Fórmulas de Física 4^{o}ESO: usos

The Strange Doctor

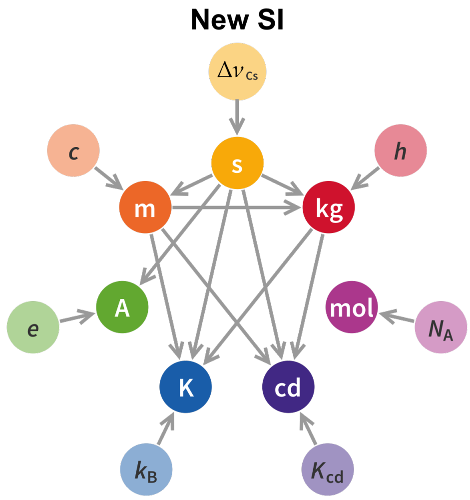
Multiverse of Madness

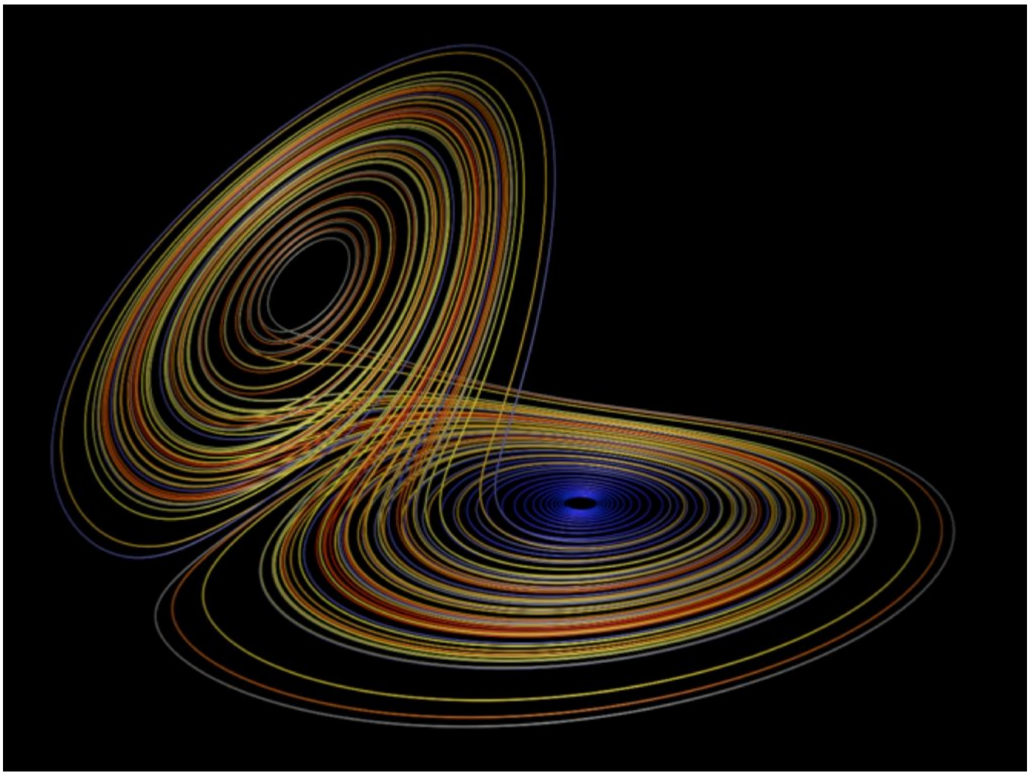
Resumen

Resumen con LaTeX en español de algunas fórmulas y deduccciones del tema de Física: Método Científico, herramientas fismáticas, pictogramas y métodos estadísticos del laboratorio, Cinemática, Dinámica, Ley de Gravitación Universal y de Coulomb, Fluidos, Óptica (opcional), Termodinámica (opcional).

Defining constant	*Symbol*	*Numerical value*	*Unit*
hyperfine transition frequency of caesium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
Planck constant	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
elementary charge	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	lm W^{-1}

Table 1: The seven defining constants of the SI, and the seven corresponding symbols, numerical values, and units





Índice

1. Método científico

1.1. Fundamentos del método

¿Qué es el método científico? En este curso tomamos como definición la siguiente:

Es un PROCEDIMIENTO para la adquisición, organización, comprobación y conservación (preservación) del CONOCIMIENTO. Está basado en la INTUCIÓN, la LÓGICA, el PENSAMIENTO, la RAZÓN Y LA EXPERIENCIA.

En cualquier momento, dicho procedimiento o método comunica o es capaz de comunicar sus resultados, de forma que se revisan y corrigen los posibles ERRORES.

La corrección de errores y de los resultados (o del método) requiere la REPRODUCIBILIDAD y COMPROBACIÓN DE LOS DATOS o conclusiones de forma INDEPENDIENTE.

En cualquier momento del proceso puede producirse la PUBLICACIÓN Y COMUNICACIÓN DE LOS RESULTADOS EN FORMA DE DATOS, o DESCUBRIMIENTOS, Y/O MODELOS/TEORÍAS/LEYES/PRINCIPIOS, incluso AXIOMAS en Matemáticas, O BIEN nuevas hipótesis o CONJETURAS.

En su versión moderna, comenzó con Galileo Galilei: “(...)Egli è scritto in lingua matematica(...)”

El método científico utiliza las Matemáticas desde entonces pero se fundamenta en la observación de la Naturaleza, los fenómenos naturales, las regularidades y anomalías que en ellos se producen. Está originado por la CURIOSIDAD.

En general, podemos considerar que el método científico está formado por una serie de etapas o pasos. A saber:

- 1. OBSERVACIÓN DE LOS FENÓMENOS NATURALES, sus PATRONES LÓGICOS/TEÓRICOS y las anomalías en los mismos.

- 2. ELABORACIÓN DE HIPÓTESIS CIENTÍFICAS, por inferencia o inducción lógica, en ocasiones por pura intución o sentido común, que se pueden comprobar/verificar o refutar/invalidar, mediante SIMULACIONES COMPUTACIONALES Y TEÓRICAS (en ordenadores, computadoras,...),mediante “experimentos mentales”/“thought experiments”/gedanken experiments.
- 3. Diseño y REALIZACIÓN DE EXPERIMENTOS CIENTÍFICOS, que nos proporcionan DATOS experimentales en laboratorios. Los datos son habitualmente NÚMEROS (cantidades) y las magnitudes físicas de los datos son PROPIEDADES(cualidades) que pueden ser medidas o cuantificadas.
- 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS EXPERIMENTALES mediante pensamiento lógico, matemático y razonado o intuitivo. Esto nos lleva a la refutación/invalidación de la/s hipótesis o la COMPROBACIÓN/VERIFICACIÓN de la/s hipótesis o conjeturas.
- 5. ELABORACIÓN DE UN MODELO.
- 6. FORMULACIÓN DE UNA TEORÍA.
- 7. ESTABLECIMIENTO DE LEYES Y PRINCIPIOS.
- 8. ENUNCIADO DE AXIOMAS Y POSTULADOS.

Comentario: Los pasos o etapas del método científico no siguen necesariamente el orden anterior. Por ejemplo, uno puede comenzar con una teoría y estudiar posibles nuevos fenómenos a observar en vez de elaborar la teoría a partir de la síntesis de unos fenómenos u observaciones.

1) Una **conjetura** es un modelo incompleto, o una analogía (comparación) con otro dominio. Ejemplos: el llamado desplazamiento hacia el rojo cosmológico está causado por la luz que pierde energía cuando viaja a través del espacio (conjetura de la "luz cansada"), las leyes de la Física son constantes en el tiempo y el espacio en todo el Universo (hipótesis de universalidad o uniformización), las especies evolucionan a estadios superiores (evolución).

2) Una **hipótesis** (o conjetura verosímil) es un modelo basado en todos los datos de un determinado dominio, sin contraejemplos e incorporando una nueva predicción que debe ser validad por hechos empíricos o experimentales (o bien lógico-formales en un sistema axiomático usado en las Matemáticas). Ejemplos: el envejecimiento mental puede ser retrasado mediante el uso del "úsalo o piérdelo", "el desplazamiento hacia el rojo es un desplazamiento Doppler".

3) Una **teoría** es una hipótesis refrendada o validada con al menos un dato, idea o predicción no trivial. Ejemplos: relatividad, Cosmología del Big Bang, teoría de la Evolución, teoría cinético-molecular, teoría del caos,. . . .

4) Una **ley** es una teoría que ha recibido validación en todas las posibles ramificaciones y formas, y que es conocida y válida hasta cierto nivel de exactitud o aproximación. Ejemplos: Mecánica newtoniana, gravitación universal, ley de Henry, leyes de la Termodinámica.

5) Un **principio** es una ley verificada que usamos, sin demostrar, en la deducción de nuevas hipótesis o conjeturas, de nuevos fenómenos, por el método lógico-matemático-formal.

6) Un **axioma** es una regla matemática aceptada como universalmente cierta o verdadera. Ejemplo: la propiedad conmutativa de la suma, la propiedad distributiva, la existencia de un elemento neutro, el axioma de elección,. . .

