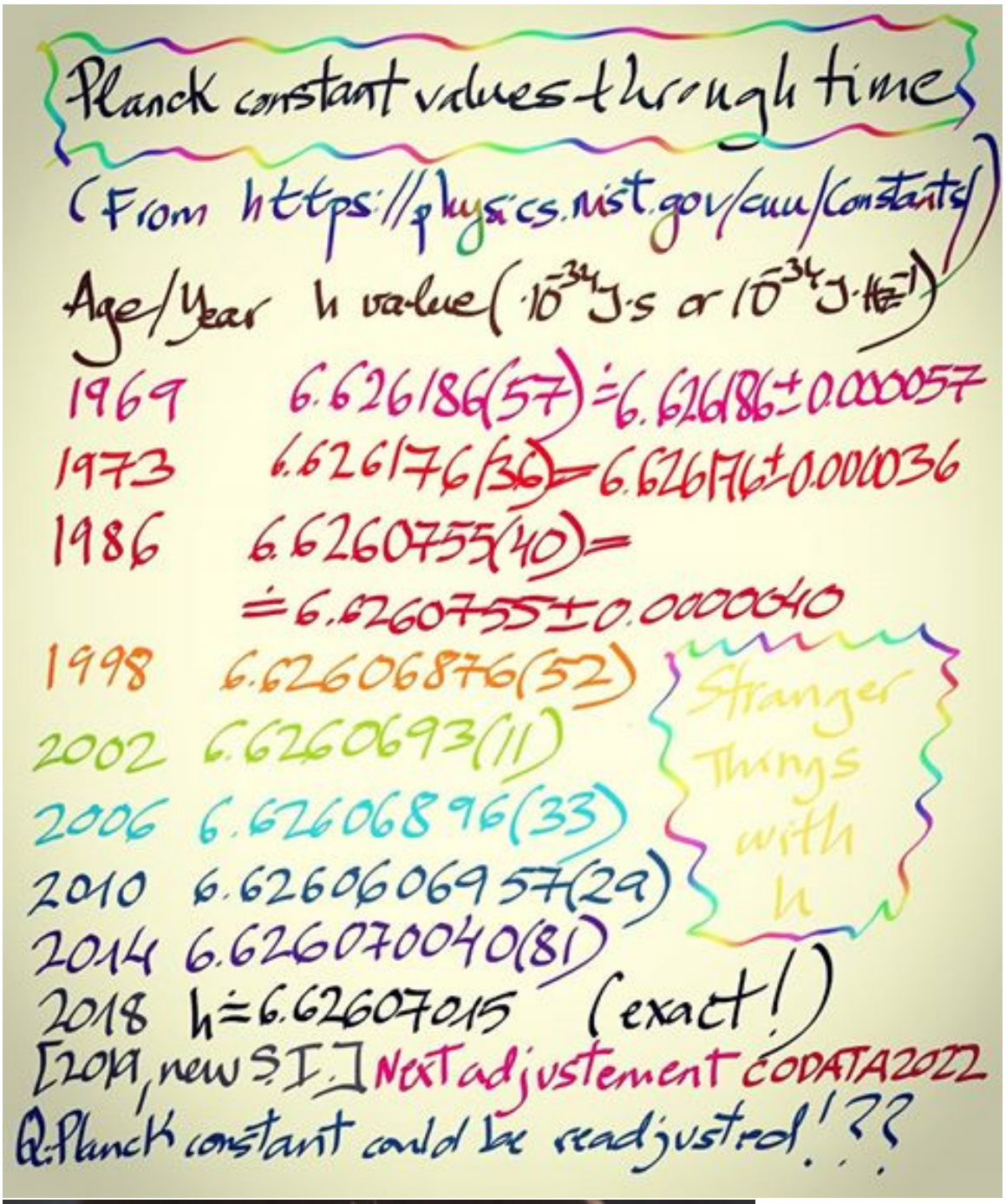
ESTADOS DE LA MATERIA
SOLIDO
LIQUIDO
GASEOSO
Cubo de hielo
Gota de agua
Nubes
1. Tiene su propia forma
2. Tiene volumen
3. Tiene masa
1. Toma la forma de su contenedor
2. Tiene volumen
3. Tiene masa
1. No tiene su propia forma
2. NO tiene volumen
3. Tiene masa
Cubo de hielo
bola
hueso
roca
lata
SOLIDO
guitarra
lapiz
bicicleta
silla
mesa
ESTADOS DE LA MATERIA
Gota de agua
Chocolate caliente
Lluvia
Agua
leche
LIQUIDO
Jugo de naranja
sopa
piscina
ESTADOS DE LA MATERIA
Zarzaparrilla
aire
globo
nubes
GASEOSO
viento
vapor
Globo de aire
ESTADOS DE LA MATERIA

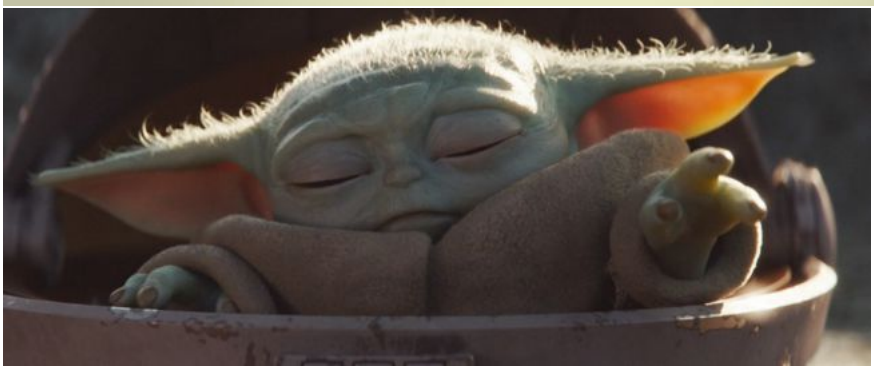
ESTADOS DE LA MATERIA
BAJA
TEMPERATURA O ENERGÍA
ALTA
SOLIDO
LIQUIDO
GAS
PLASMA
SOLIDO
LIQUIDO
GAS
PLASMA

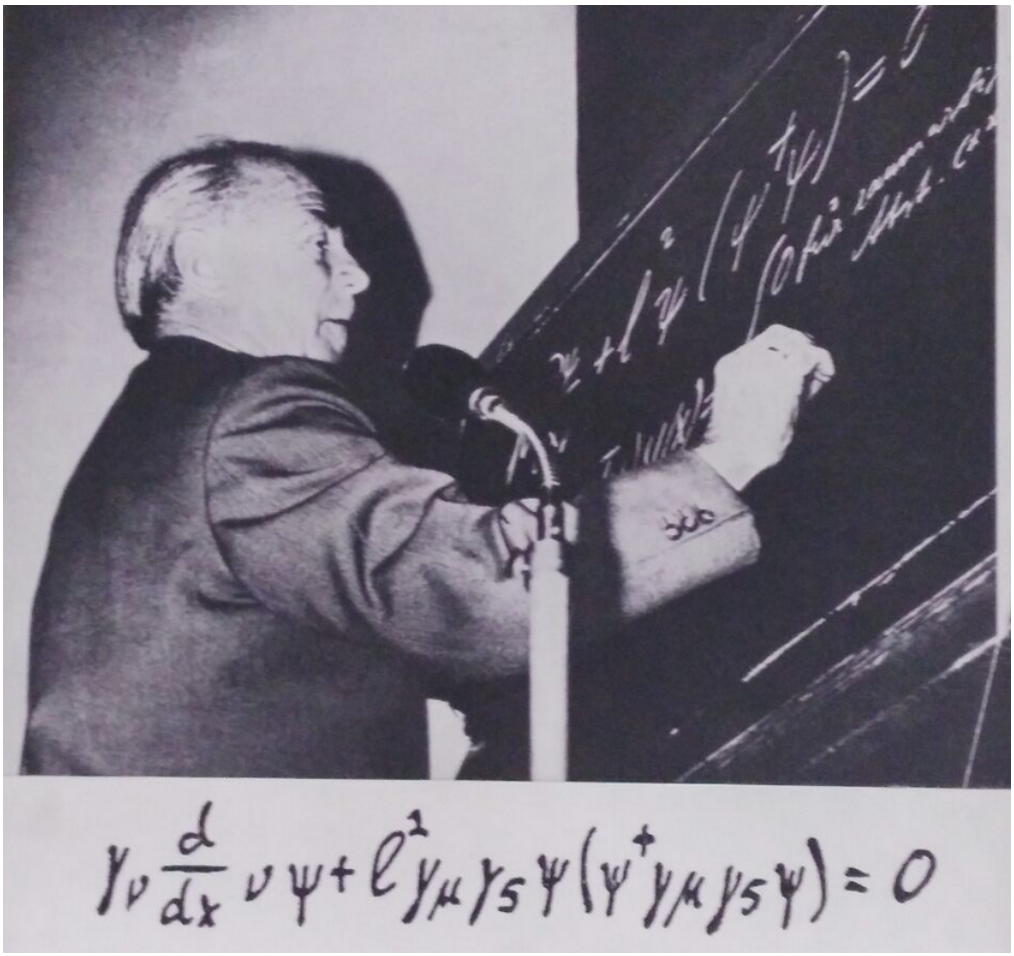

Solid
Melting
Freezing
Liquid
Strong bonds
Weak bonds
Deposition
Sublimation
Evaporation
Condensation
Plasma
Gas
Radical
UV
Positive ion
UV
Electrons
UV
Ionization
Deionization
Ionization
No bonds


Magnetic fusion reactor
Inertial confinement fusion
Nebula
Solar corona
Solar core
White dwarf
Lightning
Solar wind
Neon sign
Fluorescent light
Interstellar space
Jupiter core
Aurora
Flames
Strongly coupled plasmas
Ultracold neutral plasma
Temperature (K)
10^8
10^6
10^4
10^2
10^0
10^3
10^9
10^{15}
10^{21}
10^{27}
10^{33}
Number density (charged particles/m^3)


The new S.I. is the system
in which:
1st. $\Delta f_{Cs-133} \doteq 9192631770$ Hz
2nd. $c \doteq 299792458$ ms^{-1}
3rd. $e \doteq 1.602176634 \cdot 10^{-19}$ C
4th. $k_B \doteq 1.380649 \cdot 10^{-23}$ $J \cdot K^{-1}$
5th. $N_A \doteq 6.02214076 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
6th. $K_{cd} \doteq 683$ lm W^{-1} ($f = 540$ THz)
7th. $h \doteq 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ J.s
Reference: SI Brand Book at
www.bipm.org


Planck constant values through time
(From https://physics.nist.gov/cuu/Constants/)
Age/Year h value ($\cdot 10^{-34}$ J·s or 10^{-34} J·Hz^{-1})
1969 6.626186(57) ≐ 6.626186 ± 0.000057
1973 6.626176(36) = 6.626176 ± 0.000036
1986 6.6260755(40) =
≐ 6.6260755 ± 0.0000040
1998 6.62606876(52)
2002 6.6260693(11)
2006 6.62606896(33)
2010 6.626069957(29)
2014 6.626070040(81)
2018 h ≐ 6.62607015 (exact!)
[2019, new S.I.] Next adjustement CODATA2022
Q: Planck constant could be readjusted!??
Stranger Things with h




$\gamma_\nu \frac{d}{dx_\nu} \psi + l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\psi^+ \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = 0$

THIS IS THE WAY
I HAVE SPOKEN

Capítulo 3

Sustancias puras y mezclas

3.1 LA MATERIA Y SUS FORMAS

En el tema anterior vimos que la materia se puede presentar en diferentes estados de agregación o fases (gaseosa, líquida, sólida,...), según las propiedades físicas y químicas que nos señalaba la Teoría Cinética.

Existe otra manera diferente de clasificar las diferentes formas en las que puede presentarse la materia, que son las siguientes *categorías*:

- **Sustancias puras**☺.

  Sustancias puras

  Son aquellas sustancias que poseen:
  1º. Una *composición química* **fija** o **concreta**.
  2º. Un *conjunto de propiedades físicas y químicas* **únicas** e **inseparables** que las *distingue* de otras sustancias.

  Las sustancias puras, además, pueden ser de dos tipos también:

  – **Elementos**☺.

  Elementos

  Un elemento es una *sustancia pura* que **no puede subdividirse** en *dos o más* sustancias puras por *medios físicos o químicos convencionales*.

  Hay, en el momento de escribir estos apuntes, un total 118 elementos[1] conocidos, de los cuales 92 existen en la naturaleza de nuestro planeta, la Tierra.

  Muchos elementos nos resultan familiares y los vemos a diario. El carbón es *carbono* casi puro, los cables eléctricos y las tuberías suelen estar hechos de *cobre*, el *oro* empleado en joyería. Otros elementos como el *aluminio* se usan en muchos utensilios domésticos o la construcción.

[1] ¿Qué quiere decir esto? Hoy día, sabemos que los elementos se correspoden con los tipos de átomos, si no contamos los *isótopos* de un mismo elemento como algo "distinto". Estos átomos, a su vez, se pueden subdividir en partes o partículas con experimentos a "alta energía", pero esto no es un proceso físico o químico normal en la Naturaleza porque sólo ocurre en aceleradores, en estrellas, o en sitios recónditos del Cosmos. La Física de Altas Energías, que incluye la Física Atómica, la Física Nuclear y la de Partículas, estudia este tipo de procesos que son capaces de subdividir más aún a la materia en condiciones de *elevada energía*, y sus especiales propiedades. Aprenderemos más sobre los átomos y su complejidad en la próxima lección.

En Química, un elemento *se identifica* por su **símbolo**. Este consiste en una o dos letras, normalmente basadas en el nombre del elemento. Así, el símbolo para el carbono es **C** y para el azufre es **S**. A veces el símbolo proviene del nombre en latín del elemento o de uno de sus compuestos. Los elementos cobre y azufre, que se conocen desde la antigüedad, y tienen los símbolos **Cu** (del latín, *cuprum*) y **S** (del latín, *sulphur*).

Curiosidad muy interesante: varios de los elementos que son más conocidos, en realidad son *bastante escasos*. Por ejemplo el mercurio, **Hg** (del griego latinizado, *Hydrargyrum*, "plata líquida"), que se conoce desde el año 500 a.C., aunque su abundancia es sólo del 0,00001 % . Se obtiene fácilmente calentando el cinabrio, que es un mineral de color rojo. Por el contrario, el aluminio, con una abundancia del 8,23 %, fue una curiosidad química hasta mediados del siglo pasado. Se encuentra de forma combinada en la arcilla y las rocas, de donde es muy difícil de extraer.

– **Compuestos**. ☺.

Compuestos

Un compuesto es una *sustancia pura* que *está formado* por **más de un elemento**, que aparecen en una proporción *en masa* fija para un mismo compuesto.

Ejemplos: El agua, H_2O, es un compuesto formado por hidrógeno,**H**, y oxígeno, **O**. El metano, CH_4, y acetileno, C_2H_2, son compuestos que contienen carbono e hidrógeno en diferentes proporciones. Una muestra de agua pura contiene exactamente $11,9\,\%$ de hidrógeno y 88,81 % de oxígeno.

Las propiedades de los compuestos y de los elementos que contienen *son* muy diferentes. La sal común (cloruro de sodio, **NaCl**) es un sólido blanco y poco reactivo. Contiene sodio y cloro. El sodio (**Na**) es un metal brillante y extremadamente reactivo. El cloro (**Cl**) es un gas venenoso amarillo-verdoso. Cuando estos dos elementos se combinan para formar cloruro de sodio, tiene lugar una transformación o reacción química importante.

Existen muchos métodos para separar los elementos de un compuesto. A veces, el calor es suficiente. El óxido de mercurio(II), un compuesto formado por mercurio y oxígeno, se descompone en sus elementos cuando se calienta a $600°C$. Joseph Priestley, un químico inglés, descubrió el oxígeno hace más de 200 años al exponer una muestra de óxido de mercurio(II) a un intenso haz de luz solar, enfocado con una potente lente. Otra forma de separar los elementos en un compuesto es la electrólisis que consiste en pasar una corriente eléctrica a través del compuesto, normalmente en estado líquido. Mediante electrólisis se puede obtener oxígeno e hidrógeno gaseosos a partir del agua.

- **Mezclas** ☺.

Mezclas

Son las sustancias *combinadas* de *dos o más* **sustancias puras**
de forma que cada una *conserva* su **identidad química**.

Las mezclas son de dos clases también:

– **Homogéneas**, también llamadas **disoluciones**.

Mezclas homogéneas o disoluciones

Las mezclas **homogéneas** son aquellas en las que la *composición* de la muestra NO *varía* de un punto a otro y la composición es uniforme, y las componentes no son distinguibles a simple vista debido al tamaño de las partículas.

Las mezclas homogéneas o uniformes son aquellas en las que la composición es la misma en toda la muestra y el tamaño de sus partículas constituyentes es pequeño. La mezcla homogénea o disolución generalmente consta de un *disolvente*, y uno o más solutos.
El disolvente es normalmente la sustancia presente en mayor cantidad. Los tipos de disoluciones se resumen en el siguiente esquema(en negrita el disolvente, letra curvada el soluto):

$$Disoluciones \begin{cases} \textbf{Sólido}/\textit{Sólido}\text{, aleaciones(alloy). Ej.: latón (cobre y cinc;Cu,Zn), acero} \\ \textbf{Sólido}/\textit{Líquido}\text{. Ej.: mercurio en oro} \\ \textbf{Sólido}/\textit{Gas}\text{. Ej.: hidrógeno en platino} \\ \textbf{Líquido}/\textit{Gas}\text{. Ej.: agua carbonatada} \\ \textbf{Líquido}/\textit{Líquido}\text{. Ej.: etanol} \\ \textbf{Líquido}/\textit{Sólido}\text{. Ej.: amalgama} \\ \textbf{Gas}/\textit{Gas}\text{. Ej.: el aire} \\ \textbf{Gas}/\textit{Líquido}\text{. Ej.: vapor de agua en aire(niebla)} \\ \textbf{Gas}/\textit{Sólido}\text{. Ej.: naftaleno} \end{cases}$$

– **Heterogéneas** ☺.

Mezclas heterogéneas

Las mezclas **heterogéneas** son aquellas en las que la *composición* de la muestra *varía* de un punto a otro **de forma no uniforme**.

Muchas rocas y minerales pertenecen a esta categoría. En un trozo de granito se pueden distinguir varios componentes, que se diferencian entre ellos por el color.

Como resumen de esta parte tenemos el siguiente esquema:

$$Materia \begin{cases} Mezclas \begin{cases} \text{Homogéneas o disoluciones} \\ \text{Heterogéneas} \end{cases} \\ Sustancias\ puras \begin{cases} Elementos \\ Compuestos \end{cases} \end{cases}$$

3.2 MÉTODOS DE SEPARACIÓN Y ANÁLISIS

3.2.1 Separación de mezclas homogénas

- **Destilación.** Usa la propiedad de que una mezcla homogénea y sus diferentes partes, si ambas son líquidas, ese vaporizan a diferente temperatura.
- **Cristalización.** Usa la propiedad de que una mezcla con soluto puede solidificarse si se vaporiza todo el disolvente líquido.
- **Cromatografía.** Usa la diferente velocidad entre las diferentes componentes de la mezcla para separar sus componentes.

3.2.2 Métodos de separación de mezclas heterogéneas

- **Extracción.**
- **Decantación.**
- **Separación magnética.**
- **Centrifugación.**
- **Filtración.**
- **Tamizado.**
- **Electroforesis.**
- **Flotación.**

3.3 CONCENTRACIÓN DE DISOLUCIONES

La concentración, que simbolizaremos con la letra **C**, de una disolución es una medida de cuánto está mezclada una sustancia con otra. En particular, es una medida muy útil y usada en disoluciones. En este caso, nos interesa saber cuánta cantidad de soluto hay en la disolución total como un todo. Hay varias medidas de concentración sencillas y prácticas. Son las siguientes:

3.3.1 Tanto por ciento en masa

Se define la concentración C, en tanto por ciento en masa, a la siguiente expresión:

$$C(\,\%, m) = \frac{m(g)_{soluto}}{m(g)_{\text{disolución}}} \cdot 100$$

Observación: la masa de la disolución es la suma de la masa del soluto con la masa del disolvente.

3.3.2 Tanto por ciento en volumen

Se define la concentración C, en tanto por ciento en volumen, a la siguiente expresión:

$$C(\,\%, m) = \frac{V(l)_{soluto}}{V(l)_{\text{disolución}}} \cdot 100$$

Observación: el volumen de la disolución es la suma del volumen del soluto con el volumen del disolvente.

3.3.3 Gramos por litro (Gramos partido de litro)

La concentración C, en gramos por litro, es la siguiente medida:

$$C(g/l) = \frac{m(g)_{soluto}}{V(l))_{\text{disolución}}}$$

Observación: aunque se dice gramos por litro por un abuso de lenguaje, el nombre preciso de esta medida en castellano es gramos partido de litro, o gramos dividido por litro. No obstante, se dice, por brevedad, gramos por litro.

3.3.4 Molaridad

La concentración molar o molaridad se define como el cociente de moles del soluto entre el volumen en litros de disoloción:

$$C(M) = M = \frac{n_s}{V(L)_{dis}}$$

3.3.5 Molalidad

La concentración molar o molaridad se define como el cociente de moles del soluto entre la masa en kilogramos de DISOLVENTE:

$$C(M) = M = \frac{n_s}{m(kg)_{diste}}$$

3.3.6 Fracción molar

Se define la fracción molar de soluto (disolvente) de una disolución como el cociente entre el número de moles de soluto (disolvente) entre el número de moles totales:

$$X_{soluto} = \frac{n_{soluto}}{n_{totales}}$$

$$X_{disolvente} = \frac{n_{disolvente}}{n_{totales}}$$

La suma de las fracciones molares de soluto y disolvente es igual a la unidad:

$$X_{soluto} + X_{disolvente} = 1$$

3.4 Otros tipos de mezclas

Existen tipos intermedios de mezclas entre homogéneas y heterogéneas:

- **Coloides** o suspensiones coloidales. Están formadas por una fase dispersa y medio dispersante. Ejemplos: aerosoles, espumas, emulsiones, soles y geles, dependiendo del estado físico de la fase dispersa y el medio dispersante.
- **Suspensiones.** Mezclas heterogéneas con partículas suficientemente grandes para su sedimentación.
- **Dispersiones**. Mezclas en las que un determinado número de partículas se distribuyen en un medio considerado contínuo de partículas de otra sustancia material.

3.5 Solubilidad

Solubilidad

Solubilidad es la máxima cantidad de soluto que puede disolverse en 100 g de disolvente, a una temperatura (y presión) fija.

La solubilidad depende de:

- Condiciones de presión y temperatura. Generalmente, aunque no siempre, la solubilidad aumenta con la temperatura y la presión.
- La naturaleza y composición del soluto y disolvente. Algunas sustancias son solubles en agua y otras no. Y viceversa, el agua puede ser soluble en algunas sustancias y otras no. La solubilidad depende de qué sustancias disolvemos. Esto está relacionado con la naturaleza de las partículas y moléculas que forman soluto y disolvente, y el tipo de interacciones entre ellas, así como del enlace químico.
- Estado físico del soluto y disolvente.
- Presencia de sustancias que favorecen o dificultan la solubilidad.

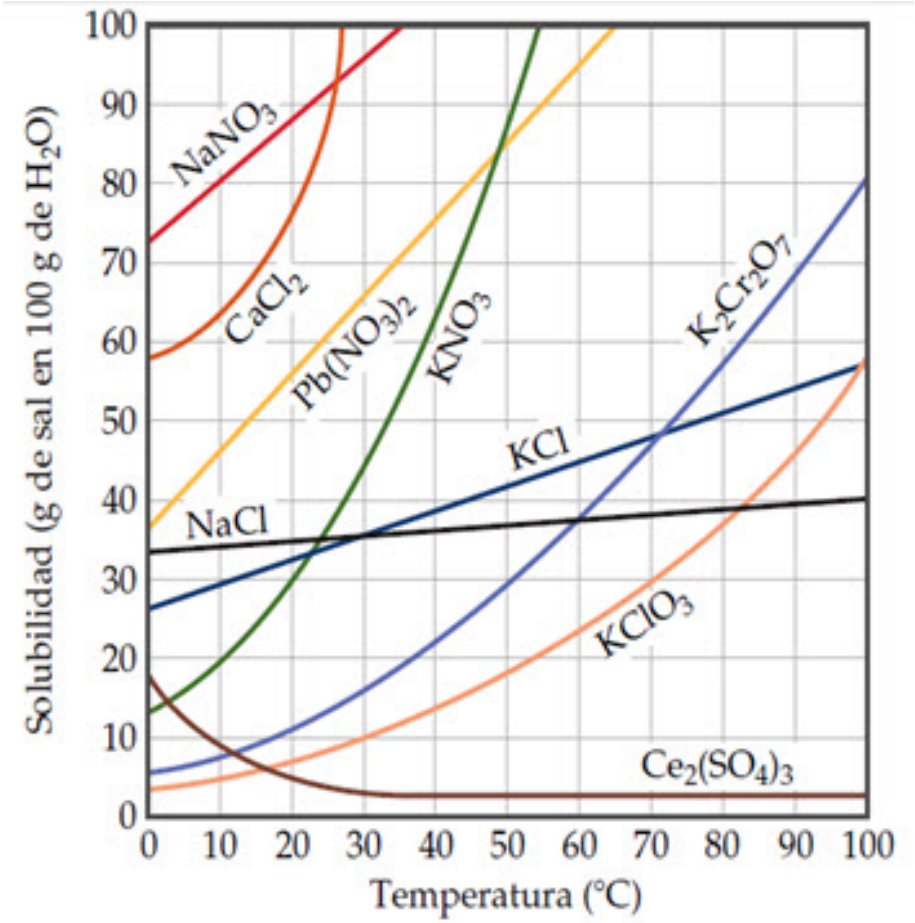


Figura 3.1: Curvas de solubilidad.

Según la cantidad de soluto, una disolución puede ser diluida, concentrada, saturada (si no admite más soluto) y sobresaturada. Un criterio, no el único, para diferenciar disoluciones diluidas de concentradas es el criterio del 5 %. Por encima del 5 % la disolución suele considerarse concentrada, y diluida si es menor de ese porcentaje. Una disolución puede considerarse concentrada a partir del 1M.

La solubilidad suele expresarse mediante curvas y gráficas de solubilidad:

3.6 FORMULARIO

3.6.1 Tanto por ciento en masa

$$C(\,\%, m) = \frac{m(g)_{soluto}}{m(g)_{\text{disolución}}} \cdot 100$$

3.6.2 Tanto por ciento en volumen

$$C(\,\%, m) = \frac{V(l)_{soluto}}{V(l)_{\text{disolución}}} \cdot 100$$

3.6.3 Gramos por litro (Gramos partido de litro)

$$C(g/l) = \frac{m(g)_{soluto}}{V(l)_{\text{disolución}}}$$

3.6.4 Molaridad

$$C(mol/l) = M = \frac{n_{soluto}}{V(l)_{\text{disolución}}}$$

3.6.5 Molalidad

$$C(mol/l) = M = \frac{n_{soluto}}{m(kg)_{\text{disolvente}}}$$

3.6.6 Fracción molar

$$X_{soluto} = \frac{n_{soluto}}{n_{totales}}$$

$$X_{disolvente} = \frac{n_{disolvente}}{n_{totales}}$$

$$X_{soluto} + X_{disolvente} = 1$$

Capítulo 4

El átomo: modelos atómicos y subatómicos

4.1 Introducción

¿De qué está hecha la materia? ¿Se puede dividir en partes cada vez más pequeñas? Con los descubrimientos de la Química en los siglos XVIII y XIX, junto a los descubrimientos de las ecuaciones del electromagnetismo en el siglo XIX y las leyes Termodinámicas, se hizo clara la necesidad de estudiar la estructura microscópica de la materia. La hipótesis molecular o atómica, de la teoría cinética, reintrodujo la idea de los átomos en la Física después de casi 2000 años de ausencia.

4.2 Modelo de Dalton

Dalton propuso un modelo atómico para explicar las reacciones químicas y sus leyes a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. En particular, su modelo tenía las siguientes hipótesis:

- Toda la materia está formada por átomos indivisibles e indestructibles.
- Los átomos son eléctricamente neutros.
- Los átomos del mismo elemento químico tienen las mismas propiedades (masa, tamaño).
- Los átomos de diferentes elementos tienen diferentes propiedades.
- Los átomos se combinan para formar compuestos en proporciones numéricas dadas por números enteros positivos sencillos.

Este modelo se mostró incapaz de explicar los nuevos descubrimientos y tuvo que modificarse. En particular, era incapaz de explicar los fenómenos de electrización de la materia y otros nuevos hallazgos de la Química y Física.

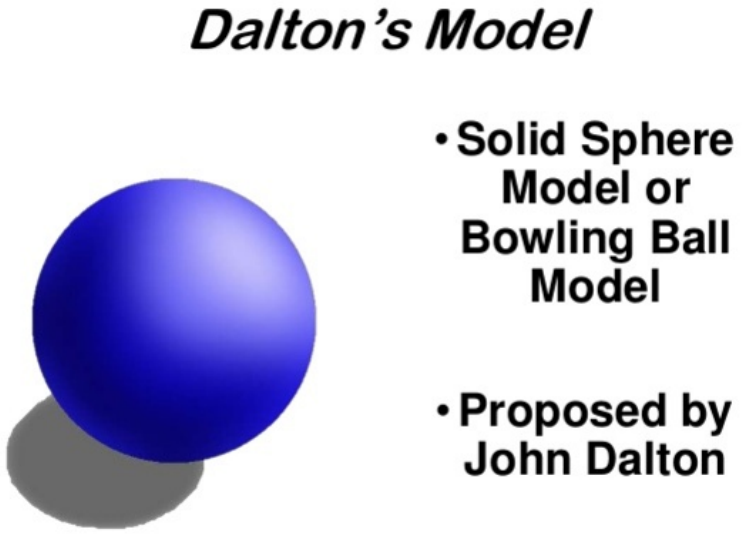


Figura 4.1: Modelo de las bolas de billar de Dalton.

4.3 Modelo de Thomson

En 1897, con el experimento de los rayos catódicos, J. J. Thomson descubre el electrón. La primera partícula subatómica hallada dentro de los átomos. Un esquema del experimento de rayos catódicos:

Eso le lleva a plantear un modelo atómico nuevo, llamado "plumcake model", modelo del pudin con pasas:

1. Los átomos son una masa de de carga positiva donde están incrustados los electrones.
2. Los átomos son eléctricamente neutros, por lo que la carga total positiva compensa la de los electrones.
3. Los átomos del mismo elemento son iguales en propiedades.

