EL PRODUCTO VECTORIAL

Juan Francisco González Hernández **

Resumen

Se desarrolla una exposición histórica del origen de la operación que llamamos producto vectorial, destacándose los problemas y conceptos matemáticos que llevaron a su introducción en el Álgebra. Se incluye una descripción de las más destacadas y representativas aplicaciones de este producto en Física y Matemáticas, así como una visión general de las diferentes alternativas para generalizar este producto a espacios de más dimensiones. Finalmente, se discute acerca de la mejor manera de introducir este concepto a nivel teórico y práctico en los últimos cursos de la E.S.O. y en Bachillerato, destacándose algunos puntos pedagógicos y didácticos que pueden ser de interés práctico.

Índice

*✉: jfgh.teorfizikisto@gmail.com
**URL: http://thespectrumofriemannium.wordpress.com/

1. Introducción

La tercera operación aritmética básica, el producto, es en Matemáticas y en Física una de las fuentes de mayores sorpresas. Para números convencionales, tales como los números reales, $\mathbb{R}$, la definición del producto no presenta ningún problema, ya que simplemente es cuestión de una extensión *trivial* de las reglas para el producto que tenemos en los números enteros, $\mathbb{Z}$, y los racionales, $\mathbb{Q}$.

Sin embargo, todos nos hemos enfrentado alguna vez a la dificultad intrínseca que plantea el producto y su operación inversa, la división, en cuerpos o estructuras algebraicas más generales. Los ejemplos típicos que hoy día se enseñan en la E.S.O. y Bachillerato comprenden dos casos importantes: el álgebra vectorial y el álgebra matricial. El concepto de producto de dos vectores, o de dos matrices, es algo inherentemente complicado y sorprendente cuando se ve por primera vez. Esta ha sido las principales motivaciones, junto a la vertiente histórica, hoy totalmente arrinconada por desgracia, la que nos ha llevado a la realización de este trabajo. El conocimiento de los pasos lógicos que históricamente llevaron a sentar las bases del cálculo vectorial y tensorial por un lado, y por otro del Álgebra, tienen gran importancia para profundizar en el concepto sobre el cual, de una u otra forma, descansan la mayor parte de aplicaciones útiles: la noción de ***operación***.

La organización del presente trabajo es como sigue: en la sección 1, estudiamos cómo apareció el concepto de vector y las distintas clases de producto durante la génesis de los Cuaternios en el siglo XIX, donde Hamilton introdujo la noción de vector y más tarde Gibbs y Heaviside desarrollaron tanto la notación como la maquinaria matemática conocida hoy no ya sólo por físicos y matemáticos, sino por una gran parte de los estudiantes preuniversitarios, al mismo tiempo que se exponen cuáles fueron los posteriores desarrollos históricos. En la sección 2, hacemos una extensa revisión de las aplicaciones que tiene la operación de producto vectorial en las disciplinas de Física y Matemáticas. En la sección 3, realizamos una síntesis autocontenida de las distintas formas de generalizar, en un sentido concreto matemático, la noción de producto vectorial a espacios de más dimensiones usando dos enfoques diferentes. Finalmente, en la sección 4, presentamos una discusión que se espera sea útil a instructores y profesores, y donde cobran particular importancia tres aspectos: la visión espacial, la regla del tornillo o sacacorchos y la técnica o intuición algebraica, éste último normalmente poco destacado y valorado en libros y manuales.

2. Historia y desarrollo del producto vectorial

La historia de la operación producto vectorial se encuentra íntimamente unida al origen del Álgebra y la propia evolución natural de la teoría de números[1]. En concreto, para ser más precisos, su creación como entidad propia se encuentra, como veremos, en el mismo período de tiempo que llevó a la introducción del análisis vectorial [2, 3, 4]. Entre los siglos XVI y XVIII tuvo lugar una auténtica revolución matemática, consistente en la puesta en común de la Geometría Clásica euclídea y el Álgebra aparecida en el Renacimiento. Mediante los métodos de la Geometría Analítica, y del recién inventado Cálculo infinitesimal, se produjo una explosión de nuevos y poderosos resultados pero también al planteamiento de nuevas dificultades. Así, a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, quedaban ya pocos matemáticos atados a los métodos exclusivamente geométricos, usando preferentemente también ya los nuevos desarrollos algebraicos procedentes de la teoría de ecuaciones. Sin embargo, conviene destacar que esta curiosa operación, el producto vectorial, *no* apareció en primer lugar con los vectores, sino que fue más bien al revés, los vectores y las distintas operaciones entre ellos se crearon a partir de la solución algebraica de un problema concreto, que no es otro que la de la generalización de la noción de número complejo.

2.1. W. R.Hamilton: complejos, cuaternios y vectores

Sir William Rowan Hamilton fue sin lugar a dudas una persona superdotada en muchos aspectos: a los 5 años leía griego, latín, hebreo y dominaba a los diez años media docena de lenguas orientales. Estudió en el Trinity College de Dublín, y a los 22 años era ya astrónomo real de Irlanda, director del Observatorio de Dunsink y profesor de Astronomía. Publicó pronto un trabajo sobre rayos en Óptica, y estudió otros interesantes fenómenos naturales cuya explicación y confirmación experimental le dieron enorme prestigio, tanto como para ser elevado a la nobleza a los 30 años. Además, fue la primera persona que presentó un trabajo original sobre el Álgebra de números complejos (aunque dicen las rumorologías matemáticas que Gauss ya conocía ese sistema) siendo el primero en formalizarlo en 1833. Así, en ese año, el artículo que presentó a la Irish Academy, introdujo el concepto de número complejo como un álgebra [1]formal de *pares* de números reales con operaciones suma y producto definidas como en la actualidad. De esta forma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$\lambda\,(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$
$$(a, b)\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El producto vectorial y el producto escalar surgieron a posteriori de la teoría de los cuaternios de Hamilton, que son un conjunto de "números" de la forma siguiente:

$$Q = a + bi + cj + dk \tag{1}$$

con $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ y los elementos base hipercomplejos cumpliendo las relaciones fundamentales siguientes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2}$$

¿Cómo llegó Hamilton a semejantes relaciones? Bien, la cuestión es matemáticamente no trivial, pero el problema es una "simple" generalización. Por analogía con los números complejos, Hamilton se preguntó si sería posible hacer lo mismo para *tripletes* de números lo que había hecho para pares o *dobletes* de números reales, lo que había hecho para construir de una manera novel los números complejos. Entonces, su siguiente paso fue imaginarse unos tripletes de la forma siguiente:

$$a + bi + cj \tag{3}$$

[1]Un álgebra hoy día se define como un espacio vectorial V sobre los reales, $\mathbb{R}$, equipado con una operación externa bilineal $* : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ que puede imaginarse como una suerte de producto de vectores. Pero la cuestión es, ¿de dónde vienen los espacios vectoriales? ¿Se despertaba Gauss alarmado y noctámbulo por la noche, pensando "Sea V un espacio sobre un cuerpo F, con la operación suma definida por $+ : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, asociativa y conmutativa, ..."? No, no lo hizo así. Los números complejos pueden verse como un espacio vectorial sobre los reales con 1 e i como vectores base. Satisfacen las propiedades usuales, tales como distributividad y conmutatividad. Son un álgebra. Un álgebra de división es un álgebra en la que todo elemento salvo el 0 tiene un inverso multiplicativo. Un álgebra normada satisface la ley de los módulos.

y en donde los coeficientes a, b, c son de nuevo números reales. Hamilton, entendía entonces estos números de ternas como un conjunto cuya base eran $1, i, j$, mutuamente perpendiculares entre sí, como lo eran $1, i$ en el plano complejo. Surgía la siguiente dificultad cuando trataba de multiplicar los siguientes productos de ternas

$$(a + bi + cj)\,(A + Bj + Cj) \tag{4}$$

Como el producto debía estar en el mismo espacio, y efectuarse término a término, para visualizar completamente el espacio tridimensional debía cumplirse la relación entre los módulos, esto es, que el módulo del producto fuera el producto de los módulos: $|Q_1 Q_2| = |Q_1||Q_2|$, y como también quería que i, j fueran unidades imaginarias diferentes, $i^2 = j^2 = -1$, al calcular el producto obtenía, suponiendo la condición adicional $ij = ji$:

$$(a + bi + cj)\,(A + Bj + Cj) =$$

$$= (aA - bB - cC) + (aB + bA)\,i + (aC + cA)\,j + (bC + cB)\,ij$$

Ante este resultado, dado que salen 4 (¡) sumandos diferentes, se hizo la pregunta siguiente: ¿cuánto tiene que valer ij para que el producto sea de la forma de tripletes $T = p + qi + rj$, perteneciendo por tanto al espacio tridimensional que hoy llamamos $\mathbb{R}^3$? Hamilton era un personaje pertinaz, y empezó a probar con soluciones por prueba y error. Intentó primero las posibilidades $ij = -1$, y también $ij = 1$. Sin embargo, tales casos le llevaban a unas reglas de multiplicación que no verificaban la ley de los módulos. También probó incluso $ij = 0$, y tampoco se cumplía la ley de los módulos, aunque en ese caso observó un fenómeno curioso. A saber, cuando se anulaba dicho término, y se hacía que el producto de dos tripletes con los escalares asociados a i, j iguales, se llegaba al resultado:

$$(a + bi + cj)\,(A + bj + cj) =$$

$$= \left(aA - b^2 - c^2\right) + (a + A)\,bi + (a + A)\,cj$$

que, como es fácil de observar, *verifica* la ley de los módulos. Entonces, se dió cuenta que para que se anulara el factor con ij era suficiente que anticonmutara, es decir, intuyó que $ij = -ji$. Pero entonces, ¿cuál debía ser el nuevo valor concreto que asignar a ij más allá de esta propiedad? Llamó finalmente k al nuevo valor que pensó debía determinar específicamente. Haciendo de nuevo el producto de las ternas (4), haciendo que $ij = -ji = k = 0$, se observa la ley de los módulos al hacer la diferencia entre los cuadrados de los módulos de los factores menos el cuadrado del módulo del producto:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(A^2 + B^2 + C^2\right) -$$

$$-\,(aA - bB - cC)^2 + (aB + bA)^2 + (aC + cA)^2 + (bC + cB)^2 =$$

$$= (bC - cB)^2$$

que no es otra cosa que el cuadrado del coeficiente de k en el desarrollo del producto. Entonces, pensó en reorientar definitivamente el problema. Dejó de ponerse la restricción tridimensional, y en lugar de multiplicar tripletes, añadió una cuarta coordenada a sus números hipercomplejos, para lograr, como caso particular cierto cálculo de tripletes. Supuso finalmente que $ij = -ji = k$, donde

k era una nueva unidad imaginaria y consideró cuaternios, cuadrúplas o cuaterniones, de la forma (1), expresiones del tipo $a + bi + cj + dk$, sujetos a las siguientes reglas de multiplicación:

$$ik = iij = -j$$

$$ki = -jii = j$$

$$jk = -jii = i$$

$$kj = ijj = -i$$

$$k^2 = (ij)\,(ij) = -\,(ji)\,(ij) = -\,(jiij) = j^2 = -1$$

que se pueden resumir en las ecuaciones antes mencionadas (2), y que fueron grabadas con la punta de la navaja en una piedra del puente de Brougham, Brougham Bridge, en un paseo de Hamilton cuando solventó el problema:

Los nuevos cuaternios o cuaterniones de Hamilton, tenían muchas propiedades nuevas e interesantes en sí mismas, y fascinaron al propio Hamilton tanto que gran parte de sus publicaciones desde su invención las dedicó a su estudio, que se plasmó en [6]. Pasemos a continuación a revisar dichas propiedades, porque encierran, ocultas, y condensadas, el producto escalar y vectorial que hoy conocemos:

1. Los cuaternios, que simbolizaremos de forma abstracta por $\mathbb{H}$, pueden entenderse y escribirse en forma de *pares* de números *complejos* como sigue

$$Q = a + bi + cj + dk = a + bi + cj + dij =$$

$$= (a + bi) + (c + di)\,j = z_1 + z_2 j$$

2. Todo cuaternio tiene un conjugado y un inverso para el producto. En efecto, definimos el cuaternio conjugado a $Q = a + bi + cj + dk$, denotado por Q^* , como

$$Q^* = a - bi - cj - dk \tag{5}$$

Además, el producto de Q y Q^* es el cuadrado del módulo del cuaternio, es decir, la norma, es

$$N(Q) = |Q|^2 = QQ^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{6}$$

y entonces el inverso multiplicativo de un cuaternio Q será, siempre que sea un cuaternio no nulo,

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{QQ^*} \tag{7}$$

3. El producto de cuaternios, aunque es no conmutativo en general por las reglas (2), es *asociativo*. La demostración es sencilla usando la notación compleja para los cuaternios y no se hará aquí. El lector interesado puede consultar [1].

4. Los cuaternios con la operación suma definida por componentes de la forma usual, y las reglas para el producto de (2) tiene la estructura de un álgebra normada con división, pero no es un cuerpo como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

5. Cualquier cuaternio se puede dividir en la suma de una parte escalar, también llamada pura, $S(Q)$, y una parte imaginaria, también llamada vector o vectorial $V(Q)$ de la forma siguiente

$$Q = S(Q) + V(Q) \tag{8}$$

$$S(Q) = a \tag{9}$$

$$V(Q) = bi + cj + dk \tag{10}$$

Hamilton llamó a la parte imaginaria "vector" porque en latín "veher" significa "dirigir, direccionar". La parte imaginaria era precisamente la teoría de tripletes que buscaba para el espacio, pero obtuvo como inesperado visitante a la parte escalar. Fue algo muy debatido la interpretación de estos nuevos cuaternios, precisamente porque parece que permiten, in grosso modo, sumar puntos y vectores. ¿Es posible sumar peras con manzanas? La respuesta de la comunidad en general fue reinterpretar sus cuaternios de otra forma diferente. Pero ahora viene lo realmente interesante, y que no deja de ser sumamente sorprendente para quien no lo conoce. Si somos personas contrariadas e inquietas por esa parte escalar que nos estorba...¿Por qué no cancelarla?Si así lo hacemos, y calculamos el producto de dos cuaternios imaginarios o "vectores" obtenemos

$$q_1q_2 = (x_1i + y_1j + z_1k)\,(x_2i + y_2j + z_2k) \tag{11}$$

$$q_1q_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\,i + (z_1x_2 - x_1z_2)\,j + (x_1y_2 - y_1x_2)\,k - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \tag{12}$$

Y rápidamente podemos reconocer ahí las componentes tanto del producto escalar como del producto vectorial. Todo esto le llevó a Hamilton un tiempo. De hecho la leyenda o historia que ha llegado hasta nuestro tiempo es el siguiente relato

> Hamilton llegó a conjeturar que en el espacio de tres dimensiones, lo que ahora conocemos por un vector, podría ser representado por un conjunto de tres números, de la misma forma que un vector en un plano es expresado en un par. Trató de encontrar la cuarta proporcional multiplicando ternas, conjuntos de tres números, pero encontró dificultades. Los miembros más jóvenes de la casa de Dunsink participaban con afecto en las esperanzas y desengaños de su ilustre padre, a medida que las investigaciones tenían lugar. William Edwin, de nueve años y Archibald Henry, de ocho solían preguntar en el desayuno"¿Qué, papá, puedes multiplicar ya ternas?" A lo cual se veía obligado a contestar, sacudiendo tristemente su cabeza: "No, sólo los puedo sumar y restar". Un día, paseando de Dunsink a Dublín, Hamilton se dio cuenta repentinamente de la respuesta.