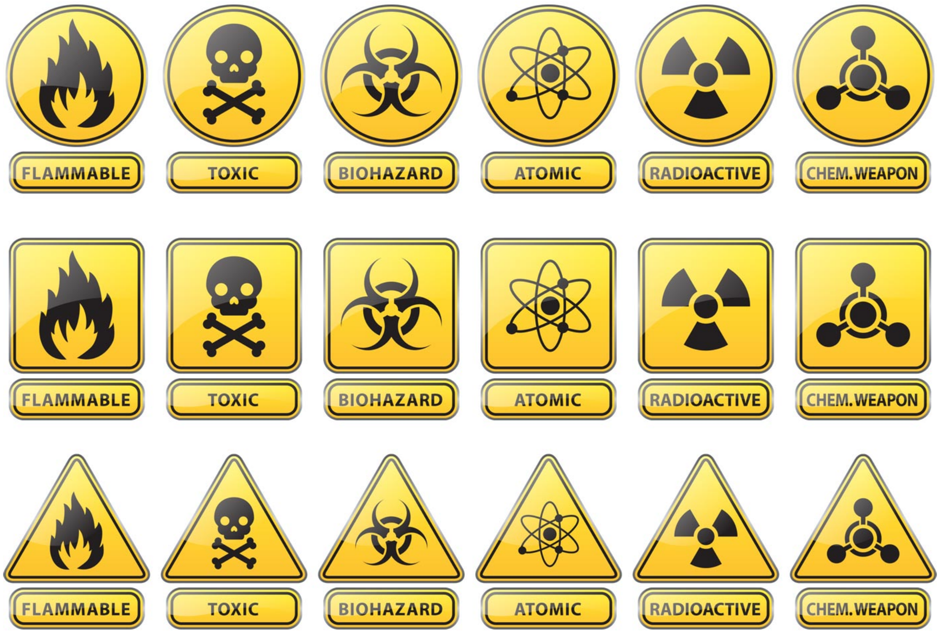
7) Un **modelo** es una representación o "imagen", o aproximación simplificada, simplificación de un sistema (real o imaginario) que usamos para explicar su funcionamiento real (físico) o virtual (imaginario). Ejemplos: Modelo Estándar, Modelo Cosmológico Estándar, Modelo de Capas, Modelo de Bolas, Modelo de Cuerdas, Modelo de Thomson, Modelo de la partícula puntual. . .

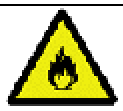
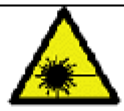
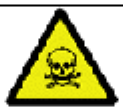
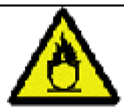
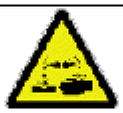
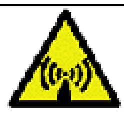
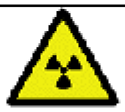
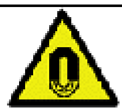
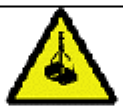
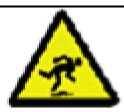
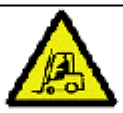
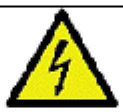
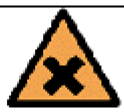
8) **Ciencia** es cualquier área del saber que usa el método científico (y no un sucedáneo) para obtener conocimiento. ¡Rechaza imitaciones! No son ciencias ni la Astrología (sí lo es en cambio la Astronomía), ni la religión, ni sectas como la Cienciología y muchas otras "pseudociencias". Atención: esto no significa que la Ciencia pueda explicarlo todo, ni que ésas otras áreas de la Humanidad como la Religión, la Mitología, o la superchería no puedan tener aplicaciones, en ocasiones bastante terribles. Generalmente las ciencias se dividen en **exactas o naturales** e **inexactas o sociales** (aunque es una división algo ad hoc y tal vez obsoleta ya en los tiempos en que vivimos, cada vez más matematizados).

1.2. Normativas de seguridad. Pictogramas de laboratorio

En todo laboratorio hay unas normas de seguridad que hay que aplicar para evitar accidentes o peligros mortales. Es similar a un trabajo con riesgo por lo que hay legislación al respecto. Además, internacionalmente, hay unos pictogramas de laboratorio que advierten de diferentes peligros a sustancias o situaciones.

A continuación una selección de pictogramas usuales en la vida cotidiana y los laboratorios/trabajos usuales (hay más que estos, como ejercicio pueden buscarse otros pictogramas):



	Materias Inflamables		Peligro en General
	Materias Explosivas		Radiación Láser
	Materias Tóxicas		Materias Comburentes
	Materias Corrosivas		Radiaciones No Ionizantes
	Materias Radioactivas		Campo Magnético Intenso
	Materias Suspendidas		Riesgo de Tropiezo
	Vehículos de Mantenimiento		Riesgo Biológico
	Riego Eléctrico		Materia Nocivas o Irritantes

		bombona de gas	**Gases a presión** en un recipiente (gases comprimidos, licuados o disueltos). Algunos pueden explotar con el calor. Los licuados refrigerados pueden producir quemaduras o heridas relacionadas con el frío, son las llamadas quemaduras o heridas criogénicas.
		Calavera con tibias	**Tóxicos:** sustancias y preparados que, por inhalación, ingestión o penetración cutánea en pequeñas cantidades producen efectos adversos para la salud, Pueden provocar náuseas, vómitos, dolores de cabeza, pérdida de conocimiento e, incluso, la muerte.
		Corrosión	**Corrosivos**: Pueden causar daños irreversibles a la piel u ojos, en caso de contacto o proyección.
Xn Nocivos Xi Irritantes		**Exclamación**	Producen efectos adversos en dosis altas. También pueden producir irritación en ojos, garganta, nariz y piel. Provocan alergias cutáneas, somnolencia y vértigo.
		Peligro par la salud	Pueden ser: Cancerígenos (pueden provocar cáncer); Mutágenos (pueden modificar el ADN de las células); Tóxicos para la reproducción; Pueden modificar el funcionamiento de ciertos órganos, como el hígado, el sistema nervioso, etc., provocar alergias respiratorias o entrañar graves efectos sobre los pulmones..
N		**Medio ambiente**	**Peligroso para el medio ambiente**: presentan o puedan presentar un peligro inmediato o futuro. Provocan efectos nefastos para los organismos del medio acuático (peces, crustáceos, algas, otras plantas acuáticas, etc.). Símbolo en el que no suele existir la palabra de advertencia pero, cuando existe, es siempre: "Atención".

E **Explosivo:** En determinadas condiciones, incluso sin presencia de oxígeno, la sustancia puede detonar o, bajo un calor intenso, explotar.	E **Comburente:** Productos químicos que en contacto con sustancias inflamables producen una reacción fuertemente exotérmica.
F+ **Extremadamente inflamable:** Sustancias que a temperatura y presión normales son inflamables con el aire.	F **Fácilmente inflamable:** Productos que pueden inflamarse con aire a temperatura ambiente o sólidos que quemen con un contacto breve con una llama.
T+ **Muy tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades muy pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.	T **Tóxico:** Productos que por inhalación o ingestión en cantidades pequeñas pueden producir efectos graves o crónicos.
Xn **Nocivo:** Productos que por inhalación, ingestión o penetración cutánea pueden producir efectos graves o crónicos.	Xi **Irritantes:** Productos que en contacto con la piel o la mucosa pueden producir una reacción inflamatoria.
C **Corrosivo:** Productos que en contacto con tejidos vivos, como la piel humana, destruyen el tejido.	N **Peligroso para el medio ambiente:** Sustancias que pueden producir un efecto nocivo al medio ambiente.

1.3. Instrumentos de laboratorio

Un laboratorio de Física hoy día es muy variado, además de poder ser también virtual. Instrumentos posibles de medida: telescopio, microscopios (incluso los electrónicos), manómetro, barómetro, teslómetro, multímetro digital, balanzas, osciloscopios, material de Electrónica y circuitería, klystrons, termómetros, calorímetros, cronómetros, cintas métricas, calibradores, y otros varios son instrumentos usuales y populares en los laboratorios de Física convencionales. En los laboratorios de Química, también en los usuales, podemos encontrar probetas, mecheros Bunsen, pipetas, matraces, reactivos químicos, ... Este dibujo ayuda a entender la tipología de materiales en laboratorios de Química:

2. Herramientas fismáticas

La Física usa las Matemáticas como su lenguaje formal, aunque no es reducible solamente a éste. La Física tiene diferentes áreas con intersección mutua no vacía en varios casos. Una lista no exhaustiva es la siguiente:

- Mecánica. Puede ser Mecánica de partículas y sistemas. Mecánica de fluidos y campos son lo que junto a la de partículas forman la Mecánica clásica.
- Astronomía, Astrofísica y Cosmología. La Radioastronomía, neutrinología y otras ramas recientes como la astronomía de ondas gravitacionales o de rayos cósmicos están incluidos aquí.

- Mecánica Cuántica.
- Óptica.
- Física de ondas.
- Geofísica.
- Físico-Química.
- Física biológica/Biofísica.
- Física de los sistemas complejos.
- Física no lineal.
- Electrónica.
- Electromagnetismo (parte de la Mecánica Clásica).
- Termodinámica.
- Física relativista.
- Física matemática o física teórica.
- Mecánica estadística.
- Física nuclear y de partículas (altas energías).
- Física atómica.
- Física molecular.
- Espectroscopía.
- Radiofísica.
- Teoría de (super)cuerdas y p-branas.
- Relatividad General.