En el experimento de los rayos catódicos, se hacía pasar una corriente eléctrica en un gas a baja presión. Se producía la aparición de una radiación proviniente del cátodo, que se vino en llamar rayos catódicos. Los rayos catódicos, gracias a ingeniosos experimentos de Thomson, demostraron poseer propiedades de partículas cargadas negativas, con masa, que hoy llamamos electrones.

De nuevo, los avances experimentales harían que este modelo tuviera una vigencia breve.

4.4 Modelo de Rutherford

Geiger y Marsden, a instancias de Rutherford, realizaron el experimendo de la lámina de oro (Golden Foil experiment). Este experimento consistía en arrojar partículas alfa (más adelante identificadas coomo núcleos ionizados del átomo de helio) contra una fina lámina de oro y observar la desviación de dichas partículas en una pantalla.

Las observaciones eran sorprendentes:

- La mayoría de las partículas alfa, pasaban apenas sin desviaciones.
- Un número importante de partículas alfa sufrían desviaciones moderadas entre 30 y 90 grados.
- Un número no pequeño de partículas alfa se desviaban bastante, con ángulos entre 90 y 170 grados.
- Una de cada 100000 (CIEN MIL), aproximadamente, rebotaba casi hacia atrás, en ángulo similar a 180 grados.

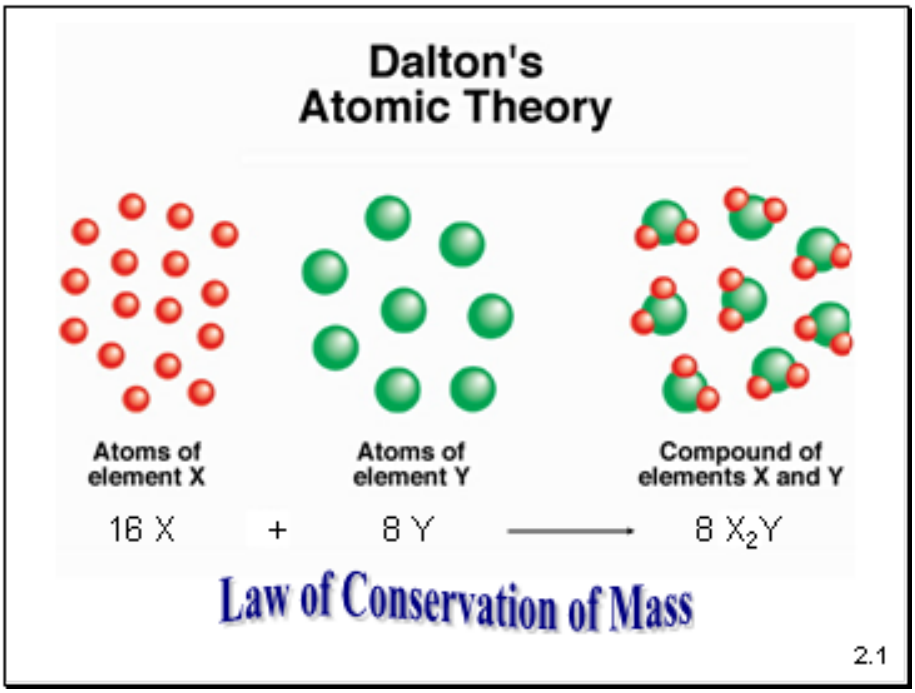


Figura 4.2: El modelo atómico de Dalton explicaba de forma sencilla la ley de conservación de la masa de Lavoisier de las reacciones químicas.

Rutherford se percató de que los resultados del experimento eran incompatibles con la imagen del átomo de Thomson, y propuso una nueva imagen del átomo basada en la idea planetaria (y también en ideas previas del japonés Nagaoka, que había propuesto un modelo "saturniano" del átomo donde los electrones eran anillos sobre un núcleo). El modelo nuclear de Rutherford (1911) tenía las siguientes hipótesis:

- El átomo está formado por dos zonas diferenciadas: núcleo y corteza.
- En la corteza se encuentran los electrones, y en el núcleo se hallan los protones y neutrones (el protón se propuso como explicación a un experimento denominado experimento de los rayos canales; el neutrón, descubierto por Chadwick en 1931, era necesario para explicar la masa del átomo).
- El tamaño del núcleo es 100000 veces menor que el tamaño del átomo y muy denso, comportándose como esferas duras de carga positiva y masa casi la del átomo. El tamaño del átomo es del orden de 10^{-10}m y el del núcleo de 10^{-15}m.
- La mayor parte del átomo es espacio vacío.
- Los electrones orbitan el núcleo como planetas el sol, en órbitas circulares, debido a la fuerza eléctrica del núcleo (de carga positiva). esta fuerza eléctrica venía deducida a partir de la ley de Coulomb entre dos cargas Q, q, separadas una distancia r:
$$F_C = K_C \frac{Qq}{r^2}$$
- Los átomos del mismo elemento ya no son necesariamente idénticos en propiedades, pueden tener propiedades distintas (dependiendo de la masa y las partículas).
- Toda la carga positiva y casi toda la masa se concentra en el núcleo, mientras que la carga negativa y algo de masa están en la corteza (los electrones tienen masa).

Este modelo, sin embargo, poseía dos problemas que ya arrastraban los modelos anteriores del siglo XIX:

- No explicaban los espectros atómicos. Los espectros atómicos eran la luz emitada de los átomos al calentarse (o enfriarse). Un espectro de emisión consistía, para cada elemento, en una serie de líneas de colores sobre fondo negro, y un espectro de absorción unas líneas oscuras en fondo de colores. Ni el modelo

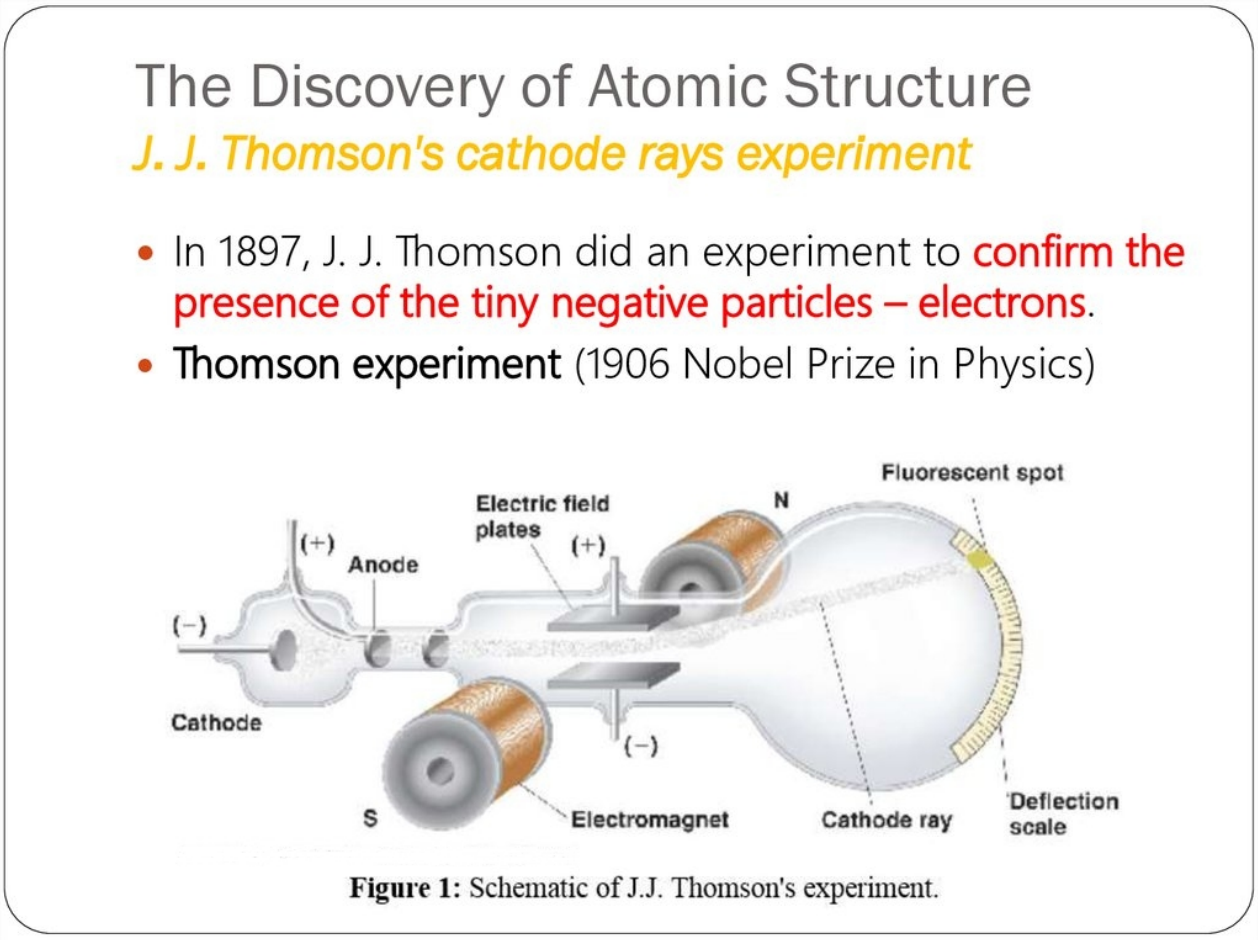


Figura 4.3: Experimento de rayos catódicos de J.J.Thomson.

de Rutherford ofrecía una explicación a la estructura de esta radiación electromagnética y térmica de los átomos.

- La teoría electromagnética de la luz del s.XIX, definida por las ecuaciones de Maxwell, indicaba que partículas cargadas (como los electrones en el átomo), sometidas a una aceleración (en el átomo ocurre debido al movimiento circular), implicaba que el átomo debía ser inestable y eso no era observado (afortunadamente para todos). El tiempo que tardaba un electrón, por ejemplo en el átomo de hidrógeno, en perder energía por radiación electromagnética, inicialmente a una distancia del núcleo de r_0 es igual a la fórmula:

$$t_c = \frac{4\pi^2\varepsilon^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4}$$

donde m es la masa del electrón, c es la velocidad de la luz, e es la carga elemental del electrón, ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío y π es el número pi. Puede calcularse que $t_c \approx 10^{-11}s = 10ps$.

4.5 Modelo de Bohr

En 1913, Niels Bohr, usando las ideas cuánticas de Planck (1900), fue el primero que determinó una primera explicación de átomo y su espectro (aunque no en forma completa). Su modelo era válido para átomos como el del hidrógeno, o a lo más, átomos con un solo electrón.

La hipótesis cuántica de Planck era el análogo para la energía de la idea atómica para la materia. Bohr usó los siguientes postulados para el átomo de hidrógeno:

- Los electrones, mientras se encuentran en órbitas circulares, no radian (ni emiten ni absorben) energía.

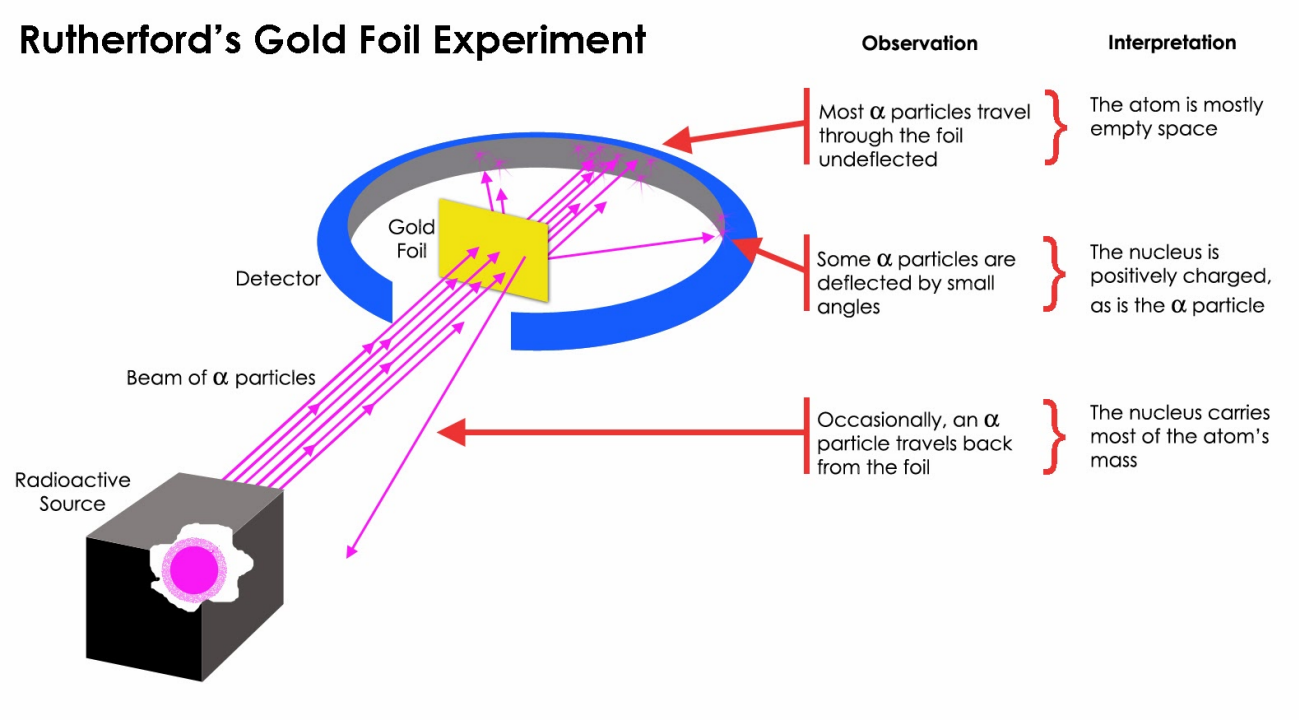


Figura 4.4: Esquema del experimento de Rutherford.

- Las transiciones de los electrones tienen lugar cuando absorben o emiten cuantos de luz (fotones), mediante la fórmula de Planck: $E = hf = \hbar\omega$. Aquí, E es la energía, f es la frecuencia de la luz y h es la constante de Planck, cuyo valor es $6{,}626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$. $\hbar = h/2\pi$ se denomina constante de Planck racionalizada y ω es frecuencia angular.

- El momento angular de los electrones del átomo tampoco puede tomar cualquier valor, sino que están cuantificados $L = mvr = nh$, con n entero positivo, i.e., $n = 1, 2, 3, \ldots$. El momento angular, variable asociada al giro circular de los electrones, es el producto de la masa por la velocidad por la distancia al núcleo.

Usando estas 3 hipótesis, Bohr fue capaz de encontrar una derivación de la fórmula de Balmer que daba las series principales de transiciones y las energías de las líneas de los átomos no perturbados electromagnéticamente. A saber, la fórmula de Balmer es:

$$E(n_1, n_2) = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

y donde $n_1 < n_2$ con números enteros positivos (1,2,3,...). R es la denominada constante de Rydberg, aproximadamente $13{,}6eV = 2{,}18 \cdot 10^{-18} J$. Además, Bohr fue capaz de encontrar una derivación de la constante de Rydberg en términos de constantes más fundamentales.

Sin embargo, el modelo de Bohr también era insuficiente. No explicaba los detalles del espectro del átomo de hidrógeno cuando estaba sometido a campos eléctricos o magnéticos (conocidos como efectos Stark y Zeeman). Se intentó su modificación para incluir el efecto del tamaño del núcleo, y las llamadas correcciones relativistas indicadas por la teoría de la relatividad especial de Einstein. Eso implicaba la introducción de nuevos números cuánticos asociados a nuevas cantidades, diferentes al momento angular. Las órbitas con las correcciones de Bohr-Sommerfeld eran elípticas y no circulares, pero eran aún insuficientes para explicar la estructura de los espectros de forma detallada, y en especial, de los átomos más complicados como el helio o el resto de la Tabla Periódica. Esto llevó al desarrollo de la Mecánica Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos, que es el modelo actual vigente.

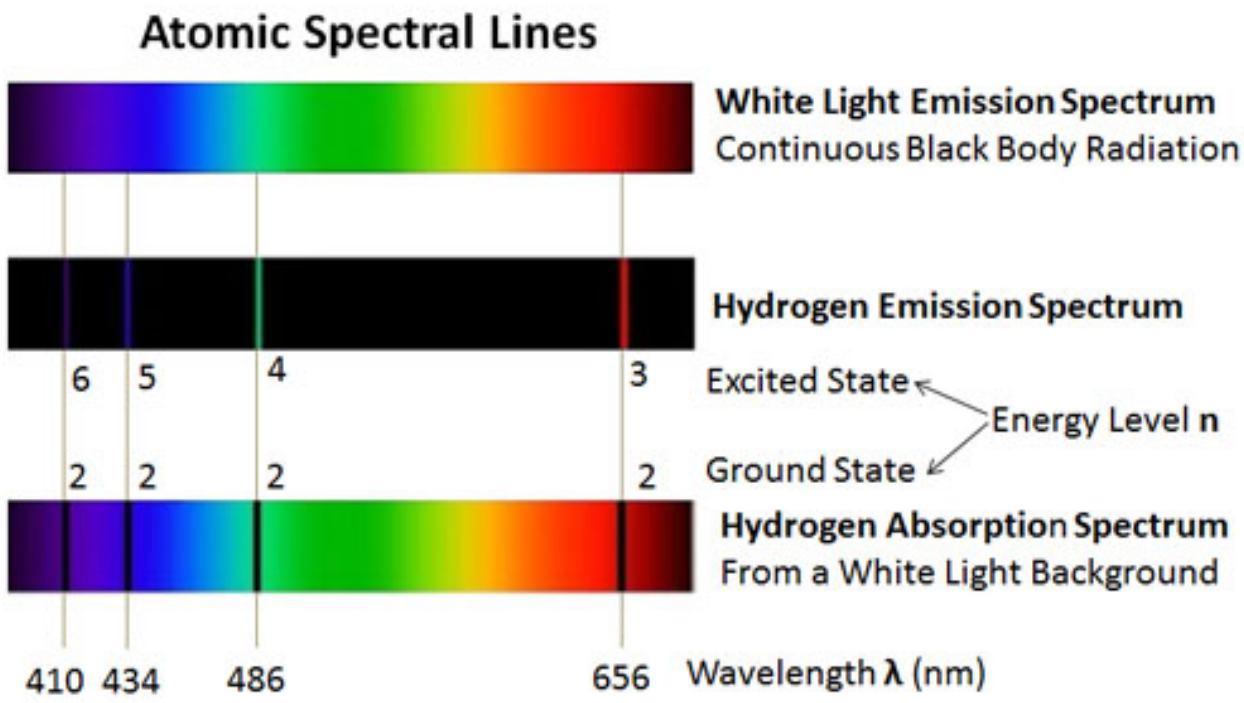


Figura 4.5: Líneas espectrales atómica elementales del hidrógeno, sin perturbaciones magnéticas o eléctricas. Hay diferencia entre el espectro de absorción, el espectro de emisión, y el espectro puramente de radiación, denominado de cuerpo negro (no confundir cuerpo negro con agujero negro).

4.6 Modelo mecanocuántico

Una serie de hipótesis adicionales se fueron introduciendo para explicar la estructura detallada de los átomos:

- Dualidad onda-partícula (Louis de Broglie). Las partículas subatómicas tienen propiedades de onda, no es solo que las ondas se comporten como partículas como se había visto en el caso de la luz. Esta idea fue demostrada con la interferencia de neutrones en un cristal (experimento Davidson-Germer).

- Principio de indeterminación de Heisenberg. Al llegar a sondear la estructura del átomo, hay que localizar una partícula perturbándola. De acuerdo a las ideas de Heisenberg, que trataba de explicar las transiciones atómicas mediante la teoría matemática de matrices, es imposible conocer simultáneamente y con precisión dos magnitudes que tengan las mismas unidades que la constante de Planck. Esto ocurre con la posición y el momento lineal (producto de masa y velocidad), o con la energía y el tiempo de producción de un proceso subatómico, aunque es mucho más general:

$$\Delta A \Delta B \geq \hbar/2$$

$$\Delta x \Delta(mv) \geq \hbar/2$$

$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar/2$$

- La ecuación de Schrödinger: $H|\Psi >= E|\Psi >$, describe el movimiento del electrón en situaciones no relativistas. En situaciones relativistas, se requiere la ecuación de Dirac: $(i\hbar\gamma \cdot \partial - e\gamma \cdot A - mc)\Psi = 0$.

De acuerdo con Heisenberg, hay una cierta borrosidad o fluctuación incontrolable en toda partícula fundamental. Esta idea y las anteriores, llevaban a la conclusión de que para describir una partícula subatómica había que recurrir a una función de onda $\Psi(x, y, z, t)$. Esta función de onda, resuelta para estados estacionarios, producía los niveles de energía del átomo y de otras estructuras subatómicas (núcleos o partículas). La función de onda tiene una interpretación puramente estadística, dada por Max Born (no confundir con Bohr), que indica que $|\Psi|^2$ es la probabilidad de encontrar al electrón (en el caso del átomo), y es un número real comprendido entre 0 y 1. El concepto de trayectoria se difumina y se introduce el concepto de orbital como zona donde es más

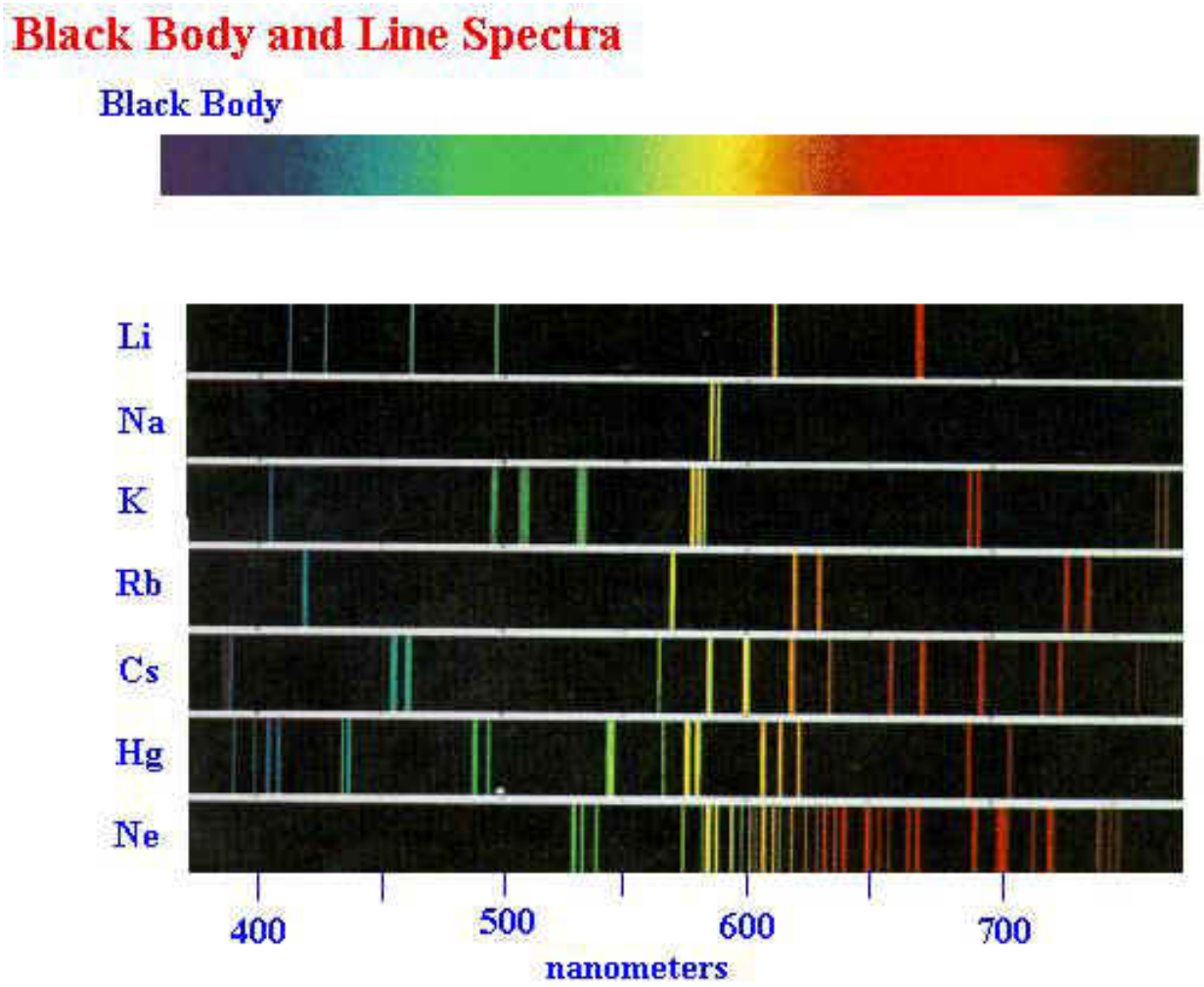


Figura 4.6: Espectros atómicos de diferentes elementos químicos.

probable encontrar el electrón. Cada orbital tiene una forma y puede albergar dos electrones en forma de nube con espines opuestos. El principio de exclusión prohibe que un fermión como el electrón posea los 4 números cuánticos iguales en un átomo (n,l,m,s). La función de onda es una amplitud de probabilidad, y en general, es un número complejo ($\Psi = S + iT$, con $i^2 = -1$). Así, en Mecánica Cuántica, la pregunta no es, generalmente (salvo en detectores concretos), dónde se encuentra el electrón sino dónde está probablemente. El desarrollo de las teorías cuánticas tuvo lugar en varias etapas. En una primera parte, la parte matemática y axiomática, estuvo esencialmente acabada hacia 1933. La aplicación a las teorías electromagnéticas en la Electrodinámica Cuántica (QED, Quantum Electrodynamics), llevó 16 años más, hasta 1949. Posteriormente, se desarrollaron las teorías cuánticas para las interacciones débiles y nucleares fuertes. La teoría cuántica de la interacción débil empezó con la teoría de Fermi y acabó con el modelo de la teoría electrodébil de Glashow-Weinberg-Salam, complementado con el trabajo posterior de Peter Higgs y otros para la explicación de la masa de los fotones vectoriales masivos W,Z. La teoría de la interacción nuclear fuerte llevó primero a desarrollar la teoría de la matriz de scattering (o matriz S), y finalmente al modelo de la Cromodinámica Cuántica (QCD, Quantum Chromodynamics), basada en gluones y quarks. Finalmente, el descubrimiento de los bosones W y Z en los 80, y del último quark en 1995, llevó a la propuesta y construcción del LHC para encontrar al campo o partícula de Higgs (encontrado en 2012). La combinación de la teoría electrodébil y la QCD se denomina Modelo Estándar y explica que toda la materia está hecha de leptones y quarks, mientras que interactúa con bosones como fotones, partículas W,Z, gluones y bosones de Higgs. No explica la gravedad ni la materia o energía oscura que parece deducirse de los datos astronómicos, astrofísicos y cosmológicos.

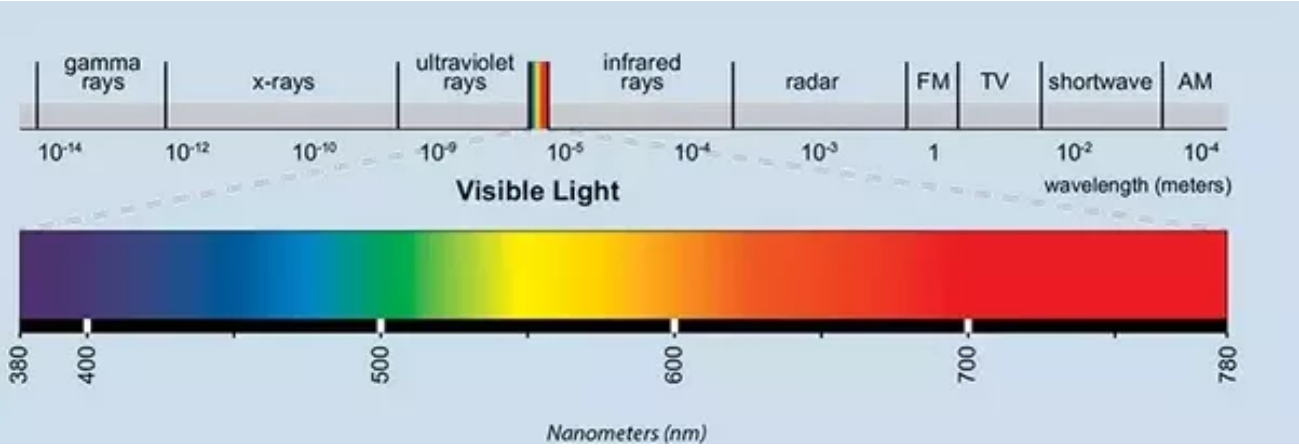


Figura 4.7: El espectro electromagnético de la luz. La luz visible es solamente una pequeña parte del espectro completo, entre 380 y 780 nanómetros de longitud de onda.

4.7 Cálculo del espacio vacío en un átomo

¿Qué porcentaje de un átomo está vacío? Considera el átomo más simple, el átomo de hidrógeno. Su radio mínimo es de $10^{-10}m$. El protón tiene un tamaño máximo de 1 fm, $10^{-15}m$. El volumen ocupado por el electrón es pues $10^{-30}m^3$ y el del núcleo es $10^{-45}m^3$. Dividiendo:
$x = V(\text{núcleo})/V(\text{átomo}) = 10^{-15}$, luego el átomo tiene un espacio vacío igual a $Y = 1 - x = 1 - 10^{-15} = 0{,}999999999999999 = 99{,}9999999999999\,\%$. El átomo es vacío esencialmente.

4.8 Números cuánticos de los átomos. Radioactividad

Un núcleo o átomo queda esencialmente cuantificado con tres números (cuatro si incluyes los electrones):

- **Número atómico Z**. Es el número de protones del átomo, coincide con el número de electrones si el átomo es neutro.
- **Número de neutrones N**. Es el número de neutrones de un átomo.
- **Número másico A**. Es el número de protones más el de neutrones de un átomo $A = Z + N$.
- **Número de electrones** N_e. Es el número de electrones del átomo. En su estado fundamental y neutro, un átomo tiene el mismo número de protones que de electrones. En caso de un desbalance de electrones respecto al número de protones, obtenemos un átomo cargado eléctricamente (no neutro), también llamado *ion*.