Los detalles matemáticos, los hemos dado más arriba. Además se puede observar que el producto de dos cuaternios imaginarios con parte escalar, o vectores puros, se puede escribir con notación moderna

$$q_1 q_2 = a \times b - a \cdot b \tag{13}$$

que también puede expresarse diciendo que si Q_1 y Q_2 son dos cuaternios que tienen por componentes escalares y vectoriales respectivas $(0, \mathbf{a})$ y $(0, \mathbf{b})$ entonces su producto vale

$$Q_1 Q_2 = (0, \mathbf{a})\,(0, \mathbf{b}) = (-a \cdot b, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Es decir, el producto de dos cuaterniones imaginarios puros es igual al producto vectorial que hoy conocemos como tal, menos el producto escalar euclídeo usual. Sorprendente, mágico y al mismo tiempo útil si se sabe. Si tenemos dos cuaternios con cuatro componentes en general no nulas, el producto es más complicado, como se puede ver a continuación

$$Q_1 = A + Bi + Cj + Dk \tag{14}$$
$$Q_2 = a + bi + cj + dk \tag{15}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1 Q_2} = Aa - \vec{Q_1} \cdot \vec{Q_2} + A\vec{Q_2} + a\vec{Q_1} + \vec{Q_1} \times \vec{Q_2} \tag{16}$$
$$\mathbf{Q} = (A, \mathbf{X})\,(a, \mathbf{Y}) = (Aa - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}, A\mathbf{Y} + a\mathbf{X} + \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \tag{17}$$

Es por esta identidad en especial, por la que durante la segunda mitad del siglo XIX se expresaba el cálculo en términos de cuaternios, que sin embargo seguían pareciendo extravagantes a muchas mentes lúcidas. Tanto es así, que se produjo pronto una escisión entre lo que se podría denominar la "corriente cuaternionista" y lo que se vendría en llamar la "corriente vectorial y tensorial". Eso se debió en gran medida también al auge de los métodos teórico grupales, esto es, la teoría de grupos, en especial la de los grupos de Lie, a finales de siglo XIX. Aunque la aparición de los cuaternios en la representación de ciertos grupos resultó notable, parecían a la luz de esta nueva herramienta matemática -la teoría de grupos- bastante anecdótica y cayeron progresivamente en desuso en favor de la corriente competidora. No obstante, su irrupción convulsionó la estructura clásica de las Matemáticas.

2.2. Grassmann y el cálculo de extensiones

Hermann Günther Grassmann tuvo una formación autodidacta en Matemáticas. Tras le realización de un examen, se convirtió en profesor de Matemáticas en Berlín, enseñando también Física, Química y Mineralogía. Pasó toda su vida como profesor en un liceo. Entre los muchos temas que abordó Grassman está su ensayo sobre la teoría de las mareas. Lo elaboró en 1840, tomando com base la teoría de la Méchanique analytique de Lagrange y de la Méchanique céleste de Laplace, pero exponiendo esta teoría por métodos vectoriales, sobre los que trabajaba desde 1832. Este ensayo, publicado por primera en los Collected Works de 1894-1911, contiene el primer testimonio escrito de lo que hoy se conoce como álgebra lineal y la noción de espacio vectorial. Grassmann desarrolló estos métodos en *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* y *Die Ausdehnungslehre: Vollständig und in strenger Form bearbeitet.*

En 1844, Grassmann publica su obra maestra, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, más conocido como ***Ausdehnungslehre***, que se puede traducir como "teoría de la extensión" o "teoría de las magnitudes extensivas". Después de proponer en *Ausdehnungslehre* nuevas bases para toda las matemáticas, el trabajo empieza con definiciones de naturaleza más bien filosófica. Grassmann demostró además que si la geometría se hubiese expresado en forma algebraica como él proponía, el número tres no hubiese desempeñado el papel privilegiado que tiene como número que expresa la dimesiones espaciales; de hecho, el número de posibles dimensiones de interés para la geometría es ilimitado.

Fearnley-Sander (1979) describe la creación del álgebra lineal de Grassmann de este modo:

> La definición de espacio lineal (...) se reconoce abiertamente alrededor de 1920, cuando Hermann Weyl y otros publicaron la definición formal. En realidad dicha definición había sido formulada unos treinta años antes por Peano, que había estudiado a fondo el trabajo matemático de Grassmann. Grassmann no formuló una definición formal - no existía entonces un lenguaje adecuado - pero no hay duda de que tuviera claro el concepto.
> Empezando con una colección de "unidades", él, efectivamente, definió el espacio lineal libre que generaban; en otros términos, considera la combinación lineal formal de tales unidades, y con coeficientes dados por números reales, define la suma y la multiplicación de números reales [en el modo que se usa actualmente] y demuestra formalmente las propiedades de espacio lineal de estas operaziones.
> (...) Desarrolla la teoría del la independencia lineal de modo extraordinariamente similar a la presentación que podemos encontrar en los textos modernos de álgebra lineal. Define la nocione di subespacio, independencia, longitud, desdoblamiento, dimensión, unión e intersección de subespacios, y proyección de elementos en los subespacios.
> (...)...pocos estuvieron tan cerca como Hermann Grassmann de crear, trabajando en solitario, una nueva disciplina.

Así pues, a pesar de las valiosas contribuciones de Grassmann, éstas no fueron reconocidas en su tiempo. Fue en el siglo XX y este principio de siglo cuando están comenzando a valorarse propiamente sus contribuciones, pero supusieron una frustración y un parcial abandono de las Matemáticas por parte de Grassmann. Sin embargo, al estar de moda el cálculo de cuaterniones de Hamilton, logró un apoyo individual por parte de Hankel, que escribió *Theorie der complexen Zahlensysteme und ihre Functionen* (1867), en donde en una clara y concisa notación matemática confrontó el cálculo cuaterniónico con el grassmaniano. De hecho, el propio Grassmann encontró una forma de reducir su cálculo al formalismo de los cuaternios.

Un breve extracto de lo que pensaba Grassmann nos enseña sus profundas convicciones

> Yo había comprendido desde hacía tiempo que no podía considerar a la Geometría, como se consideraba a la Aritmética o la Teoría de Combinaciones, como una rama de la Matemática, sino más bien,

> puesto que la Geometría hace referencia a algo que ya está dado en la naturaleza, a saber, el espacio, debía tener en consecuencia una rama de las Matemáticas que se extrajera de ella misma de manera puramente abstracta, leyes semejantes a las que en Geometría aparecen ligadas al espacio. La posibilidad de desarrollar tal rama de la matemática puramente abstracta estaba dada por el nuevo análisis, cuando fue desarrollado independientemente de todo teorema demostrado por otros y en la pura abstracción fue esta ciencia. La ventaja esencial obtenida por esta interpretación era, para la forma, que todos los principios que expresaban las visiones del espacio desaparecieron completamente y, de este modo, los principios se volvían tan evidentes como los de la Aritmética y, por otra parte, para el contenido, la ventaja estriba en que la limitación a tres dimensiones se volvía caduca. De esta manera sólo las leyes se iluminan en su evidencia y universalidad y se presentan en su contexto esencial. Algunas regularidades que en tres dimensiones o no existían todavía o no se manifestaban más que de forma oculta, se desarrollan entonces en toda su generalidad por esta generalización.

¿Qué aportación hizo Grassmann al *producto vectorial*? Esencialmente, fue una generalización. Grassmann se guió por la intuición geométrica. Él concibió el área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada dotada de una *orientación*, y por lo tanto, de un signo, según se recorriera el perímetro del área en un sentido u otro. Con esto, definió un nuevo producto, el producto que en la actualidad se llama *producto exterior*, $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ que él llamaba producto *escalón*, íntimamente relacionado con el producto vectorial, y que, empero, a diferencia de éste, no está restringido a una dimensionalidad fija como en el caso del producto vectorial. Por cierto abuso de notación, en particular, algunos profesores y docentes actualmente representan el producto vectorial con el símbolo del producto exterior $\wedge$, a pesar de que conceptualmente son diferentes en origen y en formulación. No es recomendable hacerlo. Incluso aunque podamos relacionar ambas ideas, conviene diferenciarlas explícitamente. En particular, el producto exterior es asociativo, mientras que el producto vectorial o producto cruz *no* lo es al ser un álgebra de Lie.

2.3. Gibbs, Heaviside y el análisis vectorial

La primera edición del *Tratado sobre la electricidad y el magnetismo* de Maxwell se publicó en 1873 y Heaviside lo conoció inmediatamente, quedando profundamente impresionado por su contenido, aunque inicialmente no comprendió bien su novedad (como la mayoría de los lectores contemporáneos), sobre todo en lo relacionado con las ondas electromagnéticas y su propagación por el medio (el éter como dieléctrico). El aparato matemático utilizado, basado en cuaterniones, también superaba sus capacidades del momento. Por todo ello dedicó varios años a su estudio profundo y en 1876 comenzó a citarlo en sus propios trabajos. La temprana muerte de Maxwell en 1879 supuso un cambio radical de circunstancias, pues no podían esperarse ya aportaciones del maestro a una teoría muy necesitada de ellas y de ser dada a conocer al público. Heaviside tomó sobre sí esta tarea y, según su propia confesión, empezó a realizarla conscientemente desde 1882. Pero no se limitó a una repetición del contenido del Tratado como “texto sagrado”(como terminaría sucediendo con la corriente maxwelliana de Cambridge; J. J. Thomson llegó a llamar a Heaviside “maxwelliano apóstata”), sino que realizó una reelaboración, una depuración y una ampliación del mismo que dio como resultado lo que la ciencia actual conoce como teoría de Maxwell. Hoy suele hablarse como cosa evidente de “las cuatro ecuaciones de Maxwell”, pero conviene saber que el verdadero número de las que contiene el tratado es de trece. La síntesis final y la clarificación teórica que representan las cuatro ecuaciones se debieron a la labor, primero independiente y luego conjunta, de Heaviside y de Hertz.

En su apropiación, reelaboración y difusión de la teoría maxwelliana Heaviside contó con la decisiva colaboración de otros físicos ingleses, a los que se ha llamado “los maxwellianos”, fundamentalmente G. F. FitzGerald y O. Lodge en los primeros años, añadiéndose luego J. Larmor, aunque la relación de Heaviside con este último fuese menos armoniosa que con los otros.

A pesar de su implicación en ella, Heaviside no consideraba que la teoría maxwelliana estuviese concluida o que tuviese la última palabra. No consideró siquiera que los experimentos de Hertz de 1886-1888 fuesen una prueba irrefutable de su corrección. Los problemas que planteaba el movimiento del éter y su mismo concepto estaban ahí para demostrarlo y una complicación más vino a significar el creciente papel teórico del electrón en los años finales del siglo XIX junto a sus confirmaciones experimentales, que obligaron a modificar los conceptos de carga y de corriente maxwellianos. Heaviside participó activamente en la extensión de las ecuaciones de campo a las cargas móviles (electrones) y proporcionó algunas de las primeras soluciones completas.

La representación simbólica de magnitudes físicas dotadas de orientación fue un proceso de consolidación lenta, que fue realizándose a lo largo del siglo XIX, empezando por los números complejos, aplicables al plano. Su generalización al espacio fue naturalmente más difícil todavía. Tal era el propósito de la teoría de cuaterniones de W. R. Hamilton. En el estudio del electromagnetismo resulta esencial disponer de una notación concisa y eficaz para el manejo de vectores espaciales y Maxwell había usado los cuaterniones, pero utilizándolos muchas veces de manera simplificada. Para los propósitos pedagógicos y sistematizadores de Heaviside esto no era suficiente, por lo que elaboró el análisis vectorial como un álgebra independiente, formulada en la que sigue siendo su forma actual en el capítulo III de Electromagnetic theory. Allí se contienen también las razones de su rechazo de la teoría cuaterniónica, asunto sobre el que mantuvo hasta el final de su carrera encendidas polémicas con P. G. Tait, su principal expositor y defensor. De todos modos el cálculo vectorial era prácticamente desconocido para los ingenieros y físicos de su época (Heaviside tuvo que enseñárselo a Hertz), lo que contribuyó a dificultar la comprensión de los escritos de Heaviside, a pesar de los denodados esfuerzos pedagógicos de éste, hasta el punto de que su amigo Lodge los calificase no sólo de difíciles, sino incluso de “excéntricos y en ciertos aspectos repelentes”.

Fue también uno de los creadores del cálculo mediante operadores, cálculo operativo o cálculo operacional, de tanta utilidad posterior en ingeniería, a cuya elaboración y exposición dedicó buena parte de su actividad de los años 1894 a 1898, recogida en el volumen segundo de Electromagnetic theory. Aunque el método no se generalizó hasta después de su muerte, se lo ha considerado como uno de los tres grandes avances matemáticos del último cuarto del siglo XIX.

Heaviside concebía las matemáticas como una ciencia experimental y despreciaba a los “matemáticos puros” académicos. Sus matemáticas no se ocupaban de demostraciones o de teoremas existenciales, sino de resolver problemas físicos, cuyas relaciones funcionales son sencillas y no requieren el análisis exhaustivo de todas las posibilidades abstractas. Ni que decir tiene que la opinión que de él y sus métodos tenían los matemáticos profesionales no era en correspondencia muy buena.

Paralelamente a Heaviside, en Yale, Gibbs también desarrolló un cálculo simbólico separando las partes vectorial y escalar de los cuaternios. A diferencia de Heaviside, no obstante, su claridad y rigor matemático llevó a dar un impulso a los métodos de Heaviside. En particular, por ejemplo, desarrollo la teoría del operador nabla, en su expresión actual, con todos sus matices: rotacional, divergencia, gradiente e identidades.

Debido a todo esto, y a los desarrollos refinados del Álgebra y la teoría de los determinantes, tomó cuerpo como entidad independiente el análisis vectorial, no sin dejar para los anales de la Historia de las Matemáticas una de las luchas entre corrientes más dramáticas. En efecto, los cuaternionistas, liderados por Tait, un físico escocés, se negaron a reconocer la utilidad práctica de la nueva estructura creada y también vieron con igual excentridad que la “competencia” hacia ellos. Sin embargo, con la publicación de los nuevos tratados sobre Electromagnetismo en lenguaje vectorial y no cuaterniónico, vieron rápidamente mermado su número y quedaron exiguos seguidores. Y, en cierta forma, el origen del mismo análisis vectorial quedó envuelto en un poderoso lenguaje matemático autoconsistente del que quedaron las unidades imaginarias, del que quizás solo algunos individuos avispados atisban más allá del tupido velo y níveo halo lo que la formalización vectorial matemática oculta. ¿Nadie ha sentido curiosidad jamás de dónde salían las letras i, j, k del determinante formal que permite calcular el producto vectorial?

2.4. William K. Clifford

> **“Clifford fue, por encima de todo y antes que nada, un geómetra” (H. J. S. Smith)**

Es por ello por lo que fue un innovador frente a la tendencia de Cambridge excesivamente dirigida hacia el Análisis . Estudió las geometrías no-euclidiana influido por Riemann y Lobatchevsky. En 1870 escribió On the space theory of matter (Sobre la teoría espacial de la materia), en la que argüía que energía y materia eran simplemente diferentes tipos de curvatura del espacio. Esas ideas jugaron luego un papel fundamental en la teoría general de la relatividad.