Del estudio del movimiento se encargan dos partes de la Física: la **Cinemática** y la **Dinámica**. Juntas forman la Mecánica Clásica de partículas y sistemas de partículas. El modelo de la partícula puntual es usado habitualmente en Física. Aunque hoy día se pueden usar otros modelos (cuerdas y membranas) hasta cierto punto de sofisticación y entendimiento.

2.1. Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros.

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ...Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \rightarrow Y$, con $y = \phi(X)$.

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).
- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs - 133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs - 133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiaciónde 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

2.1.1. Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770}s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta\nu(Cs-133)}} \tag{1}$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en $1/299792458$ segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458m/s$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs-133)$ como sigue:

$$\boxed{1m = \frac{c}{299792458}s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \approx 30{,}663319\frac{c}{\Delta f(Cs-133)}} \tag{2}$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6{,}62607015\cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J\cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg\cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$\boxed{1kg = \frac{h}{6{,}62607015\cdot 10^{-34}}\frac{s}{m^2} = \frac{299792458^2}{(6{,}62607015\cdot 10^{-34})(9192631770)}\frac{h\Delta f}{c^2} = 1{,}4755214\cdot 10^{40}\frac{h\Delta f_{Cs}}{c^2}} \tag{3}$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1{,}602176634\times 10^{-19}C$ ($1C = 1A\cdot s$)como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1A = \frac{e}{1{,}602176634\times 10^{-19}}s^{-1} = \frac{e\Delta f(Cs-133)}{(1{,}602176634\times 10^{-19})(9192631770)} \approx 6{,}789687\cdot 10^{8}e\Delta f_{Cs}} \tag{4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6{,}02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \frac{1{,}380649 \cdot 10^{-23}}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta f}{k_B} \approx 2{,}2666653 \frac{h\Delta f_{Cs}}{k_B}} \tag{6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I_v ó $\mathcal{J}$. La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmenes por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entree vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683} \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \frac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \approx 2{,}61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2} \tag{7}$$

En el sistema C.G.S. o cegesimal, la unidad fundamental de longitud es el centímetro y la de masa es el gramo. Se mantiene el resto de unidades básicas en general. La dina es la unidad de fuerza, siendo el producto de 1 gramo por $1cm/s^2$ (galileo), dicha unidad de fuerza (1 dina). En el sistema técnico, el kilogramo-fuerza o kilopondio es la unidad de fuerza, manteniéndose el resto de unidades también en general.

2.1.2. Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, 1Å=$10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec=3,26años-luz (lyr)=$3{,}086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1{,}496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M, $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}kg$.

- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA,...)
- Temperatura absoluta Θ, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_v: candela.
- Cantidad de sustancia o materia n: el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales ºC, gradianes (grados centesimalese). $2\pi rad = 360^\circ = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω: estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa M/L.
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.
- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondio o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1Nm$.
- Trabajo o energía: $W = Fd$, ML^2T^{-2}.$1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7 ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2.
- Momento angular ML^2T^{-1}.
- Potencia ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=1J/s. 1 C.V.=$735,4W$.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.

- Tensión superficial M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad η, $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise$\approx 0,1 Pa \cdot s$.
- Número de onda k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D. $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm. ϕ_L. Dimensiones ϕ_L.
- Luminancia B: $\phi_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=$10^4 cd/m^2$.
- Iluminación E: ϕ_L/L^2. lux. Otras: $1phot = 10^4 lux$.
- Módulo del campo gravitacional g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1}, en K^{-1}.
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2}.
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ε: $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m.
- Carga eléctrica: culombio C. $Q = IT$. $1e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}C$.
- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F.
- Módulo de la densidad de corriente j: IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω.
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- Permeabilidad magnética μ. $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss=$10^{-4}T$.
- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber=$1T \cdot m^2$. Otras: 1 maxwell=$10^8 Wb$.
- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted= $10^3/4\pi$ A/m.

- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio= 1 Ci$\approx 3{,}7 \cdot 10^{10} desintegraciones/s$, o también $1Ci = 6{,}14 \cdot 10^{-14} mol/s$.

2.1.3. Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permitividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.
- Constante universal de los gases $R = 8{,}314 J/Kmol$=$0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón $m_e = 0{,}511 keV/c^2 \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$.
- Masa del protón $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1{,}673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón $m_n \approx m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad $g_0(\oplus) = g_\oplus = 9,81 m/s^2$.
- Radio terrestre $R_\oplus = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4ºC, $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.
- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2{,}89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire 1.3kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5{,}67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2} K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2{,}88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96485 C/mol$.

2.2. Potencias de 10 y notación científica

En el S.I., hay unso prefijos universalmente aceptados a nivel internacional de múltiplos y submúltiplos de cualquier unidad en cualquier sistema de unidades:

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^1 = 10$	deca (da)
$10^2 = 100$	hecta (h)
$10^3 = 1000$	kilo (k)
$10^6 = 1000000$	mega (M)
$10^9 = 1000000000$	giga (G)
$10^{12} = 1000000000000$	tera (T)
$10^{15} = 1000000000000000$	peta (P)
$10^{18} = 1000000000000000000$	exa (E)
$10^{21} = 1000000000000000000000$	zetta (Z)
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	yotta (Y)
$10^{27} = 1000000000000000000000000000$	ronna (R)
$10^{30} = 1000000000000000000000000000000$	quetta (Q)
Googol=10^{100}, googolplex=$10^{\text{googol}} = 10^{10^{100}}$	No symbol/sin símbolo

Prefix/Prefijo	Scaling factor
$10^0 = 1$	$\emptyset$: unit/unidad
$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$	deci (d)
$10^{-2} = 1/10^2 = 0{,}01$	centi (c)
$10^{-3} = 1/10^3 = 0{,}001$	mili (m)
$10^{-6} = 1/10^6 = 0{,}000001$	micro (μ)
$10^{-9} = 1/10^9 = 0{,}000000001$	nano (n)
$10^{-12} = 1/10^{12} = 0{,}000000000001$	pico (p)
$10^{-15} = 1/10^{15} = 0{,}000000000000001$	femto (f)
$10^{-18} = 1/10^{18} = 0{,}000000000000000001$	atto (a)
$10^{-21} = 1/10^{21} = 0{,}000000000000000000001$	zepto (z)
$10^{-24} = 1/10^{24} = 0{,}000000000000000000000001$	yocto (y)
$10^{-27} = 1/10^{27} = 0{,}000000000000000000000000001$	ronto (r)
$10^{-30} = 1/10^{30} = 0{,}000000000000000000000000000001$	quecto (q)

Regla mnemotécnica: PEZYRQ-fazyrq para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$\boxed{Z = x.abcdef\cdots 10^{\pm n}}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef\cdots$ son números arbitrarios.

2.3. Cifras significativas (c.s.)

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

2.4. Análisis de datos estadísticos. Teoría, gráficas e informe de resultados (avanzado)

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.

Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.

2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:

1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.

2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.

1. Statistical estimators.

Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{8}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{9}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{10}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{11}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{12}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.

Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{13}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n - 1 \to n$:

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma^2_{x,n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}} = s_n} \tag{14}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n\,(n-1)}}} \tag{15}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{n}} \tag{16}$$

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right) = \sigma^2_{\sigma^2} = \sigma^2\left(\sigma^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{17}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right) = \sqrt{\sigma^2_{\sigma^2}} = \sigma\left(\sigma^2\right) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{18}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma] \longrightarrow P \approx 68{,}3\,\% \sim \frac{1}{3} \tag{19}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma] \longrightarrow P \approx 95{,}4\,\% \sim \frac{1}{22} \tag{20}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}7\,\% \sim \frac{1}{370} \tag{21}$$

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x}-4\sigma, \overline{x}+4\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}994\,\% \sim \frac{1}{15787} \tag{22}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x}-5\sigma, \overline{x}+5\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}99994\,\% \sim \frac{1}{1744278} \tag{23}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x}-6\sigma, \overline{x}+6\sigma] \longrightarrow P \approx 99{,}9999998\,\% \sim \frac{1}{506797346} \tag{24}$$

For a given confidence level $C.L.$ (generally 90 %, 95 %, 98 %, 99 %), the interval width will be: $1{,}645\sigma, 1{,}96\sigma, 2{,}326\sigma, 2{,}576\sigma$.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{25}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:

$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.

$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.

$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{26}$$

If $q = x/y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{27}$$

3C. Error in powers.

With $x \pm \delta x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|} = |n||x^{n-1}|\delta x \tag{28}$$

and if $g = f(x)$, with the error of x being δx, you get

$$\boxed{\delta f = |\frac{df}{dx}|\delta x} \tag{29}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}} \tag{30}$$

or, equivalently, the errors are combined in quadrature (via standard deviations):

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta^2 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta^2 x_n}} \tag{31}$$

since

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{32}$$

for independent random errors (no correlations). Some simple examples are provided:
1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = k\delta x}$.
2nd. $q = \pm x \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \delta y + \cdots}$.
3rd. $q = kx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1|\frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n|\frac{\delta x_n|}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided, the best estimator for the combined mean is a weighted mean with the variance, i.e.,

$$\overline{X}_{best} = \frac{\displaystyle\sum_{i=n}^{n} \frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{33}$$

The best standard deviation from the different combined measurements would be:

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{34}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. There, the standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{35}$$

2.5. Linear fits, least squares

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let (X_i, Y_i) from $i = 1, \ldots, n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with $Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.