Ahora unas definiciones relacionadas:

- **Iones**. Átomos o grupos de átomos que han perdido o ganado electrones. Si ganan electrones, los iones son de carga negativa y se llaman aniones. Si pierden electrones, los iones son de carga positiva o cationes.
- **Isótopos**. Átomos del mismo elemento, por tanto mismo Z, mismo número de protones, pero diferente número másivo y por tanto diferente número de neutrones.
- **Isótonos**. Átomos de diferentes elementos con el mismo número de neutrones.
- **Isóbaros**. Átomos de diferentes elementos con el mismo número másico.
- **Isómeros**. Átomos del mismo núcleo, que solamente difieren en energía. Es decir, son estados excitados del mismo átomo o núcleo.

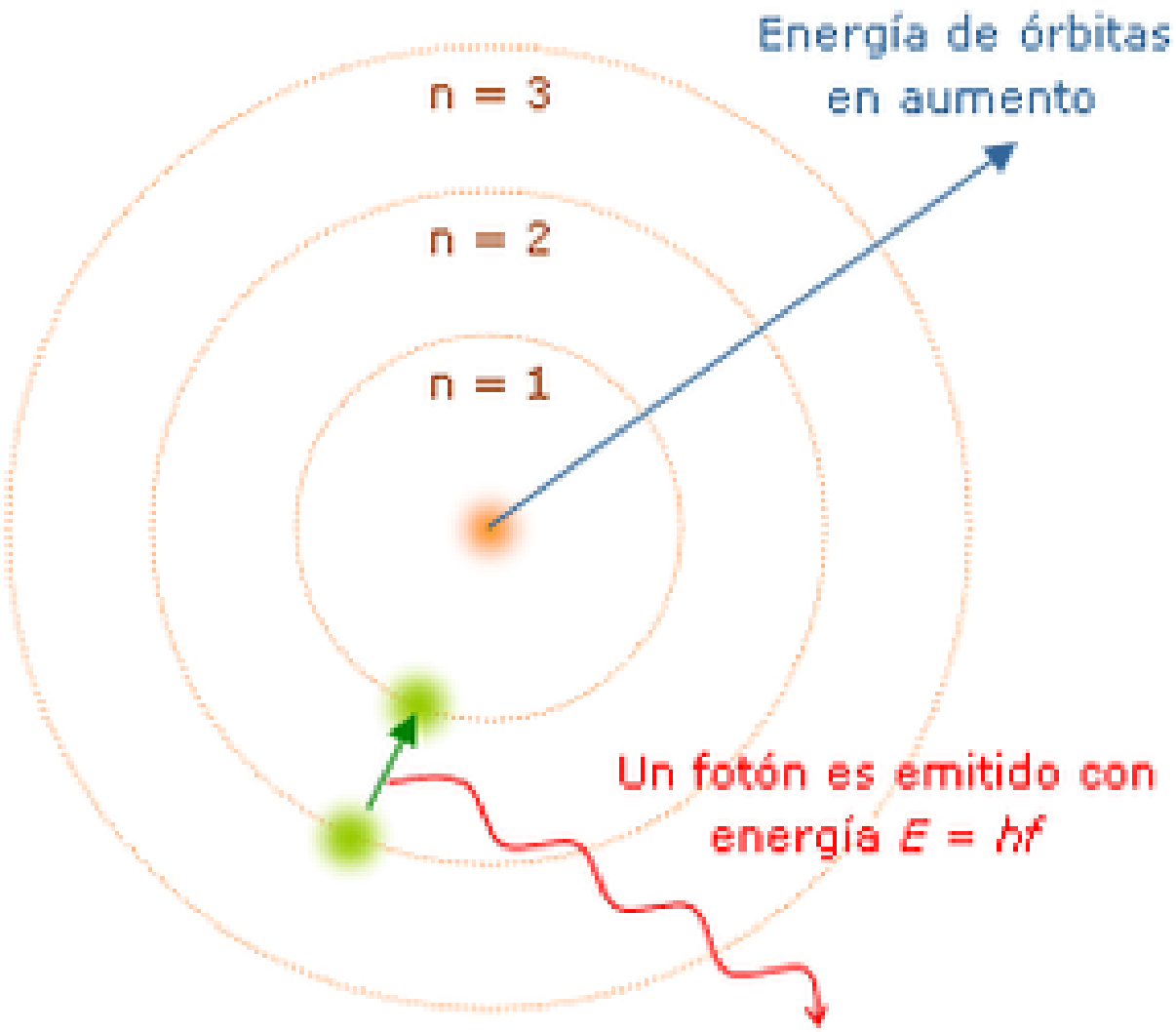


Figura 4.8: Imagen del modelo de órbitas circulares estacionarias de Bohr.

Los átomos se suelen simbolizar mediante el esquema ${}^{A}_{Z}X^{\pm n}$, donde A es el número másico, Z el número atómico y n es la carga eléctrica del mismo (no se pone si es neutro). Además de en estado neutro, la estabilidad de un átomo se logra con la estabilidad del propio núcleo. Generalmente, salvo en los elementos más pesados, los átomos estables tienen un número de protones similar al número de neutrones. Cuando hay un desbalance o desequilibrio entre el número de protones y el de neutrones, el núcleo y el átomo suelen ser inestables, presentando el fenómeno de la *radioactividad*.

La radioactividad es el fenómeno que tiene lugar en algunos átomos cuyos núcleos están muy desbalanceados en su número Z y N. Hay átomos radiactivos de casi todos los elementos químicos. La radioactividad es un fenómeno que consiste en la emisión de partículas (fotones, neutrones y neutrinos, protones o incluso otros núcleos como partículas alfa) de un átomo, transmutándose (transformándose) en otro para lograr la estabilidad (menor energía, y un mejor balanceo de protones y neutrones). Existen 3 tipos básicos de radiactividad: alfa, beta y gamma. Luego hay dos formas menos conocidas de "radiación", denominadas radiación delta y epsilon:

- **Radiación alfa** α, emisión de un núcleo o átomo de helio:
  $(A, Z) \rightarrow (A-4, Z-2)$, ${}^{A}_{Z}X \rightarrow^{A-4}_{Z-2} X' +^{4}_{2} He^{2+} + 2e^{-} \rightarrow^{A-4}_{Z-2} X' +^{4}_{2} He$.

- **Radiación beta** β. Hay dos tipos. Beta negativa o beta menos β^{-}, y beta positiva o beta más β^{+}. Así,
  β^{-} : $(A, Z) \rightarrow (A, Z+1)$, o bien ${}^{A}_{Z}X \rightarrow^{A}_{Z+1} X' + e^{-} + \overline{\nu_e}$.
  La β^{+} es $(A, Z) \rightarrow (A, Z-1)$, o bien ${}^{A}_{Z}X \rightarrow^{A}_{Z-1} X' + e^{+} + \nu_e$.

Figura 4.9: Modelo de Sommerfeld o corrección relativista al modelo de Borh, también denominado modelo Bohr-Sommerfeld o de las variables de acción.

e^- es el electrón, e^+ es el positrón (antipartícula del electrón), ν_e es el neutrino del electrón, y $\overline{\nu_e}$ el antineutrino del electrón. Se especula con la posibilidad de las llamadas desintegraciones beta doble, solamente posibles si el neutrino es lo que se llama una partícula de Majorana (su propia antipartícula, descrita por una ecuación de Dirac modificada llamada ecuación de Majorana). En tal caso, sería posible el proceso
$(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^-$ $(\beta\beta^{2-}0\nu_e)$, y $(A, Z-2) \rightarrow (A, Z) + 2e^+$ $(\beta\beta^{2+}0\nu_e)$, es decir, sería posible una desintegración beta doble sin neutrinos si el neutrino es su propia antipartícula. Este hecho se desconoce en la actualidad (así como el valor exacto de la masa de los neutrinos). Más concretamente:
$\beta^{--}: \quad {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+2} X' + 2e^-,$
para una reacción doble beta menos sin neutrino, y,
$\beta^{++}: \quad {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-2} X' + 2e^+,$
para una reacción de desintegración doble beta más sin neutrino.

- **Reacción o radiación de captura electrónica** (CE, K-capture). Consiste en la captura de un electrón y la transmutación del átomo y núcleo asociado.
  ${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} X' + \nu_e.$

- **Reacción de fisión/fusión tipo cluster (o cúmulo)**.
  Fisión o ruptura (fisiles): ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-a}_{Z-b} X' + {}^a_b X''.$
  Fusión o unión (fusiles): ${}^A_Z X + {}^a_b X' \rightarrow {}^{A+a}_{Z+b} X''.$
  Transmutación general a 2 cuerpos: ${}^A_Z X + {}^a_b X' \rightarrow {}^{A+a-a'}_{B+b-b'} X + {}^{a'}_{b'} X''.$
  Transmutación general de p-cuerpos a q-cuerpos:
  ${}^{A_1}_{Z_1} X_1 + {}^{A_2}_{Z_2} X_2 + \cdots + {}^{A_p}_{Z_p} X_p \rightarrow {}^{A'_1}_{Z'_1} X'_1 + {}^{A'_2}_{Z'_2} X'_2 + \cdots + {}^{A'_q}_{Z'_q} X'_q.$

- **Radiación gamma** (emisión de fotones electromagnéticos de alta energía de núcleos o átomos excitados).
  ${}^A_Z X^\star \rightarrow {}^A_Z X + \gamma.$

- **Rayos (o radiación) delta** δ $(\Delta^-,\ Delta - rays)$. Se trata de electrones muy energéticos arrancados de

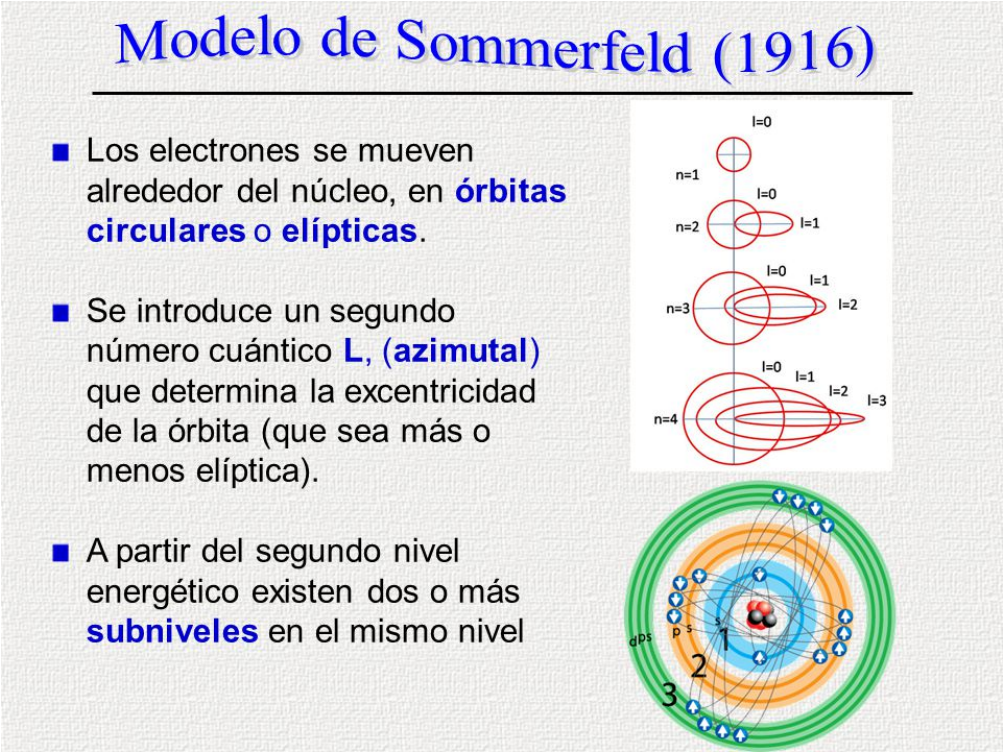


Figura 4.10: Además del número cuántico de energía, el modelo de Bohr-Sommerfeld introduce otros números cuánticos. Eso explica los subniveles o subcapas de algunos espectros, pero no totalmente.

los átomos por otro tipo de radiación (ionizante). También se la llama radiación secundaria o electrones secundarios. Los electrones menos energéticos, o terciarios, constituyen la llamada radiación epsilón (o rayos epsilón). $\Delta^- : \ {}^A_Z X + E \rightarrow {}^A_Z X^+ + e^-(\delta)$. Y, también, $\epsilon^- : \ {}^A_Z X + E \rightarrow {}^A_Z X^+ + e^-(\epsilon)$

4.9 Configuración electrónica

El modelo de Bohr ya postulaba la existencia de capas de energía, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, que también se representan por $K, L, M, N, \cdots$. La mecánica cuántica establece que los electrones en los átomos poseen subcapas asociadas a los orbitales donde se distribuyen los electrones. Los orbitales son la zona de máxima probabilidad de encontrar al electrón en el átomo, y se denominan generalmente $s, p, d, f, (g, h, i, \ldots)$. En un nivel de energía n caben $2n^2$ electrones, en un subnivel o subcapa (orbital), caben $2(2l + 1)$ electrones (para l=0,1,2, ...). Un orbital queda especificado por 3 números cuánticos (n, l, m). Un electrón se caracteriza por 4 números cuánticos (n, l, m, s). El número cuántico magnético toma valores enteros entre $-l$ y $+l$. La distribución de electrones se hace usando las reglas de Hund (preferencia por el máximo momento angular total del electrón en el átomo) y el principio de exclusión de Pauli (no pueden existir en un átomo -o sistema fermiónico- dos o más electrones con los mismos cuatro números cuánticos iguales), pero para propósitos prácticos usa el diagrama de Möller o principio de Aufbau:

Los orbitales mecanocuánticos se especifican con 3 números cuánticos: (n,l,m). Un electrón en un átomo se especifica con 4 números cuánticos, (n,l,m,s). n indica la energía del orbital, l su forma, m su orientación espacial. s indica el estado de espín del electrón. n se llama número cuántico principal, l número cuántico secundario, m número cuántico magnético y s número cuántico de espín. La existencia del espín era imprescindible para explicar los resultados del experimento Stern-Gerlach (1922), el experimento de Uhlemberg y Goudsmit (1925), y era predicha por la ecuación de Dirac. También se necesitaba el espín para explicar, por ejemplo, el efecto Zeeman anómalo. La estructura electrónica de los elementos químicos, explica la Tabla Periódica. Se conocen, circa 2020, 118 elementos químicos diferentes (En 2020, se conocen 339 nucleidos o núcleos naturales, de los cuales 87 son radioactivos y se encuentran en la Tierra, y 252 no se ha observado que se desintegren nunca, por lo que se consideran estables; en total, contando los sintéticos y encontrados fuera de la Tierra, hay más de 3300 nucleidos, mucho más pues que elementos diferentes en la Tabla Periódica Moderna).

EL MODELO ATÓMICO DE BOHR-SOMMERFELD

Sommerfeld introdujo dos modificaciones:

- Posibilidad de órbitas elípticas. Hace falta un 2º número cuántico, **secundario** o **azimutal, (l)**, que puede variar entre 0 y n-1.

- Posibilidad de diferentes orientaciones de la órbita en un campo magnético, introduciendo un tercer número cuántico, llamado **magnético** (m) y que varía entre $-l$ y $+l$ incluido el 0.

Figura 4.11: El modelo de Sommerfeld, en una descripción más detallada de los números cuánticos azimulta (l), y el número cuántico magnético m.

4.10 Enlace químico

Se llama enlace químico a la unión de dos o más átomos del mismo o distinto elemento, que forman un compuesto químico con fórmula química fija, y que posee ciertas propiedades características. Existen esencialmente 3 tipos de enlace químico: *enlace iónico*, *enlace covalente* y *enlace metálico*. Se especula con la existencia de un cuarto tipo de enlace llamado enlace vibracional.

Muchos sólidos forman lo que se denominan cristales. Un **cristal** es un compuesto que tiene una estructura ordenada de átomos o iones formando un patrón geométrico o secuencia que es repetitivo en el espacio. Un compuesto no cristalino se llama *amorfo* (antiguamente llamados vidrios). Existen sustancias que presentan no una, sino varias estructuras cristalinas de forma simultánea. Son los llamados *policristales*, cuyos granos o "cristalitos" forman las unidades básicas del policristal. También existen patrones ordenados pero no periódicos. Las estructuras que son ordenadas pero no periódicas se llaman cristales cuasiperiódicos o *cuasicristales*. Otro tipo de estructura ordenada son los *paracristales*: estructuras que a pequeñas o medias distancias interatómicas son cristalinos, pero a grandes distancias pierden la cristalinidad y son amorfos en al menos una dirección del espacio. En Geología, hoy día se distingue entre varias clases de cristalinidad, existiendo fases o estados denominados:

- *Holocristalino*. Estado hecho totalmente de cristales.
- *Hipocristalino o hemicristalino*. Estado que consiste en cristales incrustados en materia amorfa.
- *Hipohialino*. Materia o estado parcialmente amorfo, pero sin cristales.
- *Holohialino*. Materia o estado totalmente vidrioso. El material amorfo se forma generalmente por fusión y un enfriamiento rápido que produce la solidificación o condensación sin la creación de fases cristalinas u ordenadas.

Finalmente, a principios del siglo XXI, se especula, teoriza y se intentan producir los llamados *cristales de tiempo*. Los cristales de tiempo son, al menos en teoría, sistemas materiales que presentan una estructura repetitiva en el tiempo, no solamente en el espacio. Generalmente llamamos cristal a algo que se repite y tiene una estructura ordenada en el espacio, pero permanece inalterado cuando el tiempo pasa. Los cristales de tiempo cambian de forma periódica cuando el tiempo transcurre. Un cristal de tiempo, además:

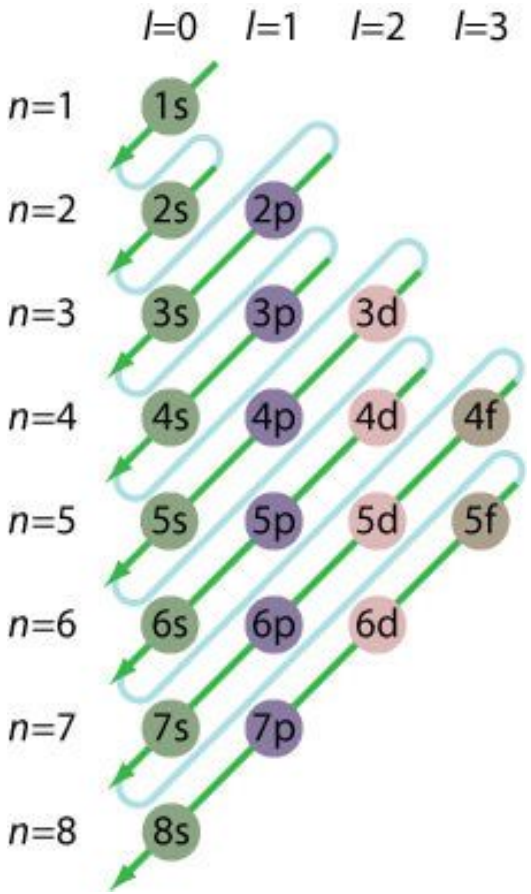


Figura 4.12: Principio de Aufbau, regla de Moller.

- No viola o incumple las leyes básicas de la Termodinámica.
- Puede cambiar de forma eterna periódicamente en el tiempo si el sistema es sostenido de alguna forma.
- No puede existir en equilibrio termodinámico, por lo que no tiene una temperatura fija, posee movimiento sin energía y no tiene una expresión de energía cinética convencional (la teoría cinética estándar de Boltzmann no aplica a los cristales de tiempo).
- Es resultado de las fluctuaciones cuánticas en no equilibrio como consecuencia de las interacciones entre varios cuerpos.
- Pueden entenderse como resultado de la ruptura de la simetría de traslación en el tiempo.

Algunos tipos concretos de cristales de tiempo se han fabricado ya en el laboratorio. Los llamados *cristales de tiempo de Floquet*, cristales de tiempo discretos, presentan también otras propiedades exóticas, como el criptoequilibrio (sus oscilaciones no generan entropía) o bien orden a grandes escalas(las oscilaciones de las fases cuánticas están sincronizadas a distancias grandes de espacio y tiempo).

4.10.1 Enlace iónico

El enlace iónico se produce entre elementos del grupo G1(alcalinos) ó G2(alcalino-térreos), y elementos del grupo G16 (anfígenos o calcógenos) y grupo G17(halógenos). En este tipo de enlace, un elemento cede electrones y el otro acepta electrones, por lo que se considera se produce entre iones y eso justifica su nombre, **enlace iónico**.

Ejemplos: NaCl, KI, Na_2S, Li_2Se, $BeCl_2$, MgS, $CaTe$,...

Las propiedades de los compuestos con enlace iónico son las siguientes:

- Son sólidos a temperatura ambiente, y tienen elevadas temperaturas de fusión y ebullición.

- Son duros pero frágiles.
- Son solubles en disolventes como el agua, y otros disolventes denominados disolventes polares que permiten desplazamiento de carga eléctrica.
- Son malos conductores de la electricidad y el calor en estado sólido, pero conducen bien la electricidad disueltos o fundidos (también el calor).
- Forman cristales con alto número de coordinación. El número de coordinación es el número de iones o átomos que tiene a su alrededor otro ión de diferente tipo.
- Tienden a formar iones, uno de los elementos o iones que forman el compuesto será catión y otro anión.

4.10.2 Enlace covalente

El enlace covalente se produce entre un no metal y un metal no demasiado iónicos, y se considera que se produce por compartición de electrones en la última capa, denominada capa de valencia de un átomo. Hay dos tipos fundamentales de compuestos covalentes, llamados enlace covalente molecular y enlace covalente cristalino.

Enlace covalente molecular

Son sustancias con las siguientes propiedades:

- No son sustancias cristalinas.
- Son sustancias generalmente gaseosas o líquidas, aunque hay algunas sólidas, a temperatura ambiente.
- Son blandas y tienen bajas temperaturas de fusión y ebullición.
- Son sustancias que son malas conductoras de la electricidad y el calor.
- Son sustancias generalmente insolubles en agua (aunque hay sustancias que pueden disolverse en agua).
- Pueden tener propiedades muy diferentes a otras sustancias covalentes del mismo tipo y entre sí.
- En general, no tienden a formar iones.

Ejemplos: $Cl_2, O_2, O_3, Br_2, I_2, O_7Cl_2, SO_3, CO_2, CO, ...$

Enlace covalente cristalino

Son sustancias con las siguientes propiedades:

- Son sustancias cristalinas.
- Son sustancias generalmente duras o muy duras a temperatura ambiente.
- Tienen altas o muy altas temperaturas de fusión y ebullición.
- Son sustancias que son malas conductoras de la electricidad y el calor.
- Son sustancias muy insolubles en agua siempre.
- Pueden tener números de coordinación altos o bajos.
- En general no tienden a formar iones.

Ejemplos: $C(diamante), SiO_2(cuarzo), UO_2(U_3O_8), ...$

4.10.3 Enlace metálico

Es el enlace que se da entre especies o sustancias puramente metálicas y en las aleaciones. Tiene propiedades singulares debido a que su existencia se debe al solapamiento de un gran número de orbitales atómicos (los orbitales son zonas de máxima probabilidad para encontrar al electrón en un átomo o molécula). Sus propiedades son:

- Tienen altas temperaturas de ebullición y fusión, salvo algunos como el mercurio (Hg), el francio (Fr), el cesio (Cs) y el galio (Ga), o también el rubidio (Rb), el sodio (Na) o el potasio (K).
- Son dúctiles (pueden hacerse hilos con ellos) y maleables (pueden hacerse láminas con ellos).
- Son duros y deformables (a alta presión).
- Son buenos conductores de la electricidad y el calor.
- Presentan efecto termoeléctrico, termoiónico y fotoeléctrico.
- Algunos presentan propiedades denominadas piroelectricidad, piezoelectricidad y ferroelectricidad (pero no todos las poseen o exhiben, y no todos en la misma proporción).
- Forman aleaciones.
- No son solubles en agua.
- Tienden a formar cationes, pero pueden formar aniones.

Ejemplos: Li, Na, K, Rb, Be, Mg, Fe, Hg, Ga, In, Cs, Fr, ...

Imágenes de cristales y cuasicristales en las siguientes páginas, así como conceptos relacionados.

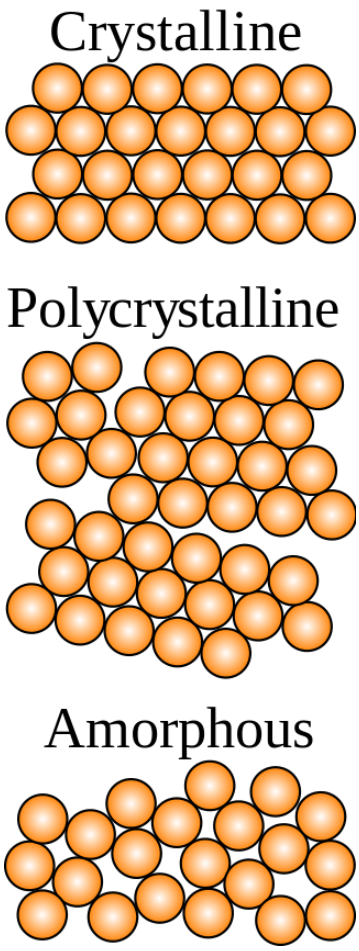


Figura 4.13: Materiales amorfos, policristalinos y cristalinos.

4.11 Modelo Estándar: partículas subatómicas

La materia está hecha de leptones, que no sufren la interacción nuclear fuerte, y los quarks, que sienten la fuerza fuerte. La fuerza fuerte tiene una carga llamada color (nada que ver con el color físicos). La fuerza nuclear débil cambia el sabor o tipo de las partículas. Las partículas subatómicas fundamentales obtienen su masa a partir del campo de Higgs y las interacciones de Yukawa. Las partículas compuestas como el protón obtienen su masa mediante las interacciones de sus partículas internas. La masa del protón se debe a un fenómeno de la teoría de Yang-Mills complicado llamado transmutación dimensional y el confinamiento de los quarks, que los hace entidades muy relativistas. La masa del protón o de los nucleones en general se debe poco a la interacción con el bosón de Higgs h_0.

La naturaleza esencialmente de las partículas que nos rodean está formada por electrones, los neutrinos del electrón y quarks de tipo up y down. La Naturaleza a replicado esta primera familia, y a energías altas suficientes, hay muones, neutrinos del muón y quarks de tipo charm y strange, que es la segunda familia, y tauones, neutrinos del tauón y quarks de tipo top y bottom. Para las interacciones, las partículas se llaman bosones, y además del fotón, tenemos los bosones W^+, W^-, Z y 8 tipos de gluones, junto al bosón de Higgs (o dador de masa h_0). Hipotéticamente hablando, la gravedad tiene una partícula llamada gravitón de espín dos sin masa que sería su mensajera o portadora. Pero los gravitones no forman parte del modelo estándar. No se saben los detalles de cómo crear una teoría cuántica de todas las interacciones más allá de algunos modelos denominados de supercuerdas (o supermembranas), la teoría de gravitación cuántiza de lazos (Loop Quantum Gravity) y otras variantes exóticas. La teoría que describe la gravedad actualmente se denomina Relatividad General (no debe confundirse con la Relatividad Especial), y describe el Universo a gran escala como un espacio curvado bajo la energía-materia y sus campos cuánticos. Esta teoría de Einstein no es cuántica como sí lo es la teoría de supercuerdas (o la teoría M) y la LQG.

Las partículas del átomo clásico tienen unas propiedades como fermiones (partículas de espín semientero):

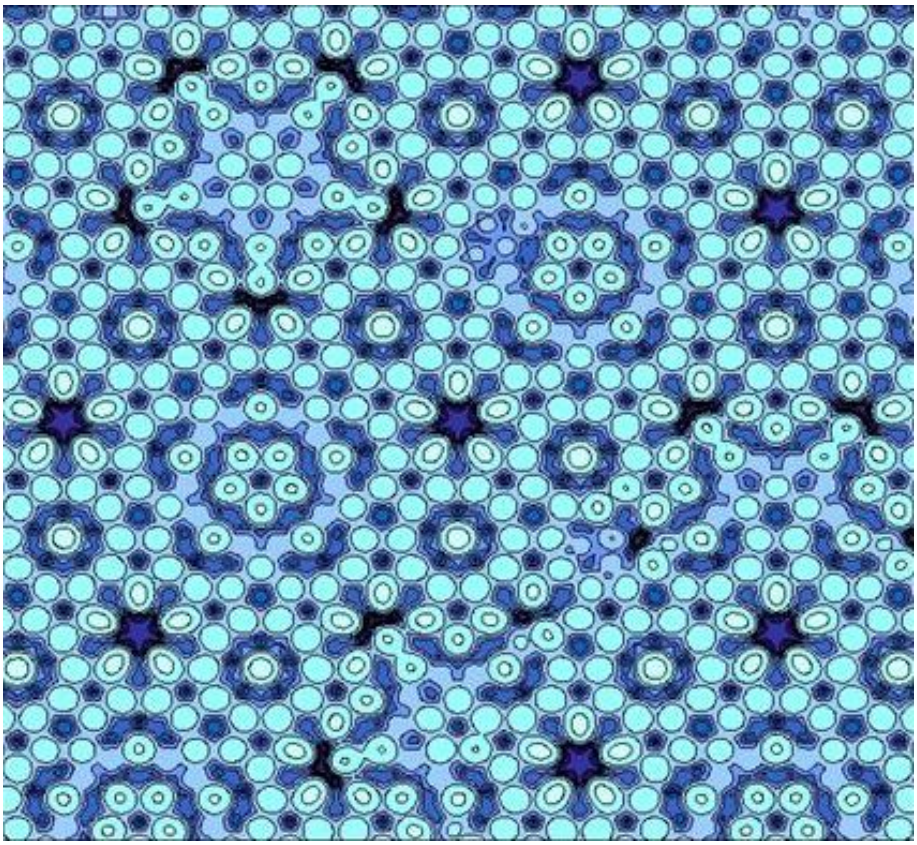


Figura 4.14: Cuasicristal, ejemplo.

- Electrón: Masa=$M = 9,11 \cdot 10^{-31} kg$,
  carga eléctrica=$Q = -1,6 \cdot 10^{-19} C$, espín=$S = \pm 1/2$.