Clifford es recordado hoy en día más por las álgebras de Clifford [8], un tipo de álgebra asociativa que generaliza al cuerpo de los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton. Un resultado posterior, los octoniones (bicuaterniones), es ahora conocido como espacio de Clifford-Klein y es empleado para el estudio de movimientos en espacios no euclidianos y en ciertas superficies. Demostró que los espacios de curvatura constante pueden tener estructuras topológicas diferentes. También probó que una superficie de Riemann es topológicamente equivalente a una caja con agujeros. Sugirió brillantes ideas en Teoría de Grafos o representación geométrica de funciones algebraicas que otros desarrollaron. Estuvo muy interesado en los campos del álgebra universal y en funciones elípticas. Sus artículos *Preliminary Sketch of Biquaternions* (Estudio preliminar sobre bicuaterniones), de 1873, and *On the Canonical Form and Dissection of a Riemann's Surface* (Sobre la forma canónica y la disección de una superficie de Riemann), de 1877, se consideran como clásicos. Otro importante artículo fue *Classification of Loci* (Clasificación de lugares geométricos), de 1878. Publicó también varios artículos sobre formas algebraicas y sobre geometría proyectiva.

Las dos contribuciones matemáticas principales de Clifford al producto vectorial fueron dos:

1. En sus *Elements of Dynamics*, introduce el producto vectorial como lo conocemos hoy día. Sólo un posterior refinamiento con la teoría formal de determinantes acabó de dar forma a lo que hoy llamamos producto vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \tag{19}$$
$$\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \tag{20}$$
$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \tag{21}$$
$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \tag{22}$$
$$C_z = A_xB_y - A_yB_x \tag{23}$$

2. Introdujo la noción de producto geométrico, que funde los productos escalar y exterior en un solo objeto mediante las álgebras que hoy se nombran en su honor. Dicho producto es muy similar al producto de cuaternios (13) pero no está restringido a 4 dimensiones. Vale

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \tag{24}$$

2.5. Una síntesis moderna del producto vectorial

En Matemáticas, en la actualidad el producto vectorial, denotado por $\times, \wedge, [,]$ se define como una operación binaria en un espacio euclídeo tridimensional, que produce otro "vector" que es ortogonal o perpendicular a los dos vectores que se "multiplican". Es diferente entonces al producto escalar $\cdot$ que fabrica un número a partir de los dos vectores "input". En algunas ocasiones, también se les denomina respectivamente "producto cruz" y "producto punto", sobre todo en traducciones literales de libros anglosajones.
El producto vectorial, como tal, sólo es definible en principio de tres dimensiones y el álgebra generado por él es ¡no asociativo! De hecho, el producto vectorial en tres dimensiones satisface los axiomas de un álgebra de Lie. Y, además, a diferencia del producto escalar, *depende* de la *orientación* o "quiralidad". Para orientaciones arbitrarias, el producto vectorial se comporta de forma *diferente* a un vector, y se le llama entonces ***pseudovector***.

2.5.1. Definición

El producto vectorial de dos vectores, se define en tres dimensiones y un sistema de coordenadas “a derechas”, u orientado según la mano derecha, es el vector perpendicular al plano generado por los dos vectores definidos con dicha orientación. Su expresión viene dada por la expresión:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin\theta \hat{\mathbf{n}}$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores, y $\hat{n}$ es un vector unitario ortogonal al plano generado por los mismo.

La dependencia de la orientación, crea un pequeño problema cuando uno cambia de sistema de referencia, dado que un “vector verdadero” no debería cambiar de dirección al cambiar de orientación, por ejemplo, bajo imagen especular. Esto explica la diferenciación que se hace de los pseudovectores o *vectores axiales* (procedentes de un producto vectorial), en los libros de texto.

2.5.2. Ejemplos

Sean $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$. El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es usando (19) $\vec{w} = (-3, 6, -3)$.

Si $\vec{u} = (3, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, 2, 0)$. El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es $\vec{w} = (0, 0, 6)$

Se observa que podemos interpretar, por tanto, el producto vectorial como el área del paralelogramo generado por los dos vectores operados.

2.5.3. Propiedades interesantes

No es asociativo, sino que verifica la identidad de Jacobi:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Tampoco se puede hacer cancelación de factores con él:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

no implica necesariamente que $\vec{b} = \vec{c}$. Sin embargo, si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, entonces sí se puede deducir que $\vec{b} = \vec{c}$. La distributividad respecto de la suma, bilinealidad e identidad de Jacobi se dotan de la estructura de álgebra de Lie. En especial, destaca también la famosa identidad de Lagrange:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

que como vimos se puede entender como la multiplicatividad de la norma de los cuaternios.

2.5.4. Matrices, $SO(3)$ y producto vectorial

Puesto que el producto vectorial en el espacio tridimensional es isomorfo al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ del grupo $SO(3)$, podemos entonces representar al producto vectorial en términos de matrices antisimétricas 3×3 como sigue:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}^T[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta notación sugiere ya una forma de generalizar el producto vectorial a dimensiones superiores, sustituyendo el pseudovector por matrices antisimétricas. Es evidente que como tales cantidades tienen $\frac{n(n-1)}{2}$ componentes físicas independientes en n-dimensiones, sólo se puede representar a las rotaciones por (pseudo)vectores en el espacio tridimensional euclídeo ordinario, y es la razón de fondo por la que se hace así. De hecho, en Física, la velocidad angular o el campo magnético son tales "vectores".

2.5.5. Notación tensorial y producto vectorial

El producto vectorial puede escribirse en componentes usando el tensor de Levi-Civita de tres índices. Este tensor es completamente antisimétrico en los tres índices, y vale $\varepsilon_{123} = 1$, cuando son permutaciones de orden par tiene igual valor $\varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, pero la permutaciones de orden impar están cambiadas de signo $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$, mientras que es cero si dos o más índices están repetidos. Usando este tensor, podemos calcular el producto vectorial como sigue:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \ c_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

donde en la última igualdad se ha empleado el convenio de Einstein: los índices repetidos en una expresión tensorial han de entenderse que están sumados sobre ellos.

2.5.6. Vectores axiales y quiralidad

Cuando las cantidades medibles involucran productos vectoriales, la quiralidad del sistema del coordenadas no puede ser arbitraria. Sin embargo, cuando las leyes físicas se escriben como ecuaciones, debería ser posible elegir arbitrariamente el sistema de coordenadas, incluyendo la orientación en dicho sistema de referencia. En particular, esto significa que hay que tener cuidado con las ecuaciones que tienen miembros que no se comportan igual frente a reflexiones en un espejo y no escribirlas hasta comprobar la naturaleza de los "vectores" involucrados. El conjunto de relaciones que hay entre productores de pseudovectores (o vectores axiales), P, y vectores, V, se puede resumir en las siguientes relaciones:

$$V \times P = P$$
$$V \times V = V$$
$$P \times P = P$$

Es decir, el resultado de un producto vectorial puede ser un vector o un pseudovector, dependiendo de la naturaleza de sus operandos. Sólo será un vector puro, si al menos uno de los dos vectores es un pseudovector, el resultado será otro pseudovector.

Finalmente, un último comentario histórico. Tras la introducción de la notación cruz para el producto vectorial por Gibbs, el libro *Elements of Vector Analysis*(1881) alcanzaría mayores cotas de popularidad tras la publicación por Wilson, un estudiante de Gibbs, de material de su mentor, Heaviside y Hamilton. Ese material fue dividido en tres partes, según el mismo Wilson:

> La primera, concierne la adición y los producto escalar y vectorial entre vectores. La segunda, concerniente al cálculo diferencial e integral en relación a funciones escalares y vectoriales. La tercera, contiene la teoría de funciones vectoriales lineales.

También se incluían diferentes tipos de productos "triples" y de más de tres vectores, así como la expansión en términos de determinantes y la identidad de Lagrange.

3. Aplicaciones del producto vectorial

3.1. Aplicaciones en Matemáticas

3.1.1. Cálculo de áreas y volúmenes

El producto vectorial entre dos vectores define tiene como módulo un valor igual al área del paralelogramo generado por los mismos:

$$\textbf{Área}\square_{AB} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

El volumen de un paralelepípedo generado por tres vectores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ viene dado por el producto mixto siguiente:

$$\left[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right] = \left[\vec{A}, \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)\right] = det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

Además, el producto vectorial tiene muchas aplicaciones útiles en la Geometría Analítica, como por ejemplo para determinar la perpendicular común a dos rectas, o representar vectorialmente planos y superficies.

3.1.2. Teorema de Stokes

El clásico teorema de Stokes , también usaldo por Kelvin, señala que

$$\int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

y relaciona la integral de superficie del rotacional del campo vectorial sobre una superficie Σ en el 3-espacio euclídeo con la integral de línea del campo vectorial sobre su frontera. Es un caso especial del teorema de Stokes generalizado (con N= 2) una vez que identifiquemos el campo vectorial con una 1-forma usando la métrica en el 3-espacio euclídeo correspondiente.

La forma general del teorema de Stokes que usa formas diferenciales es de más alcance que los casos especiales, por supuesto, aunque los últimos son más accesibles y a menudo son considerados más convenientes por físicos e ingenieros.

Otra forma más común de escribir el mismo teorema es la siguiente:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

en donde $\vec{A}$ es un vector arbitrario. Establece, por ende, que la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie abierta es igual a la integral cerrada del campo vectorial a lo largo del contorno que limita la superficie, que en ocasiones se llama también *circulación*.

Sea $\mathcal{M}$ una variedad de dimensión N diferenciable por trozos orientada compacta y sea ω una forma diferencial en $\mathcal{M}$ de grado $n-1$ y de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\partial\mathcal{M}$ denota el límite de $\mathcal{M}$ con su orientación inducida, entonces

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

en donde d es la derivada exterior, que se define usando solamente la estructura de variedad. El teorema debe ser considerado como *generalización* del teorema fundamental del cálculo, y, de hecho, se prueba fácilmente usando este teorema.

El teorema se utiliza a menudo en situaciones donde $\mathcal{M}$ es una subvariedad orientada sumergida en una variedad más grande $\mathcal{W}$ en la cual la forma ω se define.

El teorema se extiende fácilmente a las combinaciones lineales de las subvariedades diferenciables por trozos, las así llamadas cadenas. El teorema de Stokes demuestra entonces que las formas cerradas ($d\omega = 0$) definidas módulo una forma diferencial cerrada y una exacta ($\alpha = d\omega$), se pueden integrar sobre las cadenas definidas salvo módulo en el borde o frontera de la variedad. De hecho, toda forma diferencial puede descomponerse en suma de una diferencial cerrada, una exacta y una forma armónica (Hodge). Ésta es la base para la correspondencia entre los grupos de homología y la denominada cohomología de "de Rham".

3.1.3. Álgebras de Lie y producto vectorial

Según vimos antes, se puede establecer el siguien isomorfismo entre el espacio tridimensional euclídeo dotado con la estructura adicional de producto vectorial $(\mathbb{R}^3, \times)$ y el espacio de matrices antisimétricas de orden tres y determinante unidad, $\mathcal{A}(M_{3\times3})$, mediante la aplicación

$$\Upsilon : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{A}(M_{3\times3})$$
$$\vec{a}\times \longmapsto \Upsilon(\vec{a}\times) = A \in \mathfrak{so}(3)$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

de forma que podemos establecer una correspondencia unívoca entre el espacio tridimensional con la estructura adicional de producto vectorial con el corchete de Lie del álgebra de las matrices antisimétricas de orden 3. Esto es muy conocido entre matemáticos y científicos de Europa del Este, donde generalmente se prefiere simbolizar el producto vectorial entre dos vectores, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en vez de usar la cruz $\times$ o el símbolo del producto exterior $\wedge$ o escalón.

3.1.4. Método de Cayley-Dickson, semioctavas, octavas y Matrices de Zorn

En Matemáticas, las semioctavas (en inglés "split-octonions") son una extensión no asociativa de los cuaternios o semicuaternios ("split-quaternions"). Difieren de las octavas u octoniones usuales en la signatura de la forma cuadrática: las semioctavas tienen signatura (4,4) mientras que las octavas tienen (8,0). Es decir, las octavas son definidas positivas mientras las semioctavas no. Las semioctavas forman un álgebra única sobre los números reales y existen álgebras análogas sobre un cuerpo arbitrario F.

Las octavas y semioctavas pueden ser definidas mediante el llamado proceso de doblado Cayley - Dickson, consistente en la defininición de multiplición de pares de cuaterniones. Si introducimos un una unidad imaginaria *l*, en adición a las unidades cuaterniónicas conocidas *i,j,k*, y escribimos un par de cuaternios (a, b) en la foma $c = a + lb$ el producto queda definido por la asignación

$$(a + \ell b)(c + \ell d) = (ac + \lambda d\bar{b}) + \ell(\bar{a}d + cb)$$

donde $\lambda = \ell^2$. Si λ se toma como -1 obtenemos el álgebra de las octavas. Si elegimos $+1$ obtenemos las semioctavas. También puede obtenerse ambas álgebras mediante el proceso de Cayley-Dickson sobre los semicuaternios, en vez de los hacerlo sobre los cuaternios. Una base para las semioctavas está dada por el conjunto $A = \{1, i, j, k, l, li, lj, lk\}$. Toda semioctava X puede escribirse como una combinaciónn lineal de elementos de la base anterior:

$$X = x_0 + x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k + x_4\, l + x_5\, li + x_6\, lj + x_7\, lk$$

con coeficientes reales $x_i, i = 0, 1, \ldots, 7$. Por linealidad, las semioctavas quedan totalmente determinadas por la tabla de multiplicación siguiente:

1	i	j	k	ℓ	ℓ i	ℓ j	ℓk
i	-1	k	-j	$-\ell$i	ℓ	$-\ell$ k	ℓ j
j	-k	-1	i	$-\ell$ j	ℓ k	ℓ	$-\ell$ i
k	j	-i	-1	$-\ell k$	$-\ell$ j	ℓ i	ℓ
ℓ	ℓ i	ℓ j	ℓ k	1	i	j	k
ℓ i	$-\ell$	$-\ell$ k	ℓ j	-i	1	k	-j
ℓ j	ℓ k	$-\ell$	$-\ell$ i	-j	-k	1	i
ℓ k	$-\ell$ j	ℓ i	$-\ell$	-k	j	-i	1

El conjugado de una semioctava X se define como $\bar{x} = x_0 - x_1\, i - x_2\, j - x_3\, k - x_4\, l - x_5\, li - x_6\, lj - x_7\, lk$ y de forma análoga para las octavas. La forma cuadrática o norma de X está dada por $N(x) = \bar{x}x = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)$. Esta norma es la norma estándar pseudoeuclídea sobre $\mathbb{R}^{4,4}$. Debido a este carácter, hay elementos X no nulos, llamados *isótropos*, que anulan la norma y no sería, a diferencia de las octavas, un álgebra con división. En este último caso, las octavas, o para elementos no isótropos del álgebra de las semioctavas, el elemento inverso queda definido por la relación:

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{N(x)}$$

Tano semioctavas como octavas son álgebras noconmutativas y no asociativas. Son normadas, y satisfacen la relación multiplicativa en sus norm, esto es, si

N es la forma cuadrática que define la norma, se verifica que $N(xy) = N(x)N(y)$. A esto también se llama álgebra de composición. Las semioctavas también satisfacen las identidades de Moufang y son, como las octavas, un álgebra *alternativa.* Entoncs, por el teorema de Artin, cualquier subálgebra generada por dos elementos diferentes cualequiera es asociativa. El conjunto de elementos invertibles para los cuales la norma es no nula forma un bucle de Moufang ("Moufang loop").