We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

Writing $y = \alpha + \beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} \tag{36}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=i}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = r_{xy}\frac{s_y}{s_x} \tag{37}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{38}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \tag{39}$$

$$s_{\alpha}^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\right]\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{40}$$

$$s_{\beta}^2 = \frac{1}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{41}$$

Alternatively, all the above can be also written as follows. Define

$$S_x = \sum x_i \tag{42}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{43}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{44}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{45}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{46}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + \hat{\varepsilon}$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2}\hat{\alpha} = \frac{1}{n}S_y - \hat{\beta}\frac{1}{n}S_x \tag{47}$$

$$s_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n(n-2)}\left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2(nS_{xx} - S_x^2)\right] \tag{48}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{ns_{\varepsilon}^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{49}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2\frac{1}{n}S_{xx} \tag{50}$$

and where the correlation coefficient is

$$r = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nS_{xx} - S_x^2)(nS_{yy} - S_y^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y} \tag{51}$$

or equivalently

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{52}$$

and where s_x, s_y are the corrected sample standard deviations of x, y. To know what $s_{x,y}$ is in a more general setting, we note that the sample mean vector $\bar{\mathbf{x}}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, K.$$

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_K \end{bmatrix} \tag{53}$$

The sample covariance matrix is a “K”-by-“K” matrix

$$\mathbf{Q} = \left[q_{jk}\right]$$

with entries

$$q_{jk} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$\mathbf{Q} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_i. - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i. - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ are. The t-vallue has a Student’s t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for $\hat{\beta}$:

$$\beta \in \left[\widehat{\beta} - s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2},\ \widehat{\beta} + s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where t^*_{n-2} is the $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\gamma = 0{,}05$, then the C.L. is 95 %.

Similarly, the confidence interval for the intercept coefficient $\hat{\alpha}$ is given by

$$\alpha \in \left[\widehat{\alpha} - s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2},\ \widehat{\alpha} + s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where as before above

$$s_{\widehat{\alpha}} = s_{\widehat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_i^{\,2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

2.6. Escalares, vectores y más allá

- Las magnitudes se pueden clasificar en escalares o vectoriales.
- Las magnitudes escalares quedan totalmente especificadas si aparte de la unidad correspondiente, damos un número. Por ejemplo, son escalares la temperatura, la densidad, la masa, el tiempo,...
- Las magnitudes vectoriales necesitan, aparte de un número, especificar una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Matemáticamente, las magnitudes vectoriales son vectores con ciertas propiedades y físicamente pueden visualizarse como segmentos orientados en el espacio. Son vectoriales, exempli gratia, la posición (o el desplazamiento), la velocidad, la aceleración, la fuerza, ...

Curiosidad: existen, además de las magnitudes escalares y vectoriales, otras magnitudes más complicadas. Son los denominados pseudoescalares, los pseudovectores, los tensores y los pseudotensores. También en ciertas teorías se usan cantidades de tipo "espinorial", "twistorial" y otros tipos más sutiles de magnitudes de tipo matemático que no entran en este curso.

Propiedades y operaciones básicas con vectores en el plano. Los vectores, en un sistema cartesiano rectangular de coordendas, se pueden representar por segmentos orientados de tipo

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

con $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\sin\varphi$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. La suma (or resta) de vectores se realiza gráficamente con la ley del paralelogramo, o matemáticamente, si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$, $\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B}$ es tal que:

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j}$$

Además, multiplicar un número por un vector es prolongarlo tantas veces como el número indica (con el signo menos indicando inversión de sentido):

$$\lambda\vec{C} = \lambda C_x\vec{i} + \lambda C_y\vec{j}$$

Entre dos vectores planos también existe un producto llamado producto escalar, que define ortogonalidad y proyecciones:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\varphi$$

y donde

$$|\vec{A}| = +\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$|\vec{B}| = +\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

2.7. Trigonometría básica

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{H} \tag{54}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{H} \tag{55}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B} \tag{56}$$

$$\cos\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{H}{A} \tag{57}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{B} \tag{58}$$

$$\operatorname{co}\tan\alpha = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A} \tag{59}$$

Razones trigonométricas de ángulos más importantes del primer cuadrante (el resto se sacan por simetría mediante circunferencia goniométrica):

$\varphi(^\circ, rad)$	sin	cos	tan
$0, 0$	0	1	0
$30, \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45, \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60, \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90, \pi/2$	1	0	∞

Equivalencia entre radianes y grados

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$$

Identidades trigonométricas notables:

Teorema fundamental

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{co}\sec^2 x$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{60}$$

$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{61}$$

$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{62}$$

$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{63}$$

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{64}$$

$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{65}$$

$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1 - \tan^2(X)} \tag{66}$$

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{2}} \tag{67}$$

$$\cos(X/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos(X)}{2}} \tag{68}$$

$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{1 + \cos(X)}} \tag{69}$$

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1-\cos(2X)}{2} \tag{70}$$
$$\cos^2 X = \frac{1+\cos(2X)}{2} \tag{71}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{72}$$
$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{73}$$
$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{74}$$
$$\sin(X)-\sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{75}$$
$$\cos(X)+\cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{76}$$
$$\cos(X)-\cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{77}$$

2.8. Resolución de ecuaciones básicas de grado 1 y 2

Las ecuaciones lineales de variable real y compleja se resuelven de forma sencilla.
Ecuaciones lineales: $ax+b=c$. Si $a\neq 0 \rightarrow x=\dfrac{c-b}{a}$. Ecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c=0$. La resolución es mediante la conocida fórmula:

$$x_{\pm} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac \text{ es el discriminante.}$$

Si $\Delta>0$, las soluciones son simples y diferente $x_{\pm}$. Si $\Delta=0$, las soluciones son iguales $x_{\pm}=x_{+}=x_{-}=-\dfrac{b}{2a}$. Si $\Delta<0$, las soluciones son simples pero complejas conjugadas (en los complejos). Una ecuación bicuadrática $ax^4+bx^2+c=0$ se resuelve mediante el cambio $z=x^2$. Hay 4 soluciones en general. Hay fórmulas complicadas para la resolución de las ecuaciones de cuarto y tercer grado. Para las de grado quinto o superior, no se puede hacer mediante funciones “elementales”.

2.9. Fórmulas y resultados útiles: miscelánea fismática

2.9.1. Áreas

Rectángulo: $A=bh$
Cuadrado: $A=L^2$
Paralelogramo: $A=bh$
Triángulo: $A=bh/2$
Trapecio de lados paralelos a y b, altura h: $A=\dfrac{(a+b)h}{2}$
Polígono regular de n lados de longitud L: $A=\dfrac{1}{4}nL^2\mathrm{co}\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$
Círculo de longitud $L_c=2\pi R=\pi d$: $A_C=\pi R^2$
Elipse de semiejes a,b: $A=\pi ab$
Cono circular recto de radio R y altura h con generatriz L:
$A=\pi RL=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$
Cilindro circular recto de altura h y radio R: $A=2\pi Rh$

Esfera de radio R: $A = 4\pi R^2$
Sector circular de ángulo θ: $A = R^2\theta/2$
Área de un hipercubo D-dimensional: $A_{D-1} = D!L^{D-1}$

2.9.2. Volúmenes

Paralelepípedo: $V = abc = \det(OA, OB, OC)$
Hiperparalelepípedo, politopo rectangular de lados X_i: $V_n = \prod_i X_i$
Esfera 3d: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Esfera nd: $V_n = \dfrac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Esfera nd, área: $A_{d-1} = \dfrac{dV_n}{dR} = \dfrac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}$
Cilindro recto 3d: $V = \pi R^2 h$
Pirámide de área A y altura h en 3d: $V = \dfrac{Ah}{3}$
Cono circular recto de radio R, altura h: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$
Elipsoide de semiejes a, b, c: $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$
Volumen del toro(toroide) o dónut: $V = 2\pi^2 r^2 R = \pi r^2(2\pi R)$, donde r es el radio del tubo, y R el radio central del dónut.
Volumen del hipercubo nd: $V = L^n$.
Volumen del hipertoro nd isótropo ($R_i = R\forall i$): $V = (2\pi)^n R^n$.