- Protón: Masa=$M = 1,673 \cdot 10^{-27} kg$,
  carga eléctrica=$Q = +1,6 \cdot 10^{-19} C$, espín=$S = \pm 1/2$.

- Neutrón: $M = 1,675 \cdot 10^{-27} kg$, $Q = +0C$, espín=$S = \pm 1/2$.

La masa del electrón es unas 2000 veces, 1836 veces ($6\pi^5$), la masa del protón. El muón es unas 200 (207) veces la masa del electrón y el tauón más de 3000 (unas 3477) veces la masa del electrón. No se entiende por qué existen dichas partículas. Otras partículas subatómicas, además de por la carga eléctrica, la masa y el espín, se tipifican con otros números cuánticos como el número bariónico, el número leptónico, la extrañeza, la paridad o la conjugación de carga.

El estado del arte en la teoría cuántica propone que las entidades fundamentales no son las partículas o las ondas, sino objetos de tipo fluídico que impregnan el espacio-tiempo llamados campos cuánticos. Existe un campo fundamental para cada tipo de partícula conocidas, aunque se sospecha que puedan en realidad ser aspectos de un único campo o fuerza. Las excitaciones de los campos son las partículas subatómicas que observamos hoy día, y que se propagan mediante ondas en el vacío en el espacio-tiempo o en medio lleno de estos campos cuánticos. Se sospecha también que el espacio-tiempo debe tener una subestructura cuántica en sí misma, pero no ha podido determinarse todavía esa discretitud más allá del análisis de algunas teorías y extrapolaciones dimensionales. En concreto, diferentes tipos de argumentos sugieren la existencia de una distancia fundamental que trataría el espacio-tiempo a nivel cuántico, llamada longitud de Planck. Matemáticamente: $L_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \sim 10^{-35} m$. A esas distancias, no podría estudiarse ni la gravedad ni los campos cuánticos sin tener en cuenta las fluctuaciones cuánticas del propio espacio-tiempo o lo que quiera que lo sustituya a esa escala. No se sabe si cabe concebir una teoría por debajo de esa distancia. El vacío de la teoría cuántica de campos es altamente no trivial y produce efectos sorprendentes.

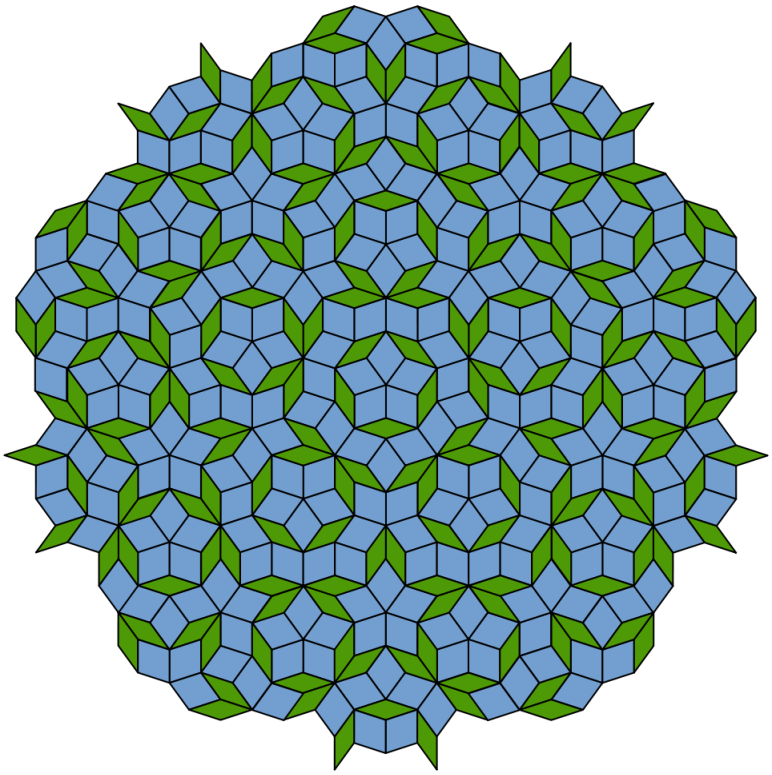


Figura 4.15: Teselación de Penrose, ejemplo de cuasicristal.

4.12 FORMULARIO Y GLOSARIO

$$A = Z + N$$

Número de electrones por capa: $2n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ entero positivo.

Número de electrones por subcapa: $2(2l + 1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Número cuántico magnético: $m_l = -l, -l + 1, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l$.

Número cuántico de espín (para electrones): $s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Las partículas subatómicas se caracterizan por su masa M, la carga eléctrica Q, el momento angular de espín S, el momento angular total $J = L + S$ y, excepcionalmente, otros números cuánticos.

De hecho, los números cuánticos correctos en un átomos se pueden tomar como (n, l, m_l, s), siendo s el número cuántico de espín (total) determina la energía el momento angular L orbital via $L^2 = \hbar^2 l(l + 1)$, la proyección del momento angular sobre una dirección del espacio, por ejemplo el eje Z, via $L_z = m_l\hbar$, y la proyección del momento angular de espín en dicha dirección, via $S_z = m_s\hbar$. También se introduce a veces la paridad de un estado, como el número $P = (-1)^l$, y también el momento angular total $J = L + S$, que determina valores $j = |l \pm s|$, un momento angular $J^2 = \hbar^2 j(j + 1)$, y una proyección $J_z = m_j\hbar$, siendo $m_j \in [-j, +j]$, con $m_j = m_l + m_s$ si $|m_l + m_s| \leq j$. Cuando L y S no conmutan con el hamiltoniano en un átomo, se debe usar como buenos números cuánticos otros. Una posible eleción es J, m_j, P, lo que da lugar a una especificación de estados via J^P, momento angular total, su proyección en un eje y la paridad. Esto ocurre normalmente cuando el acoplamiento denominado espín-órbita no puede ser ignorado o despreciado, al evolucionar en el tiempo L, S y H. Sin embargo la energía o masa invariante, la carga eléctrica, la paridad y el momento angular total (y su proyección) son un conjunto de números cuánticos para especificar un estado cuántico de un átomo, núcleo o partícula elemental en tal caso.

4.13 Epílogo

4.13.1 Otras partículas hipotéticas

Listado de partículas hipotéticas de algunas teorías no estándares.

Preones, subquarks, rishones, subsuquarks, techniquarks, leptoquarks (X,Y), W primas (W'), Z primas (Z'), axiones, monopolos magnéticos, diones, p-branas, Dp-branas, instantones, esfalerones, sleptones y squarks (selectron, smuon, stau, squarks, sup, sdown, scharm, sstrange, stop, sbottom, sneutrinos), gauginos (Wino, Zino, gluino, fotino, neutralino, gravitino), taquiones, elvisebriones, superbradiones, hiperfotones, hiperbosones, campos de alto espín, carguino, branón, axino, dilatón, dilatino, gravifotón, graviescalar, gravitón dual, inflatón, majoron, saxión, partículas espejo, resonancias Kaluza-Klein, multiquarks e híbridos, glueballs, acelerones, plektones, WIMPs, GIMPs, SIMPs, pomeron, skyrmion, geones, genones, cronones, bosones de Goldstone, Goldstinos, espuriones, microagujeros negros, agujeros negros extremos microscópicos y ultramicroscópicos, planckiones, campos fantasma (ghost fields), holeum, kugelblitz, cuantos de espacio-tiempo, supercuerdas, super p-branas, cuerdas cósmicas, agujeros de gusano, ...

4.13.2 Otros números cuánticos exóticos

Número bariónico, B. Está asociado a los bariones, o partículas hechas de 3 quarks. Son hadrones (partículas que interactúan fuerte). Además de los bariones, existen los menos (partículas hechas de 2 quarks: un quark y un antiquark). El número bariónico se define como:

$$B = \frac{n_q - n_{\overline{q}}}{3}$$

El número bariónico es 1 para los bariones usuales, -1 para los antibariones usuales, una fracción de 1/3 positiva o negativa para resonancias o bariones exóticos, y 0 para el resto de partículas.

Isospín, I_z. Mide el cambio de sabor o de sabor bariónico, en procesos de interacción nuclear fuerte o débil. Toma valores $\pm 1/2$, o bien:

$$I_z = \frac{n_u - n_d}{2}$$

como definición más general de isoespín (isospín).

Número leptónico, L. Es igual a +1 para leptones, -1 para antileptones y cero para partículas no leptónicas (bosones o hadrones).

$$L = n_l - n_{\overline{l}}$$

4.13.3 El experimento de la doble rendija

El experimento esencial de la Física Cuántica es el experimento denominado de la doble rendija. Átomos, moléculas o partículas pasan a través de un dispositivo con dos cajas y dos aperturas. En primer caso, con orificios cerrados, metemos detector para ver dónde está el átomo, que está en una caja o en otra. En un segundo experimento, abrimos ambas cajas por un solo agujero y vemos en una pantalla los impactos. Abriendo los dos orificios, se forma un patrón interferencial, como si el átomo, molécula o partícula estuviera pasando por ambos sitios a la vez. Si ponemos un detector en uno de los orificios, volvermos al resultado del primer experimento. Lo chocante es que mientras NO observamos, el átomo, molécula o partícula está realmente en las dos cajas, no se ha dividido en dos, o bien estaba ya presente en las dos cajas, o bien está en dos sitios a la vez. Estos hechos son resultado del carácter dual de la materia-energía, y también consecuencia del postulado de la medida: el observador afecta al resultado de las medidas al influir sobre los estados, de naturaleza probabilística no determinista.

4.13.4 Usos de la radiaoctividad

La radioactividad tiene diversos usos: Medicina (rayos X, la radioterapia, la quimioterapia, PET, TAC, RMN, terapia de protones,...), esterilización de materiales, producción energía (energía nuclear de fusión y fisión), activación/inhibición de procesos biológicos, estudios de la tabla periódica (elementos superpesados, con $Z > 103$),... En la Naturaleza y el cosmos, la radiación es vital para explicar el Universo y el Universo observable.

4.13.5 Sobre los modelos atómicos

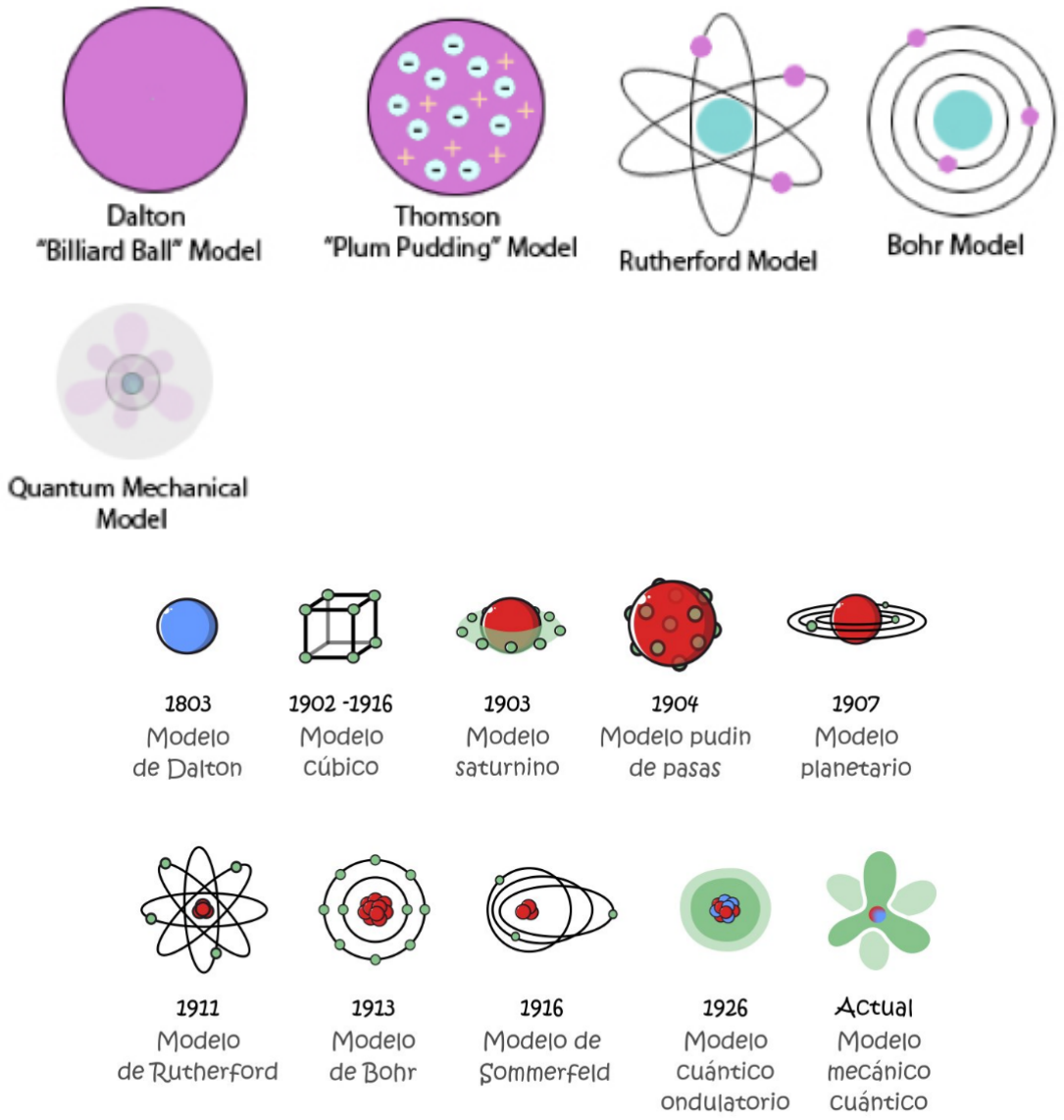


Figura 4.16: Comparación entre modelos atómicos. Puedes observar la evolución desde el modelo de la bola de billar de Dalton, al pudin con pasas de Thomson, el modelo nuclear de Rutherford heredero del modelo de Nagaoka, el modelo de capas de Bohr y el modelo borroso o probabilístico actual mecanocuántico. Entre el modelo de Bohr y el mecanocuántico hay un modelo intermedio, con órbitas elipticas, debidas a Bohr-Sommerfeld.

4.14 Reacciones químicas

4.14.1 Introducción a las reacciones químicas

Como vimos en temas anteriores, se llama cambio físico a los cambios que se producen en las sutancias de forma que se altera su aspecto por no su composición o naturaleza. Ejemplo:

$$H_2O(l) \rightarrow H_2O(g)$$

Reacción química

Se llama cambio químico o transformación química a los cambios que se producenen las sustancias que cambian su naturaleza. Equivalentemente, una reacción química es toda transformación de unas sustancias llamadas **reactivos**, en otras *diferentes* llamadas **productos**. Ejemplos:

$$H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$$

Esquemáticamente, toda reacción es algo del tipo:

$$\text{REACTIVOS} \longrightarrow \text{PRODUCTOS}$$

Las etapas de cualquier reacción química son generalmente:

- Choques y colisiones entre átomos, moléculas e iones.
- Ruptura de los enlaces de los reactivos.
- Formación de los enlaces de los productos, en general a través de una sustancia intermedia denominada complejo activado o estado de transición.
- Finalización de la reacción cuando se agota el reactivo limitante o los choques dejan de ser efectivo o suficientemente energéticos para que la reacción tenga lugar.

4.14.2 Leyes de las reacciones químicas

Durante los siglos XVIII y XIX, se descubrieron las llamadas leyes ponderales (de masa y volumen) de las reacciones químicas. Una ley general para las transformaciones químicas fue concebida y descubierta o enunciada por Lavoisier.

Ley de conservación de la masa

En toda reacción química, a temperaturas y energías convencionales, se conserva la masa. Esto es, la suma de la masa de todos los reactivos es exactamente igual a la suma de la masa de todos los productos, en una reacción química que sea totalmente efectiva y de sustancias puras. Matemáticamente, para la reacción general

$$a_1X_2 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \longrightarrow b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m$$

se cumple, según Lavoiser, que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{j=1}^{m} M_j} \leftrightarrow \boxed{\sum \text{m(Reactivos)} = \sum \text{M(Productos)}} \tag{4.1}$$

La teoría atómica, o cinético molecular, explica fácilmente la conservación de la masa. Ejemplo:
Sea la reacción química del cobre sólido con el oxígeno

$$Cu(s) + O_2(g) \rightarrow CuO_2(s)$$

Si tengo 10 gramos de cobre y 12,52 gramos de CuO_2, peróxido de cobre(II), ¿qué masa de oxígeno ha reaccionado? La solución es simple: 2.52 gramos.

4.14.3 Estequiometría y ecuaciones químicas

La Estequiometría es la parte de la Química que se ocupa del análisis de las reacciones químicas y los cálculos químicos. En particular, se ocupa de balancear las reacciones químicas y hacer cálculos con reactivos y productos. Se dice que una reacción o ecuación química está *balanceada* o *ajustada*, cuando el número de átomos o especies de cada tipo, y las cargas eléctricas si no fueran reacciones neutras (sin carga), son iguales en reactivos y productos. El proceso mediante el cual se logra que una reacción química esté ajustada, se llama ajuste o balance de una reacción química (ecuación química). Los números que preceden a cada compuesto, partícula, o ión en el proceso de ajuste se denominan **coeficientes estequiométricos**.

Una reacción química puede verse como cierto tipo de igualdad, o una representación simbólica de un proceso químico real, mediante los símbolos de los elementos, compuestos, y los números que indican cuántos átomos de cada elemento en el compuesto hay, y los coeficientes estequiométricos indicando el número de moléculas o unidades de cada entidad química fundamental que intervienen en la reacción química. Además, en una reacción química, se suele especificar también otras informaciones:

- El estado físico de cada sustancia, si ha lugar. Por ejemplo $Cu(s)$ indica cobre sólido, $H_2O(l)$ indica agua líquida, $O_2(g)$ oxígeno gaseoso y $HCl(aq.)$ ó $HCl(ac.)$ indican disolución acuosa.
- La energía necesaria para que se produzca la reacción química. Si la energía es absorbida $\Delta E > 0$ y se dice que la reaccióne es **endotérmica**. Si la energía es cedida o liberada, $\Delta E < 0$ y la reacción se dice que es **exotérmica**. La parte de la Química de reacciones que estudia los procesos de energía en las reacciones químicas se llama Termoquímica.

De nuevo, el procedimiento para igualar el número de átomos de cada tipo, en reactivos y productos, se llama ajuste. El ajuste se puede realizar por tanteo, o usando diversos procedimientos algebraicos o numéricos. De estos últimos, destaca el método de los coeficientes indeterminados, que no explicaré aquí. En general, en el proceso de ajuste por tanteo, se realizan los siguientes pasos:

1. Escribir la reacción química.
2. Analizar los reactivos y productos, contando el número de átomos de cada elemento que interviene en la reacción.
3. Añadir los coeficientes estequiométricos oportunos, por tanteo, delante de las fórmulas o especies químicas correspondientes para igualar el número de átomos. Suele preferirse multiplicar el resultado final por números de forma que los coeficientes estequiométricos sean números enteros, aunque en ocasiones se puede permiter el dejar coeficientes estequiométricos fraccionarios, no es lo más común esto último.
4. En casos difíciles, usar métodos numéricos o el procedimiento de los coeficientes indeterminados. Si una reacción no puede ajustarse, es que no es posible en la naturaleza.
5. Comprobación del resultado.

✍ 0. Ajustar las siguientes reacciones químcias:

1. $Al(s) + \quad HCl(l) \rightarrow \quad AlCl_3(s) + \quad H_2(g).$
2. $NH_3(g) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad NO(g) + \quad H_2O(g).$

Observación: para que una reacción química tenga lugar, ésta absorbe o libera energía, según el caso. En las reacciones exotérmicas:

$$R \rightarrow P + Q, \quad Q = \Delta E < 0$$

y para las reacciones endotérmicas

$$R + Q \rightarrow P, \quad Q = \Delta E > 0.$$

Una reacción química ajustada o balanceada, que incluya además los estados físicos o de cada reactivo y producto, aporta una información crucial para el científico (químico, biólogo, físico, médico,...). Esta información puede ser:

1. Las fórmulas de los reactivos y productos, por lo que se identifica la naturaleza de la reacción química. Eso incluye tipo de compuesto o elemento o partícula(ion), y su carga eléctrica (en general se trabaja con reacciones químicas neutras, pero son importantes también las reacciones de transferencia de carga eléctrica, o procesos de oxidación-reducción).

2. Número de átomos de cada elemento y especie química (partícula, ion) que interviene, así como su carga eléctrica.

3. Número de moles de cada sustancia que intervienen en reactivos y productos.

4. Volumen de reactivo y producto, en el caso de reacciones en las que intervienen gases. En reacciones gaseosas, se cumple la denominada *Ley de Avogadro*: "El mismo número de moles de gases diferentes, en las mismas condiciones de presión y temperatura, contienen el mismo número de partículas y tienen el mismo volumen".

5. Masas de reactivos y productos que intervienen, en virtud de la ley de Lavoisier.

✍ 1. Ajusta las siguientes reacciones químicas:

1. $C_3H_8(g) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad CO_2(g) + \quad H_2O(l).$
2. $Na(s) + \quad H_2O(l) \rightarrow \quad NaOH(aq.) + \quad H_2(g).$
3. $Fe(s) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad Fe_2O_3(s).$
4. $N_2(g) + \quad H_2(g) \rightarrow \quad NH_3(g).$
5. $C_4H_{10}(g) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad CO_2(g) + \quad H_2O(g).$
6. $NO(g) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad N_2O_5(g).$
7. $Fe_2O_3(s) + \quad C(s) \rightarrow \quad Fe(s) + \quad CO_2(g).$

✍ 2. Para las reacciones anteriores:
a) Calcular las masas molares de todos los compuestos presentes, y comprobar la ley de Lavoisier. Consulta la Tabla Periódica de tu libro o una en internet como www.ptable.com para hallar los valores de las masas molares atómicas y luego las masas moleculares molares.
b) ¿Cuántos moles de átomos de cada elemento intervienen en las reacciones anteriores? ¿Cuántos átomos? ¿Cuántos moles de moléculas de cada sustancia intervienen? ¿Cuántas moléculas son?
Ayuda: para relacionar los moles con los gramos de cada sustancia hay unas expresiones que usan la masa molar, y para relacionar los moles con el número de moléculas, hay que saber el número o constante de Avogadro (ver secciones siguientes)

4.14.4 Tipos de reacciones principales

Hay una cantidad enorme de reacciones químicas posibles. Sin embargo, hay unas categorías o tipos de reacciones químicas particulares que son importantes en las aplicaciones o muy frecuentes en la Naturaleza, al menos a escalas de nuestro planeta, la Tierra. Son las siguientes:

1. Reacción de **síntesis** o de **formación**. Son aquellas reacciones en las que hay solamente una sustancia en los productos. Ejemplos:

$$H_2(g) + O_2(l) \rightarrow H_2O_2(l)$$

$$Ca(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CaO(s)$$

2. Reacción de **descomposición** o de **desintegración** o **disociación**. Son aquellas reacciones en las que solamente hay un reactivo, que da lugar a uno o varios productos. Ejemplos:

$$N_2O_4(g) \rightarrow 2NO_2(g)$$

$$CaCO_3(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2(g)$$

3. Reacción de **desplazamiento**. Aquella en la que se produce un cambio, y solo uno, de las partes o iones de reactivos entre sí. Ejemplo:

$$CaO(s) + \quad H_2(g) \rightarrow CaH_2(s) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

$$4FeS(s) + \quad 2O_2(g) \rightarrow 4FeO(s) + \quad S_4(s)$$

4. Reacción de **doble desplazamiento** o *metátesis*. Aquella en la que hay dos cambios en las partes de los iones de reactivos entre sí. Ejemplo:

$$Ca(OH)_2(s) + \quad H_2SO_4(l) \rightarrow \quad CaSO_4(s) + \quad 2H_2O(l)$$

$$H_2S(aq.) + \quad CoO(s) \rightarrow \quad CoH_2(s) + \quad SO(s)$$

Un caso particular importante de las reacciones de doble desplazamiento son las que se producen por combinación de un ácido (sea hidrácido u oxoácido) con un hidróxido (llamado también base). Estas reacciones son llamadas reacciones *ácido-base*, y son importantes en Química, Física y la vida cotidiana (también en Bioquímica).

5. Reacciones de **combustión** (u oxidación). Son aquellas reacciones que tienen lugar con la reacción de una sustancia con el oxígeno. Algo + $O_2(g) \rightarrow$ Otra cosa. Ejemplos:

$$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$$

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s)$$

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

La reacción de combustión de un compuesto de carbono e hidrógeno (hidrocarburo), un hidroxicarburo (carbono, hidrógeno y oxígeno), produce generalmente dióxido de carbono y agua en general.

6. Reacciones de **polimerización**. Son aquellas reacciones que se forman por la adición o repetición de una unidad fundamental o *monómero*, en una unidad compuesta de varios llamada **polímero**:

$$nX \rightarrow X_n$$

Ejemplos: $2NO_2 \rightarrow (NO_2)_2 \rightarrow N_2O_4, \qquad nCH_2 \rightarrow (CH_2)_n$.

4.15 Moles y masa

Moles y masa molar

El número de moles (n) de una sustancia o especie química se calcular dividiendo la masa en gramos $m(s)$ entre la masa molar de dicha sustancia. Matemáticamente:

$$\boxed{n = \frac{m(g)}{MM}}$$

Uso: cuando me dan la masa en gramos y puedo calcular o me dan la masa molar de la sustancia.
Uso(II): cuando me dan los moles y la masa molar, puedo calcular los gramos, despejando

$$\boxed{m(g) = n \cdot MM}$$

4.16 Número de partículas y úme

Un mol, en el S.I., está relacionado con la constante de Avogadro

$$N_A \approx 6{,}022 \cdot 10^{23} mol^{-1}.$$

Entonces, el número de partículas en una determinada cantidad de moles se puede calcular por proporcionalidad simple y directa:

Ecuaciones para el número de partículas y moles

El número N de partículas de una sustancia, que hay en una cantidad de moles dada n, se calcula mediante la expresión

$$N = n \cdot N_A$$

Uso: Calcular el número de partículas (átomos, moléculas, iones,...) en una determinada cantidad de moles.
Uso(II): Calcular el número de moles si sé una determinada cantidad de partículas, despejando

$$n = \frac{N}{N_A}$$

4.17 Masa y partículas

Combinando los casos anteriores, podemos calcular la masa de un determinado número de partículas porque igualando

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m(g)}{MM}$$

Por tanto, tendremos que

Masa y número de partículas

Para calcular la masa de un determinado número de partículas N, sabiendo la masa molar y el valor de la constante o número de Avogagro N_A, se usa la expresión:

$$m(g) = \frac{N}{N_A} \cdot MM$$

4.18 Leyes de los gases ideales

Para un gas igual o perfecto, las leyes de los gases ideales de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac, Charles, Avogadro y combinada (general) de Clapeyron pueden sintentizarse en una simple ecuación de estado denominada ecuación del gas ideal, que tiene la forma siguiente.

Ecuación de estado del gas ideal

Para todo gas ideal o perfecto, se cumple la ecuación

$$\boxed{PV = nRT}$$

donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles,T es la temperatura absoluta en kelvin y R es la constante de los gases ideales.
Uso: Hallar el volumen conocida la presión P, la temperatura T, y los moloes n, o bien calcular cualquiera de las 4 variables (P, V, n, T), conocidas 3 de ellas.
Generalmente, P se da en atmósferas (atm), V en litros, y T en kelvin, por lo que la constante de los gases en estas unidades es

$$R = 0{,}082 atm \cdot L \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

En unidades del S.I.:

$$R = 8{,}31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

Comentario: la constante R está relacionada con el número de Avogadro y la constante de Boltzmann de la teoría cinética y termodinámica estadística mediante la relación

$$R = k_B \cdot N_A$$

Recuerda: $1atm = 760mmHg = 1013mb = 101300Pa = 1013hPa$.

Recuerda(II): $T(K) = T(°C) + 273$.

Recuerda(III): $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$.

Recuerda(IV): $1u = 1g/mol$ es la antigua unidad de masa atómica, también llamada dalton, con símbolo, Da. Usando el número de Avogadro, se puede probar que

$$1u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-24} g = \frac{1g}{mol} \frac{1mol}{6,022 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} kg = \frac{1}{12} m(^{12}C) = 1\ Da$$

Mnemotecnia: **P**a**V**o=**R**a**T**ón. O también, frases como
Pues Vale, no Recuerdo Todo
Poderes Valiosos (Venusianos) no Requieren Telequinesis (Teletransportación)
o cualquier otra que produzca vuestra imaginación.