Como las semioctavas son no asociativas, no pueden ser representadas por matrices ordinarias. Sin embargo, Max August Zorn halló una manera de representarlas como "matrices", usando una versión modificada de la multiplicación matricial. En concreto, definió una "matriz vectorial" 2×2 de la forma:

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{bmatrix}$$

donde a y b son números reales, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, mientras que la multiplicación de estos objetos está dada por la operación

$$\begin{bmatrix} a & \mathbf{v} \\ \mathbf{w} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' & a\mathbf{v}' + b'\mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{w}' \\ a'\mathbf{w} + b\mathbf{w}' - \mathbf{v} \times \mathbf{v}' & bb' + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

donde $\cdot, \times$ son el producto escalar y vectorial en 3D. Con la adición y multiplicación escalar usuales, el conjunto de tales matrices forma un álgebra unitaria 8-dimensional no asociativa sobre los número reales, llamada álgebra de Zorn. El álgebra de Zorn es de hecho isomorfa al álgebra de las semioctavas. Escribiendo una octava en la forma $X = (a + \mathbf{a}) + \ell(b + \mathbf{b})$ donde a, b, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son las partes escalar y vectorial de las respectivas octavas, el isomorfismo entre semioctavas y álgebra de Zorn está dado por

$$X \mapsto \phi(x) = \begin{bmatrix} a + b & \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} + \mathbf{b} & a - b \end{bmatrix}$$

3.1.5. Otras utilidades matemáticas

Para terminar esta sección, simplemente mencionar que la existencia del álgebra de las octavas está estrechamente unido a que las esferas $\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1, \mathcal{S}^3, \mathcal{S}^7$ son paralelizables, en términos matemáticos son una *fibra*, y admiten lo que se llaman una *fibración de Hopf.* Esto tiene consecuencias aritméticas, como el teorema de los 2, 4 y 8 cuadrados, o también sorprendentes aplicaciones en Topología y Teoría de Grafos. De hecho, L.H.Kauffman ha probado que el teorema de los 4 colores es equivalente a un problema algebraico de *asociar* en multipletes no ambiguos n-uplas de productos vectoriales tridimensionales.

3.2. Aplicaciones en la Física

3.2.1. Momento angular y torque

El momento angular o cinético es una magnitud importante en todas las teorías físicas, desde la Física Clásica hasta la Física Cuántica, pasando por la teoría especial de la relatividad y la Mecánica Relativista. Su importancia en todas ellas se debe a que está relacionada con las simetrías rotacionales de los sistemas físicos. Bajo ciertas condiciones de simetría rotacional de los sistemas es una magnitud que se mantiene constante con el tiempo a medida que el sistema evoluciona, lo cual da lugar a una ley de conservación conocida como ley de conservación del momento angular. En ausencia de momentos de fuerza externo, también denominado torque, el momento angular de un conjunto de partículas, de objetos o de cuerpos rígidos se conserva. Esto es válido tanto para partículas subatómicas como para galaxias. La definición matemática para el espacio tridimensional de momento angular y de torque (o momento de una fuerza) usa el producto vectorial:

$$\textbf{Momento angular} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$
$$\textbf{Torque} = \textbf{Momento de una fuerza} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Y ambas se relacionan por la conocida relación:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

En Mecánica Cuántica, además, el operador momento angular se define también, vía el principio de correspondencia de Böhr, mediante el operador siguiente:

$$\hat{\mathbf{L}} = i\hbar\,(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla})$$

que como vemos, hace uso también del producto vectorial.

3.2.2. Vector de Laplace-Runge-Lenz

En Mecánica Clásica, el vector de *Laplace-Runge-Lenz*(LRL), también llamado por los astrónomos y astrofísicos vector *excentricidad*, es un vector espacial usado para describir la forma y orientación de la órbita celeste de un cuerpo girando en torno a otro mediante la ley de gravitación newtoniana. En particular, el vector LRL es una constante del movimiento para el problema de Kepler de una ley de fuerzas del inverso del cuadrado de la distancia, como por ejemplo la gravitación de Newton o el potencial de Coulomb. Debe su nombre a los tres autores que más lo usaron, puesto que es un vector que ha sido redescubierto en varias ocasiones a lo largo del tiempo. El vector LRL puede definirse para potenciales arbitrarios, pero sólo es constante para la ley de fuerzas central del inverso del cuadrado.

Para una partícula simple, en el problema de Kepler, y una fuerza central dada por $\mathbf{F}(r) = \frac{-k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, el vector excentricidad $\mathbf{A}$ o LRL está definido por la siguiente ecuación

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$$

donde

- m es la masa de la partícula moviéndose bajo la fuerza central.
- $\mathbf{p}$ es el momento lineal o ímpetu de la misma partícula.
- $\mathbf{L}$ es el momeno angular.
- $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula.
- k es un parámetro que describe la intensidad de la fuerza central.
- $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección de la posición de la partícula.

3.2.3. Sistemas de referencia no inerciales

Sean dos sistemas de referencia, uno inercial S, y otro no inercial S' (dotado de aceleración respecto del inercial). La relación entre las derivadas temporales entres ambos sistemas de referencia está dada por el operador formal siguiente:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times$$

Al aplicarlo sucesivamente dos veces, i.e., elevándolo operacionalmente al cuadrado, nos queda

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S^2 = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\right] \cdot \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\right]$$

Operando y reordenando términos llegamos a la relación siguiente

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S^2 = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'}^2 + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'} \times + \vec{\omega} \times (\vec{\omega}\times \qquad)$$

Multiplicando por la masa escalar m y actuando el operador sobre el vector de posición $\vec{r}$, se tiene la ley de aceleraciones y fuerzas para un sistema de referencia no inercial:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S'} + 2m\vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} + m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'} \times\vec{r} + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

de donde podemos despejar la expresión de la fuerza en el sistema S'

$$\mathbf{F}_{\text{No inercial}} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S'} = \mathbf{F}_{\text{Inercial}} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{ac.angular}} + \mathbf{F}_{\text{centrífuga}}$$

con las definiciones dadas por

$$\mathbf{F}_{\text{Inercial}} = \vec{F} = m\vec{a} = \left(m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S$$

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ac.angular}} = m\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'}$$

$$\mathbf{F}_{\text{centrífuga}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

3.2.4. Redes de Bravais

En Cristalografía, la red inversa o recíproca de una red (directa) de Bravais es el conjunto de todos los vectores de la red $\mathbf{K}$ que verifican la relación:

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 1$$

para todos los puntos de la red definidos por el vector $\mathbf{R}$. La red recíproca es una red de Bravais y la recíproca de la recíproca es la red original de partida. En estas condiciones, y para el caso particular de un retículo o red tridimensional, definido por vectores primitivos $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$, su red recíproca puede determinarse mediante tres vectores primitivos recíprocos, dados mediante las fórmulas:

$$\mathbf{b_1} = 2\pi \frac{\mathbf{a_2} \times \mathbf{a_3}}{\mathbf{a_1} \cdot (\mathbf{a_2} \times \mathbf{a_3})}$$

$$\mathbf{b_2} = 2\pi \frac{\mathbf{a_3} \times \mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2} \cdot (\mathbf{a_3} \times \mathbf{a_1})}$$

$$\mathbf{b_3} = 2\pi \frac{\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}}{\mathbf{a_3} \cdot (\mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2})}$$

Curiosamente, aunque la noción de red o retículo no está limitada a tres dimensiones, las fórmulas con el producto vectorial, de naturaleza intrínsecamente 3D dominan en Cristalografía.

3.2.5. Expresión de la fuerza de Lorentz y vector de Poynting

Para una partícula sometida a un campo eléctrico combinado con un campo magnético, la electromagnética total o fuerza de Lorentz sobre esa partícula viene dada por

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

en donde $\vec{v}$ velocidad de la carga, $\vec{E}$ es el vector campo eléctrico y $\vec{B}$ es el vector campo magnético. La expresión anterior está relacionada con la fuerza de Laplace o fuerza sobre un hilo conductor por el que circula corriente

$$\vec{f} = \int_L I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

con $\vec{l}$ siendo un elemento (dirigido) de longitud del conductor, I es la intensidad de corriente eléctrica y $\vec{B}$ es la intensidad de campo magnético. Curiosamente esta última expresión históricamente se encontró antes que la anterior, a pesar de ser una consecuencia directa de la anterior.

Por otra parte, el vector de Poynting es un vector cuyo módulo representa la intensidad instantánea de energía electromagnética y cuya dirección y sentido son los de propagación de la onda electromagnética. De una manera general el vector de Poynting puede definirse como el producto vectorial del campo eléctrico y la intensidad del campo magnético. Recibe su nombre del físico inglés John Henry Poynting y se expresa mediante el símbolo $\vec{S}$. Matemáticamente su expresión es

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$

Aquí $\vec{E}$ representa el campo eléctrico y $\vec{H}$ la intensidad del campo magnético. $\vec{B}$ es el campo de inducción magnético, y μ la permeabilidad magnética del medio. Dado que los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética oscilan con la frecuencia de la onda, la magnitud del vector de Poynting cambia en el tiempo. El promedio del vector de Poynting sobre un periodo de tiempo muy superior al periodo de la onda es llamado irradiancia y representa el flujo de energía asociado a la radiación electromagnética en la dirección perpendicular a su dirección de propagación.

3.2.6. Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart proporciona el campo magnético creado por corrientes estacionarias. En el caso de corrientes que circulan por circuitos filiformes (o cerrados), la contribución de un elemento infinitesimal de longitud $d\vec{l}$ del circuito recorrido por una corriente I, crea una contribución elemental de campo magnético, $d\vec{B}$ en el punto situado en la posición $\vec{R}$ respecto de $d\vec{l}$ dada por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

con el valor μ_0 siendo la permeabilidad magnética del espacio vacío.

3.2.7. Ecuaciones de Maxwell

En medios no-dispersivos e isótropos las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo se reducen a:

$$\nabla \cdot \varepsilon\vec{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mu\vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Aunque, como hemos mencionado, Maxwell usó los cuaternios para deducir las ecuaciones, pueron Gibbs y Heaviside quienes acabaron poniendo de moda las cuatro ecuaciones anteriores mediante el uso del análisis vectorial, y creando el operador nabla que había sido introducido también por Maxwell y el propio Hamilton bajo otra diferente orientación y terminología.

3.2.8. Rotacional y vorticidad

El rotacional, denotado por **rot** (o **curl** en países anglosajones, de "circulation"), de un campo de vectores nos informa sobre la rotación del campo en cualquier punto. El módulo nos dice cuánta rotación hay, la regla de la mano derecha, además, nos indicará la dirección de rotación y su sentido.

$$\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \mathbf{rot}(\mathbf{F})$$

o bien

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

Matemáticamente, la vorticidad en un punto es un vector definido como el rotacional del campo de velocidades en dicho punto, esto es

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

En el campo de velocidades de un fluido, la vorticidad es nula en casi todo punto. Solamente en lugares especiales, tales como la frontera del medio o el núcleo de un vórtice, es distinta de cero.

4. Generalizaciones

4.1. Álgebras normadas en D=1, 2, 4, 8

4.1.1. Las álgebras con división $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, y $\mathbb{O}$ son las únicas álgebras *alternativas* con división.

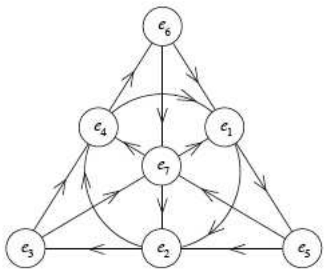
Este frase es de hecho un teorema, se debe a un artículo de Hurwitz de 1898 [21]. Fue posteriormente generalizado en muchas direcciones, especialmente en álgebras sobre otros cuerpos más complejos. Otra versión apaerece en un artículo de 1930 de Zorn [23], más conocido quizás por el conocido lema de teoría de conjuntos. Un buen libro donde consultar aspectos más matemáticos es [22].

Una observación importante es que no queremos decir que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, y $\mathbb{O}$ son las únicas álgebras con división. Esto no es cierto. Existen álgebras con división que no tienen inversos multiplicativos de algunos elementos, pero puede aún dividirse en las mismas. Sin embargo, lo que es más importante es percatarse de que *cualquier* álgebra con división *tiene* dimensión 1, 2, 4 u 8.

Podemos construir el álgebra de los octoniones u octavas, de forma análoga a como hicimos previamente con las semioctavas. Las octavas son el álgebra octodimensional generado por la base $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, y su tabla de multiplicación está dada por

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Normalmente se usan otros métodos, pictóricos como el diagrama de Fano,



para recordar la tabla anterior. No obstante, ya daremos después una ecuación compacta para recordar esta tabla en la sección de álgebras de Clifford.

4.1.2. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sólo existe en $D = 0, 1, 3, 7$

El producto vectorial tridimensional ha probado ser útil en varias aplicaciones físicas, según lo expuesto en el presente trabajo. Una cuestión natural consiste en saber si es posible una generalización multidimensional del producto vectorial. Aquí seguiremos la referencia [20]. Esta aparentemente simple pregunta tiene una respuesta inesperada, no ampliamente conocida por la comunidad de físicos: la generalización más parecida posible al producto vectorial sólo existen en un espacio heptadimensional[10]. En esta sección probamos que las únicas generalizaciones posibles del producto vectorial [11]son posibles solamente en dimensiones D=0,1,3,7.

Para la Física contemporánea, el producto vectorial heptadimensional representa no sólo un ejemplo de interés académico, sino que demuestra, entre otras cosas, que su utilidad por ejemplo al considerar campos de Yang-Mills dependientes sólo del tiempo, vía ecuaciones de Nahm, y que aparecen en el contexto de la denominada teoría M[12, 13]. Otras aplicaciones incluyen: compactificaciones de Kaluza-Klein en Supergravedad $d = 11,\ N = 1$ [14]

Consideremos ahora un espacio vectorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$ sobre los números reales, con el producto escalar estándar euclídeo definido sobre el mismo. ¿Qué propiedades queremos que satisfaga el producto vectorial bilineal multidimensional en $\mathbb{R}^n$?Es natural elegir como axiomas para este producto las siguientes:

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0, \tag{25}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0, \tag{26}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\ |\vec{B}|, \ \text{ si } \ \vec{A} \cdot \vec{B} = 0. \tag{27}$$

Aquí $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ es la norma del vector $\vec{A}$.

Entonces

$$0 = (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}$$

muestra que el producto vectorial es anticonmutativo (también llamado hemisimétrico, antisimétrico o supersimétrico en ocasiones). Por el mismo truco podemos probar que

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ es alternado en $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. Por ejemplo,

$$0 = ((\vec{A} + \vec{C}) \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{C}) = (\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} + (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

muestra que $(\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$.