2.9.3. Densidad

Densidades de masa:

$$\rho = \frac{M}{V}, \sigma = \frac{M}{S}, \lambda = \frac{M}{L}$$

Densidades de carga:

$$\rho = \frac{Q}{V}, \sigma = \frac{Q}{S}, \lambda = \frac{Q}{L}$$

Densidades de energía:

$$\rho = \frac{E}{V}, \sigma = \frac{E}{S}, \lambda = \frac{E}{L}$$

Densidades de partículas:

$$\rho = \frac{N}{V}, \sigma = \frac{N}{S}, \lambda = \frac{N}{L}$$

Densidades de cantidad de sustancia (concentración):

$$\rho = \frac{n}{V}, \sigma = \frac{n}{S}, \lambda = \frac{n}{L}$$

2.10. Hipervolúmenes

Otros hipervolúmenes en dimensiones superiores:

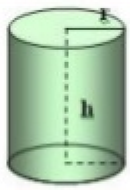
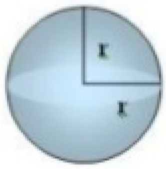
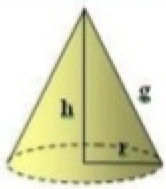
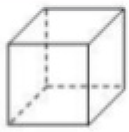
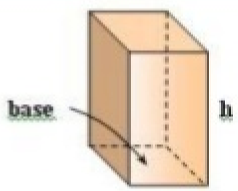
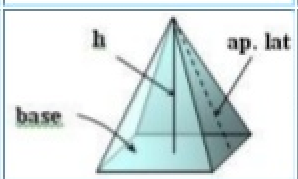
- Hiperesfera (curiosidad “complicada”), hipervolumen e hiperárea ($\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$):

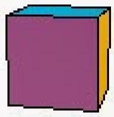
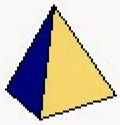
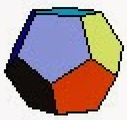
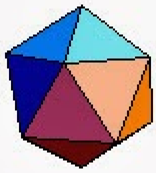
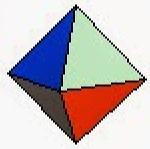
$$V_n = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2}R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad A_n = \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

- Hipercubo o teseracto 4d: $V_4 = L^4$, el n-cubo tiene hipervolumen igual a $V_n = L^n$, donde n es el número de dimensiones del hipercubo. Para el hipertetraedro o n-símplex es una fórmula más rara que se escribe $V_t(n) = \dfrac{L^n}{n!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ es una cantidad llamada factorial de n.

ANEXO 1: CÁLCULO DE VOLÚMENES Y ÁREAS EN DISTINTAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		**A = 6 a^2**	**V = a^3**
Prisma		**A = (perim. base • h) + 2 • area base**	**V = área base □ h**
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area bas}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VÉRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6a^2$	$\sqrt{3}\ a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ a^2$	$5\sqrt{3}\ a^2$	$2\sqrt{3}\ a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

Para una $N-$esfera, se tienen las siguientes recurrencias:

$$V_{N+2}(R) = \frac{2\pi R^2}{N} V_N(R) \tag{78}$$

$$V_N(R) = V_{N-1}(R) \cdot R \cdot B\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{79}$$

$$V_N(R) = R\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+}{2}+1\right)} V_{N-1}(R) \tag{80}$$

$$A_N(R) = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} R^N \tag{81}$$

$$A_N(R) = \frac{d}{dR} V_{N+1}(R) = \frac{n+1}{R} V_{n+1}(R) \tag{82}$$

$$A_{N+1}(R) = 2\pi R V_N(R) \tag{83}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R) \tag{84}$$

$$V_0(R) = 1, \tag{85}$$

$$A_0(R) = 2, \tag{86}$$

$$V_{N+1}(R) = \frac{R}{N+1} A_N(R), \tag{87}$$

$$A_{N+1}(R) = (2\pi R) V_N(R) \tag{88}$$

$$V_n(R) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^n, \quad si \quad n \to \infty \tag{89}$$

El volumen genérico de la N-bola (N-esfera) de radio R es la función

$$V(N,R)=\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}R^{N} \tag{90}$$

El valor máximo para un R fijo viene dado por la solución de la expresión formal

$$\psi\left(\frac{N}{2}+1\right)=\log\pi+2\log R \tag{91}$$

debido a que

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\log V(N,R)\right)=\frac{\log\pi}{2}+\log R-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{N}{2}+1\right) \tag{92}$$

Existen también expresiones para los volúmenes de las esferas en lo que los matemáticos llaman espacios L^p. Son espacios normados, con longitud de un vector dada por la expresión:

$$L=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{93}$$

y una esfera en estos espacios es el conjunto de vectores que es menor o igual a una distancia fija llamada radio de la bola (esfera, hiperesfera). El caso $p=2$ es el caso usual euclidiano, pero otros valores de p son posibles en estos espacios normados generales que ocurren en contextos como teoría de la información, teoría de códigos y regularización dimensional. El volumen de un bola en L^p está dado por la fórmula:

$$V_n^p(R)=\frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

Estos volúmenes satisfacen una relación de recurrencia similar a la

$$V_n^p(R)=\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)R\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}V_{n-1}^p(R)$$

Por ejemplo, para $p=1$, la norma del "taxicab", o para $p=\infty$ (norma máxima), los volúmenes vienen dados respectivamente por:

$$V_n^1(R)=\frac{2^n}{n!}R^n \tag{94}$$

$$V_n^\infty(R)=(2R)^n \tag{95}$$

Estos volúmenes coinciden con los volúmenes del politopo cruzado de n-cuerpos (cross-polytope), y del n-cubo (hypercube), salvo un factor de escala. Aún se puede generalizar todo esto, mediante una bola o (hiper)esfera de Dirichlet. Para números positivos reales p_i, definimos la bola de Dirichlet como el espacio geométrico dado por:

$$B_{p_1,\ldots,p_n}=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n:|x_1|^{p_1}+\cdots+|x_n|^{p_n}\leq 1\}$$

El (hiper)volumen de este objeto viene dado por la expresión matemática:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n})=2^n\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

2.11. Vectores

En Física, un vector es un segmento orientado con magnitud o módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. En Matemáticas, un vector es un objeto abstracto con ciertas propiedades axiomáticas, más concretamente, un elemento $v = \vec{v}$ de una estructura algebraica denominada espacio vectorial $V(+, \cdot, v)$. En el plano (real o complejo), un vector es una pareja de números reales, que con respecto a la base canónica $\vec{i}, \vec{j}$ se expresa de la forma

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{96}$$

El módulo de este vector se define como

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{97}$$

La base canónica de vectores $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base denominada ortonormal, porque $\vec{i} \perp \vec{j}$, con $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, siendo además dichos vectores de módulo unidad, es decir $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Una base es un conjunto de vectores cuya combinación lineal produce cualquier elemento del espacio vectorial, y además es el conjunto de dimensión máxima linealmente independiente. El producto escalar de dos vectores se define como la magnitude escalar, respecto de la base canónica:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{98}$$

La definición independiente de la base del producto escalar lo asocia al módulo de los vectores y al ángulo que forman dichos vectores en el plano:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi \tag{99}$$

Los vectores satisfacen las siguientes propiedades axiomáticas respecto de la operación suma + de vectores:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{100}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{101}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \tag{102}$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \tag{103}$$

Con respecto a la multiplicación por escalares, un espacio vectorial satisface los axiomas:

$$\lambda_1\lambda_2\vec{v} = \lambda_1(\lambda_2\vec{v}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{v} \tag{104}$$

$$1\vec{v} = \vec{v} \tag{105}$$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \tag{106}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v} \tag{107}$$

Dos vectores se suman geométricamente haciéndoles coincidir en origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que formarían los vectores. Es la denominada regla del paralelogramo. El módulo de un vector en el plano, respecto de la base canónica, no es más que una forma equivalente del teorema de Pitágoras.

3. Cinemática

La Cinemática es la parte de la Física que estudia la descripción del movimiento sin atender a las causas que lo producen.

3.1. El movimiento

- **Movimiento.**
  Se llama *movimiento* al cambio de la posición de un móvil o cuerpo respecto de un sistema de referencia con respecto al tiempo.
  Un sistema de referencia está formado por un eje de coordenadas y un punto de origen O. Si no hay movimiento, porque el cuerpo permanece fijo, se dice que estamos en reposo.
  El estado de movimiento es siempre *relativo* a un observador y un concreto sistema de referencia.

- **Posición.** La posición de un objeto es una magnitud fundamental. Es una magnitud vectorial que indica la ubicación de un objeto respecto de un punto tomado como origen en un sistema de referencia concreto.

- **Trayectoria. Espacio recorrido y desplazamiento**. Se llama *trayectoria* al conjunto de todas las posiciones por las que pasa un móvil en su movimiento. El *espacio recorrido* $S = \Delta s = s - s_0$ entre dos puntos es la longitud medida sobre la trayectoria del móvil u objeto desplazado que ha recorrido. El *desplazamiento* es la diferencia entre las posiciones iniciales y final $X = \Delta x = x - x_0$, y se mide en línea recta. Sólo en los movimientos rectilíneos el espacio recorrido coincide con el desplazamiento del objeto, en general. Según la trayectoria, el movimiento puede ser rectilíneo o curvilíneo. Entre los movimientos curvilíneos más importantes destacan los circulares, parabólicos, hiperbólicos y elípticos, pero cualquier tipo de curva puede ser posible en principio.