Mnemotecnia(II): un mol de gas ideal o perfecto en condiciones normales (c.n.), está a presión $P = 1atm.$ y temperatura $T = 0°C = 273\ K$. Usando la ecuación de estado del gas ideal $PV = nRT$ se deduce que un mol de cualquier gas ideal en c.n. ocupa $22{,}396L \approx 22{,}4L$. Similarmente, un mol de gas ideal o perfecto en condiciones estándar (c.e.), está a presión $P = 1atm.$ y temperatura $T = 25°C = 298\ K$. Un mol de cualquier gas ideal en c.e. ocupa aproximadamente $24{,}4L$ de volumen. En condiciones que no sean normales o estándar, se usa la ecuación del gas ideal, aunque también puede usarse en cualesquiera circunstancia, siempre que sea un gas ideal. Existen gases que no cumplen la ecuación de los gases ideales o perfecto. Por ejemplo, los gases reales siguen la ecuación de Van der Waals

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

y algunos fluidos exóticos pueden satisfacer la ecuación del gas de Chaplygin

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha}$$

4.19 Disoluciones

Las disoluciones son mezclas homogéneas con un soluto y disolvente. La concentración es la medida de cuánto soluto hay en la disolución. Hay varias formas de medir la concentración

Gramos por litro

Si simplemente dividimos la masa en gramos de soluto M_s entre el volumen en litros de disolución V, tenemos la concentración de una disolución en g/L(ó g/mL u otras unidades)

$$C(g/L) = \frac{\text{Masa en gramos de soluto}}{\text{Volumen en litros de disolución}} = \frac{M_s(g)}{V(L)}$$

Porcentaje en masa y volumen

Si conocemos la masa de soluto y disolvente M_s, M_d, o el volumen de soluto y disolvente V_s, V_d, conocemos la masa total y el volumen total de disolución $m = M_s + M_d$, y $V = V_s + V_d$. Entonces definimos la concentración en porcentaje de masa y volumen como sigue:

$$C(\,\%, m) = \frac{M_s}{m} \cdot 100 = \frac{\text{Masa de soluto}}{\text{Masa de disolución}} \cdot 100$$

y donde la masa de soluto y disolvente está en las mismas unidades, generalmente en gramos en Química.

$$C(\,\%, V) = \frac{V_s}{V} \cdot 100 = \frac{\text{Volumen de soluto}}{\text{Volumen de disolución}} \cdot 100$$

Molaridad y molalidad

En Química, es frecuente trabajar con moles, por lo que hay varias formas de dar la concentración con moles. La más frecuente es la molaridad M que mide los moles por litro (partido por litro, L) de disolución $M = mol/L$:

$$\boxed{M = \frac{\text{Moles de soluto}}{\text{Volumen de disolución en litros}} = \frac{n_s}{V_d(L)}}$$

La otra medida de concentración molar es la llamada molalidad m (no confundir con masa), que mide los moles por kilogramo de disolvente $m = mol/kg$:

$$\boxed{m = \frac{\text{Moles de soluto}}{\text{Masa en kg de disolvente}} = \frac{n_s}{M_d(kg)}}$$

Finalmente, hay otra medida de concentración de disoluciones, llamada fracción molar

Fracción molar

La fracción molar X_i (sin unidades) de una especie química o compuesto/sustancia i es igual al número de moles de la sustancia i (n_i) entre el número de moles totales n_t:

$$\boxed{X_i = \frac{n_i}{n_t}}$$

Si solamente hay un soluto y un disolvente, las fracciones molares de soluto X_s y disolvente X_d satisfacen las ecuaciones:

$$\boxed{X_s = \frac{n_s}{n_t}} \quad \boxed{X_d = \frac{n_d}{n_t}} \quad n_t = n_s + n_d \quad \boxed{X_s + X_d = 1}$$

¿Cuándo se usan unas formas de concentración y cuándo otras? Depende del contexto y la situación. En industria alimentaria, y otras áreas, se prefiere los tantos por ciento en masa y volumen o el g/L (ó g/mL). En Química, es más habitual usar la molaridad y la fracción molar, en menor medida la molalidad.

Recuerda: no confundir concentración con densidad. La densidad mide la masa total (no solamente la de soluto) en un volumen

$$\boxed{d = \frac{m}{V}}$$

La densidad se mide en $kg \cdot m^{-3}$ o en g/cm^3 ($g/c.c.$) habitualmente.

Ejemplo 1. Cálculos químicos. Calculando masas molares de moléculas. Para hallar la masa molar MM en $g/mol = g \cdot mol^{-1}$ de cualquier sustancia, hay que sumar la masa atómica de todos los átomos presentes en la sustancia. Generalmente, $1g/mol$ es equivalente a la antigua unidad llamada u, unidad de masa atómica. Hallar la masa molar del H_2, H_2O, CO_2, S_4, SO_2, SO_3, $NaOH$, $Ca(OH)_2$, $Ca_3(PO_4)_2$, si las masas atómicas de los átomos necesarios son, en g/mol, $H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $C = 12$, $Na = 23$, $Ca = 40$, $P = 31$. Solución:
H_2: $2M(H) = 2g/mol$.
$H_2O = 2MM(H) + 1MM(O) = 18g/mol$.
$CO_2 = MM(C) + 2MM(O) = 12 + 32 = 44g/mol$.
$S_4 = 4MM(S) = 128g/mol$.
$SO_2 = 2MM(O) + 1MM(S) = 32 + 64 = 96g/mol$.
$SO_3 = 32 + 3(16) = 32 + 48 = 80g/mol$. $NaOH = 23 + 16 + 1 = 40g/mol$.
$Ca(OH)_2 = 40 + 2(MM(O) + MM(H)) = 40 + 2(17) = 74g/mol$.
$MM(Ca_3(PO_4)_2) = 3(40) + 2(31 + 64) = 120 + 2(95) = 120 + 190 = 310g/mol$.

Ejemplo 2. Sea la reacción ajustada:

$$2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$$

a) Calcula la masa molar de los reactivos y productos:
Solución: $CO = 28g/mol$, $O_2 = 32g/mol$, $CO_2 = 44g/mol$.
b) Comprueba la ley de Lavoisier para la reacción ajustada.
c) Si la reacción tiene lugar en c.n., ¿qué cantidad de oxígeno en moles, gramos, y litros se necesitan para reaccionar completamente con 56 gramos de CO?¿Cuántos moles, gramos y litros de dióxido se producen?
d) ¿Cuántas moléculas y átomos de cada tipo son las cantidades halladas en c) en c.n.?¿Cambiarían en c.n.?
Solución:

$$56g\frac{1mol\ CO}{28g} = 2mol\ \ CO$$

$$2mol\ CO\frac{1mol\ \ O_2}{2molCO} = 1mol\ O_2$$

Como estamos en c.n., 1 mol de O_2 son 22.4L, y 2 mol de CO son 44.8L. Se producirán 2 moles de dióxido, 44.8L también. En condiciones estándar, no cambian los moles ni la masa, pero sí el volumen, ...Se obtendrían 24.4 L de O_2, y se tienen el doble de litros de CO, CO_2, es decir, 48.8L. En términos de masa, 2 moles de CO_2 son 44x2=88 gramos. 1 mol de oxígeno son 32 gramos. En cuanto a las partículas, habría que usar la fórmula $N = nN_A$, para las moléculas, y multiplicar por el número de átomos de cada uno, en cada caso. Así, se obtienen:
2 mol de CO o de CO_2 son $2N_A = 1,2 \cdot 10^{24}$ moléculas.
1 mol de O_2 son $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas.
En total habrá 2 moles de átomos de carbono, y 3 moles de átomos de oxígeno en total, que multiplicado por el número de Avogadro darán el número de partículas de los mismos.

✍ 3. Para la reacción de combustión del octano:

$$C_8H_{18}(l) + \quad O_2(g) \rightarrow \quad CO_2(g) + \quad H_2O(l)$$

a) Ajusta la reacción y calcula las masas molares de reactivos y productos.
b) ¿Qué cantidad de octano reaccionará exacta y completamente con 89.6 L de oxígeno? ¿Qué cantidades de dióxido de carbono y agua se obtienen en c.n.?¿Y en c.e.?¿Y a $P = 1{,}5atm$ y $T = 300K$?
c) Halla el número de moléculas y átomos de cada tipo en b).

✍ 4. Una compañía sintetiza el ALON o aluminio transparente (compuesto anticipado por la película Star Trek(IV): the voyage home), mediante la reacción:

$$Al(s) + \quad O_2(g) + \quad N_2(g) \rightarrow \quad Al_{23}O_{27}N_5$$

a) Ajusta la reacción y calcula la masa molar del aluminio transparente (único producto de la reacción). Datos: $Al = 27g/mol$, $O = 16g/mol$, $N = 14g/mol$.
b) Determina los gramos de aluminio necesarios, y el volumen en c.e. de oxígeno y nitrógeno necesarios, para producir una tonelada de aluminio transparente $Al_{23}O_{27}N_5$.
c) ¿Cuántos moles de átomos hay de cada tipo en 1 tonelada de aluminio transparente?

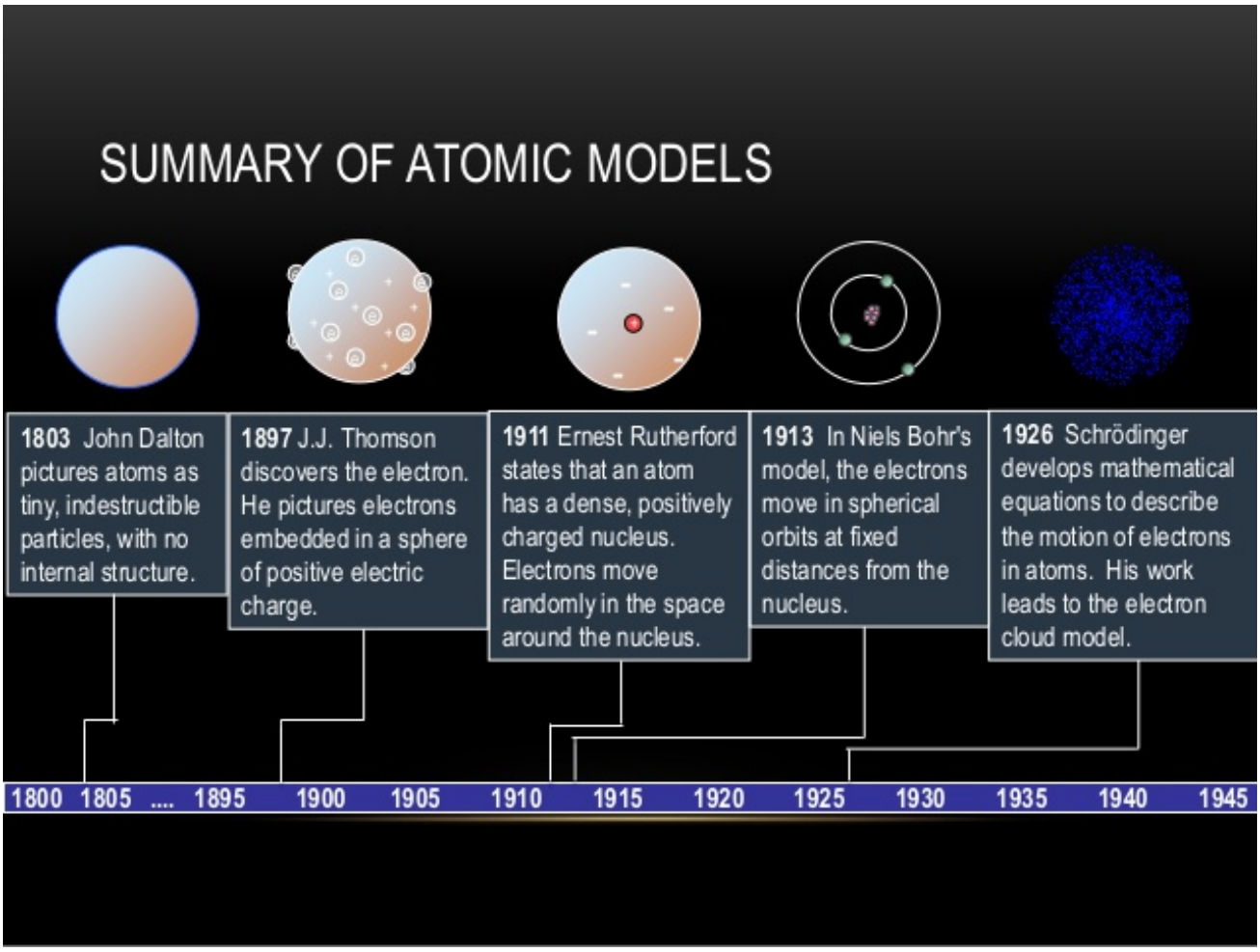


Figura 4.17: Modelos atómicos, resumidos. El modelo de Schrödinger necesita la ecuación $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z,t)\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ que también puede escribirse sencillamente como $H\Psi = E\Psi$. Un refinamiento del Modelo de Schrödinger es la Teoría Cuántica de Campos (Quantum Field Theory, QFT, en inglés), que describe todas las partículas del universo en función de objetos fluídicos en el espacio-tiempo llamados campos cuánticos. Así, los electrones y los fermiones vienen en realidad descritos por la ecuación de Dirac $(i\hbar\gamma\cdot\partial - e\gamma\cdot A - mc)\Psi = 0$. Además de la ecuación de Dirac o la ecuación de Schrödinger, existen otras ecuaciones de campos cuánticos como la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Majorana, la ecuación de Rarita-Schwinger, la ecuación de Maxwell-Proca y otras varias. Existen variantes de estas ecuaciones, mucho más sofistacadas. ¿Podría el Universo resumirse a un simple conjunto de ecuaciones o incluso a una simple ecuación, como postulan algunos filósofos y científicos de la llamada escuela reduccionista?

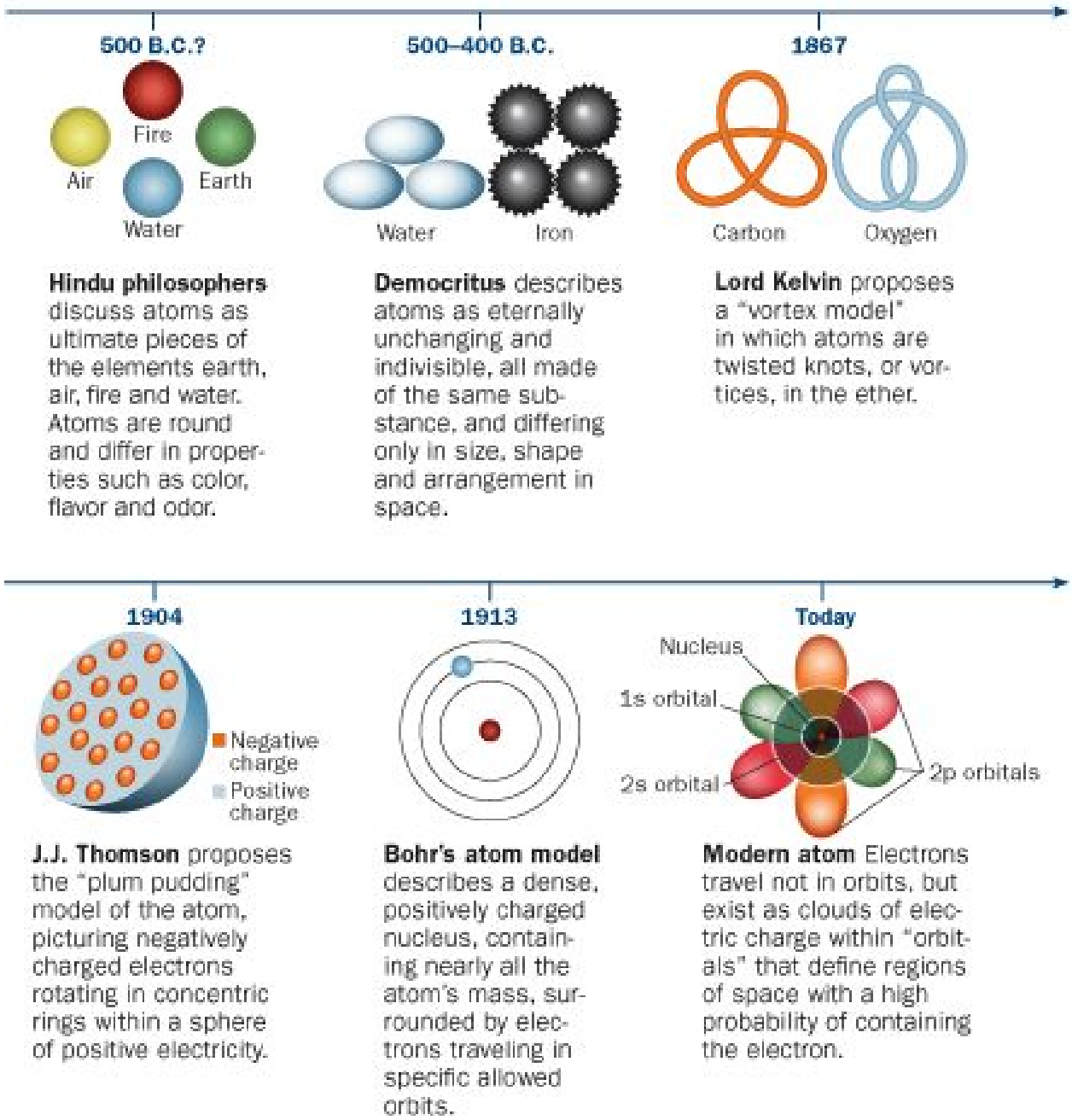


Figura 4.18: Modelos atómicos a través del tiempo. Desde la Filosofía hindú y griega, hemos recorrido un largo camino. Lord Kelvin también propuso un modelo atómico basado en vórtices en el que los átomos eran nudos con lazos y deformados.

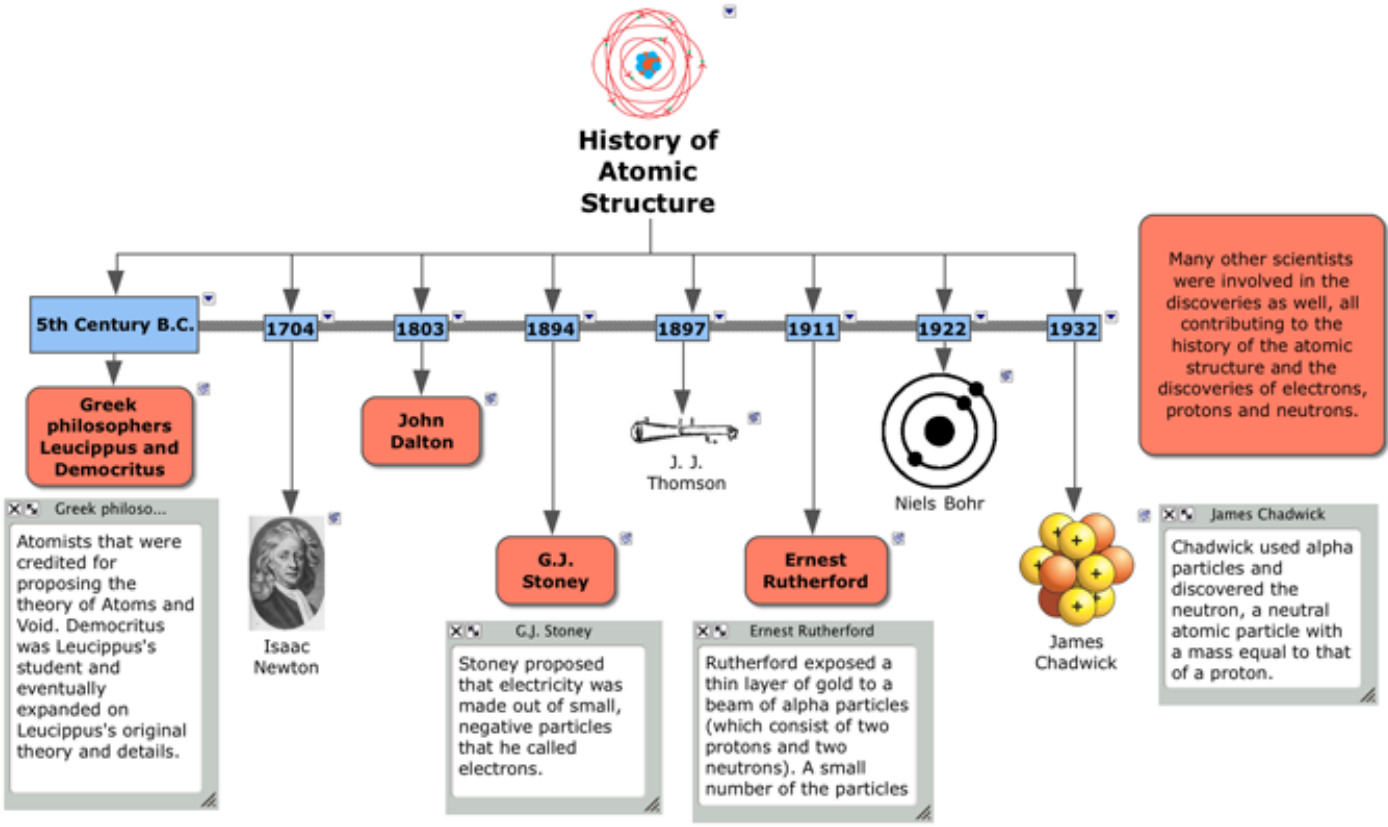


Figura 4.19: Historia atómica hasta el descubrimiento de Chadwick del neutrón. Stoney fue el autor de la idea del electrón, encontrado por J.J.Thomson en su experimento de rayos catódicos.

Figura 4.20: Rayos canales o anódicos. Básicos para el posterior descubrimiento del protón.

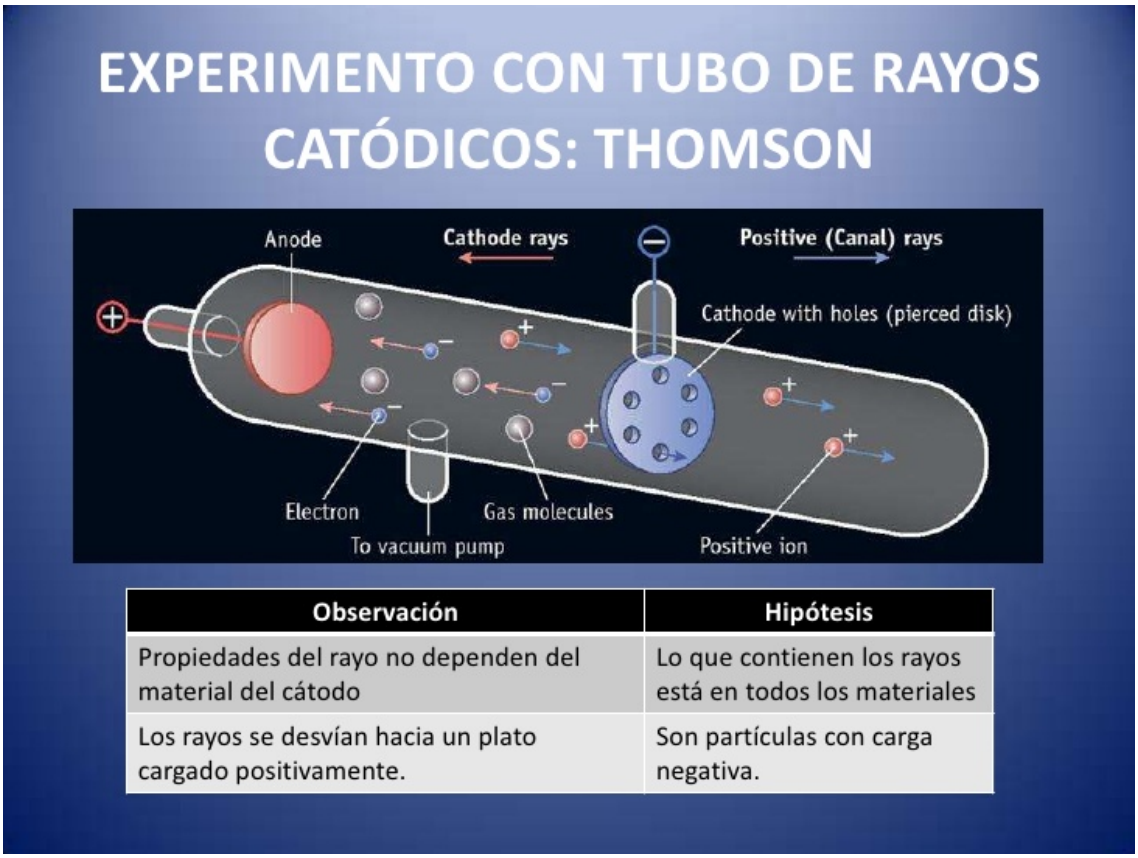


Figura 4.21: Interpretación del experimento de J. J. Thomson.

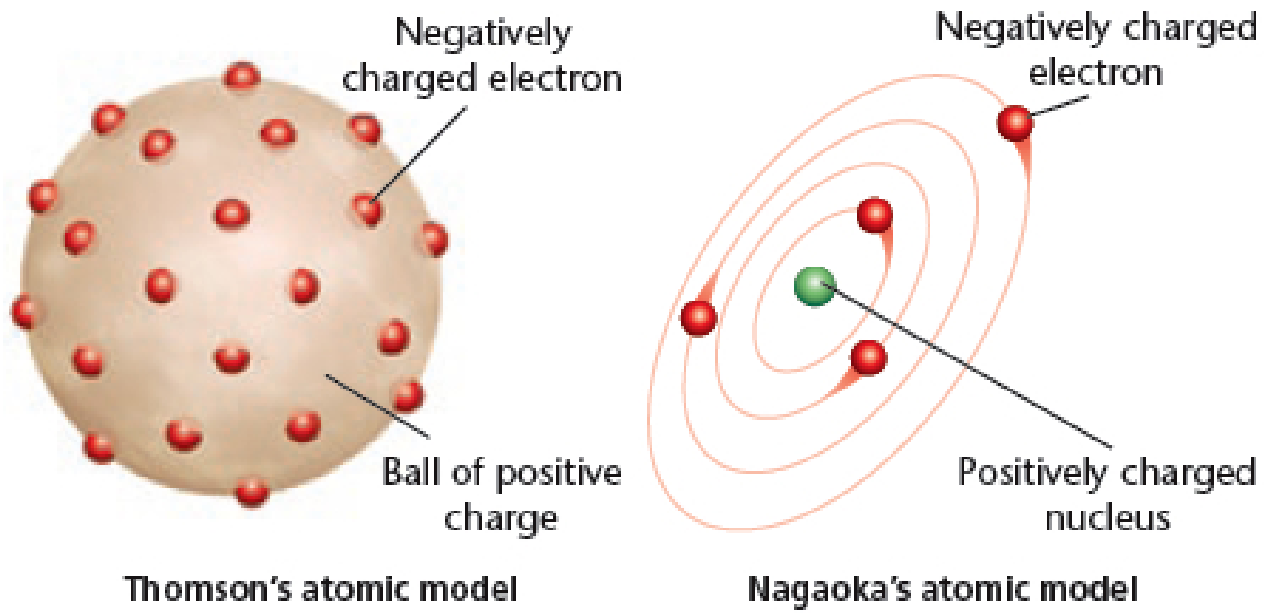


Figura 4.22: La imagen del modelo de Thomson frente a la del físico japonés Hantaro Nagaoka, posteriormente llamado modelo saturniano del átomo, en el que se inspiró Rutherford para su modelo atómico.

Planck length and time values based on Planck constant h

$$L_P \equiv \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05096 \times 10^{-35}\ \mathrm{m} \qquad t_P \equiv \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35125 \times 10^{-43}\ \mathrm{s}$$

Planck length and time values based on Dirac's constant $\hbar$

$$L_P \equiv \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6161 \times 10^{-35}\ \mathrm{m} \qquad t_P \equiv \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5.39072 \times 10^{-44}\ \mathrm{s}$$

Figura 4.23: Límites extremos de longitud y tiempo, según Planck. La distancia y tiempo más pequeños concebibles desde el mundo de la Física Cuántica, con sus expresiones y valores estándares usando h y razonalizados, usando $\hbar$. La escala de distancia de Planck opera a $10^{-35}m$, mientras que el tiempo de Planck es algo tan pequeño como $10^{-43}s$. No hace falta decir, que circa 2020, no hay medidas de espacio o tiempo que sean tan precisas. De hecho, se requeriría una energía enorme, del orden de $10^{16}TeV = 10^{19}GeV$ explorar energías y tiempos de ese orden de magnitud. No parece posible hacerlo a corto plazo. La escala de Planck es, comparada al tamaño del átomo, una distancia similar al tamaño del átomo comparado al tamaño del sistema solar. Es muy diminita. Se piensa que a esas escalas, el propio espacio-tiempo se funde, a una temperatura del orden de $10^{32}K$, y será necesaria una nueva descripción del espacio-tiempo en el que éste se derive de algún otro tipo de estructura u objetos. Ejemplos de estas teorías son las supercuerdas, la teoría M, la teoría de la gravedad cuántica de lazos o los modelos de espacio-tiempo no conmutativos y la imagen de la espuma espacio-temporal de Wheeler.

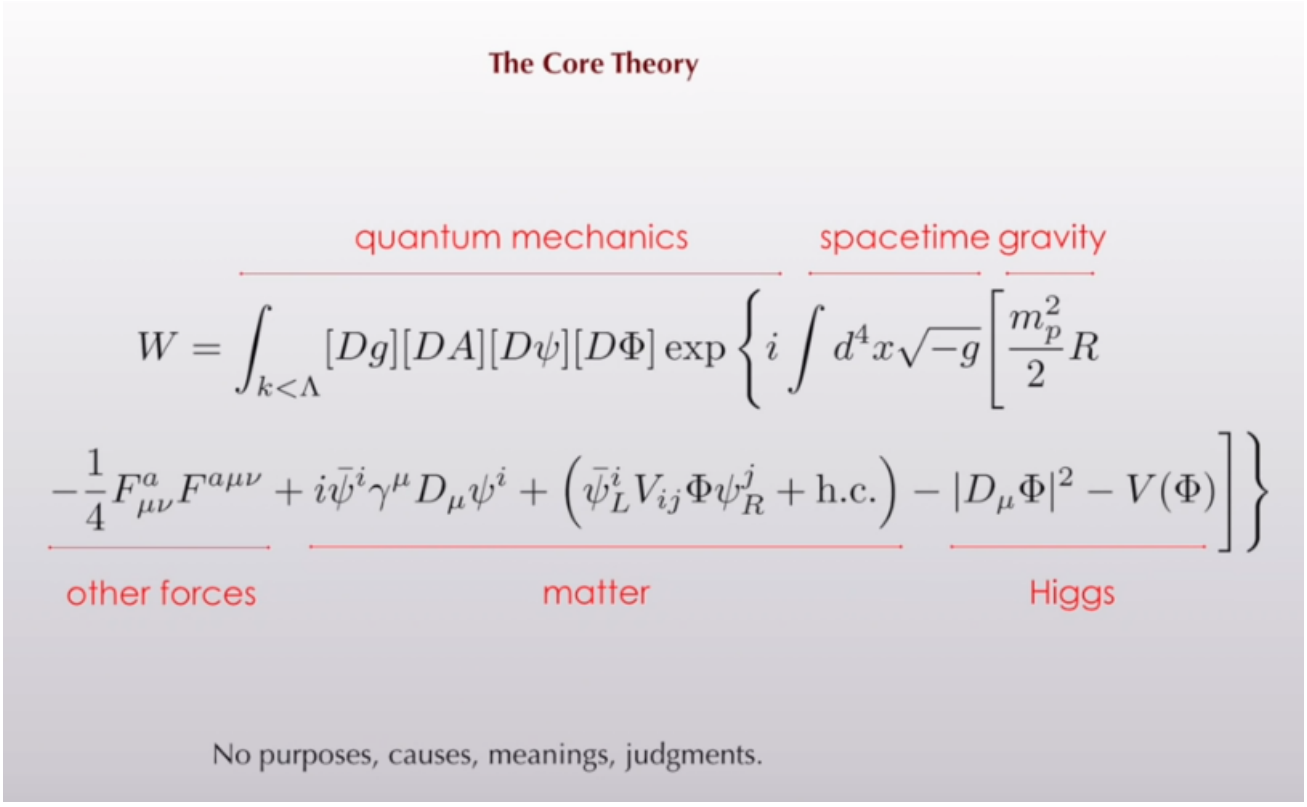


Figura 4.24: La ecuación fundamental del Modelo Estándar con la parte de la teoría gravitacional incluida, pese a que no admite teoría cuántica todavía. Estado actual de la comprensión de la materia y el espacio-tiempo.