Para dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ and $\vec{B}$ la norma $|\vec{A} \times \vec{B}|^2$ es igual a

$$\left| \left(\vec{A} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2}\ \vec{B} \right) \times \vec{B} \right|^2 = \left| \vec{A} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2}\ \vec{B} \right|^2 |\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2.$$

Entonces para cualesquiera dos vectores hemos de obtener

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2. \tag{28}$$

Si consideramos ahora

$$|\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{A}|^2 =$$

$$= |\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})|^2 + |\vec{A}|^4|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2|\vec{A}|^2 - 2|\vec{A}|^2(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A}))\cdot\vec{B}.$$

Pero esto es cero, ya que

$$|\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}\times\vec{A}|^2 = |\vec{A}|^4|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2|\vec{A}|^2$$

y

$$(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A}))\cdot\vec{B} = (\vec{B}\times\vec{A})\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2.$$

Entonces hemos probado la identidad

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A}) = (\vec{A}\cdot\vec{A})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}\,. \tag{29}$$

Nótese que la colocación de los corchetes en miembre izquierdo es de hecho irrelevante por causa de la anticonmutatividad. Sin embargo, la conocida identidad

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{30}$$

no se deduce en general de propiedades intuitivamente evidentes (25-27) del producto vectorial [11]. Para mostrar esto introducimos el producto ternario o triple [15] (que es cero si (30) es válida)

$$\{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\} = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) - \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) + \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}).$$

La ecuación (29) implica que este producto es alternado en sus argumentos . Por ejemplo

$$0 = \{\vec{A}+\vec{B},\vec{A}+\vec{B},\vec{C}\} = \{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\} + \{\vec{B},\vec{A},\vec{C}\}.$$

Si $\vec{e}_i,\ i = 1,\ldots,n$ es una base ortonormal en el espacio vectorial, entonces

$$(\vec{e}_i\times\vec{A})\cdot(\vec{e}_i\times\vec{B}) = ((\vec{e}_i\times\vec{B})\times\vec{e}_i)\cdot\vec{A} = [\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_i]\cdot\vec{A}$$

y, por ende,

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i\times\vec{A})\cdot(\vec{e}_i\times\vec{B}) = (n-1)\vec{A}\cdot\vec{B}. \tag{31}$$

Usando esta identidad obtenemos ahora

$$\sum_{i=1}^{n}\{\vec{e}_i,\vec{A},\vec{B}\}\cdot\{\vec{e}_i,\vec{C},\vec{D}\} =$$

$$= (n-5)(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) + 2(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - 2(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C}). \tag{32}$$

y de aquí llegamos ahora a que

$$\sum_{i,j=1}^{n}\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{A}\}\cdot\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{B}\} = (n-1)(n-3)\vec{A}\cdot\vec{B} \tag{33}$$

y [15]

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\}\cdot\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\} = n(n-1)(n-3). \tag{34}$$

La última ecuación muestra que existe algún $\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\}$ que es no nulo si $n > 3$. Por tanto, (30) es válida sólo para el producto vectorial 3d ($n = 0, 1$ es, por supuesto, un caso poco interesante porque corresponde al producto vectorial idénticamente nulo y a una rotación de noventa grados plana, y sería *trivial*) . Sorprendentemente, no tenemos muchas alternativas para n incluso en el caso en que la validez de (30) no es necesaria. De hecho, la dimensión espacial n debería satisfacer [11] (véase también [16])

$$n(n-1)(n-3)(n-7)=0. \tag{35}$$

Para probar esta identidad, notemos que usando

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}+\vec{C})\times\vec{B}\times(\vec{A}+\vec{C})-\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{A}-\vec{C}\times\vec{B}\times\vec{C}=$$

$$=2\vec{A}\cdot\vec{C}\;\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}\;\vec{C}-\vec{B}\cdot\vec{C}\;\vec{A}$$

y

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))=\frac{1}{2}\Big[\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))+(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})-$$

$$-(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})-((\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C})\times\vec{D}+((\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C})\times\vec{D}+$$

$$+(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))\times\vec{D}-(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}))\times\vec{D}-\vec{A}\times((\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{D})+$$

$$+\vec{A}\times((\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{D})+\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))\;\Big]$$

podemos comprobar la ecuación

$$\vec{A}\times\{\vec{B},\vec{C},\vec{D}\}=-\{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\times\vec{D}\}+\vec{A}\times(\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D}))-\{\vec{A},\vec{C},\vec{D}\times\vec{B}\}+$$

$$+\vec{A}\times(\vec{C}\times(\vec{D}\times\vec{B}))-\{\vec{A},\vec{D},\vec{B}\times\vec{C}\}+\vec{A}\times(\vec{D}\times(\vec{B}\times\vec{C}))=$$

$$=-\{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\times\vec{D}\}-\{\vec{A},\vec{C},\vec{D}\times\vec{B}\}-\{\vec{A},\vec{D},\vec{B}\times\vec{C}\}+3\vec{A}\times\{\vec{B},\vec{C},\vec{D}\}.$$

El último paso se sigue del desarrollo siguiente:

$$3\{\vec{B},\vec{C},\vec{D}\}=\{\vec{B},\vec{C},\vec{D}\}+\{\vec{C},\vec{D},\vec{B}\}+\{\vec{D},\vec{B},\vec{C}\}=$$

$$=\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})+\vec{C}\times(\vec{D}\times\vec{B})+\vec{D}\times(\vec{B}\times\vec{C}).$$

Por consiguiente, el producto ternario satisface la fascinante propiedad

$$2\;\vec{A}\times\{\vec{B},\vec{C},\vec{D}\}=\{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\times\vec{D}\}+\{\vec{A},\vec{C},\vec{D}\times\vec{B}\}+\{\vec{A},\vec{D},\vec{B}\times\vec{C}\} \tag{36}$$

y deberíamos tener, entonces,

$$4\sum_{i,j,k,l=1}^{n}|\vec{e}_i\times\{\vec{e}_j,\vec{e}_k,\vec{e}_l\}|^2=$$

$$=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}|\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\times\vec{e}_l\}+\{\vec{e}_i,\vec{e}_k,\vec{e}_l\times\vec{e}_j\}+\{\vec{e}_i,\vec{e}_l,\vec{e}_j\times\vec{e}_k\}|^2.$$

El miembro izquierdo se calcula fácilmente por medio de (**??**) y (**??**):

$$4\sum_{i,j,k,l=1}^{n}|\vec{e}_i\times\{\vec{e}_j,\vec{e}_k,\vec{e}_l\}|^2=4n(n-1)^2(n-3).$$

Para calcular el lado derecho, podemos observar la útil identidad

$$\sum_{i,j=1}^{n}\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{A}\}\cdot\{\vec{e}_i,\vec{e}_j\times\vec{B},\vec{C}\}=-(n-3)(n-6)\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \qquad (37)$$

que se deduce de (??) y de la siguiente identidad

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i\times\vec{A})\cdot((\vec{e}_i\times\vec{B})\times\vec{C})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\vec{e}_i\times\vec{A})\cdot[2\vec{e}_i\cdot\vec{C}\ \vec{B}-\vec{B}\cdot\vec{C}\ \vec{e}_i-\vec{e}_i\cdot\vec{B}\ \vec{C}-\vec{e}_i\times(\vec{B}\times\vec{C})]=$$

$$=-(n-4)\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}).$$

Ahora, juntando (??) y (??), es un ejercicio sencillo calcular

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}|\{\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k\times\vec{e}_l\}+\{\vec{e}_i,\vec{e}_k,\vec{e}_l\times\vec{e}_j\}+\{\vec{e}_i,\vec{e}_l,\vec{e}_j\times\vec{e}_k\}|^2=$$

$$=3n(n-1)^2(n-3)+6n(n-1)(n-3)(n-6)=3n(n-1)(n-3)(3n-13).$$

de donde

$$4n(n-1)^2(n-3)=3n(n-1)(n-3)(3n-13).$$

pero

$$3n(n-1)(n-3)(3n-13)-4n(n-1)^2(n-3)=5n(n-1)(n-3)(n-7)$$

con lo cual se deduce finalmente (??).

Como vemos, la dimensión espacial debe igualar al número mágico siete si queremos una generalización única del producto vectorial tridimensional.

Sólo hemos mostrado que el producto vectorial puede existir en principio. ¿Qué ocurre con su realización concreta?Para responder a esta pregunta, es útil darse cuenta que los productos vectoriales están relacionados estrechamente con las álgebras de composición y normadas [10] (de hecho, las dos nociones son equivalentes [11]). Es decir, para cualquier álgebra de composición o normada con elemento unidad e, podemos definir el producto vectorial en el subespacio ortogonal a e mediante $x\times y=\frac{1}{2}(xy-yx)$. Entonces, desde el punto de vista de un álgebra normada, el producto vectorial es de hecho el conmutador (o corchete de Lie si se prefiere un lenguaje en términos de teoría de grupos) dividido por dos. Y, según vimos, el teorema de Hurwitz [17] dice que las únicas álgebras normadas son los números reales, los números complejos, los cuaternios y los octoniones u octavas. Los primeros dos de ellos producen el producto vectorial trivial, uno idénticamente cero, otro una mera rotación o multiplicación por la unidad imaginaria pura. Los cuaternios producen el producto vectorial tridimensional. El producto heptadimensional está generado por los octoniones u octavas [18]. Es interesante observar que este producto heptadimensional es covariante respecto al más pequeño grupo excepcional de Lie, denominado G_2 [19], que es además el grupo de automorfismos de las octavas. Usando la tabla de multiplicación de los octoniones [18] podemos expresar el nuevo producto como sigue

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{7} f_{ijk}\vec{e}_k, \quad i,j = 1,2,\ldots,7, \tag{38}$$

donde f_{ijk} es el totalmente antisimétrico G_2-tensor invariante y las únicas componentes no nulas independientes son

$$f_{123} = f_{246} = f_{435} = f_{651} = f_{572} = f_{714} = f_{367} = 1.$$

Notamos que en vez del resultado tridimensional $f_{ijk}f_{kmn} \neq \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. se tiene en su lugar

$$f_{ijk}f_{kmn} = g_{ijmn} + \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{39}$$

donde

$$g_{ijmn} = \vec{e}_i \cdot \{\vec{e}_j, \vec{e}_m, \vec{e}_n\}.$$

De hecho g_{ijmn} es un totalmente antisimétrico G_2-tensor invariante. Por ejemplo

$$g_{ijmn} = \vec{e}_i \cdot \{\vec{e}_j, \vec{e}_m, \vec{e}_n\} = -\vec{e}_i \cdot \{\vec{e}_m, \vec{e}_j, \vec{e}_n\} =$$

$$= -\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_m \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_n)) + (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_n)(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_j) =$$

$$= -\vec{e}_m \cdot (\vec{e}_i \times (\vec{e}_n \times \vec{e}_j)) + (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) - (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_n)(\vec{e}_m \cdot \vec{e}_j) =$$

$$= -\vec{e}_m \cdot \{\vec{e}_i, \vec{e}_n, \vec{e}_j\} = -\vec{e}_m \cdot \{\vec{e}_j, \vec{e}_i, \vec{e}_n\} = -g_{mjin}.$$

Las únicas componentes no nulas independientes resultan ser entonces

$$g_{1254} = g_{1267} = g_{1364} = g_{1375} = g_{2347} = g_{2365} = g_{4576} = 1.$$

En síntesis, la generalización del producto vectorial es sólo posible en espacios heptadimensionales y está vinculado al álgebra de las octavas u octoniones, que es el álgebra normada más grande que se puede tener, hecho a su vez relacionado con muchas estructuras excepcionales en Matemáticas [19]. En un caso genera de p-ésimos productos vectoriales, otras alternativas pueden considerarse, como en este trabajo y [10, 14, 20].

4.2. Producto exterior y Álgebra de Grassmann

4.2.1. Álgebra de Grassmann para principiantes

En esta sección, seguiremos la referencia [4] y expondremos de una forma accesible los axiomas de un álgebra de Grassmann. En su obra más importante sobre La Teoría de la Extensión Lineal, Grassmann introduce los siguientes axiomas geométricos abstractos:

1. Si un segmento se desplaza en el plano sobre un número arbitrario de segmentos, la superficie total que se obtiene es gual al espacio obtenido cuando se desplaza ese segmento por la suma de los segmentos.

2. Si en el plano un segmento se mueve entre dos paralelas fijas de modo que se mueve de una a otra, la superficie total barrrida es la misma cualquiera que sea el camino recorrido.

3. La superficie que describe una línea quebrada es igual a la descrita por un segmento que tiene los mismos puntos inicial y final que ella. Matemáticacmente $A \wedge (B+C) = A \wedge B + A \wedge C$.

4. La superficie total que describe una superficie cerrada al moverse en el plano es nula. En términos abstractos: $(B+C) \wedge A = B \wedge A + C \wedge A$.

5. La expresión $A \wedge B$ significa "(hiper)-superficie", y $A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ significaría "(hiper)-volumen". Esto llevó a Grassmann a definir el primer operando, p.ej. A, como "segmento" del "primer escalón o cuña" (dimensión uno), a $A \wedge B$ como un elemento del "segundo escalón" (dimensión dos), a $A \wedge B \wedge C$ como un elemento del tercer escalón (dimensión tres), y así sucesivamente.

6. Si dos vectores son de la "misma especie", entonces su producto es $A \wedge B = A \wedge A = A^2 = 0$.

7. Si B_1 y B_2 son elemenos de la misma especie, se tienen las reglas:

$$(A + B_1) \wedge B_2 = A \wedge B_2$$

$$B_2 \wedge (A + B_1) = B_2 \wedge A$$

8. La misma relación anterior es válida para un vector de un escalón arbitrario P:

$$(A + B_1) \wedge B_2 \wedge P = A \wedge B_2 \wedge P$$

9. Si Ay B son dos vectores que no son de la misma especie, se tiene por los axiomas anteriores que:

$$(A+B) \wedge (A+B) = \mathbf{0} = (A+B) \wedge A + (A+B) \wedge B =$$

$$A \wedge A + B \wedge B + A \wedge B + B \wedge A = A^2 + B^2 + AB + BA$$

de donde

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

o bien

$$AB = -BA$$

10. Para Grassmann, el ejemplo de no conmutatividad más simple, vinculado por "dualidad" al producto vectorial es el producto orientado

$$A \wedge B = |A||B| \sin \alpha$$

donde α es el ángulo que va desde A hasta B, y cuyo seno, por tanto, *cambia de signo* según vayamos de A hasta B o desde B hasta A.

4.2.2. Álgebras de Grassmann *en serio*.