- **Velocidad.** Se llama *velocidad media* al ritmo de cambio de la posición con respecto del tiempo. Es una magnitud vectorial como la posición. Tiene dimensiones físicas de LT^{-1} y se mide en m/s en el S.I. de unidades. Matemáticamente:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

  Importante: la velocidad es un vector TANGENTE a la trayectoria en cada uno de sus puntos.
  Se llama velocidad instantánea al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado es muy pequeño y "tiende" a cero. Matemáticamente:

$$v = v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

- **Velocidad angular.** Se llama velocidad angular al ritmo de cambio del ángulo respecto del tiempo en un movimiento circular (o curvilíneo más generalmente). Matemáticamente:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$$

  Las dimensiones físicas de la velocidad angular son T^{-1} y se mide en rad/s en el S.I. Hay unas relaciones sencillas entre la velocidad angular y el MCU con la velocidad usual y el MRU.

  Otras unidades comunes de la velocidad angular son las revoluciones por minuto (r.p.m.). La equivalencia entre rad/s y r.p.m. se puede hacer mediante un cambio simple de unidades o por factores de conversión como sigue:

$$1r.p.m. = \frac{1vuelta}{1min} = \frac{1vuelta}{1min}\frac{2\pi \ \ rad}{1vuelta}\frac{1min}{60s} = \frac{2\pi \ \ rad}{60s} = \frac{\pi}{30}rad/s$$

- **Aceleración.** Se llama aceleración media al ritmo de cambio de la velocidad respecto del tiempo. Sus dimensiones físicas son LT^{-2} y se mide en m/s^2 en el S.I. de unidades. Matemáticamente es igual a

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Se llama aceleración instantánea al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado es muy pequeño y "tiende" a cero. Matemáticamente:

$$a = a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

- **Aceleración angular.** La aceleración angular es el ritmo de cambio de la velocidad angular con respecto al tiempo. Matemáticamente se define como sigue:

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

Sus dimensiones físicas son T^{-2} y sus unidades rad/s^2 en el S.I.

- **Radián.** Un radián es el ángulo que abarca una longitud de arco igual al radio de la circunferencia en la que se encuentra inscrito dicho arco. El radián es la unidad fundamental de ángulo y desplazamiento angular en el S.I. y no tiene dimensiones físicas. Su símbolo es rad. La equivalencia entre radianes, grados sexagesimales y centesimales (gradianes) es como sigue

$$\boxed{2\pi \ \ rad = 360^\circ = 400^g}$$

- **Aceleración centrípeta, aceleración tangencial y aceleración total.** En los movimientos circulares (y también en los generales curvilíneos) se pueden definir diferentes nociones o conceptos de aceleración. Incluso pese a que en módulo o "valor numérico" la velocidad lineal es constante en un MCU, en dicho movimiento existe una aceleración llamada aceleración normal o centrípeta que mide el cambio de la dirección de la velocidad. Matemáticamente esta aceleración es igual a

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

En un MCUA, además de aceleración centrípeta, hay aceleración tangencial. Esta aceleración vale

$$a_t = \alpha R$$

en donde α es la aceleración angular y R es el radio de la circunfurencia. La aceleración total se calcula usando el teorema de Pitágoras sobre a_c y a_t, para obtener:

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2$$

- **Caracterización simple de los estados de reposo y tipos de movimiento estudiados.**

Reposo (respecto observador fijo): $X = x_0 = constante$, $v = 0m/s$, $a = 0m/s^2$.

MRU (respecto un sistema de referencia concreto): $X \neq constante$, $v = constante$, $a = 0m/s^2$.

*MRU*A (respecto un sistema de referencia concreto): $X \neq constante$, $v \neq constante$, $a = constante$.

Movimiento variado (acelerado no uniformemente): $X \neq constante$, $v \neq constante$, $a \neq constante$.

MCU: $s \neq constante$, $\varphi \neq constante$, $\omega = constante$, $\alpha = 0$,
$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = constante$, $a_t = 0$.

MCUA: $s \neq constante$, $\varphi \neq constante$, $\omega \neq constante$, $\alpha = 0$,
$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \neq constante$, $a_t = constante \neq 0$, $a^2 = a_c^2 + a_t^2$.

Los movimientos se clasifican según la trayectoria en rectilíneos o curvilíneos, como hemos visto ya antes, y según haya o no aceleración en acelerados y no acelerados. Si la aceleración no es constante, el movimiento se llama variado. Si el movimiento tiene aceleración constante se llama uniformemente acelerado (la aceleración puede ser positiva o negativa, si ésta es de frenado). Si la aceleración es nula, el movimiento se denomina uniforme. En un MCU hay una aceleración, sin embargo, debido al cambio del vector velocidad con la dirección (aceleración normal o centrípeta). En el MRU y el MCU son constantes, respectivamente, la velocidad lineal (velocidad media, que coincide con la instantánea) y la velocidad angular. El reposo puede verse como un caso especial de MRU respecto de un sistema de referencia determinado. Además, hay unas relaciones o analogías (similitudes) entre el MRU y el MCU, y entre el MRUA y el MCUA a nivel de ecuaciones.

- Se llama **período** (T) (o revolución) en un movimiento circular (y también en los llamados movimientos oscilatorios o vibratorios/ondulatorios) al tiempo que tarda en dar una vuelta completa el móvil. Se mide en segundos y está relacionado con la velocidad angular con la ecuación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Se llama **frecuencia** (f) al número de vueltas que da un móvil con trayectoria circular (u oscilatoria) en un segundo. La frecuencia se relaciona con el período y la velocidad angular con las siguientes ecuaciones:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

  La frecuencia tiene dimensiones físicas de T^{-1} y sus unidades son el s^{-1}, también llamado hertzio (Hz).

- El **número de vueltas** (N) en un movimiento circular arbitrario puede calcularse con la siguiente ecuación (una vez hemos calculado u obtenido el ángulo recorrido $\Delta\varphi$):

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

  N no tiene dimensiones físicas, y por lo tanto es adimensional (no tiene unidades, es un número puro).

El límite de las velocidades media o de la aceleración media, cuando el intervalo considerado se hace infinitesimal son las magnitudes llamadas velocidad y aceleración instantáneas. Un análisis más detallado de las mismas requiere el aprendizaje de las herramientas del cálculo infinitesimal (desarrollado por Leibniz y Newton), para determinar las funciones derivadas o integrales de las magnitudes infinitesimales.

3.2. M. R. U.

En 1D (1 dimensión), las ecuaciones del M.R.U. son las siguientes:

$$a = 0m/s^2 = \text{constante} \qquad (108)$$

$$v = (\text{constante}) \;\; m/s \qquad (109)$$

$$x = x_0 + v(t - t_0) \;\; m \leftrightarrow \Delta x = v\Delta t \;\; m \qquad (110)$$

La trayectoria es, por tanto, una recta y no hay aceleración.

3.3. M. R. U. A.

Para aceleración constante, el MRUA tiene ecuaciones

$$a \neq 0m/s^2 = \text{constante} = a_0 \;\; m/s^2 \tag{111}$$
$$v \neq (\text{constante}) \longrightarrow v = v_0 + a(t - t_0)m/s \leftrightarrow \Delta v = a\Delta t \;\; m/s \tag{112}$$
$$x = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \;\; m \leftrightarrow \Delta x = v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \;\; m \tag{113}$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \;\; m^2/s^2 \leftrightarrow \Delta(v^2) = 2a\Delta x \;\; m^2/s^2 \tag{114}$$

3.4. M. C. U. (y M. A. S. como ampliación)

El MCU es un movimiento de trayectoria circular y aceleración tangencial cero, pero tiene aceleración centrípeta o normal no nula.

$$\alpha = 0rad/s^2 = \text{constante} \tag{115}$$
$$\omega = (\text{constante}) \;\; rad/s \tag{116}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) \;\; rad \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t \;\; rad \tag{117}$$
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \;\; m/s^2 \neq 0(\text{constante}) \tag{118}$$
$$s = \varphi R \;\; m \leftrightarrow \Delta s = \Delta\varphi R, \Delta s \neq (constante) \;\; \text{pero} \;\; R = \text{constante} \tag{119}$$
$$v = \omega R \;\; m/s \;\; v = constante \tag{120}$$
$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \tag{121}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \;\; s \tag{122}$$
$$f = \frac{1}{T} \;\; s^{-1}(Hz) \tag{123}$$
$$\omega = 2\pi f \;\; rad/s \tag{124}$$

Si se proyecta el M.C.U. sobre el eje X ó Y, o en general cualquier eje oblícuo de referencia, se obtiene un movimiento denominado movimiento armónico simple (M.A.S.). Este movimiento tiene como ecuaciones:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{125}$$
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{126}$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{127}$$

La amplitud es la máxima elongación $x(t)$ (seria el radio en un M.C.U.). La velocidad angular es constante. La fase inicial φ_0 es dependiente de las condiciones iniciales.

Tanto en el MCU como en el MAS hay unos conceptos básicos: elongación y amplitud, frecuencia angular (ω) y frecuencia f (número de vueltas u oscilaciones por segundo). El período T es el tiempo en dar una vuelta o hacer una oscilación completa, que se calcula con

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \tag{128}$$

Las unidades de ω son rad/s, r.p.m. ó c.p.s., las unidades de f son los hertzios (Hz), donde $1Hz = 1s^{-1}$. La energía del MCU o del MAS es constante (teorema de conservación de la energía mecánica).