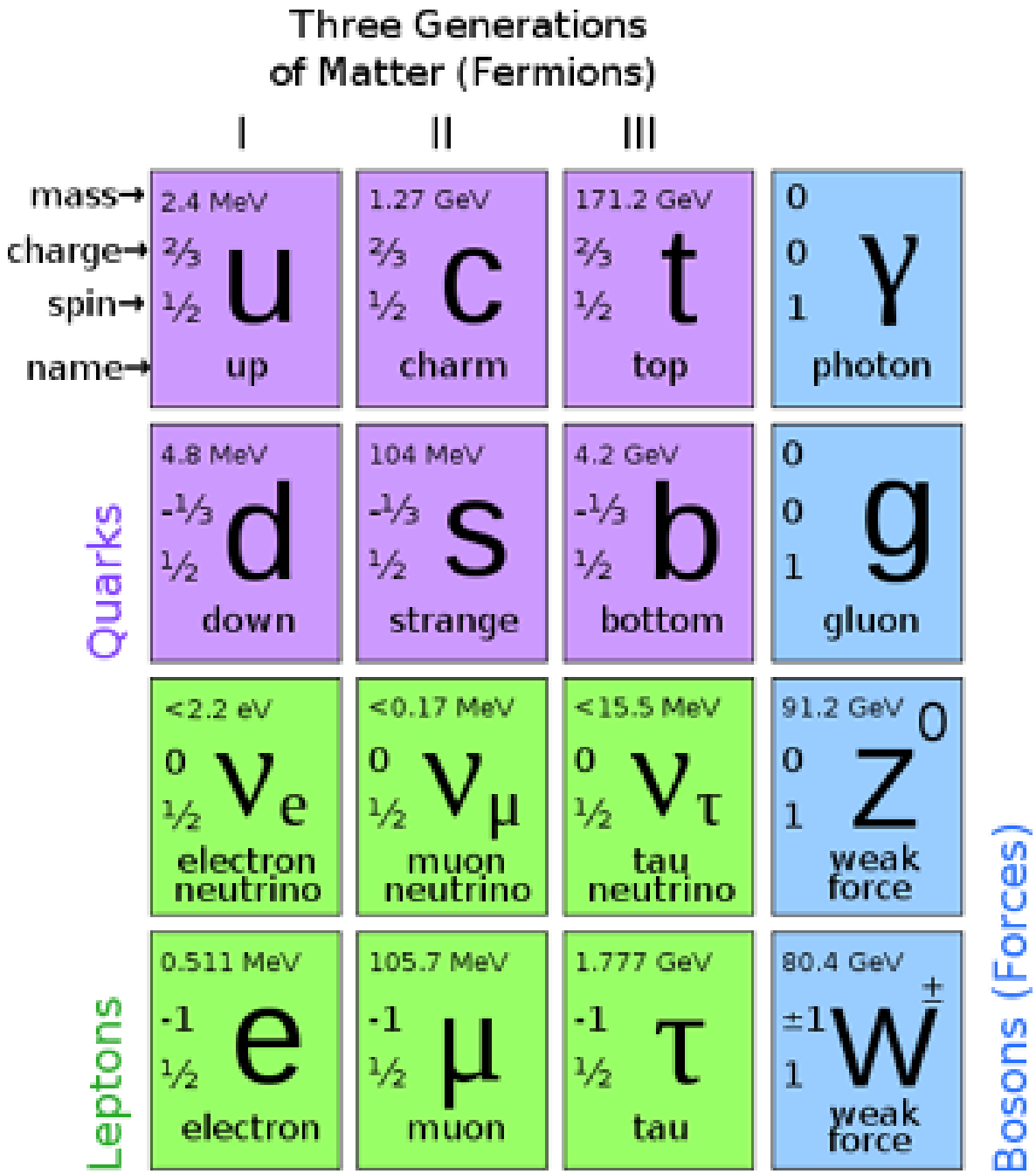


Figura 4.25: El Modelo Estándar y sus partículas.

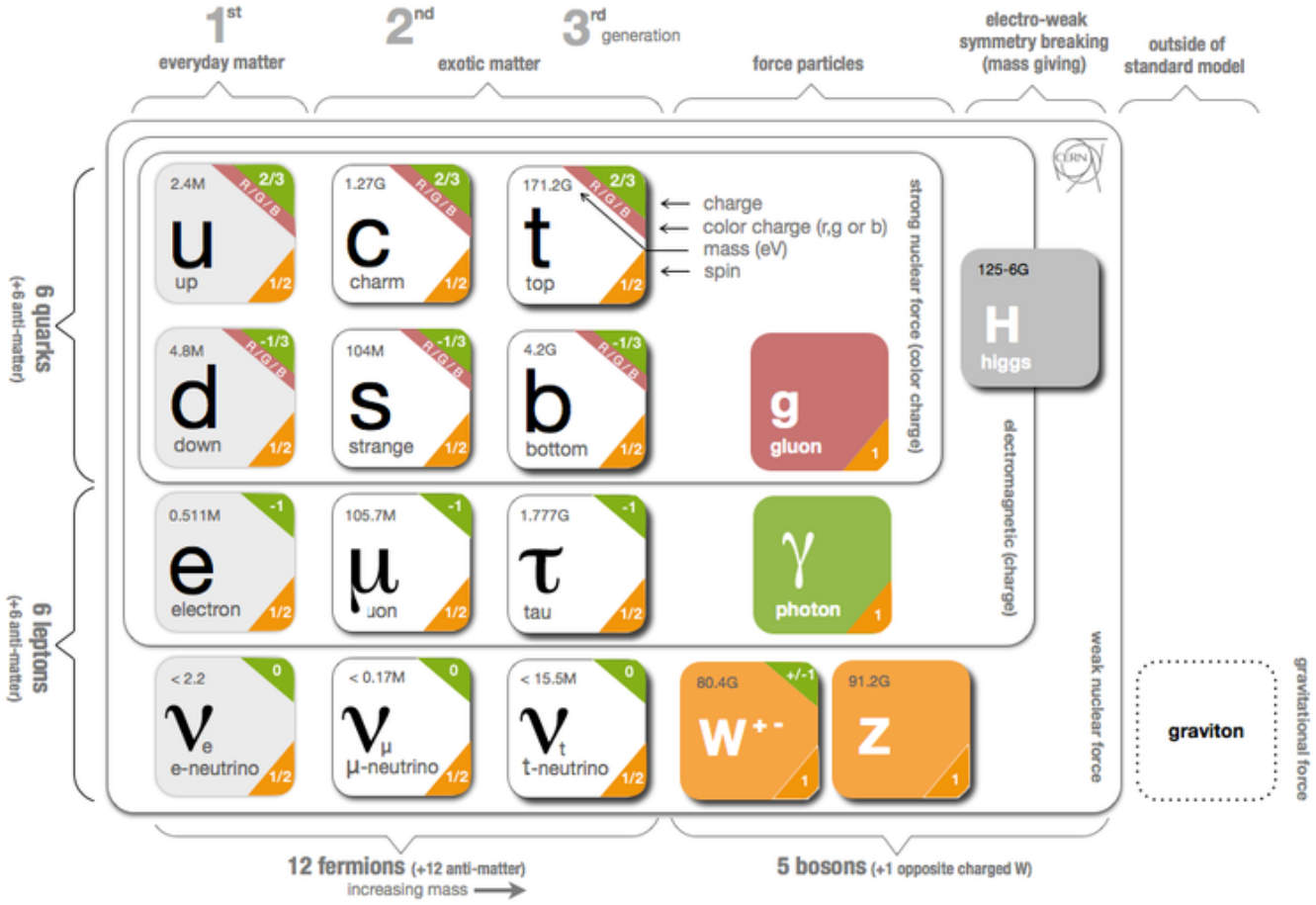


Figura 4.26: El Modelo Estándar y el gravitón como outsider.

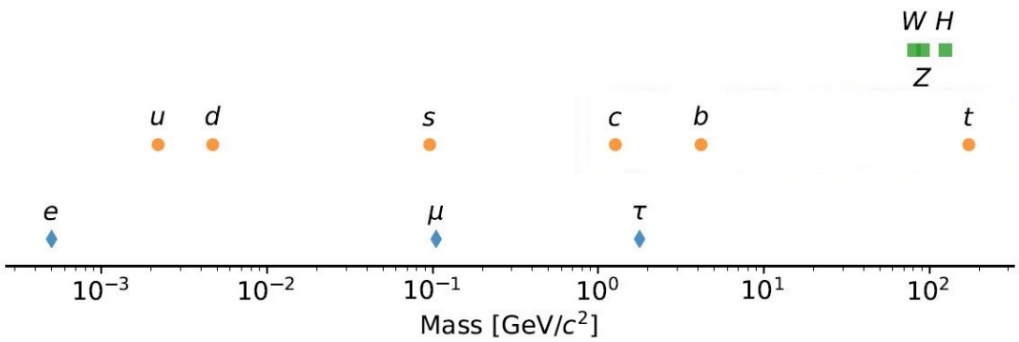


Figura 4.27: Escala de masas en el Modelo Estándar y sus partículas conocidas, salvo los neutrinos.

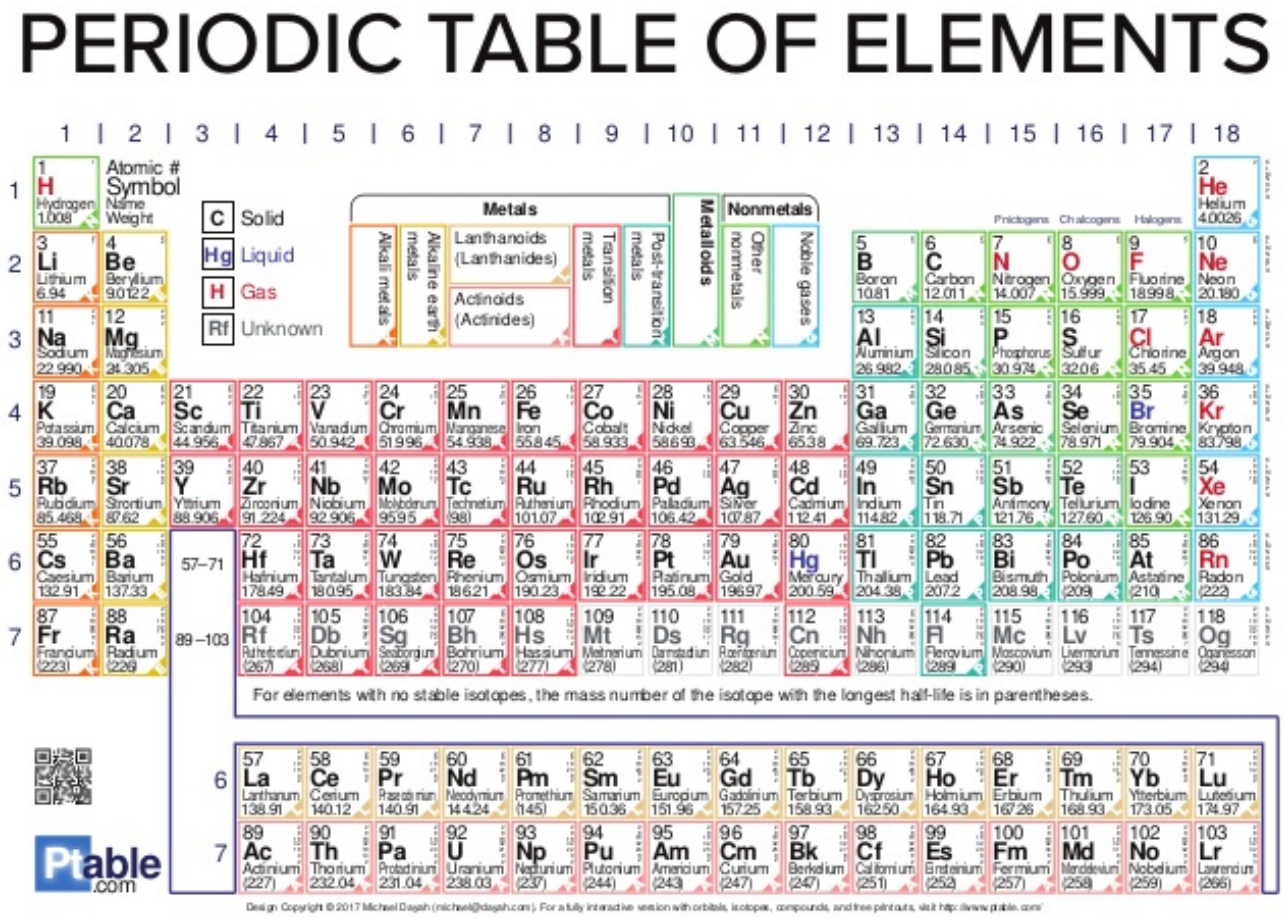


Figura 4.28: La Tabla Periódica de los químicos ya no es la tabla de partículas más pequeñas.

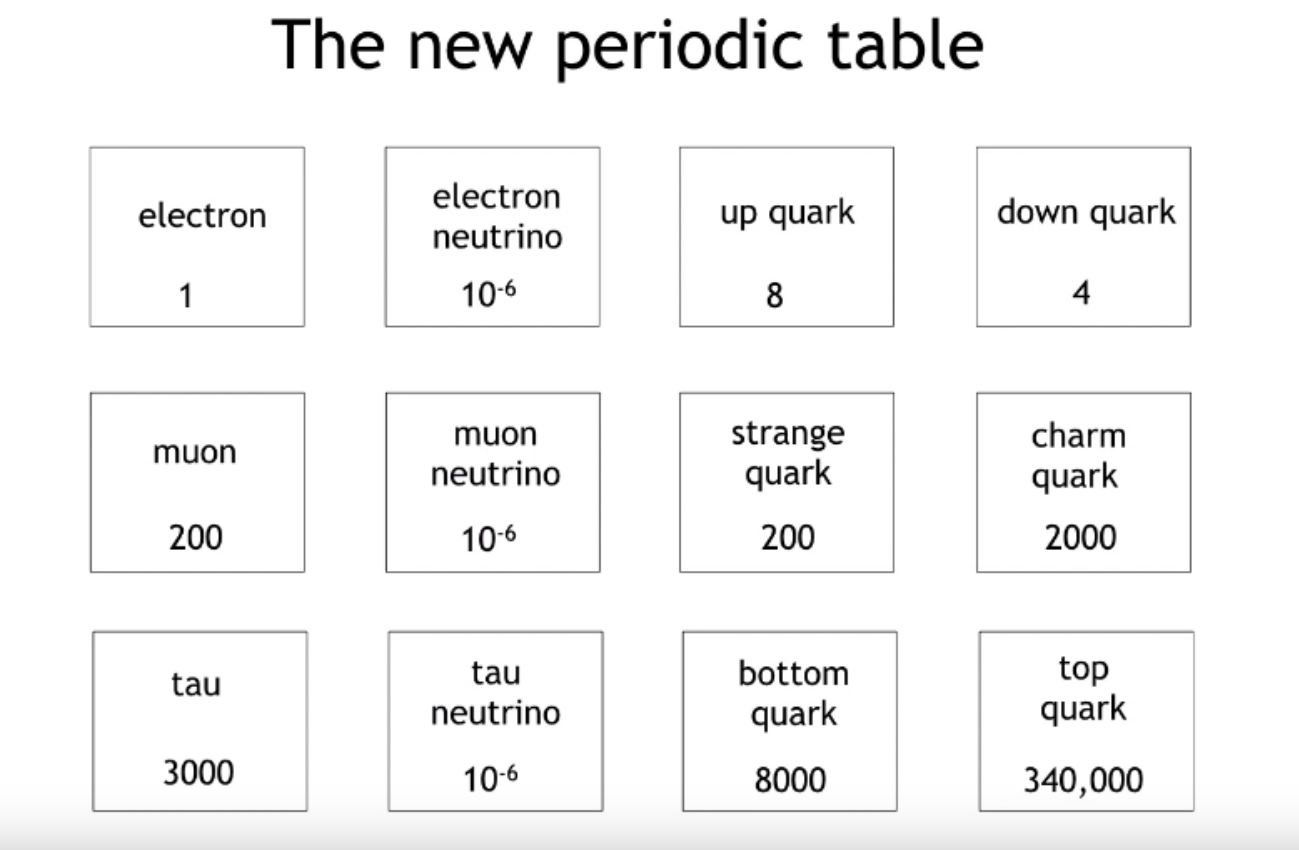


Figura 4.29: La nueva Tabla Periódica.

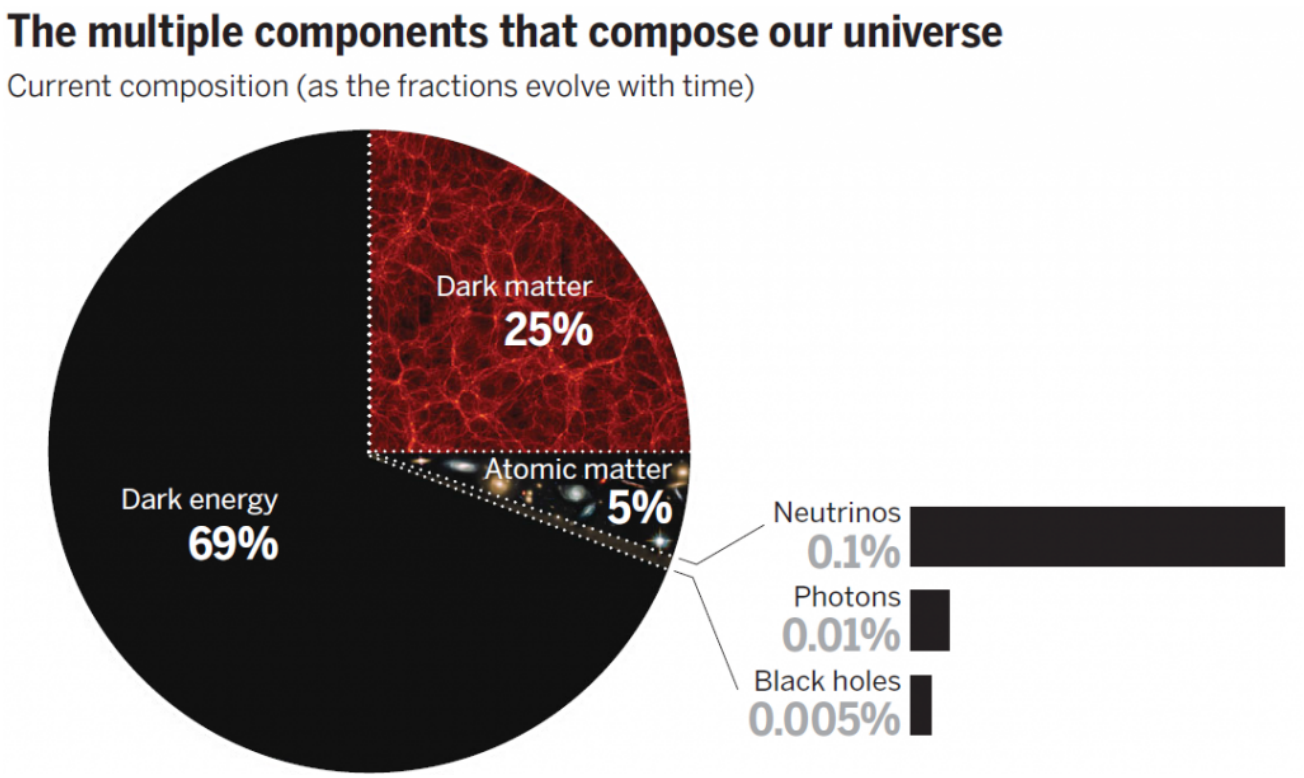


Figura 4.30: En Cosmología y Astrofísica, sin embargo, el Modelo Estándar es insuficiente para explicar, aparentemente, el universo a grandes escalas. En especial, el movimiento de las galaxias o la expansión acelerada requieren las componentes oscuras del Universo, denominadas materia y energía oscuras. La materia y energía oscuras no son partículas del Modelo Estándar conocidas. Así, además de no explicar la gravedad, el Modelo Estándar no explica el Universo oscuro y necesitaremos una teoría mejor y superior. No obstante, el Modelo Estándar explica el 5 % del Universo conocido que observamos.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c.$$

$$+ \bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c.$$

$$+ |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

Figura 4.31: Descripción matemática del Modelo Estándar, versión simplificada.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{SM} = -\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w(\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \\
igs_w(\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - \\
W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - \\
Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \\
\beta_h \left(\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g}H + \tfrac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right) + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - \\
g\alpha_h M \left(H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-\right) - \\
\tfrac{1}{8}g^2\alpha_h \left(H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2\right) - \\
gMW^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \\
\tfrac{1}{2}ig\left(W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)\right) + \\
\tfrac{1}{2}g\left(W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) + W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)\right) + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + \\
M\left(\tfrac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 + W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+\right) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_wMA_\mu(W^+_\mu\phi^- - \\
W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_wA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \\
\tfrac{1}{4}g^2W^+_\mu W^-_\mu\left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-\right) - \tfrac{1}{8}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu\left(H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-\right) - \\
\tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2s_wA_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + \\
W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2s_wA_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - \\
g^2s_w^2A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- + \tfrac{1}{2}ig_s\,\lambda^a_{ij}(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_e)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + \\
m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_d)d^\lambda_j + igs_wA_\mu\left(-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)\right) + \\
\tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu\{(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + \\
(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 + \gamma^5)u^\lambda_j)\} + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu\left((\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5){U^{lep}}_{\lambda\kappa}e^\kappa) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)\right) + \\
\tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu\left((\bar{e}^\kappa{U^{lep}}^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+\left(-m^\kappa_e(\bar{\nu}^\lambda{U^{lep}}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar{\nu}^\lambda{U^{lep}}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)e^\kappa\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-\left(m^\lambda_e(\bar{e}^\lambda{U^{lep}}^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar{e}^\lambda{U^{lep}}^\dagger_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)\nu^\kappa\right) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_\nu}{M}H(\bar{\nu}^\lambda\nu^\lambda) - \\
\tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_e}{M}H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar{\nu}^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda) - \tfrac{1}{4}\,\bar{\nu}_\lambda\,M^R_{\lambda\kappa}\,(1-\gamma_5)\hat{\nu}_\kappa - \\
\tfrac{1}{4}\,\bar{\nu}_\lambda\,M^R_{\lambda\kappa}\,(1-\gamma_5)\hat{\nu}_\kappa + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+\left(-m^\kappa_d(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j\right) + \\
\tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-\left(m^\lambda_d(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)u^\kappa_j\right) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_u}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \\
\tfrac{g}{2}\tfrac{m^\lambda_d}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j) + \bar{G}^a\partial^2 G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu\bar{G}^a G^b g^c_\mu + \\
\bar{X}^+(\partial^2 - M^2)X^+ + \bar{X}^-(\partial^2 - M^2)X^- + \bar{X}^0(\partial^2 - \tfrac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar{Y}\partial^2 Y + igc_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar{X}^0X^- - \\
\partial_\mu\bar{X}^+X^0) + igs_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar{Y}X^- - \partial_\mu\bar{X}^+Y) + igc_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^-X^0 - \\
\partial_\mu\bar{X}^0X^+) + igs_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^-Y - \partial_\mu\bar{Y}X^+) + igc_wZ^0_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+X^+ - \\
\partial_\mu\bar{X}^-X^-) + igs_wA_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+X^+ - \\
\partial_\mu\bar{X}^-X^-) - \tfrac{1}{2}gM\left(\bar{X}^+X^+H + \bar{X}^-X^-H + \tfrac{1}{c_w^2}\bar{X}^0X^0H\right) + \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}igM\left(\bar{X}^+X^0\phi^+ - \bar{X}^-X^0\phi^-\right) + \\
\tfrac{1}{2c_w}igM\left(\bar{X}^0X^-\phi^+ - \bar{X}^0X^+\phi^-\right) + igMs_w\left(\bar{X}^0X^-\phi^+ - \bar{X}^0X^+\phi^-\right) + \\
\tfrac{1}{2}igM\left(\bar{X}^+X^+\phi^0 - \bar{X}^-X^-\phi^0\right).
\end{gathered}
$$

Figura 4.32: Versión detallada de la descripción del Modelo Estándar. Es una descripción complicada.

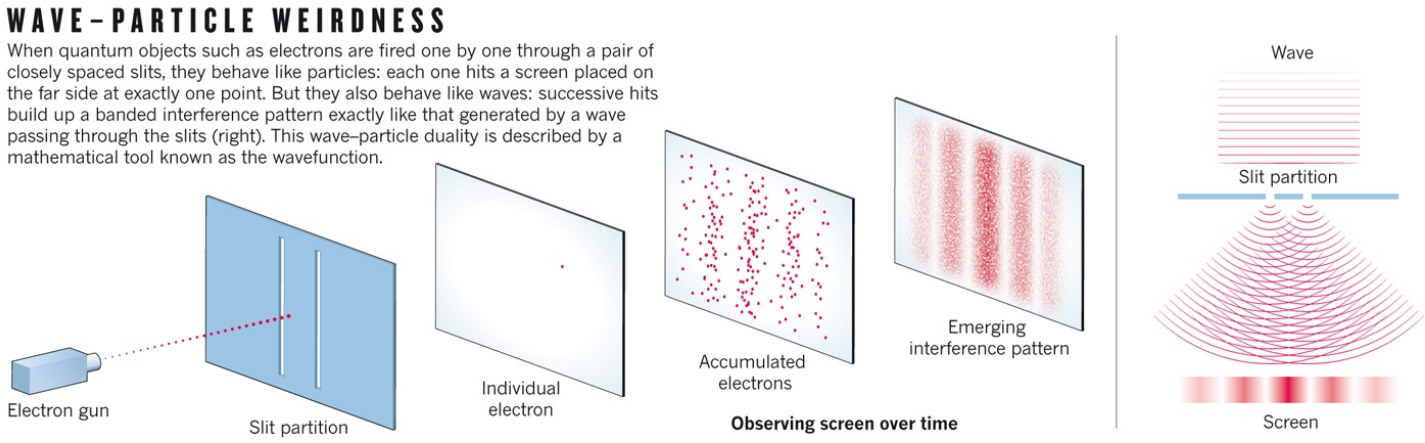


Figura 4.33: Experimento de la doble rendija, la madre de todas las “paradojas” cuánticas.

Figura 4.34: Baby Yoda/Bebé Yoda, una vez que has leído los apuntes y aprendido todas las cosas que entendemos y no entendemos todavía en el siglo XXI.

Capítulo 5

Física

5.1 Breve introducción

La Física es la Ciencia del estudio de la Naturaleza. El estudio de los cuerpos, partículas y sistemas (de partículas, fluidos, o demás) se realiza mediante una rama de la Física llamada Mecánica. La Mecánica Clásica incluye la física newtoniana de partículas y campos, la Mecánica de Fluidos y la Termodinámica junto al electromagnetismo.

Del estudio del movimiento se encargan dos partes de la Física que integran la Mecánica: la **Cinemática** y la **Dinámica**.

La Cinemática estudia y describe el movimiento SIN ATENDER a las causas que lo producen. La Dinámica estudia el movimiento ATENDIENDO a las causas que lo producen (las fuerzas o interacciones). La Cinemática y la Dinámica integran unidas una de las partes más importantes de la Física, llamada **Mecánica**.

5.2 Movimiento y trayectoria

Movimiento

Movimiento es todo cambio en la posición de un objeto, respecto de un punto y sistema de referencia. Un sistema de referencia es un sistema para localizar el punto, basado en un punto de origen, y una serie de objetos abstractos en general llamados vectores. Generalmente, la posición se especifica con una serie de números. Es por tanto lo que se llama una magnitud vectorial o vector.

Trayectoria

Trayectoria es el conjunto de puntos o lugar geométrico por los que pasa un móvil en su movimiento. Puede ser rectilínea (línea recta) o curvilínea (parabólica, hiperbólica, elíptica, lemniscática, ...)

5.3 Magnitudes cinemáticas

Desplazamiento

El desplazamiento es el cambio en la posición de un objeto. Respecto de un eje de coordenadas, X ó Y, puede ser denotado por

$$\Delta x = x - x_0 \quad \Delta y = y - y_0 \tag{5.1}$$

en donde x_0, y_0 son las posiciones iniciales en x e y del móvil o cuerpo(sistema) considerado. Se mide generalmente en metros en el S.I.

Velocidad media

Se llama velocidad media al ritmo de cambio del desplazamiento en un intervalo de tiempo dado $\Delta t = t - t_0$, donde t es el tiempo final y t_0 es el tiempo inicial. Matemáticamente, es el cociente

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \tag{5.2}$$

En el S.I., se mide generalmente en $m/s = m \cdot s^{-1}$, o también en km/h (ó m.p.h, millas por hora, en el mundo anglosajón). Es también una magnitud vectorial.

Aceleración media

Se llama aceleración media al ritmo de cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo dado $\Delta t = t - t_0$, donde t es el tiempo final y t_0 es el tiempo inicial. Matemáticamente, es el cociente

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \tag{5.3}$$

En el S.I. se mide generalmente en $m/s^2 = m \cdot s^{-2}$, aunque también se puede medir en cm/s^2. El cm/s^2 es una unidad usada en gravimetría y se denomina galileo (gal), $1gal = 1cm/s^2$. Es también, la aceleración, una magnitud vectorial.