En Matemáticas, el producto cuña o escalón, también conocido como *producto exterior*, es una anti-simetrización del producto tensorial. El producto exterior es una multiplicación asociativa y distributiva de funciones multilineales anti-simétricas que es anti-conmutativo para las funciones con el número impar de variables y conmutativo de otra manera. La teoría sistemática empieza en la construcción de la potencia exterior para un espacio vectorial. El método es construir las estructuras algebraicas utilizando generadores y relaciones y no es manifiestamente independiente de una base. Grassmann utilizó solamente las álgebras reales, es decir las álgebras en que los escalares son los números reales (él no hizo ninguna distinción entre los números reales y las funciones a valores reales, lo que sin embargo cambia la teoría algebraica drásticamente). [2] Sea e_i una base de un espacio vectorial V . El producto exterior sobre elementos de la base se realiza formalmente mediante las reglas de cálculo siguientes:

$$e_i \wedge e_j = e_{ij} = -e_{ji} \Leftrightarrow \forall i \neq j$$

$$e_i \wedge e_i = 0$$

y se amplía este proceso recursivamente a los productos de un grado más alto mediante la relación adicional

$$e_i \wedge e_{j..k} = e_{ij..k} = -e_{ji..k}$$

Nótese que el producto toma valores en un nuevo espacio $V \wedge V$ que sea un espacio factor del $V \otimes V$. El producto es asociativo por definición y alternante, es decir se anula si dos índices son iguales. Un cálculo combinatorio breve demuestra que se obtienen de n vectores de base 2^n productos linealmente independientes. Se construye el espacio $V^\wedge$ vectorial subyacente a un álgebra de Grassmann de la manera siguiente. El producto exterior se extiende al espacio entero $V^\wedge$ por bilinealidad. El álgebra de Grassmann es un *álgebra graduada*. Definimos el grado de los escalares como cero y el grado de los vectores de base como 1. El grado de un producto diferente a cero de generadores cuenta el número de generadores. El espacio de un álgebra de Grassmann se puede por lo tanto descomponer en una suma directa de subespacios homogéneos de grado definido, es decir el espacio expandido por todos los productos que tienen exactamente k generadores:

$$V^\wedge = V^{\wedge 0} \oplus V^{\wedge 1} \oplus \cdots \oplus V^{\wedge n}$$

donde $V^{\wedge 0}$ se identifica con $\mathbb{R}$, los números reales.

La definición de un operador multilineal antisimétrico es un operador $\Lambda : V^n \longrightarrow V$ tal que si hay una dependencia lineal entre sus argumentos, el resultado es 0. Observe que la adición de dos operadores antisimétricos, o la multiplicación de uno por un escalar, sigue siendo antisimétrica. Una forma de definir el espacio de Grassmann constructivamente es dividiendo el espacio tensorial por el subespacio generado por todos los tensores de los n-uplas que son linealmente dependientes.

[2] Nosotros, también nos saltaremos algunos aspectos técnicos y definiremos el producto exterior mediante bases en espacios vectoriales, pero esta restricción no es necesaria.

La dimensión del espacio (producto) exterior k-ésimo para un módulo libre de dimensión n es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. En particular, ese significa que módulo una constante, hay un único funcional antisimétrico la dimensión del espacio. También observe que cada funcional lineal es antisimétrico. En general, podemos definir la cuña de un funcional antisimétrico m-lineal y un funcional antisimétrico n-lineal dando un funcional antisimétrico (m+n)-lineal. Puesto que resulta que esta operación es asociativa, podemos también definir la potencia de un funcional lineal antisimétrico.

Un álgebra de Grassmann abstracta o álgebra exterior es pues un álgebra asociativa unital K generado por un conjunto S conforme a la relación $\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0$ para cualquier θ_i en S. Esta definición dice que los generadores son cantidades anti-conmutativas y debe ser modificada en caso de que K tenga "característica" 2.

El álgebra exterior tiene notables aplicaciones en Geometría diferencial, donde suele ser usada para definir formas diferenciales, que no son otra cosa que las aplicaciones multilineales duales a los espacios exteriores correspondientes. Se define así un producto exterior natural para formas diferenciales.

Como curiosidad, en teoría de representaciones, el álgebra exterior es uno de los dos functores fundamentales de Schur en la categoría de espacios vectoriales, siendo el otro el álgebra simétrica. Estos dos objetos, juntos, sirven para generar las representaciones irreducibles del grupo general lineal.

4.3. Forma de volumen y dual de Hodge

El operador estrella de Hodge (Hodge star operator) es una aplicación lineal introducida popularmente por W. V. D.Hodge. Se define sobre el álgebra exterior de un espacio con producto interior y una orientación en dimensión finita. Además, establece una correspondencia entre el espacio de k-vectores y el espacio de (n-k)-vectores. La imagen del k-vector bajo este isomorfismo se denomina dual de Hodge. En términos dimensionales, los k-vectores tienen dimensión $\binom{n}{k}$, mientras que el dual tiene dimensión $\binom{n}{n-k}$, que por la simetría de los binomiales tienen el mismo valor. Dos espacios con la misma dimensión son siempre isomorfos, pero no necesariamente en una manera canónica o estándar. La dualidad de Hodge, sin embargo, toma ventaja del producto interior o escalar y de la orientación del espacio para inducir la correspondencia unívoca más natural. La definición de operador de Hodge está determinada está determinada también por su actuación sobre una base. Sea una base orientada ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$, entonces el operador estrella de Hodge actúa sobre ella de la form a siguiente:

$$\star(e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge ... \wedge e_n$$

también puede usarse la notación de índices tensorial. Para ello se usa el tensor totalmente antisimétrico o símbolo de Levi-Civita, para escribir

$$(\star\eta)_{i_1,i_2,...,i_{n-k}} = \frac{1}{k!}\eta^{j_1,...,j_k}\epsilon_{j_1,...,j_k,i_1,...,i_{n-k}}$$

donde η es totalmente antisimétrico en sus k-índices. Escrito de esta forma, es evidente que el espacio vectorial debe tener un producto interior o escalar. Es necesario que exista para poder subir y bajar los índices del tensor contraído. Usar el producto interior g, la métrica, es equivalente, pero no totalmente obvio, a prefijar el símbolo de Levi-Civita con la raíz cuadrada del determinante del producto interior $\sqrt{|g|}$ para obtener la forma de volumen. Aunque uno puede tomar el operador de Hodge a cualquier tensor, el resultado es antisimétrico siempre, ya que las componentes simétricas del tensor se anularán cuando queden contraídas por el símbolo. Un ejemplo común es el caso del espacio tridimensional. Ahí, el dual de Hodge de las 2-formas básicas son 1-formas, que es lo que está implícito en la asociación de un vector a un bivector. Explícitamente, se tiene que:

$$\star \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$\star \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$\star \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

En el caso tetradimensional, $n = 4$, el dual de Hodge actúa como endomorfismo sobre las 2-formas, de dimensión 6. Es una involución y se separa en una parte autodual y una antiautodual. De hecho, la razón profunda de esto, es que en 4 dimensiones los tensores antisimétricos de orden 3 sólo pueden ser concebidos como "partes" de tensores antisimétricos de orden 4, y por eso se pierde la correspondencia entre 2-formas y 1-formas en $n = 4$. Así, el dual de Hodge induce, en general, un producto escalar sobre los k-vectores, el álgebra exterior o de Grassmann del espacio vectorial V que consideremos. La forma de volumen sobre el espacio ω verifica la condición

$$\zeta \wedge \star\eta = \langle \zeta, \eta \rangle \, \omega$$

Se puede probar sin demasiado esfuerzo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar. En esencia, los productos exteriores de elementos de una base ortogonal forman una base ortogonal del álgebra exterior. Extendida a variedades arbitrarias, el dual de Hodge permite la definición de la forma de volumen sobre la variedad:

$$\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

donde g_{ij} es la métrica sobre la variedad. Y, también, uno puede fabricar una forma de volumen de dimensión n, tomando el determinante formal de $n-1$ vectores con una base ortogonal de V, que sería la generalización *multilineal* del producto vectorial. Matemáticamente:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{vmatrix}$$

4.4. Álgebras de Clifford (Álgebra geométrica)

Las álgebras de Clifford [24, 8, 19] son un tipo especial de álgebra asociativa. Son otra manera alternativa de generalizar los números complejos y cuaternios, y por ende, el producto vectorial. Están relacionadas con la teoría de formas cuadráticas y transformaciones ortogonales y sus aplicaciones exceden las que aquí pueden nombrarse, tanto en Matemáticas, como en Física. En concreto, un álgebra de Clifford se define en la actualidad como un álgebra asociativa generada por un espacio vectorial V equipado con una forma cuadrática Q. El álgebra de Clifford se denota entonces por $Cl(V,Q)$. Formalmente, se define también:

$$v^2 = Q(v) \forall v \in V$$

$$uv + vu = 2g(u,v) \forall u,v \in V$$

Una de las propiedades más importantes de estas álgebras es su denominada propiedad *universal*.
Si la dimensión de V es n, y e_i es una base de V , entonces el conjunto

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \text{ con } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \text{ y } 0 \leq k \leq n$$

es una base para $Cl(V,Q)$. La dimensión del álgebra de Clifford es

$$\dim C\ell(V,Q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Las bases ortogonales son un conjunto privilegiado para V, ya que en sus términos puede escribirse

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \qquad i \neq j$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \qquad i \neq j$$

Denotemos el producto de dos octavas $a, b \in \mathbb{O}$ por $a \circ b$. Sean $1, e_1, e_2, ..., e_7$ una base de $\mathbb{O}$. Definamos el producto en términos de la base como el álgebra de Clifford dado por las relaciones siguientes:

$$e_i \circ e_i = -1, y \quad e_i \circ e_j = -e_j \circ e_i \quad \text{si} \quad i \neq j$$

y por la tabla

$$e_1 e_2 = e_4, e_2 e_4 = e_1, e_4 e_1 = e_2$$

$$e_2 e_3 = e_5, e_3 e_5 = e_2, e_5 e_2 = e_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$e_7 e_1 = e_3, e_1 e_3 = e_7, e_3 e_7 = e_1$$

Esta tabla puede condensarse en la ecuación compacta siguiente

$$e_i \circ e_{i+1} = e_{i+3} \quad mod(7)$$

Entonces el producto vectorial entre dos vectores U,V de $\mathbb{R}^7$ hereda la tabla de multiplicación de las octavas, y está definido por las siguiente expresión matricial:

$$E \times T = \begin{pmatrix} 0 & e_4 & e_7 & -e_2 & e_6 & -e_5 & -e_3 \\ -e_4 & 0 & e_5 & e_1 & -e_3 & e_7 & -e_6 \\ -e_7 & -e_5 & 0 & e_6 & e_2 & -e_4 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & -e_6 & 0 & e_7 & e_3 & -e_5 \\ -e_6 & e_3 & -e_2 & -e_7 & 0 & e_1 & e_4 \\ e_5 & -e_7 & e_4 & -e_3 & -e_1 & 0 & e_2 \\ e_3 & e_6 & -e_1 & e_5 & -e_4 & -e_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, a diferencia del producto vectorial tridimensional no es un álgebra de Lie, sino un álgebra de Malcev. En vez de la identidad de Jacobi, satisface la relación de Malcev siguiente $(xy)(xz) = ((xy)z)x + ((yz)x)x + ((zx)x)y$ en donde x, y, z son octavas (puramente vectoriales) y los paréntesis denotan el orden de actuación del producto vectorial heptadimensional. En este mismo formalismo, hay otra diferencia. A saber, mientras que en el espacio tridimensional el producto vectorial es único, salvo orientación, en el espacio heptadimensional el producto vectorial depende de un trivector o volumen. En el espacio tridimensional $a \times b = c \times d$ implica que a,b, c y d están en el mismo plano, pero para el producto vectorial heptadimensional hay otros planos distintos al formado por a y b dando la misma dirección que su producto cruz. Más abstractamente, el producto vectorial tridimensional es invariante bajo todas las rotaciones del grupo $SO(3)$, mientras que el producto vectorial heptadimensioanl no es invariante bajo todo el grupo $SO(7)$, sino sólo bajo el grupo excepcional $\mathcal{G}_2$, un subgrupo de $SO(7)$. Los bivectores en 7 dimensiones generan una variedad de dimensión 11, mientras que la imagen es un elemento de dimensión 7. Por tanto, no hay una relación uno a uno entre la asociación de producto vectorial y matrices antisimétricas de orden 7, sino es solamente una forma de asociar un vector a un bivector.

5. Pedagogía y Didáctica

En esta sección, vamos a analizar y criticar las diferentes técnicas conocidas para el cálculo del producto vectorial. Esto es especialmente útil e importante para profesores de la E.S.O., en caso de encontrarse con alumnos *avanzados*, y Bachillerato más generalmente.

5.1. La regla del tornillo y del sacacorchos

Esta es la regla comúnmente usada en los libros de texto para la obtención de la dirección y sentido de producto vectorial. Se han llenado múltiples libros con el famoso eslogan siguiente:

> La dirección y sentido del producto vectorial son las de un tornillo o sacacorchos, que gira del primer vector al segundo por el camino más corto.

En nuestra opinión, aunque se cuente este "truco", no es demasiado conveniente por varios motivos:

1. No siempre hay tornillos y sacacorchos en clase. Y aunque puedan ser sustituidos por bolígrafos o elementos análogos, se puede generar confusión.

2. Se enfatiza el aspecto mecánico o manual de la operación. Si bien puede ser útil para aquellos alumnos que necesiten apoyo psicomotor y visualización en tres dimensiones, no siempre encontraremos alumnos y alumnas originales para sustituir correctamente dichos elementos. En Física y Matemáticas, en principio, queremos potenciar las capacidades cognitivas, no tanto las psicomotoras.

5.2. La regla de la mano derecha

Según esta norma, la dirección y sentido del producto vectorial se obtienen con el pulgar de la mano derecha, orientando correctamente los dedos índice y corazón de forma que recaigan correctamente en los vectores operando.

Esta regla, archiconocida también en todos los manuales de Física y Química, y en algunos textos de Matemáticas, también presenta una serie de de dificultades conocidas por todos los profesores:

- El que un alumno o alumna sea zurdo o diestro, puede dificultar su aplicación práctica. Para los zurdos, es natural pensar en la derecha como su mano izquierda. En los ambidiestros puede aparecer también alguna problemática.
- Al igual que en el truco anterior, se enfatiza demasiado las capacidades psicomotoras, lo cual puede representar problemas para personas con poca destreza manual.
- En Física, se puede confundir con la regla de la mano izquierda, lo que amplia las posibilidades de confusión manual, incluso cuando los conceptos pueden estar totalmente claros.

5.3. La técnica e intuición algebraicas

En nuestra opinión, si se quiere enseñar bien el producto vectorial, más allá de que en ciertos momentos puedan o deban contarse las reglas anteriores, debe preconizarse la técnica algebraica definida por (19). ¿Por qué? En primer lugar, porque la misma esencia natural del producto vectorial es de germen algebraico. En segundo lugar, y eso es poco destacado ni siquiera como nota en los libros de texto, porque si se tienen las componentes de los vectores que se multiplican, el sentido y dirección del producto vectorial vienen dados automáticamente por el resultado del determinante formal dado por la expansión por adjuntos o la regla de Sarrus. Es más importante enseñar cómo se pueden visualizar sus compenentes una vez efectuadas las operaciones aritméticas básicas, que todo el mundo conoce y maneja con cierta habilidad (sumar, restar, multiplicar y dividir) que pedir a los alumnos que lo perciban en términos manuales. Habrá alumnos que prefieran y apliquen técnicas no-algebraicas, pero es necesario vigilar que lo hagan correctamente. En cambio, usando el determinante, se puede controlar mejor que dominan el concepto algebraico y matemático. No obstante, no negamos la utilidad de los recursos anteriores, pero la intuición geométrica y visual en tres dimensiones, o la destreza manual, no nos parece en pie de igualdad a la capacidad de realizar operaciones básicas y dibujar las tres componentes obtenidas en relación a las originales.

Quizás, la única dificultad de éste método es recordar el signo del segundo adjunto, que puede producir errores en los alumnos menos avezados algebraicamente. En este caso, se puede contar el truco de yuxtaponer al determinante a su derecha las dos primeras columnas, y usar el método convecional para obtener el producto correcto: tres primeras diagonales principales de izquierda a derecha (y arriba abajo) tienen signo positivo, las otras tres diagonales principales de abajo hacia arriba (también hacia la derecha) negativas. Este hecho, por desgracia, tampoco aparece destacado en los manuales preuniversitarios o de Bachillerato/E.S.O.