3.5. M. C. U. A. (ampliación)

$$\alpha \neq 0 rad/s^2 = \text{constante} \tag{129}$$
$$\omega \neq (\text{constante}) \longrightarrow \omega = \omega_0 + a(t - t_0) rad/s \leftrightarrow \Delta\omega = \alpha\Delta t \quad rad/s \tag{130}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad rad \leftrightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \quad rad \tag{131}$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \quad rad^2/s^2 \leftrightarrow \Delta(\omega^2) = 2\alpha\Delta\varphi \quad rad^2/s^2 \tag{132}$$
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad m/s^2 \neq 0(\text{no constante}) \tag{133}$$
$$a_t = \alpha R \quad m/s^2(\text{constante}) \tag{134}$$
$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \quad m^2/s^4(\text{aceleración total no constante}) \tag{135}$$
$$a^2 = R^2(\omega^4 + \alpha^2) \quad m^2/s^4(MCUA) \tag{136}$$

3.6. El tiro vertical y la caída libre

Tiro vertical desde una algura h_0 (ecuaciones):

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{137}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{138}$$

$$a(t) = -g \tag{139}$$

Tiempo en alcanzar altura máxima:

$$t_{h_m} = \frac{v_0}{g}$$

Altura máxima que alcanza:

$$h_m = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Tiempo en volver al suelo si $h_0 = 0$:

$$t_s = 2t_{h_m} = \frac{2v_0}{g}$$

Tiempo que tarda en volver al suelo si $h_0 \neq 0$:

$$t_s = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{2g}$$

Desde una altura inicial h_0, la caída libre $v_0 = 0$ da un tiempo de caída al suelo $h(t) = 0$:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

La velocidad de llegada al suelo es

$$v_s = -\sqrt{2gh_0}$$

3.7. Otros movimientos

Además del MRU, MCU, MRUA, MCUA, MAS, la caída libre o tiro vertical, existen movimientos compuestos más complicados. Los movimientos curvilíneos generales requieren técnicas matemáticas avanzadas. Hay movimientos elípticos, parabólicos e hiperbólicos, movimientos helicoidales, movimientos lemniscáticos y otros muchos otros.

4. Dinámica

La Dinámica es la parte de la Física que estudia el movimiento atendiendo a las causas que lo producen.

4.1. Relatividad y Galileo

Galileo fue el original inventor de la relatividad del movimiento. El principio de independencia del movimiento de Galileo señala que en un movimiento compuesto, da igual que las componentes actúen simultánea o separadamente. El movimiento de cuerpos que se mueven con velocidad relativa constante entre sí es relativo al observador. Este principio se llama Principio de relatividad de Galileo.

4.2. Las leyes de la Dinámica de Newton

Se llama masa inercial a la resistencia que ofrece un cuerpo a ser acelerado por diferentes fuerzas. Los agentes capaces de alterar el estado de MRU o reposo de un cuerpo se llaman fuerzas. Hay fuerzas de contacto y fuerzas a distancia. Newton enunció las siguientes 3 leyes de la Dinámica:

Primera ley de Newton o principio de inercia de Galileo

Si un cuerpo se encuentra en reposo o en MRU, este permanece en reposo o MRU mientreas NO actúe ninguna fuerza. Los sistemas que se mueven respecto de otros con velocidad constante se llaman sistemas inerciales.

Segunda ley de Newton o ley fundamental de la Dinámica

La resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo o sistema, es igual a la variación de momento lineal $p = mv$ de un cuerpo respecto del tiempo. Si la masa permanece constante, dicha resultante y variación temporal de momento equivale el producto de la masa por la aceleración del sistema o cuerpo. Matemáticamente:

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}} \tag{140}$$

Tercera ley de Newton o principio de acción y reacción

Si un cuerpo A actúa sobre otro B, éste reaccionará instantáneamente con una fuerza igual y sentido opuesto. Matemáticamente:

$$\boxed{\vec{F}(A \rightarrow B) = -\vec{F}(B \rightarrow A)} \tag{141}$$

4.3. El plano inclinado

Un ejemplo típico de aplicación de leyes de Newton es el plano inclinado (con o sin fuerzas de rozamiento). Si excluimos el caso de rozamiento en el plano, la caida de un cuerpo de masa M por un plano inclinado de ángulo φ será tal que, usando el sistema de referencia solidario al cuerpo en el plano, obtendremos:

$$P_x = Mg\sin\varphi = Ma \rightarrow a = g\sin\varphi \tag{142}$$

y la fuerza normal en la superficie es $N = P_y = mg\cos\varphi$.

4.4. Trabajo, energía y potencia

Trabajo

Se llama trabajo a la magnitud que mide la eficiencia del transporte una distancia dada por parte de una fuerza. Matemáticamente, el trabajo realizado por una fuerza de módulo F, que forma un ángulo φ con el desplazamiento $\Delta x = D$ es igual a:

$$W = \Delta E = F \Delta x \cos \varphi \tag{143}$$

La unidad de trabajo son los julios (J) en el S.I. y los ergios (erg) en el C.G.S. Hay otras unidades de energía posibles. Energía es capacidad de realizar trabajo por una fuerza.

El trabajo necesario para cambiar la velocidad de una partícula es la energía cinética. En el caso no relativista usual, la variación de energía cinética vale:

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right) \tag{144}$$

Cuando el trabajo que realiza una fuerza no depende del camino realizado sino solamente de su ubicación en el espacio, se habla de fuerzas conservativas. La energía potencial gravitacional a baja altura, y la energía potencial recuperadora de un muelle son respectivamene:

$$E_p(g) = mgh \tag{145}$$

$$E_p(el) = \frac{1}{2} kx^2 \tag{146}$$

y para fuerzas conservativas

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p \tag{147}$$

y se conserva la energía mecánica $E_m = E_c + E_p$, i.e., $\Delta E_m = 0$.

Potencia

Se llama potencia de una fuerza al ritmo de cambio o variación temporal de la energía o trabajo por unidad de tiempo:

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\Delta r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \tag{148}$$

La unidad de potencia son los vatios (W) en el S.I. El kWh es una unidad de energía igual a 3.6 MJ.

5. Gravitación y Electrostática

5.1. Leyes de Kepler

Primera ley de Kepler o ley de las órbitas

Los planetas o cuerpos celestes siguen órbitas elípticas, con el sol en unos de sus focos:

$$r = \frac{\mathcal{P}}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{149}$$

Segunda ley de Kepler o ley de las áreas

Los planetas o cuerpos celestes se mueven de forma que el radiovector que une el sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, i.e., la velocidad AREOLAR es constante

$$V_A = \frac{\Delta A}{\Delta t} = RV = \text{constant} \tag{150}$$

La velocidad areolar se mide en m^2/s.

Tercera ley de Kepler o ley de los períodos

Los planetas o cuerpos celestes se mueven de forma que el cuadrado de los períodos de revolución es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse (distancia media planeta-sol, si tomamos aproximación cuasicircular):

$$T^2 = kR^3 = \frac{4\pi^2}{G_N M} R^3 \tag{151}$$

La constante de proporcionalidad depende de la constante de gravitación universal y la masa de los cuerpos orbitantes (corrección de Newton incluida aquí).

5.2. Ley de Gravitación Universal

De las leyes de Kepler se puede inferir una unificación de la Mecánica terrestre y celeste. Newton dedujo la Ley de Gravitación Universal siguient

Ley de Gravitación Universal de Newton

Dos cuerpos de masas M_1 y M_2 arbitrarios en el Universo se atraen con una fuerza es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia relativa entre los cuerpos. Matemáticamente:

$$\boxed{\vec{F}_N = -G_N \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_r} \tag{152}$$

y donde $G_N = 6{,}674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ $(kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2})$ es la constante de gravitación universal de Newton, que fue determinada por Cavendish en primer lugar usando una balanza de torsión. Es importante notar que, a priori, la masa gravitacional no tiene por qué ser igual a la masa inercial. Es un hecho profundo, denominado principio de equivalencia, que las masa inercial y la carga o masa gravitacional sean iguales.

5.3. Ley de Coulomb

Ley de Coulomb de la electrostática de partículas

Dos cuerpos de cargas Q_1 y Q_2 arbitrarios en el Universo se atraen (cargas de distinto signo) o se repelen (cargas de igual signo) con una fuerza es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia relativa entre los cuerpos. Matemáticamente:

$$\boxed{\vec{F}_C = K_C \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r} \tag{153}$$

y donde $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$ es la constante de Coulomb, que está relacionada con la permitividad dieléctrica del espacio vacío. Nótese la semejanza formal entre la ley de Coulomb y la de Newton de la gravitación.

6. Fluidos (opcional)

6.1. Noción de fluido

Un fluido es cualquier sistema de partículas o campo cuyos constituyentes se adaptan a la forma del recipiente entorno que lo contiene. Generalmente, los fluidos habituales son líquidos o gases, aunque un vidrio u otros sistemas exóticos también pueden fluir. Fluir también proporciona la propiedad de difundirse a través de orificios (efusión). Hay toda una rama de la Física que estudia las propiedades diversas y complejas de todos los fluidos.