5.4 MRU: Movimiento Rectilíneo Uniforme

El movimiento da lugar a que la posición cambie durante el tiempo. El conjunto de posiciones en un movimiento rectilíneo uniforme tiene aceleración nula y la trayectoria es una recta. Por tanto, las ecuaciones son:

$$a = 0m/s^2 = \text{constante} \tag{5.4}$$

$$v = (\text{constante}) \;\; m/s \tag{5.5}$$

$$x = x_0 + v(t - t_0) \;\; m \leftrightarrow \Delta x = v\Delta t \;\; m \tag{5.6}$$

5.5 MRUA

El movimiento que da lugar a que la posición cambie de forma no constante respecto del tiempo es un movimiento acelerado. Si la aceleración es constante, y la trayectoria rectilínea, tenemos un MRUA(Movimiento Rectilíneo Uniformemente acelerado). Matemáticamente, sus ecuaciones son:

$$a \neq 0m/s^2 = \text{constante} = a_0 \;\; m/s^2 \tag{5.7}$$

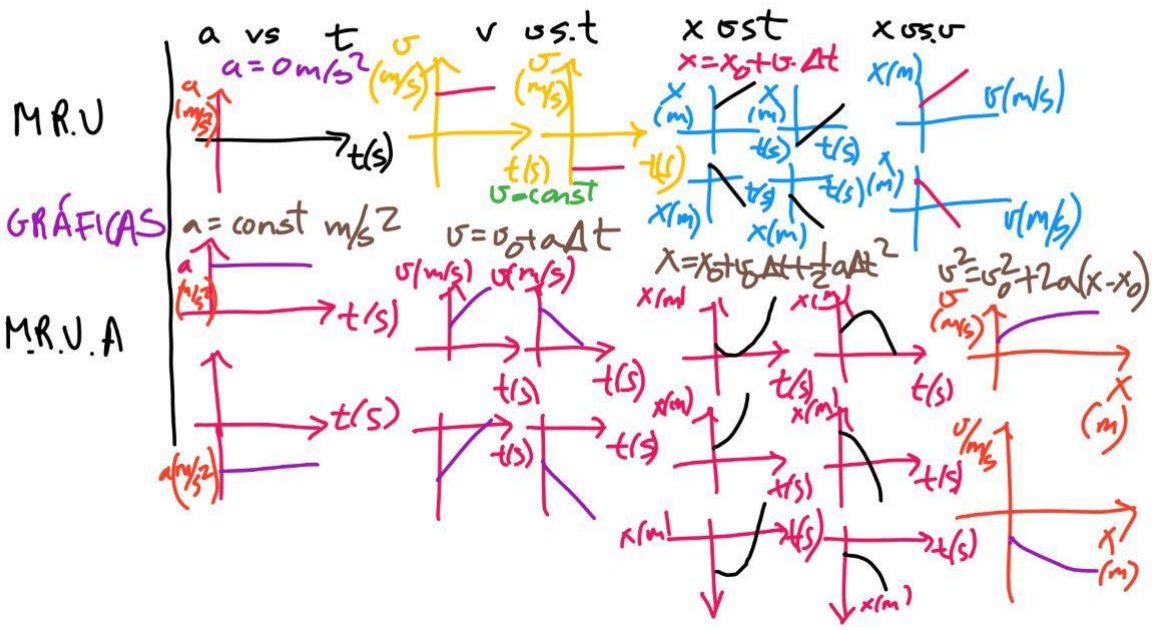
$$v \neq (\text{constante}) \longrightarrow v = v_0 + a(t - t_0)m/s \leftrightarrow \Delta v = a\Delta t \;\; m/s \tag{5.8}$$

$$x = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \;\; m \leftrightarrow \Delta x = v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \;\; m \tag{5.9}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \;\; m^2/s^2 \leftrightarrow \Delta(v^2) = 2a\Delta x \;\; m^2/s^2 \tag{5.10}$$

5.6 Gráficas del MRU y MRUA

A continuación, unos dibujos esquemáticos de cómo son cualitativamente las gráficas del MRU y del MRUA:



5.7 Fuerzas

La Dinámica se ocupa de estudiar el movimiento teniendo en cuenta la causa que lo producen: las fuerzas. hay dos tipos fundamentales de fuerzas:

- Fuerzas a distancia. Son las más fundamentales. En realidad se deben generalmente a las interacciones con partículas de campos de masa nula. Son la gravedad, el electromagnetismo y la interacción nuclear fuerte. En menor medida, la interacción nuclear débil se debe a la interacción a distancia de partículas con masa.
- Fuerzas de contacto. Son las más usuales y frecuentes. Ejemplo: la fricción, las fuerzas de deformación en sólidos y fluidos, y otras varias.

Fuerza

Fuerza es todo agente o causa capaz de modificar el estado de reposo o de MRU de un cuerpo. Matemáticamente, la segunda ley de Newton dice que la suma o resultante de todas las fuerzas es igual al producto de la masa por la aceleración que le produce al cuerpo o sistema

$$\sum F = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = ma \tag{5.11}$$

Las unidades de fuerza son los newton en el S.I. y las dinas en el sistema C.G.S. $1N = 1kg \cdot 1m/s^2$. Y también $1dina = 1g \cdot 1cm/s^2$. $1N = 10^5 dinas$. Otras unidades de fuerza son el kilogramo-fuerza o kilopondio kp, donde $1kp = 9{,}8N$. Las fuerzas son magnitudes vectoriales, y se suman vectorialmente.

Como la fuerza es un vector, la "suma" de fuerzas es un proceso vectorial. Casos particulares usuales de suma de fuerzas:

- La suma de fuerzas en la misma dirección y sentido es igual a la suma de las fuerzas:$F = F_1 + F_2$.
- La suma de fuerzas en la misma dirección y sentidos opuestos es igual a la resta o diferencia de las fuerzas: $F = F_1 - F_2$.
- La suma de fuerzas perpendiculares u ortogonales es igual a la suma pitagórica $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. O también $F^2 = F_1^2 + F_2^2$.

Un caso particular de fuerza es el peso. El peso es la fuerza con la que la Tierra (o más generalmente un planeta o cualquier cuerpo celeste) atrae a los cuerpos en su superficie. Matemáticamente, el peso es

Peso

El peso es una fuerza igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración de la gravedad g.

$$P = mg \tag{5.12}$$

El peso está relacionado con la Ley de Gravitación Universal de Newton:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

donde F es la fuerza con la que se atraen (la gravedad es siempre una fuerza atractiva) dos masas M, m en kilogramos, situadas a una distancia R en metros. La constante G es la llamada constante de gravitación universal de Newton, que vale en unidades del S.I.:

$$G = G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$$

Una fuerza muy similar a esta gravedad universal es la fuerza eléctrica entre cargas puntuales. La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q, q viene dada por la expresión de la Ley de Coulomb

$$F_e = K_C\frac{Qq}{R^2}$$

donde ahora Q, q son cargas expresadas en culombios (C), F_e es la fuerza eléctrica (que puede ser atractiva si las cargas son de diferente signo o repulsiva si las cargas son de igual signo), R es de nuevo la distancia entre cargas en metros y la constante de Coulomb es en el S.I.:

$$K_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$$

La carga eléctrica está cuantificada en la Naturaleza: es siempre un múltiplo de una unidad fundamental que podemos tomar como la carga del electrón (ó 1/3 de su valor si tomamos de referncia la carga eléctrica del quark más simple):

$$Q = Ne$$

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$$

Otra magnitud dinámica útil es el momento o momento lineal (cantidad de movimiento, ímpetu o impulso son otros nombres dados a esta cantidad a lo largo de la historia de la Física):

Momento lineal

El momento lineal, ímpetu o cantidad de movimiento, es la producto de la masa por la velocidad de un cuerpo. Matemáticamente:

$$p = mv \tag{5.13}$$

Sus unidades en el S.I. son los $kg \cdot m/s = N \cdot s$. La utilidad del momento es que permite reescribir la segunda ley de Newton de una forma incremental

$$\sum F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma \tag{5.14}$$

Nota que esta ley es la más general relación, siendo solamente igual a $F = ma$ cuando la masa no varía, que es el caso más habitual pero no el más general posible.

Una máquina es una artefacto que transforma fuerzas o energías de diferente tipo. Existen máquinas térmicas, mecánicas, electromecánicas, etc. Las máquinas puedes ser simples o compuestas. Ejemplos de máquinas simples: la palanca, el plano inclinado y la polea. Además son máquinas mecánicas sin motor estas tres.

Ley de la palanca

El producto de la fuerza de cada barra de una palanca por la longitud de su brazo es constante (llamado también momento de una fuerza). Matemáticamente:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{5.15}$$

La fuerza aplicada a una palanca se denomina potencia, y la que queremos vencer resistencia. El punto de apoyo de la palanca se suele denominar fulcro. La distancia del fulcro al punto de apoyo se denomina brazo de la palanca. Para un plano inclinado de altura h y longitud de cuña inlcinada d, se cumple que el producto de la fuerza F por la distancia d equilibra el peso o resistencia R a una altura h: $Fd = Rh$.

Es curiosa la similitud formal entre la Ley de Gravitación Universal y la Ley de Coulomb, pero hay diferencias notables, como es la intensidad relativa de las fuerzas. Esto puede verse comparando la fuerza eléctrica entre dos electrones a la misma distancia con la fuerza gravitacional:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K_C e^2}{G_N m_e^2} \approx 4{,}2 \cdot 10^{42}$$

Las fuerzas eléctricas o gravitacionales llevan asociadas cantidades conservadas, denominadas energía mecánicas. Eso permite definir un potential. Para el caso eléctrico, el potencial eléctrico se relaciona con la intensidad de corriente eléctrica mediante una ley conocida como ley de Ohm:

Ley de Ohm

Para un conductor lineal u óhmico, se satisface la ley de Ohm, que indica que el producto de la intensidad de corriente eléctrica I, en amperios en el S.I., por la resistencia eléctrica, R, en ohmios Ω en el S.I., es igual al potencial eléctrico V, en voltios ($1V = 1A \cdot 1\Omega$):

$$V = IR \tag{5.16}$$

La suma de varias resistencias en serie, se suman como sumamos otras cantidades aditivas

$$R_t = \sum_i R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \rightarrow R = R_1 + R_2, .$$

pero la suma de resistencias en paralelo usa una ley de reciprocidad

$$\frac{1}{R_t} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \cdot + \frac{1}{R_n} \rightarrow R_t = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \text{si n=2.}$$

5.8 MCU(ampliación, no entra en tercero de la ESO)

$$\alpha = 0 rad/s^2 = \text{constante} \tag{5.17}$$
$$\omega = (\text{constante}) \;\; rad/s \tag{5.18}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) \;\; rad \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t \;\; rad \tag{5.19}$$
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \;\; m/s^2 \neq 0(\text{constante}) \tag{5.20}$$
$$s = \varphi R \;\; m \leftrightarrow \Delta s = \Delta\varphi R, \Delta s \neq (constante) \;\; \text{pero} \;\; R = \text{constante} \tag{5.21}$$
$$v = \omega R \;\; m/s \;\; v = constante \tag{5.22}$$
$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \tag{5.23}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \;\; s \tag{5.24}$$
$$f = \frac{1}{T} \;\; s^{-1}(Hz) \tag{5.25}$$
$$\omega = 2\pi f \;\; rad/s \tag{5.26}$$

5.9 MCUA(ampliación, no entra en tercero de la ESO)

$$\alpha \neq 0 rad/s^2 = \text{constante} \tag{5.27}$$
$$\omega \neq (\text{constante}) \longrightarrow \omega = \omega_0 + a(t - t_0) rad/s \leftrightarrow \Delta\omega = \alpha\Delta t \;\; rad/s \tag{5.28}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \;\; rad \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \;\; rad \tag{5.29}$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \;\; rad^2/s^2 \leftrightarrow \Delta(\omega^2) = 2\alpha\Delta\varphi \;\; rad^2/s^2 \tag{5.30}$$
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \;\; m/s^2 \neq 0(\text{no constante}) \tag{5.31}$$
$$a_t = \alpha R \;\; m/s^2(\text{constante}) \tag{5.32}$$
$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \;\; m^2/s^4(\text{aceleración total no constante}) \tag{5.33}$$
$$a^2 = R^2(\omega^4 + \alpha^2) \;\; m^2/s^4(MCUA) \tag{5.34}$$

5.10 Energía

El concepto de energía subyace al de fuerza y, en cierto momento, es fundamental.

Definición de energía

Energía es la capacidad de un sistema, material o no, para producir cambios o desplazamientos en otro sistema o sobre sí mismo. Energía, así, es la capacidad de realizar un "trabajo". Matemáticamente, trabajo es:

$$W = Fd = E \tag{5.35}$$

La energía y trabajo, en el sistema internacional o S.I., se mide en julios(J). Además, bajo circunstancias muy generales, la energía es una cantidad que ni se crea ni se destruye, solamente se transforma. Esta afirmación es el principio de conservación de la energía o Primera Ley de la Termodinámica.

Un sistema físico puede ser de diferente tipo de acuerdo al intercambio o no de materia y energía en forma de radiación. Así, se distinguen:

- Sistemas abiertos: intercambian materia y energía con el entorno.
- Sistemas cerrados: intercambian energía pero no materia con el entorno.
- Sistemas aislados: no intercambian ni energía ni materia con el entorno.

En un sistema aislado, la energía SIEMPRE se conserva.

Energía cinética

Se llama energía cinética E_c (kinetic energy) a la energía que posee un cuerpo en movimiento. Matemáticamente, para una partícula no relativista, que se mueve a velocidad pequeña en comparación a la velocidad de la luz, la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.36}$$

y donde v es la velocidad en metros por segundo, y m la masa de la partícula o sistema. En el caso no relativista, la energía cinética sería

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{5.37}$$

donde $c = 299792458 \approx 300000000 m/s$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Energía potencial

Ciertas fuerzas especiales, denominadas conservativas, tienen la capacidad potencial de producir cambios asociados a campos de fuerzas de forma permanente o continua al desplazarse entre diferentes localizaciones en el espacio. En el caso gravitacional, la energía potencial gravitacional en un punto situado a una distancia r del centro de fuerzas es

$$E_p(g) = -G_N \frac{Mm}{r} \tag{5.38}$$

En un punto cercano de la superficie de un cuerpo de simetría esférica como un planeta, esta expresión se reescribe como

$$E_p(g, h) = mgh \tag{5.39}$$

En el caso electrostático, se tiene una energía potencial

$$E_c(el) = K_C \frac{Qq}{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.40}$$

Y donde $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.

En el caso de fuerzas debida a cuerpos elásticos, las deformaciones si la fuerza fuerza sigue una ley de Hooke $F = k\Delta x$ producen cambios de energía potencial elástica:

Energía potencial elástica

La energía potencial elástica, de un cuerpo con constante de deformación k (N/m), es igual a

$$E_p(e) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.41}$$

Las energías potenciales, o cinéticas, están definidas siempre salvo una constante arbitraria de referencia. La energía eléctrica está asociada a las corrientes o potenciales eléctricos, y las cargas eléctricas. La energía química está asociada a los enlaces químicos que mantienen unidos a los átomos en los compuestos químicos. La energía núclear está asociada a la energía que mantiene unido a los constituyentes del núcleo atómico mediante fuerzas nucleares.

Energía mecánica

Se llama energía mecánica a la suma de energía cinética y potencial, entendiendo energía cinética a la total de todas las partículas o sistemas que pueda tener, y energía potencial como la energía de todos los posibles tipos de fuerzas que posean energía potencial. Matemáticamente:

$$E_m = E_c + E_p = \sum_i E_c(i) + \sum_j E_p(j) \tag{5.42}$$

Energía térmica

Se llama energía térmica a la energía asociada al movimiento de las partículas constituyentes del sistema, y su agitación desordenada. Es decir, las fluctuaciones en la posición de las partículas genera un movimiento caótico que define la energía térmica y la temperatura absoluta en virtud de la teoría cínético-atómico-molecular. Matemáticamente:

$$E_c = E_Q = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \tag{5.43}$$

y donde $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J/K$ es la constante de Boltzmann, y T la temperatura es escala absoluta o de Kelvin, medida en kelvin.

Escalas termométricas

Generalmente, las 3 escalas termométricas más usadas para medir la temperatura son la escala absoluta o Kelvin (unidades grados Kelvin o kelvin), la escala centígrada (unidades grados Celsius o celsius) y la escala anglosajona de grados Fahrenheit (unidades grados Fahrenheit o fahrenheit). Para pasar de una a otra se usan las expresiones

$$T(K) = T(^\circ C) + 273 \leftrightarrow T(^\circ C) = T(K) - 273 \tag{5.44}$$

$$\frac{T(^\circ C)}{100} = \frac{T(^\circ F) - 32}{180} \leftrightarrow T(^\circ F) = 32 + T(^\circ C) \cdot 1{,}8 \tag{5.45}$$

Existe una relación entre los conceptos explicados de energía térmica o calor, trabajo, mediante la idea de energía en tránsito o movimiento. Dos cuerpos a diferente temperatura intercambian calor hasta que se alcanza el equilibrio térmico y las temperaturas de ambos se igualan o balancean. El calor se medía tradicionalmente en unidades llamadas calorías. Hoy día, se usan los julios gracias a la equivalencia mecánica del calor dada por:

$$1cal = 4{,}186J \leftrightarrow 1J = 0{,}239cal \approx 0{,}24cal$$

Aunque calor y temperatura son magnitudes distintas, al medirse de hecho en sistemas diferentes de unidades, están relacionadas, por medio de la equivalencia mecánica del calor y por la interpretación microscópica de la temperatura, debidas respectivamente a Joule y a Boltzmann. El calor, además, produce una serie de efectos físicos en la materia:

- Variación de temperatura. $\Delta Q = C\Delta T = mc_e\Delta T$.
- Cambios de estado. $\Delta Q = mL$.
- Variaciones de dimensiones, mediante contracción o dilatación. Si la dilatación es lineal

$$\frac{\Delta L}{L} = h = \varepsilon_t = \alpha_L \Delta T$$

  donde α_L es el coeficiente de dilatación lineal y h es el "strain" (estiramiento). En el caso de una dilatación superficial, se tiene que

$$\frac{\Delta A}{A} = \alpha_A \Delta T = \beta \Delta T$$

y donde β es el coeficiente de dilatación superficial. Finalmente, en el caso de un cambio de dimensiones volúmico, se tiene que

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

y donde γ es el coeficiente de dilatación volúmico. Para materiales isótropos, se cumple que $\alpha_V = \gamma = 3\alpha_L$, ya que si $V = L^3$, usando el binomio de Newton:

$$V + \Delta V = (L + \Delta L)^3 = L^3 + 3L^2\Delta L + 3L\Delta L^2 + \Delta L^3 \simeq V + \frac{3V\Delta L}{L}$$

Y similarmente se podría demostrar que $\beta = 2\alpha_A$.

El calor también produce cambios químicos o reacciones químicas en algunas sustancias o sistemas materiales. El calor puede propagarse y transmitirse por diferentes medios:

- Conducción: mecanismo de transferencia de calor fundamentalmente en sólidos. No hay transporte de materia.
- Convección: mecanismo de transferencia de calor fundamentalmente en fluidos. Hay transporte de materia. Está asociado a los cambios de densidad del sistema.
- Radiación: mecanismo de transferencia de calor en el vacío, en ausencia de material, mediante ondas electromagnéticas (o gravitacionales o de otro tipo). La radiación también se produce en medios que no sean el vacío. Todos los cuerpos emiten una radiación característica por el hecho de poseer una temperatura. Esta radiación térmica se denomina radiación del cuerpo negro.

Según la capacidad de un sistema para transferir calor, los sistemas pueden ser:

- Aislantes térmicos: sistema que posee conducción muy lenta o nula.
- Conductores térmicos: sistema que posee conducción muy rápida del calor.
- Aislantes topológicos: sistemas que conducen en superficie pero no en el espacio sólido total el calor.
- Superconductores: aquellos sistemas que conducen el calor sin pérdidas. Son sistemas ideales.

Trabajo es la forma de transferencia de energía en un sistema que conlleva un desplazamiento entre partículas o sistemas. Una fuerza disipativa es aquella fuerza en el que parte de la energía se pierde en forma de energía térmica. Ejemplos de fuerzas disipativas son las fuerzas de rozamiento o fricción, y algunos tipos de fuerzas entre campos de fuerzas o en fluidos. En ausencia de fuerzas disipativas, se verifica el principio de conservación de la energía mecánica.

Teorema de conservación de la energía mecánica

La variación de energía mecánica es igual al trabajo que realicen las fuerzas disipativas. En ausencia de fuerzas disipativas, la variación de energía mecáncia es nula o cero, y la energía mecánica permanece constante:

$$\Delta E_m = W(F_d) \rightarrow E_m(\text{inicial}) = E_m(\text{final}), \text{si } F_d = 0 \tag{5.46}$$

5.11 Ondas

Una onda es la propagación dinámica de una perturbación, roto un equilibrio, de un medio con cierta propiedad de periodicidad y descrita matemáticamente por algún tipo de ecuación. No es preciso decir hoy día que una onda es la transmisión de una perturbación desde un punto o foco emisor, con trasporte de energía pero sin transporte de materia, porque dichos conceptos están relacionados. Hay varios tipos de ondas según dimensionalidad: unidimensionales, bidimensionales, tridimensionales,...Pero generalmente se distinguen dos categorías más fundamentales. Según la dirección de propagación vs. dirección de vibración de las partículas las ondas pueden ser longitudinales o transversales. Las ondas longitudinales son aquellas en las que las partículas vibran en la misma

dirección en la que se propagan (ondas sonoras, ondas sísmicas tipo P,...). Las ondas transversales son aquellas en las que las partículas vibran en una dirección perpendicular a la de propagación (ondas electromagnéticas, ondas gravitacionales, ondas sísmicas de tipo S,...). Según el medio en que se propagan pueden ser ondas mecánicas u ondas "en el vacío". Las ondas en el vacío pueden ser electromagnéticas, electrodébiles, gravitacionales, ondas de color en la interacción nuclear fuerte, las ondas del campo de Higgs y otras varias.

5.11.1 Ondas y su descripción

Las ondas se especifican mediante una serie de magnitudes:

- Amplitud (A). Es la máxima separación de puntos que oscilan respecto su posición de equilibrio. Se mide en metros en el S.I.
- Longitud de onda (λ). Es la distancia entre dos máximos o dos mínimos con igual elongación (separación respecto respecto de posición de equilibrio) y estado de vibración. Se mide en metros en el S.I.
- Período T. Es el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a su longitud de onda.
- Frecuencia f. Es el número de oscilaciones por segundo o número de longitudes de onda que atraviesa la onda cada segundo. Su unidad es el hertzio (Hz). $f = 1/T = \omega/2\pi$. ω es la frecuencia angular de la onda en radianes por segundo (rad/s).
- Número de onda k. Es una suerte de periodicidad espacial de la onda, es el número de longitudes de onda por cada metro. $\overline{k} = 1/\lambda = k/2\pi$. k es le número de onda angular medido en rad/m.
- Velocidad de propagación V_P. Es la velocidad con la que se desplaza la perturbación ondulatoria. Es diferente en general a la velocidad de fase o de vibración de un punto de la onda y puede ser también diferente a la velocidad de un grupo de ondas emitidas en paquetes, llamada velocidad de grupo. Se mide en m/s. Matemáticamente: $v_p = \lambda f = \omega/k$, para una onda "plana" y "armónica", en la que la velocidad de grupo y de propagación coinciden. La relación entre ω y k, definida como una función $\omega(k)$ se llama generalmente reelación de dispersión de la onda. En ondas no lineales puede ser una expresión complicada y compleja.

5.11.2 Ondas electromagnéticas y gravitacionales

Las ondas electromagnéticas son una forma de transmisión del calor mediante radiación. También las ondas gravitacionales y otras ondas como las ondas escalares del campo de Higgs, y otras varias. En las ondas electromagnéticas, lo que oscila no es materia sino campos eléctricos y magnéticos "en el vacío" u otro medio material. En el caso de las ondas gravitacionales, lo que oscila no es materia sino es espacio-tiempo mismo (la gravedad es un efecto de la distorsión o "warp" del espacio-tiempo). En el caso del campo de Higgs, lo que oscila es un campo abstracto que permea el vacío en todo el espacio tiempo, cuyas interacciones con él producen la masa de las partículas elementales subatómicas. La masa de objetos no fundamentales proviene por una parte del campo de Higgs, y por otra parte de la dinámica de la interacción nuclear fuerte y su campo gluónico de color.

5.11.3 Tipos de onda

Según la dirección de vibración y propagación:

- Ondas longitudinales. Son aquellas en las que la velocidad de vibración y propagación son paralelas. Ejemplos: sonido, ondas sísmicas de tipo P.
- Ondas transversales. Son aquellas en las que la velcoidad de vibración y propagación son perpendiculares. Ejemplos: ondas en una cuerda, luz (onda electromagnética), ondas electromagnéticas arbitrarias (rayos X, rayos gamma, ondas de radio, microondas,...), ondas gravitacionales, ...

Según el medio en que se propagan:

- Ondas mecánicas. Son también llamadas ondas materiales, y necesitan medio material para propagarse. Ejemplos: ondas sonoras, ondas en una cuerda, ondas de presión en un sólido o fluido,...

- Ondas electromagnéticas. Se propagan en el vacío.

- Ondas gravitacionales. Se propagan en el vacío.

- Ondas de campos materiales fundamentales (espinoriales). Son ondas de campos de materia. La materia de estos, fundamentales si no entidades compuestas como los hadrones, viene de interacción con el campo de Higgs.

- Ondas de campos bosónicos (ondas del campo de Higgs, ondas W, Z, ondas de color). Se propagan en el vacío, pero son de corto alcance, en el caso de la interacción nuclear, salvo el caso del Higgs, cuyo valor de vacío permea todo el Universo.

Según la dimensionalidad de la onda: pueden ser unidimensionales (1d), bidimensionales (2d), tridimensionales(3d), tetradimensionales(4d),..., n-dimensionales (nd).

5.11.4 Ondas sonoras y sonido

El sonido es la propagación de la vibración de los cuerpos a través de un medio material como el aire, el agua,... El sonido tiene una serie de propiedades interesantes:

- Intensidad. Está relacionada con la energía que transporta la onda sonora. El término cotidiano de volumen es impreciso. La intensidad sonora se mide en escala de dB (decibelios).

- Tono. El tono está relacionado con la frecuencia de la onda sonora. El oido humano percibe generalmente frecuencias entre 20Hz y 20kHz. Las frecuencias bajas son graves, las frecuencias altas son agudas.

- Timbre. Si dos instrumentos musicales tienen o emiten la misma nota, con el mismo volumen, podemos diferenciarlos. Esto se debe a que las ondas que generan son diferentes y sus sonidos tienen distinto timbre.

- Reflexión y eco. Si el sonido alcanza una barrera, parte de la energía se transfiere a la pared, pero otra se refleja y vuelve. Este fenómeno se llama eco.

- La reverberación es el fenómeno que tiene lugar cuando el sonido en un lugar permanece como consecuencia de la llegada de diversas reflexiones. Es decir, la reverberación es la persistencia del sonido en un lugar como consecuencia de la superposición o unión de diferentes reflexiones del mismo.

- Velocidad de propagación. Depende de la densidad y temperatura del medio en general.

La contaminación acústica o ruido hace referencia al exceso de sonido molesto creado por la actividad humana o natural (explosión de volcán, etcétera). Los sonidos se clasifican según su intensidad sonora en una escala de **decibelios**.

140 dB	Disparo de escopeta / Umbral de dolor
130 dB	Avión despegando / fuegos artificiales
120 dB	Motor de avión / martillo neumático
110 dB	Concierto de rock
100 dB	Taladro
90 dB	Atasco de tráfico en una ciudad
80 dB	Tren / secador de pelo
70 dB	Tráfico tranquilo / aspiradora
60 dB	Conversación normal
50 dB	Sonido ambiental en una oficina
40 dB	Conversación susurrada / lluvia
30 dB	Sonido ambiental en el campo
20 dB	Estudio de grabación vacío
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición normal

El sonido es la propagación de la vibración de los cuerpos en un medio material. Es decir, las ondas acústicas o sonoras no son más que desplazamientos de los consituyentes de un cuerpo vibrante. El sonido no se propaga pues en el vacío. El sonido tiene puede contaminar, y entonces se le llama ruido sonoro o simplemente ruido(aunque la noción de ruido es más general):

- Contaminación acústica o ruido es el exceso de ondas sonoras molestas sobre las ondas de sonido con información o señales sonoras. En el sonido y otras ondas, existe una teoría y diferentes tipos del ruido.

Las magnitudes que tipifican o caracterizan las ondas son:

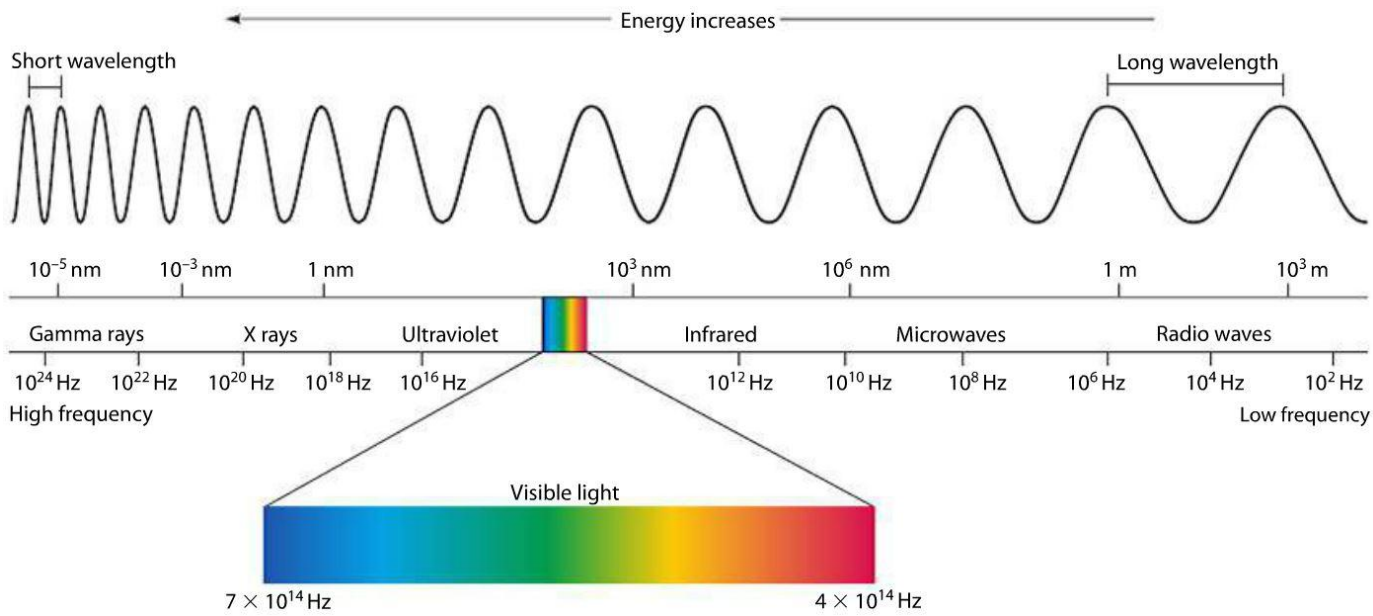
- Amplitud(A). Es la máxima separación de puntos que oscilan o vibran respecto a su posición de equilibrio. En el S.I. se mide en metros.
- Longitud de onda λ. Es la distancia mínima entre dos puntos con el mismo estado de vibración, equivalentemente, la mínima distancia entre dos crestas o valles. Unidades: metro.
- Período(T). Es el tiempo que tarda una onda en recorrer una longitud igual a su longitud de onda. Unidad: segundo (SI).
- Frecuencia(f): $f = 1/T$, es el número de oscilaciones que realiza en un segundo. Unidades: hertzio (Hz), 1 Hz=$1s^{-1}$.
- Frecuencia angular: $\omega = 2\pi/T$, número de vueltas circulares en un tiempo dado.
- Número de onda: $k = 2\pi/\lambda$, es la periodicidad espacial de la onda(unidades: radianes partido por metro, rad/m). El número de onda por oscilación circular, o bien, el desplazamiento de la onda por cada longitud de onda es el llamado número de onda. $\overline{k} = \dfrac{1}{\lambda}$. Unidades: m^{-1}.