5.4. Problemas comunes de tipo didáctico y recursos pedagógicos

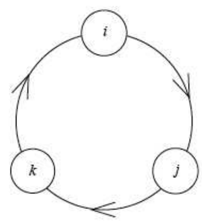
Es bastante común en la didáctica del producto vectorial, que se pregunte acerca de la no conmutatividad del producto vectorial. No es fácil una respuesta simple, según hemos visto en el presente trabajo. De hecho, el producto vectorial, junto a la multiplicación de matrices, es el primer caso de operación no conmutativa que aprenden los estudiantes. Y es complicado para algunos comprender que la ley conmutativa no se cumple siempre. Para ilustrar qué tipo de objetos tienen tales propiedades, se pueden citar los ejemplos siguientes:

1. El profesor coge un libro de texto u hoja a su disposición. La gira primero noventa grados hacia la izquierda, y luego noventa grados hacia sí mismo. Luego repite las operaciones anteriores en orden inverso: primero gira la hoja hacia sí mismo, y luego rota la hoja hacia la izquierda, en ambos casos noventa grados. Puede ilustrarse así un ejemplo de no conmutatividad.

2. Para poner un ejemplo concreto de vectores axiales, puede tomarse la misma hoja y se le pincha o añade un vector normal a su superficie(puede ser un bolígrafo, una tiza,...). En el caso de que las rotaciones anteriores fuesen de un ángulo muy pequeño, se insiste en el concepto de que dicho vector normal permanecería *invariante* ante tales transformaciones. infinitesimal de hecho, puede observarse como la posición del

Además, hay otros conocidos recursos gráficos para el producto vectorial. En particular, destacan dos reglas mnemotécnicas:

1. El diagrama cíclico $i \to j \to k$. Si se pinta una circunferencia con tres vértices, orientada en una dirección fija, cuyos vértices sean los vectores base canónica del espacio euclídeo **i,j,k**, se pueden recuperar los productos vectoriales de los vectores base siguiendo el sentido. El resultado tiene signo negativo sólo si se va en contra de la orientación prefijada en el dibujo.



2. Usar, en conjunción y apoyo de las reglas del tornillo y mano derecha, bolígrafos, lapiceros y otros elementos "con pinta de vectores" para no confundirse al aplicar dichas normas.

3. La *palabra mágica* **XYZZY** y sus derivadas cíclicas. De acuerdo a las relaciones básicas (19), la primera componente (X) del producto vectorial intercalará el producto de las componentes (Y) y (Z) del primer y segundo vector, **menos**, el producto de las componentes (Z) e (Y) de los mismos. Las restantes dos componentes se obtienen sin más que permutar cíclicamente las letras en la palabra mágica. Así, las dos siguientes "palabras

mágicas" serían **YZXXZ** y **ZXYYX**. Este recurso puede ser especialmente útil para los estudiantes con inclinaciones Humanísticas o más de "Letras" que de Ciencia, y también, por otra parte, puede motivar por el interés de las palabras curiosas a los alumnos de Ciencias.

Finalmente, a los alumnos más curiosos se les podría mostrar como el producto de dos cuaternios vectoriales reproduce también el producto vectorial correcto, mencionando y destacando igualmente a los mismos cómo se originó el concepto abstracto en su contexto histórico.

6. Conclusiones y discusión

El producto vectorial posee, como hemos visto, una estructura matemática muy intrincada y excepcional. No por ello deja de ser fascinante y sorprendente que aparezca de forma ubicua en numerosas partes. Tanto es así, que incluso si nadie hubiera sido capaz de concebirlo de forma abstracta, probablemente habríamos acabado encontrándolo de forma totalmente experimental. La complejidad de este producto en su forma tridimensional, son en buena parte resultado del oculto y profundo significado que tiene en la Geometría multidimensional. Suele decirse, entre los físicos, por poner un ejemplo, que el magnetismo es tan complicado que para su descripción tridimensional necesitamos auxiliarnos del producto vectorial. Ello es así, en efecto. Pero no es menos cierto, que cuando ampliamos el número de dimensiones, usando la teoria de la relatividad restringida, se obtiene una simplificación de las expresiones que involucran el producto vectorial. Eso no significa que el problema sea más sencillo de entender, nadie comprende aún del todo el electromagnetismo, pero a nivel de descripción, es evidente la simplificación del lenguaje matemático usando más dimensiones. La generalización correcta del formalismo matemático del producto vectorial no es inmediata, dado que el triunfo histórico correspondió a los fundadores del cálculo tensorial y vectorial, muy posiblemente porque consideraran que el *engendro o* ***monstruo*** de un espacio con muchas dimensiones no tenía soporte empírico. Además, un ingeniero o técnico no necesita la abstración de espacios multidimensionales, sino métodos eficientes de cálculo. Los vectores y tensores proporcionaron tal cálculo, aunque en absoluto nos parece totalmente transparente dichos utensilios.

En cuanto a la Pedagogía y Didáctica de esta operación, también hemos proporcionado ideas, trucos y críticas de las metodologías conocidas. Es importante conocerlas y usar los recursos más apropiados para cada tipo de aula, destacando los aspectos que proporcionen un mayor rendimiento en cada grupo de alumnos. Enseñar un concepto abstracto, visual, geométrico y en cierta forma difícil, entraña seleccionar los métodos que más puedan motivar al alumnado en el momento de su explicación. No renunciemos tampoco a mencionar algo de la Historia de las Matemáticas involucrada en la operación o del origen de los vectores si haciera falta para *enganchar* con los nuevos conceptos a nuestros *discípulos*.

Agradecimientos

Agradecemos al profesor Javier Peralta su disposición favorable sobre la selección temática de este trabajo, así como el haber llamado nuestra atención sobre las referencias [4, 5], que resultaron sumamente útiles para la redacción de este manuscrito.

A. Cronología algebraica

- **665** Brahmagupta (598-670) escribe *Khandakhadyaka* que resuelve las ecuaciones cuadráticas y permite la posibilidad de soluciones negativas. which solves quadratic equations and allows for the possibility of negative solutions.

- **1136** Abraham bar Hiyya Ha-Nasi escribe el trabajo *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret*, traducido al latín como *Liber embadorum*, donde se presenta la primera solución completa de la ecuación cuadrática.

- **1484** Nicolas Chuquet (1445-1500) escribe *Triparty en la sciences des nombres*. La cuarta parte de este tratado contiene la llamada "Regle des premiers", o regla de lo desconocido, que cuenta reglas manipulativas que hoy llamaríamos Álgebra. Introdujo la notación exponencial, permitiendo potencis positivas, negativas y la potencia nula. En la resolución de ecuaciones generales, mostró que algunas ecuaciones conducían a soluciones imaginarias, pero las descartó porque "Tel nombre est ineperible".

- **1535** Nicolo Fontana (Tartaglia) (1500-77) encuentra le método general para la resolución de todo tipo de ecuación cúbica y se lo comenta a Cardano, bajo promesa de que no lo contará hasta que lo publique él primero. Cardano la revela públicamente en1545.

- Girolamo Cardano (1501-1576) escribe *Ars magna* sobre las soluciones generales de las ecuaciones cúbica y cuártica. En ella, aparecen soluciones cuyos polinomios conducen a raíces cuadradas de cantidadades negativas, pero Cardano las llama "sofísticas" y concluye que es "tan sutil como inútil".

- **1572** Rafael Bombelli (1530-1590) publica *Algebra*, y hace uso de su idea salvaje de que uno podría usar las raíces cuadradas de números negativos para obtener las soluciones reales mediante una técnica que llegaría a conocerse más tarde como conjugación. Estas técnicas fueon originalmente escritas en una versión temprana del manuscrito, en 1550, pero no llegaron finalmente a ser publicadas.

- **1629** Albert Girard (1595-1632) publica *Invention nouvelle en l'algebre*, enunciando claramente las relacione entre raíces y coeficientes, permitiendo raíces negativas e imaginarias a las ecuaciones. La conceptualización de Girard de las soluciones negativas asienta el terreno para la idea de "los números de la recta o línea real", interpretando de hecho los números negativos como un tipo de orientación relativa. Además, retiene las raíces imaginarias porque éstas muestran los principios generales en la resolución del problema general de "hallar las raíces".

- **1637** Rene Descartes (1596-1650) acuña el término “imaginario” para expresiones que involucran la raíz cuadrada de un número negativo, tomando su “reiterada” aparición como un signo de que el problema es, en cierto modo, insoluble.
- **1670** Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) revive las especulaciones sobre los números imaginarios, señalando que eran un tipo de “anfibio” que se divide por la mitad entre la existencia y la no existencia.
- **1673** John Wallis (1616-1703)publica *Algebra*, en donde aparece por primera vez una manera de representar los números complejos geométricamente.
- **1714** Roger Cotes (1682-1716), en su artículo *Logometria*, deduce la fórmula $-i\varphi = \ln[\cos\varphi - i\sin\varphi]$, que también se publicaría en la póstuma *Harmonia Mensurarum* of 1722. Este resultado pasa mucho tiempo completamente desapercibido.
- **1747** Leonhard Euler (1707-1783) muestra que el logaritmo de un número negativo es imaginario.
- **1748** Euler publica *Introductio in analysin infinitorum* dando las formulaciones en series infinitas de $\exp x, \sin x, \cos x$, y deduce la fórmula $\exp i\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$, aunque estoy ha había sido desarrollado por Johann Bernoulli y otros de otras formas.
- **1749** Euler muetra que la potencia de un número complejo es un número complejo.
- Jean le Rond d’Alembert’s (1717-1783) construye funciones de una variable compleja, obteniendo lo que más tarde se conocerían como ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- **1777** Euler inventa y propugna el símbolo i para la expresión $\sqrt{-1}$.
- **1797** Caspar Wessel (1745-1818) publica el artículo “Sobre la representación analítica de la dirección: una propuesta”, en donde representan los números complejos gráficamente sobre un plano bidimensional. Impreso en 1798, e incluido en las memorias de la Real Academia de Dinamarca de 1799, este trabajo resultó desconocido hasta su redescubrimiento en 1895. Este plano se denomina hoy de Argand-Gauss, pero ya lo había inventado Wessel.
- **1806** Jean Robert Argand (1768-1822) publica *Ensayo sobre la interpretación geométrica de las cantidades imaginarias*, acerca de la representación gráfica de los números complejos en un plano.
- **1814** Las memorias de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) dan la primera teoría clara sobre funciones de variable compleja. No se publican hasta 1825. En las siguientes tres décadas, Cauchy investiga los fundamentos de la moderna teoría de funciones complejas.
- **1820** Siméon-Denis Poisson (1781-1804) escribe el primer ejemplo publicado de integración en el plano complejo en 1815.

- **1825** Cauchy publica *Memoire sur les integrales definies, prises entre des limites imaginaires.* Contiene su teorema integral y la noción de residuo. 1825-50 se considera el período de comienzo del moderno análisis complejo.

- **1828** George Green (1793-1841) publica un teorema relacionando integrales de contorno e integrales de área en el plano complejo. Hoy se llama Teorema de Green, pero sería redescubierto por Mikhail Ostrogradski (1801-62) in 1831.

- John Warren (1796-1852) publica *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.*

- **1830** Augustus De Morgan (1806-1871) escribe *Trigonometría y Álgebra doble*, relacionando los números reales y complejos pero rechazando la posibilidad de álgebras con tripletes y cuadrupletes.

- **1831** Cauchy muestra que una función analítica de variable compleja puede ser expandida en serie de potencias en el entorno de una singularidad. Formula un álgebra rigurosa de números complejos basada en la geometría del plano complejo.

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publica su teoría aritmética de número complejos (el término complejo había sido introducido por Gauss), permitiendo una interpretación geométrica de los números complejos más profunda y simple que las anteriores. Construye el álgebra de números complejos y señala por primera vez el camino para construir números hipercomplejos.

- **1833** William Rowan Hamilton (1805-1865) introduce por primera vez un álgebra de pares de números reales que mimetiza el álgebra de los números complejos mediante cierta operación producto.

- **1834** George Peacock (1791-1858) presenta un informe resumiendo el progreso y estado de ciertas ramas del Análisis. Enuncia por primera vez la idea de un álgegra construida axiomáticamente sin referencia a su posible interpretación.

- **1835** Hamilton identifica $x + iy$ con coordenadas (x, y) y reescribe las definiciones en forma totalmente algebraica. Como tantas otras veces, estoy había también sido descubierto por Gauss, pero él no solía publicar sus resultados.

- **1840** Duncan Farquharson Gregory (1813-1844) publica "Sobre la naturaleza del álgebra simbólica", donde señala que las diferentes álgebras pueden tener operaciones diferentes a las conocidas.

- **1841** De Morgan escribe "Sobre el fundamento del Álgebra", introduciendo el Álgebra de forma simbólica para explicar operaciones específicas. Considera las operaciones $+, -, *, \div$, así como las propiedades elemento unidad, elemento nulo, conmutatividad, asociatividad, distributividad (perono con esta terminología) y da un tratamiento axiomático correcto del concepto de igualdad.

- **1843** Hamilton crea los números cuaternios o cuaterniones. Define el subespacio de unidades imaginarias como "vector", $V(Q) = ai + bj + ck$, cuyos elementos o componentes podían ser interpretados como las coordenadas de un punto en un espacio euclídeo tridimensional. Sin embargo, le fascina la tetradimensionalidad de su creación y dedica buena parte de su vida y obra matemática resultante a su estudio detallado.
- **26 de Diciembre de 1843** John T. Graves escribe una carta a su amigo Hamilton sobre una generalización del trabajo de Hamilton. Graves ha inventado las *octavas*, que más tarde se llamarían octoniones o números de Cayley. La publicación del resultado fue postergada por Hamilton, demasiado ocupado en sus cuaternios. Finalente se publica en Julio de 1847.
- **1844** Hermann Grassmann (1809-1877) comienza a trabajar en el cálculo exterior hacia 1862. Primer gran encuentro con la geometría de espacios multidimensionales.
- Arthur Cayley (1821-1895)publica *Chapters in the analytical geometry of N-dimensions*, (*Capítulos en la geometría analítrica de N-dimensiones*).
- **1845** Cayley describe los octoniones 8-dimensionales, llamados ahora números de Cayley, que son no-conmutativos y no-asociativos, en el artículo"On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Brouwin; and on quaternions".
- **1847** Ernst Kummer (1810-1893) introduce el concepto de ideal en teoría de números, una generalización de los números primos que hace el teorema fundamental de la Aritmética aplicable a números complejos.
- George Boole (1815-1864) publica *The Mathematical Analysis of Logic*, donde expone una visión de las Matemáticas como Ciencia del simbolismo consistente, y contrapuesta a números o magnitudes.
- **1851** Georg Bernhard Riemann (1826-1866) muestra que cualquier función compleja puede ser aplicada en una correspondencia uno a uno en una superficie que ahora se denomina superficie de Riemann.
- **1852** James Joseph Sylvester (1814-1897) publica "La prueba del teorema de que todo polinomio cuadrático homogéneo se reduce por transformaciones ortogonales a una forma de suma de cuadrados positivos y negativos". Es la conocida ley de la inercia de las formas cuadráticas.
- **1853** Primera edición del libro *Lectures on Quaternions*, donde Hamilton presenta su nuevo álgebra totalmente desarrollada. Muestra que forman lo que llama un espacio vectorial lineal sobre los números reales, introduciendo dos nociones distintas de producto sobre ellos, y un tercero híbrido, mostrando entre otras propiedades que el producto escalar o interior de dos vectores es bilineal.
- **1854** Riemann publica "Sobre las hipótesis en la que se basan los fundamentos de la Geometría" en Göttingen y publicadas por Dedekind en 1868, dando definiciones intuitivas geométricas de variedad N-dimensional e introduciendo la noción de curvatura.