6.2. Presión

Presión

Se llama presión a la magnitud que mide la fuerza ejercida por unidad de superficie. Matemáticamente:

$$\boxed{P = \frac{F}{S}} \tag{154}$$

En el S.I., las unidades de presión son los pascales $1Pa = 1N/m^2$. Hay otras unidades de presión habituales como el bar, la atm, el mmHg, el torr, las psis y otras varias.

6.3. Presión hidrostática

Presión hidrostática

Es la presión que experimenta un cuerpo sumergido una profundidad h en un fluido bajo la acción de la gravedad de las partículas: Matemáticamente:

$$\boxed{P_h = \rho \cdot g \cdot h} \tag{155}$$

y donde ρ es la densidad del fluido.

6.4. Principios de Pascal y Arquímedes. Empuje

Principio de Pascal

En un fluido incompresible, la presión en cualquier punto del fluido es constante, de forma que la fuerza por unidad de área o superficie será:

$$P = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \tag{156}$$

Principio de Arquímedes

En un fluido, y bajo cierta incomprensibilidad, todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y ascendente igual al peso del fluido desplazado o desalojado por el cuerpo. Matemáticamente:

$$E = P_f = m_f g = \rho_f V g \tag{157}$$

Se llama peso aparente de un cuerpo a la diferencia del pero real con el empuje: $P_a = P - E$. Un cuerpo flotará en un fluido si $P_a = P - E < 0$, i.e., si $E > P$. Estará en equilibrio si $P = E$, y se hunde si $P > E$, i.e si $P_a > 0, P > E$. Este principio de Arquímedes, eureka, permite identificar naturaleza de sustancias y también determinar la fracción de volumen que está sumergida en un fluido si flota en equilibrio:

$$\boxed{\frac{V_s}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_f}} \tag{158}$$

7. Óptica (opcional)

7.1. Ley de la reflexión

Ley de la reflexión

Los ángulos incidentes y reflejado en una reflexión de un rayo son iguales.

$$\theta_i = \theta_r$$

7.2. Ley de la refracción

Ley de la reflexión

Los ángulos incidentes y refractado satisfacen la ley de Snell:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

y donde el índice de refración es $n_i = c/v_i$.

7.3. Otros fenómenos ópticos

Hay fenómenos ópticos no lineales, pero también interferencia, reverberación, difracción, absorción y otros varios.

8. Termodinámica (opcional)

La Termodinámica es una Ciencia fundamental que es parte de la Física. Estudia los fenómenos de transferencia de energía, otrora llamado calor. Calor es hoy día entendido como energía en tránsito.

8.1. Calor, energía, temperatura, entropía

Calor es energía en tránsito. La equivalencia mecánica de la antigua unidad de calor es $1cal = 4{,}186J$. La energía cinética está relacionada con la temperatura via la teoría atómico molecular:

$$E_c = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$$

donde T es la temperatura absoluta y $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}J/K$ es la constante de Boltzmann. Boltzmann también relaciona entropía con número de microconstituyentes mediante su ecuación $S = k_B \ln\Omega$. Hipotéticamente hablando, el cero absoluto $T = 0K$ correponde a energía cinética media nula (cese del movimiento atómico y molecular) y al estado donde habría entropía nula (tercer principio de la Termodinámica; la Mecánica Cuántica también indica que es imposible por las fluctuaciones del vacío alcanzar exactamente el cero absoluto de temperatura). La entropía se asocia al "desorden", pero es mejore entenderla como magnitud que mide la información o número de configuraciones compatibles con cierto estado macroscópico. Algo que tiene entropía, tiene temperatura y viceversa. Es decir, un sistema con microestados, puede calentarse y enfriarse.

8.2. Calor por cambio de temperatura

Calor y variación de temperatura

El calor de una sustancia que experimenta una variación de temperatura dada, es la transferencia de energía producida al multiplicar dicha variación de temperatura por la capacidad calorífica (o bien por la masa y el calor específico). Matemáticamente:

$$\boxed{\Delta Q = C\Delta T = mc_e\Delta T = C(T_2 - T_1) = mc_e(T_2 - T_1)} \tag{159}$$

Las unidades de C son J/K, y las de c_e son $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

8.3. Calor latente por cambio de estado

Calor y calor latent

El calor de una sustancia que experimenta transición de fase es igual al producto de la masa por el calor latente de cambio de estado. Matemáticamente:

$$\boxed{\Delta Q = mL} \tag{160}$$

Las unidades de L son J/kg.

8.4. Temperatura de equilibrio

Cuando dos o más cuerpos se ponen en contacto (a diferentes temperaturas), hay una transferencia de calor hasta que se alcanza la temperatura de equilibrio. Matemáticamente:

$$\boxed{\sum_i \Delta Q_i = 0 \leftrightarrow \Delta Q_a = -\Delta Q_c} \tag{161}$$

De esta ecuación, incluyendo o no calores latentes, se deduce en general una ecuación lineal que permite calcular la temperatura final de equilibrio T_e.

8.5. Leyes de la Termodinámica

Leyes de la termodinámica

- **Principio cero**: en equilibrio, existen una magnitud denominada temperatura, que es constante.
- **Primer principio**: en cualquier sistema, la variación de energía interna es igual a la suma de calor absobido o cedido y de trabajo del sistema.
- **Segundo principio**: en cualquier sistema aislado, la entropía total del Universo no disminuye, solo puede mantenerse constante o aumentar.
- **Tercer principio**: en cualquier sistema, el cero absoluto es inalcanzable.

Se especula con un cuarto (quinto principio) que indicaría que la temperatura no puede superar la temperatura máxima, llamada temperatura de Planck o de Hagedorn en ciertos contextos teóricos.

8.6. Termodinámica y agujeros negros (opcional)

Leyes de la termodinámica de agujeros negros

- **Principio cero**: en todo agujero negro en equilibrio, existen una magnitud denominada gravedad superficial, que es constante.
- **Primer principio**: en cualquier agujero negro, la variación de energía interna es igual

$$dU = TdS - pdV + \sum \mu dN$$

- **Segundo principio**: en cualquier agujero negro aislado o combinado, el área total del horizonte no disminuye, solo puede mantenerse constante o aumentar.
- **Tercer principio**: en cualquier agujero negro, la gravedad superficial no puede reducirse a cero.

Se especula con un cuarto (quinto principio) que indicaría que la temperatura no puede superar la temperatura máxima, llamada temperatura de Planck o de Hagedorn en ciertos contextos teóricos. La temperatura de un agujero negro (sin rotación o cargas) está dada por la fórmula de Hawking

$$T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M k_B}$$

y su entropía es

$$S(BH) = \frac{1}{4}\frac{A(BH)}{L_p^2}$$

y donde el área del BH es $A = 4\pi R_S^2$, $R_S = 2G_N M/c^2$, con $L_p^2 = G_N \hbar/c^3$ la longitud de Planck.

9. Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es $\mathbb{C}$, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación de n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas. . .

9.1. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}} \tag{162}$$

9.2. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida “en general”. Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

  $$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

  $$x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \dfrac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

9.3. Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

9.3.1. Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a "discriminant" whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the "irreducible case" of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- "Eliminate the square term" by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3v^3 = -p^3/27$$

  Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

  with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

  In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

  this entails finding the cube roots of complex numbers.

  Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

  for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution x = 1 in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

9.3.2. Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

$$x_3 = -\frac{S + T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2 d - 2b^3}{54a^3}$$

9.3.3. Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$
$$ST = -Q$$
$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$
$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S + T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that m+nm+nm+n must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$
$$y_2 = Sw + Tw^2$$
$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions.
Q.E.D.

9.3.4. Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q, R, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

9.4. Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

9.4.1. Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

9.4.2. Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.
- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.
- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación $Q(z)=0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2. Esto da dos soluciones:

$$z=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0(a_2-2ma_0)}}{2a_0}=-\frac{a_1}{2a_0}\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2}-\frac{(a_2-2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada z, z_1, z_2, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2-zx+m=0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z)=0$,:

$$x=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

9.4.3. General quartic

Solution of $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

with $a\neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4+px^2+qx+r=0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2}=-\frac{b}{4a}-S\pm\frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p+\frac{q}{S}} \tag{163}$$

$$x_{3,4}=-\frac{b}{4a}+S\pm\frac{1}{2}\sqrt{-4S^2-2p-\frac{q}{S}} \tag{164}$$

$$p=\frac{8ac-3b^2}{8a^2} \tag{165}$$

$$q=\frac{b^3-4abc+8a^2d}{8a^3} \tag{166}$$

and where

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p+\frac{1}{3a}\left(Q+\frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{167}$$

$$Q=\sqrt[3]{\frac{\Delta_1+\sqrt{\Delta_1^2-4\Delta_0^3}}{2}} \tag{168}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0=c^2-3bd+12ae \tag{169}$$

$$\Delta_1=2c^3-9bcd+27b^2e+27ad^2-72ace \tag{170}$$

and $\Delta_1^2-4\Delta_0^3=-27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for "Q", any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

Doctor Who?

ϱΔΞΘΣШЖЮ

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\heartsuit\heartsuit\rangle + |\varheartsuit\varheartsuit\rangle\right) \qquad \oint_{\partial\Sigma}\Theta = \int_{\Sigma} d\Theta$$