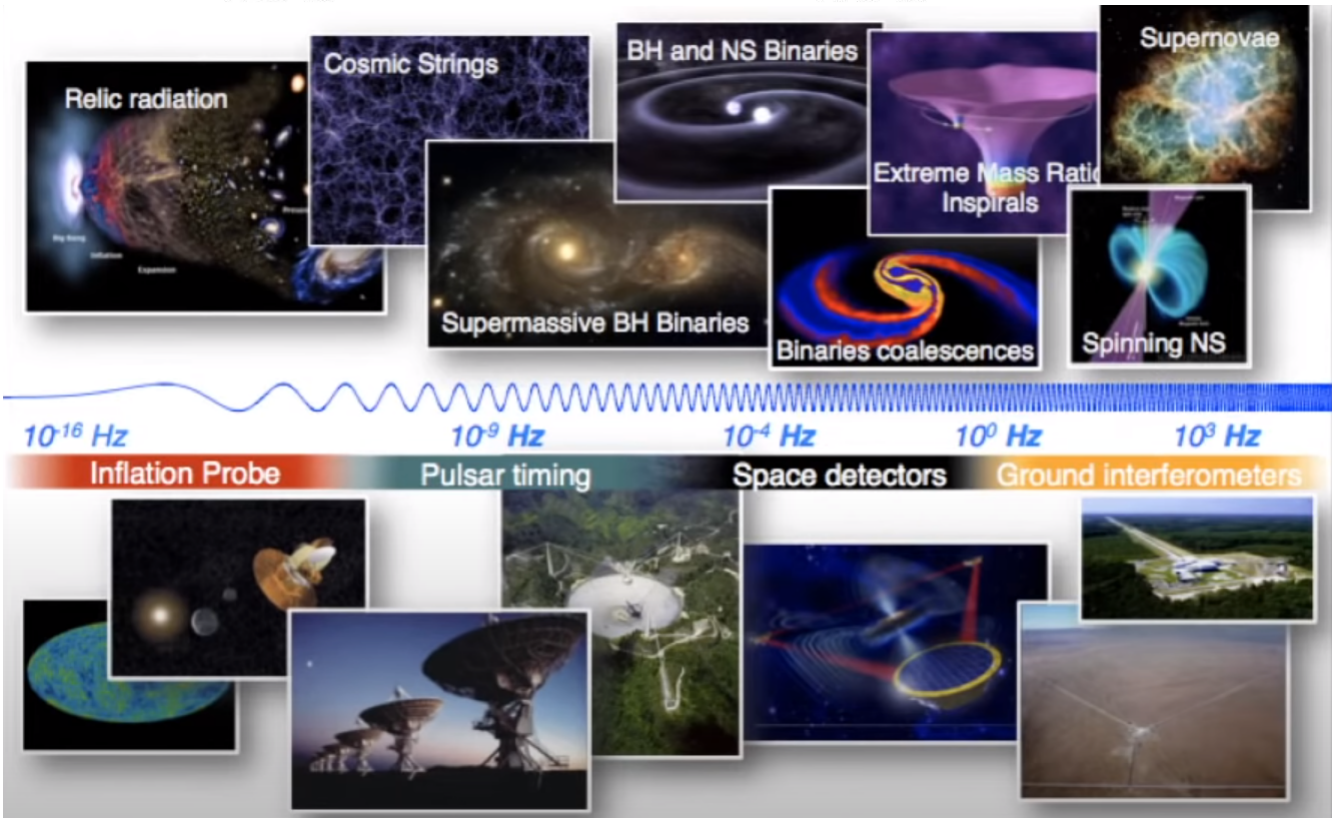
- Velocidad de propagación de la onda. $v_p = \lambda f = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T}$, es la velocidad con la que se mueve o desplaza la onda.

Espectro electromagnético

El conjunto de todas las frecuencias (o longitudes de onda) de las ondas electromagnéticas se llama espectro electromagnético.

Frecuencias generales del visible están comprendidas entre unos 400 y 700 nanómetros. Según la opacidad de la luz, los cuerpos pueden ser transparentes, translúcidos u opacos. Generalmente, la luz se propaga en línea recta. A continuación una imagen del espectro de frecuencias electromagnético y gravitacional:





5.11.5 La luz

La luz, de acuerdo a los descubrimiento del siglo XIX, es una onda electromagnética en cierto rango de frecuencia (Maxwell sintetizó esta idea a partir de los descubrimientos electromagnéticos de Faraday). Las ondas electromagnéticas se emiten por cuerpos incandescentes, y se pueden entendere como un tipo de radiación térmica. El espectro visible es muy pequeño en comparación al espectro electromagnético total.

La velocidad de la luz depende del medio. Si el medio es el vacío, la luz se mueve a 299792458 m/s, aproximadamente 300000 km/s. Hay medios opacos a la luz, medios translúcidos y medios transparentes a la luz. Además, algunos materiales dejan pasar ciertas frecuencias y no todas. La luz se propaga de forma natural en línea recta, más generalmente emplea el mínimo tiempo para atravesar dos puntos. En un contexto relativista, la luz es afectada por la gravedad y se propaga de forma curvilínea en grandes distancias cósmicas cuando hay objetivos masivos en el espacio. Esto explica la sombra o umbra, y la penumbra

5.11.6 Propiedades generales de las ondas

Una onda arbitraria, no necesariamente luminosa/electromagnética, o sonora, se describe con un instrumento matemático llamado función de onda Ψ, y manifiesta los siguientes fenómenos físicos:

- Dimensionalidad.
- Ecuación de onda.
- Velocidad de fase, propagación y de grupo.
- Reflexión.
- Refracción.
- Eco y reverberación (ondas acústicas y otras ondas).
- Polarización (solamente ondas transversales).
- Linealidad/no linealidad.
- Interferencia y superposición.
- Difracción.
- Atenuación y amortiguamiento.
- Dispersión.
- Efecto Doppler.
- Forzamiento.
- Resonancia.
- Modulación y pulsación.

5.12 Conceptos (repaso y ampliaciones)

- **Magnitudes.**
  Se llama magnitud a todo aquello que es mensurable, es decir, a todo lo que se puede medir. Las magnitudes pueden ser fundamentales o derivadas. Hay 7 magnitudes fundamentales en el Sistema Internacional (S.I.) de unidades: longitud (L), tiempo (T), masa (M), temperatura absoluta (t), cantidad de sustancia (n), intensidad de corriente eléctrica (I) y la intensidad luminosa (I_L). Estas 7 magnitudes se miden, respectivamente, en las unidades siguientes: metro (m), segundo (s), kilogramo (kg), grado kelvin (K), mol (mol), amperio (A) y candela (cd). Ejemplos de magnitudes derivadas en el S.I. son: la velocidad, el área, el volumen, la presión, la aceleración, la carga eléctrica, la densidad,... Además hay toda una serie de prefijos para denotar múltiplos y submúltiplos en el S.I.

  Las magnitudes se pueden clasificar en escalares o vectoriales. Las magnitudes escalares quedan totalmente especificadas si aparte de la unidad correspondiente, damos un número. Por ejemplo, son escalares la temperatura, la densidad, la masa, el tiempo,... Las magnitudes vectoriales necesitan, aparte de un número, especificar una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Matemáticamente, las magnitudes vectoriales son vectores con ciertas propiedades y físicamente pueden visualizarse como segmentos orientados en el espacio. Son vectoriales, exempli gratia, la posición (o el desplazamiento), la velocidad, la aceleración, la fuerza, ...

  Curiosidad: existen, además de las magnitudes escalares y vectoriales, otras magnitudes más complicadas. Son los denominados pseudoescalares, los pseudovectores, los tensores y los pseudotensores. También en ciertas teorías se usan cantidades de tipo "espinorial", "twistorial" y otros tipos más sutiles de magnitudes de tipo matemático que no entran en este curso, de tipo multivectorial.

- Prefijos para múltiplos: deca (da) 10, hecta (h) 10^2, kilo (k) 10^3, mega (M) 10^6, giga (G) 10^9, tera (T) 10^{12}, peta (P) 10^{15}, exa (E) 10^{18}, zetta (Z) 10^{21}, yotta (Y) 10^{24}.

- Prefijos para submúltiplos: deci (d) 10^{-1}, centi (c) 10^{-2}, mili (m) 10^{-3}, micro (μ) 10^{-6}, nano (n) 10^{-9}, pico (p) 10^{-12}, femto (f) 10^{-15}, atto (a) 10^{-18}, zepto (z) 10^{-21}, yocto (y) 10^{-24}.

- **Movimiento.**
  Se llama *movimiento* al cambio de la posición de un móvil o cuerpo respecto de un sistema de referencia con respecto al tiempo.
  Un sistema de referencia está formado por un eje de coordenadas y un punto de origen O. Si no hay movimiento, porque el cuerpo permanece fijo, se dice que estamos en reposo.
  El estado de movimiento es siempre *relativo* a un observador y un concreto sistema de referencia.

- **Posición.** La posición de un objeto es una magnitud fundamental. Es una magnitud vectorial que indica la ubicación de un objeto respecto de un punto tomado como origen en un sistema de referencia concreto.

- **Trayectoria. Espacio recorrido y desplazamiento**. Se llama *trayectoria* al conjunto de todas las posiciones por las que pasa un móvil en su movimiento. El *espacio recorrido* $S = \Delta s = s - s_0$ entre dos puntos es la longitud medida sobre la trayectoria del móvil u objeto desplazado que ha recorrido. El *desplazamiento* es la diferencia entre las posiciones iniciales y final $X = \Delta x = x - x_0$, y se mide en línea recta. Sólo en los movimientos rectilíneos el espacio recorrido coincide con el desplazamiento del objeto, en general. Según la trayectoria, el movimiento puede ser rectilíneo o curvilíneo. Entre los movimientos curvilíneos más importantes destacan los circulares, parabólicos, hiperbólicos y elípticos, pero cualquier tipo de curva puede ser posible en principio.

- **Velocidad.** Se llama *velocidad media* al ritmo de cambio de la posición con respecto del tiempo. Es una magnitud vectorial como la posición. Tiene dimensiones físicas de LT^{-1} y se mide en m/s en el S.I. de unidades. Matemáticamente:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

Importante: la velocidad es un vector TANGENTE a la trayectoria en cada uno de sus puntos.
Se llama velocidad instantánea al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado es muy pequeño y "tiende" a cero. Matemáticamente:

$$v = v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

- **Velocidad angular.** Se llama velocidad angular al ritmo de cambio del ángulo respecto del tiempo en un movimiento circular (o curvilíneo más generalmente). Matemáticamente:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$$

Las dimensiones físicas de la velocidad angular son T^{-1} y se mide en rad/s en el S.I. Hay unas relaciones sencillas entre la velocidad angular y el MCU con la velocidad usual y el MRU.

Otras unidades comunes de la velocidad angular son las revoluciones por minuto (r.p.m.). La equivalencia entre rad/s y r.p.m. se puede hacer mediante un cambio simple de unidades o por factores de conversión como sigue:

$$1r.p.m. = \frac{1vuelta}{1min} = \frac{1vuelta}{1min}\frac{2\pi\ \ rad}{1vuelta}\frac{1min}{60s} = \frac{2\pi\ \ rad}{60s} = \frac{\pi}{30}rad/s$$

- **Aceleración.** Se llama aceleración media al ritmo de cambio de la velocidad respecto del tiempo. Sus dimensiones físicas son LT^{-2} y se mide en m/s^2 en el S.I. de unidades. Matemáticamente es igual a

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Se llama aceleración instantánea al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado es muy pequeño y "tiende" a cero. Matemáticamente:

$$a = a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

- **Aceleración angular.** La aceleración angular es el ritmo de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo. Matemáticamente se define como sigue:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

Sus dimensiones físicas son T^{-2} y sus unidades rad/s^2 en el S.I.

- **Radián.** Un radián es el ángulo que abarca una longitud de arco igual al radio de la circunferencia en la que se encuentra inscrito dicho arco. El radián es la unidad fundamental de ángulo y desplazamiento angular en el S.I. y no tiene dimensiones físicas. Su símbolo es rad. La equivalencia entre radianes, los grados sexagesimales y los grados centesimales (gradianes o gones) es como sigue

$$\boxed{2\pi\ \ rad = 360^\circ = 400^g}$$

- **Aceleración centrípeta, aceleración tangencial y aceleración total.** En los movimientos circulares (y también en los generales curvilíneos) se pueden definir diferentes nociones o conceptos de aceleración. Incluso pese a que en módulo o "valor numérico" la velocidad lineal es constante en un MCU, en dicho movimiento existe una aceleración llamada aceleración normal o centrípeta que mide el cambio de la dirección de la velocidad. Matemáticamente esta aceleración es igual a

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

En un MCUA, además de aceleración centrípeta, hay aceleración tangencial. Esta aceleración vale

$$a_t = \alpha R$$

en donde α es la aceleración angular y R es el radio de la circunfurencia. La aceleración total se calcula usando el teorema de Pitágoras sobre a_c y a_t, para obtener:

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2$$

- **Caracterización simple de los estados de reposo y tipos de movimiento estudiados.**

  Reposo (respecto observador fijo): $X = x_0 = constante$, $v = 0m/s$, $a = 0m/s^2$.

  MRU (respecto un sistema de referencia concreto): $X \neq constante$, $v = constante$, $a = 0m/s^2$.

  *MRU*A (respecto un sistema de referencia concreto): $X \neq constante$, $v \neq constante$, $a = constante$.

  Movimiento variado (acelerado no uniformemente): $X \neq constante$, $v \neq constante$, $a \neq constante$.

  MCU: $s \neq constante$, $\varphi \neq constante$, $\omega = constante$, $\alpha = 0$,
  $a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = constante$, $a_t = 0$.

  MCUA: $s \neq constante$, $\varphi \neq constante$, $\omega \neq constante$, $\alpha = 0$,
  $a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \neq constante$, $a_t = constante \neq 0$, $a^2 = a_c^2 + a_t^2$.

  Los movimientos se clasifican según la trayectoria en rectilíneos o curvilíneos, como hemos visto ya antes, y según haya o no aceleración en acelerados y no acelerados. Si la aceleración no es constante, el movimiento se llama variado. Si el movimiento tiene aceleración constante se llama uniformemente acelerado (la aceleración puede ser positiva o negativa, si ésta es de frenado). Si la aceleración es nula, el movimiento se denomina uniforme. En un MCU hay una aceleración, sin embargo, debido al cambio del vector velocidad con la dirección (aceleración normal o centrípeta). En el MRU y el MCU son constantes, respectivamente, la velocidad lineal (velocidad media, que coincide con la instantánea) y la velocidad angular. El reposo puede verse como un caso especial de MRU respecto de un sistema de referencia determinado. Además, hay unas relaciones o analogías (similitudes) entre el MRU y el MCU, y entre el MRUA y el MCUA a nivel de ecuaciones.

- Se llama **período** (T) (o revolución) en un movimiento circular (y también en los llamados movimientos oscilatorios o vibratorios/ondulatorios) al tiempo que tarda en dar una vuelta completa el móvil. Se mide en segundos y está relacionado con la velocidad angular con la ecuación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Se llama **frecuencia** (f) al número de vueltas que da un móvil con trayectoria circular (u oscilatoria) en un segundo. La frecuencia se relaciona con el período y la velocidad angular con las siguientes ecuaciones:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

  La frecuencia tiene dimensiones físicas de T^{-1} y sus unidades son el s^{-1}, también llamado hertzio (Hz).

- El **número de vueltas** (N) en un movimiento circular arbitrario puede calcularse con la siguiente ecuación (una vez hemos calculado u obtenido el ángulo recorrido $\Delta\varphi$):

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

  N no tiene dimensiones físicas, y por lo tanto es adimensional (no tiene unidades, es un número puro).

Apéndice A

Formulario de TODAS las leyes de los gases(sin enunciados)

1. Ley de Boyle-Mariotte. PV = constante.
2. Ley de Charles. $\frac{V}{T}$ = constante.
3. Ley de Gay-Lussac. $\frac{P}{T}$ = constante.
4. Ley de Avogadro. $\frac{V}{n}$ = constante ó $\frac{V}{N}$ = constante.
5. Ley de Diver.$\frac{P}{n}$ = constante ó $\frac{P}{N}$ = constante.
6. Ley sin nombre. nT = constante ó NT = constante.
7. Ley general de Clapeyron. $\frac{PV}{T}$ = constante.
8. Ley combinada(I). $\frac{PV}{n}$ = constante ó $\frac{PV}{N}$ = constante
9. Ley combinada(II). $\frac{P}{nT}$ = constante ó $\frac{P}{NT}$ = constante
10. Ley combinada(III). $\frac{V}{nT}$ = constante ó $\frac{V}{NT}$ = constante
11. Ley fundamental. $\frac{PV}{nT}$ = constante ó $\frac{PV}{NT}$ = constante
12. Ley o ecuación de estado del gas ideal. $PV = nRT$ ó $PV = Nk_BT$.
13. Ley de Graham. $\sqrt{\frac{MM_1}{MM_2}} = \frac{r_2}{r_1}$ o bien $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \frac{v_2}{v_1}$
14. Ley de las presiones parciales de Dalton. $P_T = \sum_i P_i$, con $P_i = X_iP_T$.
15. Ley de los volúmenes parciales de Amagat. $V_T = \sum_i V_i$.
16. Ley de Henry. $p_i = K_H^{pc} c_i = \frac{c_i}{K_H^{cp}}$.
17. Ley de Raoult. $\Delta p = p_A - p = p_A^* X_s$.
18. Ley del gas real de Van der Waals. $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$.

19. Ley del gas de Chaplygin. $P = \dfrac{A}{\rho}$.

20. Gas de Chaplygin generalizado $P = \dfrac{A}{\rho^{\alpha}}$.

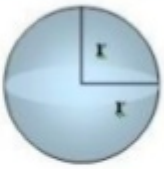
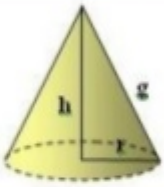
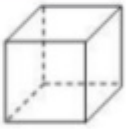
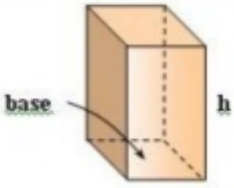
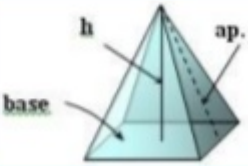
21. Gas de Chaplygin extendido generalizado: $P = \dfrac{A}{\rho^{\alpha}} + B\rho^{\beta}$.

Apéndice B

Anexo. (Hiper)Volúmenes y(e) (hiper)áreas.

ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h+r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6\,a^2$	$V = a^3$
Prisma		A = (perim. base • h) + 2 • area base	V = área base □ h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area bas}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6\,a^2$	$\sqrt{3}\;a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\;a^2$	$5\sqrt{3}\;a^2$	$2\sqrt{3}\;a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}\,a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}\,a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}\,a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}\,a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,a$

Para una $N-$esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \tag{B.1}$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{B.2}$$

$$V_N(R) = R\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+}{2}+1\right)} V_{N-1}(R) \tag{B.3}$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} R^N \tag{B.4}$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \tag{B.5}$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \tag{B.6}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \tag{B.7}$$

$$V_0(R) = 1, \tag{B.8}$$

$$A_0(R) = 2, \tag{B.9}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \tag{B.10}$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \tag{B.11}$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad si \quad n \to \infty \tag{B.12}$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N,R) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} R^N \tag{B.13}$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) = \log\pi + 2\log R \tag{B.14}$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}(\log V(N,R)) = \frac{\log\pi}{2} + \log R - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) \tag{B.15}$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p. Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{B.16}$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p = 2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R) = \left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p = 1$, la norma del "taxicab", o para $p = \infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R) = \frac{2^n}{n!} R^n \tag{B.17}$$

$$V_n^\infty(R) = (2R)^n \tag{B.18}$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i, definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1,\ldots,p_n} = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

Apéndice C

Espacios vectoriales

En Física, un vector es un segmento orientado con magnitud o módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. En Matemáticas, un vector es un objeto abstracto con ciertas propiedades axiomáticas, más concretamente, un elemento $v = \vec{v}$ de una estructura algebraica denominada espacio vectorial $V(+, \cdot, v)$. En el plano (real o complejo), un vector es una pareja de números reales, que con respecto a la base canónica $\vec{i}, \vec{j}$ se expresa de la forma

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{C.1}$$

El módulo de este vector se define como

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{C.2}$$

La base canónica de vectores $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base denominada ortonormal, porque $\vec{i} \perp \vec{j}$, con $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$, siendo además dichos vectores de módulo unidad, es decir $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Una base es un conjunto de vectores cuya combinación lineal produce cualquier elemento del espacio vectorial, y además es el conjunto de dimensión máxima linealmente independiente. El producto escalar de dos vectores se define como la magnitude escalar, respecto de la base canónica:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{C.3}$$

La definición independiente de la base del producto escalar lo asocia al módulo de los vectores y al ángulo que forman dichos vectores en el plano:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{C.4}$$

Los vectores satisfacen las siguientes propiedades axiomáticas respecto de la operación suma + de vectores:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{C.5}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{C.6}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \tag{C.7}$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \tag{C.8}$$

Con respecto a la multiplicación por escalares, un espacio vectorial satisface los axiomas:

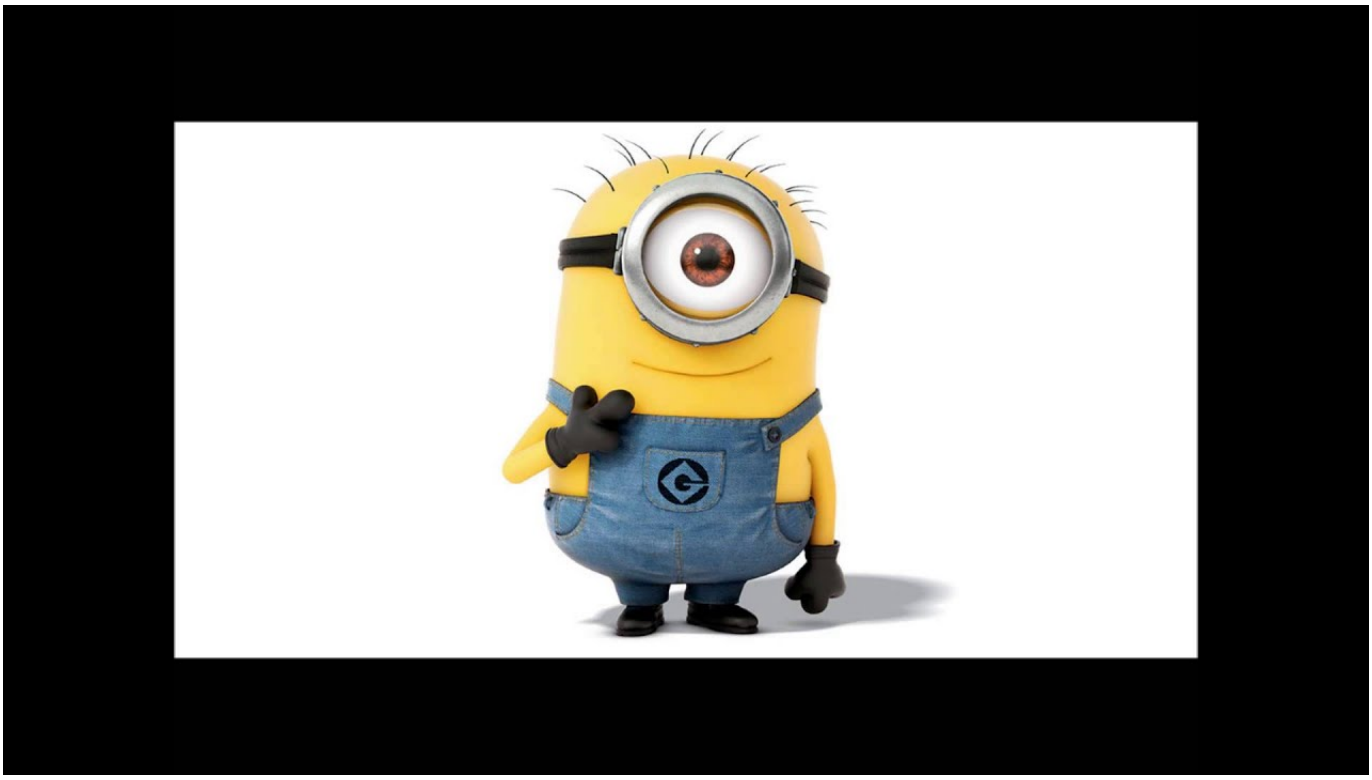
$$\lambda_1\lambda_2\vec{v} = \lambda_1(\lambda_2\vec{v}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{v} \tag{C.9}$$

$$1\vec{v} = \vec{v} \tag{C.10}$$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \tag{C.11}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v} \tag{C.12}$$

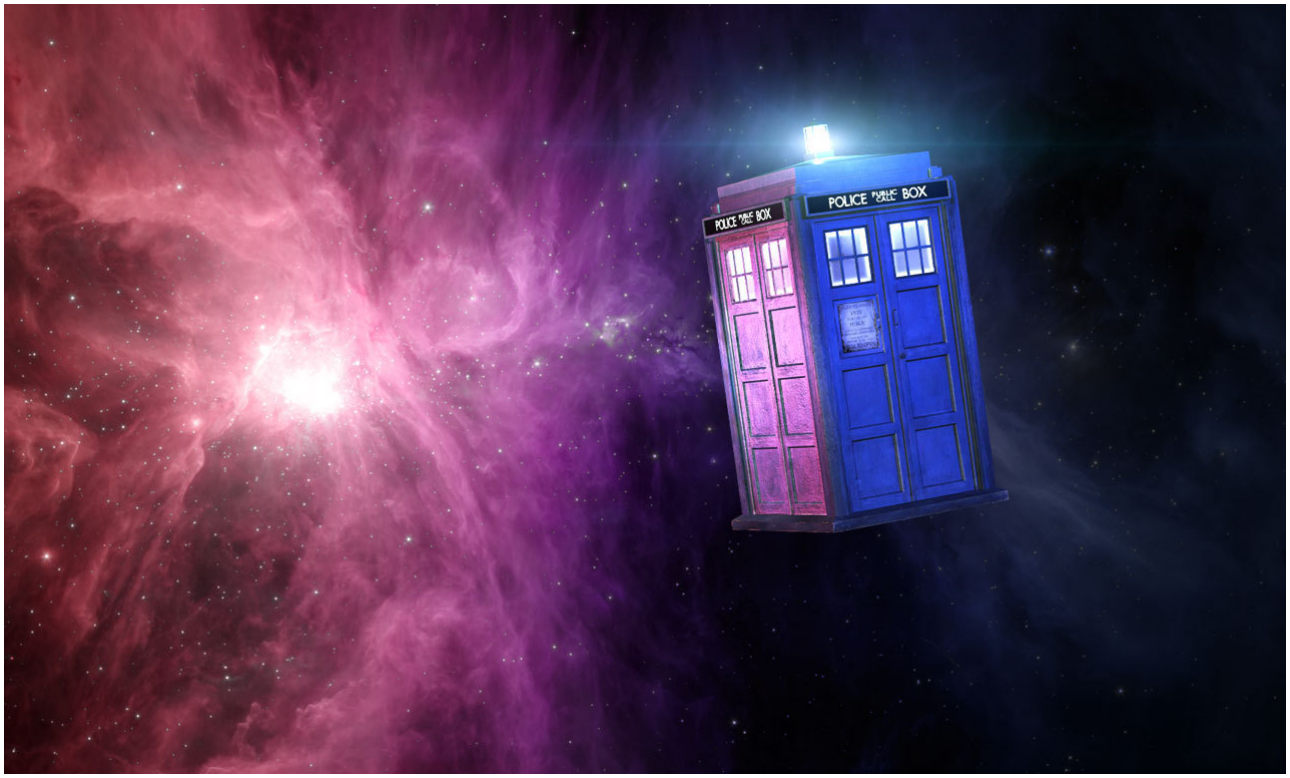
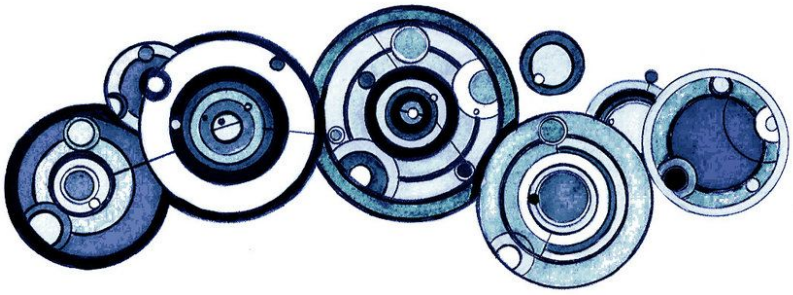
Dos vectores se suman geométricamente haciéndoles coincidir en origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que formarían los vectores. Es la denominada regla del paralelogramo. El módulo de un vector en el plano, respecto de la base canónica, no es más que una forma equivalente del teorema de Pitágoras.



Планета есть колыбель разума, но нельзя вечно жить в колыбели.

Licencia copy-left. La única condición es que se indique su origen para poder usarse. Documento escrito por

Doctor Who?

ϱΔΞΘΣШЖЮ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\blacktriangledown\blacktriangledown\rangle\right) \qquad \oint_{\partial\Sigma}\Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$