- **1858** Cayley presenta “Una memoria sobre la teoría de matrices” donde introduce las matrices, su adición, multiplicación, cero, y la matriz identidad, junto a una interpretación de la teoría de determinantes. Muestra también cómo los cuaternios pueden ser formulado en términos de matrices. Generaliza un teorema de Hamilton, formulando el teorema de Cayley-Hamilton actual, probándolo para matrices de orden 2 y 3.

- **1859** Riemann extiende la función zeta de Euler al plano complejo. Desde entonces se llama función zeta de Riemann.

- **1861** Karl Weierstrass prueba que los números complejos son la única extensión posible en dimensión finita que preserva todas las leyes usuales de la Aritmética.

- **1862** Grassmann publica la segunda edición de su *Teoría de la Extensión Lineal*, más accesible y popular que la previa. Elabora las nociones de dependencia e independencia lineal, subconjuntos, intersecciones, y poniendo énfasis en la distinción entre los productos interior y exterior.

- **1866** Se publican los *Elements of Quaternions*, póstumos a la muerte de Hamilton.

- **1867** Hermann Hankel (1839-1873) publica *La Teoría de los números complejos*, donde aparecía una prueba de que los números complejos eran el álgebra más general posible bajo los axiomas fundamenales de la Aritmética, y ayuda a la popularización de las ideas de Grassmann.

- **1870** Benjamin Peirce (1809-1880) publica *Linear Associative Algebras*, uno de los primeros estudios sistemáticos de los números hipercomplejos, y escribiendo las tablas de multiplicación para 162 álgebras diferentes. Su hijo Charles S. Peirce muestra que de todas las álgebras de menos de 7 dimensiones, sólo tres son sistemas algebraicos con división: los reales, los complejos y los cuaternios.

- **1871** Maxwell escribe una carta de recomendación para Clifford, donde señala:

  > “(...) The peculiarities of Mr. Clifford’s researches ... is that they tend not to the elaboration of abstruse theorems by ingeneous calculations, but to the elucidation of scientific ideas by the concentration upon them of clear and steady thought(...)”

- **1873** Sophus Lie (1842-1899), que había estudiado con Felix Klein (1849-1925), comienza su estudio de los gruos de transformaciones, que daría sus frutos produciendo las álgebras de Lie, que también fueron introducidas y clasificadas de forma independiente por Wilhelm Killing (1847-1923) y Elie Cartan (1869-1951). La clasificación de las álgebras de Lie corresponde a la clasificación de las álgebras *reales* alternativas, esto es, los números reales, los números complejos, los cuaternos y las las octavas u octoniones (o números de Cayley)

- **1873** William Kingdon Clifford (1845-1879) desarrolla una geometría del movimiento que generaliza los cuaternios a bicuaternios.

- **1878** Ferdinand Georg Frobenius muestra, usando instrumentos de la Topología algebraica, que los cuaternios son un álgebra que satisfacen todas las propiedades de la Aritmética salvo la propiedad conmutativa de la multiplicación.
- **1879** Clifford publica *Applications of Grassmann's extensive algebra* (Am. J. Math.) , donde propone una modificación del álgebra de Grassman en lo que ahora se denomina álgebra de Clifford. **Fallecen Maxwell y Clifford, nace Albert Einstein**.
- Richard Dedekind (1831-1916) define explícitamente la noción de cuerpo numérico.
- **1881** Josiah Williard Gibbs (1839-1903) publica su *Vector Analysis.*
- **1884** Weierstrass publica "Sobre la teoría de magnitudes complejas formadas por n-unidades". Muestra que todo álgebra conmutativa sin elementos nilpotentes es una suma directa de un determinado número de copias de los números reales y complejos.
- **1885-1887** Oliver Heaviside (1850-1925) escribe *Electromagnetic induction and its propagation*, reexpresando la teoría electrodinámica de Maxwell, desarrollando la mayor parte del cálculo vectorial moderno y promoviendo sus aplicaciones en la Física.
- **1886** Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) redescubre independientemente las álgebras de Clifford, y es el primero en aplicarlas al estudio de rotaciones en espacios euclídeos.
- **1893** Fedor Eduardovich Molin (1861-1941) descubre que salvo isomorfismo, todas las álgebras complejas simples son álgebras matriciales de orden N. Esto sería redescubierto independientemente por Frobenius y Cartan.
- **1896** Adolf Hurwitz (1859-1919) prueba que todo álgebra normada con un elemento unidad es isomorfo a los reales, a los complejos, los cuaternios o los núemos de Cayley.
- **1897** Kurt Hensel inventa los números p-ádicos. Su trabajo queda oculto en la nevera de ideas matemáticas extravagantes.
- **1898** Alfred North Whitehead publica *A Treatise on Universal Algebra, with Applications.*
- **1907** Joseph Henry Maclagen Wedderburn (1882-1948) prueba que todas las álgebras simples asociativas sobre un cuerpo F, son precisamente álgebras matriciales con elementos en un álgebra normada asociativa.
- **1957** John Willard Milnor, R. Bott and Kervaire muestran que si uno no impone las leyes conmutativa y asociativa del producto, el conjunto completo de sistemas aritméticos posibles son los reales, los complejos, los cuaternios y los números de Cayley.

- **1925-actualidad** Progreso en el estudio de las álgebras de Clifford y de Grassman. Aplicaciones en Física. Atisbos de su relevancia para la descripción fundamental de la Naturaleza. Dirac redescubre las álgebras de Clifford en la teoría relativista de los electrones. Jordan, Wigner y John von Neumann clasifican todas las álgebras "de Jordan" finitas en 1934 intentando generalizar la Mecánica Cuántica. Resurge el álgebra geométrica de Clifford gracias al trabajo de matemáticos como Weyl y Chevalley, y más recientemente de físicos como David Hestenes, el grupo de Cambridge y otros. Emil Artin publica también un libro titulado *Geometric Algebra*. Se introducen los "idèles" a mediados de 1930, por Claude Chevalley. Aparecen en teoría de las clases de cuerpo para extensiones infinitas en términos de grupos topológicos. Aparecen los "adèles" (etimológicamente "additive idèles") de manos de André Weil, para formular una prueba del teorema de Riemann-Roch. "Adèle" es un nombre de chica francés, y el "chiste" no era o no es aceptable para algunos que aún prefieren llamarlos reparticiones o vectores de valoración. La terminología actual fue afianzada por Borel y Harish-Chandra. Desarrollos amplios en términos de hiperobjetos: hiperdeterminantes, hipermatrices, hipernúmeros,...

B. Perfiles biográficos

B.1. W. R. Hamilton

William Rowan Hamilton nació repentinamente en la noche del 3 al 4 de agosto de 1805 en la capital de Irlanda, en Dublín. Hamilton demostró una inteligencia sorprendente desde muy pequeño. Con tres años fue enviado con un tío suyo, llamado James, que era sacerdote y maestro en la escuela Anglicana de Trim, un pueblecito cerca de Dublín. Su tío James tenía fama de excéntrico, por ejemplo, él ataba una cadena al dedo gordo del joven William por la noche y la pasaba a través de un agujero hasta la suya propia. A la mañana siguiente, cuando era la hora de comenzar los estudios, tiraba fuertemente de la cadena para despertarlo. Sin embargo, con su tío continuo hasta 1923 cuando entró en el Trinity College de Dublín. A los pocos meses de estar con su tío James, con tan solo tres años, ya escribía y leía perfectamente el inglés y dominaba la aritmética avanzada. Con cinco años recién cumplidos, ya traducía el latín, el griego y el hebreo y recitaba a Homero, Milton y Dryden. Antes de cumplir los 12 años, ya había escrito un manual de gramática Siria y a los 13 dominaba tan bien el árabe que fue el encargado de escribir el discurso de bienvenida al embajador de Persia en su visita a Dublín. En resumen, se dice que a la edad de 13 años dominaba otros tantos idiomas.

Hamilton comenzó a interesarse por las matemáticas y la física después de 1920, cuando conoció a un americano, Zerah Colburn, que podía hacer grandes cálculos mentales a velocidades increíbles. Cuando tenía 16 años, y habiendo leído el *Eléments d'algèbre* de Alexis-Claude Clairaut y los *Principia* de Newton, Hamilton se introdujo en la lectura de los 5 volúmenes del *Traité de mécanique céleste* de Pierre-Simone Laplace. La detección de un error en el razonamiento de Laplace hizo que el joven Hamilton llamase la atención de John Brinkley, profesor de astronomía en el Trinity College. Con 17 años, Hamilton envió a Brinkley, por aquel entonces ya presidente de la Royal Irish Academy una original memoria sobre óptica geométrica y, cuando éste la presentó ante la Academia, se dice que remarcó

> Este joven, no voy a decir que será, sino es el primer matemático de su edad

En 1823 Hamilton ingresa en el Trinity College, donde obtuvo los máximos honores, tanto en lenguas clásicas, como en Matemáticas. Mientras tanto, él continuó con sus investigaciones en óptica y en abril de 1827 presentó su *Theory of Sistems of Rays* a la Academia. Éste tratado transformaba la óptica geométrica en una ciencia dotada de métodos matemáticos estableciendo un método uniforme aplicable a la resolución de cualquier problema en este campo. Hamilton comenzó desde el principio que Pierre de Fermat había establecido en el siglo XVII, conocido como Principio de Fermat, que establece que la luz recorre el camino que requiera menor tiempo al propagarse de un punto a otro, tanto si el camino es recto o alterado por la refracción. La idea básica de Hamilton fue considerar que el tiempo (o una cantidad parecida denominada acción) como una función de los puntos finales entre los cuales la luz pasa y demostrando que esa cantidad varía cuando las coordenadas de los puntos finales varían, de acuerdo con una ley que él denominó ley de acción covariacional. Además, demostró que toda la teoría es reductible al estudio de esa función característica.

Poco después de la presentación de su trabajo, y siendo todavía un estudiante sin graduar, el Trinity College le eligió para los puestos de Andrews professor of astronomy y para el de Astrónomo Real de Irlanda, sucediendo a Brinkley, a quien le habían hecho obispo. Siendo aún un estudiante sin graduar (no tenía ni 22 años) se convirtió en examinador ex officio de los graduados que se presentaban al Bishop Law Prize de matemáticas. Sus electores objetaron que se estaba otorgando a Hamilton un puesto de investigación libre de las pesadas responsabilidades de la enseñanza. Por consiguiente, en octubre de 1927, 5 meses después de la publicación de su tratado de óptica, Hamilton fija su residencia cerca del Observatorio Dunsink, a 8 km de Dublín, donde vivió el resto de su vida.

Seis años después de trasladarse a Dunsink, Hamilton se casó con Maria Bayley, hija del rector del County Tipperary. Del matrimonio nacieron dos niños yuna niña, pero su mujer no era muy buena en los quehaceres domésticos; como resultado, Hamilton nunca tuvo comidas regulares y terminó confiando excesivamente en el alcohol. Solía trabajar en el comedor y la cocinera le solía traer chuletas de cordero de vez en cuando. Después de su muerte, se encontraron restos de huesos en platos entre sus papeles.

En 1835, Hamilton fue el encargado de la organización de la British Association for the Advancement of Science reunida en Dublín, y al finalizar la cena de despedida, fue nombrado caballero. Dos años después fue nombrado presidente de la Royal Irish Academy. En 1843, le fue otorgada una pensión de 200 libras anuales por el gobierno británico.

Mientras padecía la que sería su última enfermedad, un ataque de gota, Hamilton recibió una gran satisfacción al saberse como un nombre seguro para formar parte de la Foreign Association de la recién formada National Academy of the United States.

Además de su trabajo en la unificación de la óptica y la dinámica, Hamilton descubrió los cuaterniones; éstos son conjuntos de cuatro números que, satisfaciendo ciertas reglas de igualdad, adición y multiplicación, son de gran utilidad en el estudio de cantidades en el espacio tridimensional que requieren conocer magnitud y dirección. Este descubrimiento marcó un hito en la historia, ya que liberaba al álgebra del postulado de conmutabilidad de la multiplicación. Investigaciones en este campo habían comenzado 10 años antes con un innovador documento sobre parejas algebraicas de números, en el cual la entidad básica ya no era números simples, sino parejas ordenadas de números. Hamilton empleó esta idea para desarrollar una rigurosa teoría sobre los números complejos. Este trabajo fue considerado un intento pionero de dotar al álgebra de una base axiomática parecida a la de la geometría. La geometría de números complejos se basa en vectores bidimensionales sobre un plano. En su intento por llevar a cabo una generalización de su trabajo en el espacio tridimensional, los fracasos se sucedieron durante años al no poder resolver problemas fundamentales cuando intentaba aplicar "tripletes" análogos a las parejas en un espacio bidimensional. Repentinamente, el 16 de octubre de 1943, mientras caminaba hacia Dublín por el Royal Canal, la solución se le apareció la idea, tras el razonamiento que hicimos en este trabajo: las operaciones geométricas en el espacio tridimensional no requieren "tripletes", sino "cuadrupletes". La razón es aparentemente sencilla, mientras que en un plano parejas algebraicas bastan, ya que son equivalentes a un multiplicador y un ángulo, en el espacio tridimensional la orientación del plano sobre sí mismo es variable, lo cual necesita dos números más para ser descrito. Hamilton estaba tan excitado por su descubrimiento que al pasar por el Brougham Bridge de camino, grabó las fórmulas fundamentales de los cuaterniones en la piedra.

El descubrimiento de Hamilton fue una ruptura con la tradición, porque abandonaba la ley conmutativa propia de la multiplicación (ab = ba). Los siguientes 22 años los dedicaría al desarrollo del álgebra de cuaterniones y sus aplicaciones. Su trabajo fue publicado a título póstumo en 1866 bajo el nombre de *The Elements of Quaternions*. Desafortunadamente, Hamilton creyó que los cuaterniones serían adaptados para la resolución de física aplicada; no obstante, fue la versión más simplificada de J. W. Gibbs, conocida como análisis vectorial, la que fue eventualmente adoptada por los matemáticos y físicos. Sin embargo, el valor del descubrimiento de Hamilton descansa en las matemáticas puras, donde permitió el desarrollo del Álgebra abstracta moderna.

B.2. Hermann Günther Grassmann

Hermann Günther Grassmann (Stettin, 15 de abril de 1809 - 26 de septiembre de 1877) fue un lingüista y matemático alemán. También fue físico, humanista, erudito y editor. Hermann Grassmann era el tercero de los doce hijos de Justus Günter Grassmann y Johanne Luise Friederike Medenwald. Su madre era hija de un pastor de Klein-Schönfeld. Su padre había sido también consagrado pastor pero consiguió una plaza de profesor de matemáticas y física en el Instituto de Stettin y fue un académico notable, autor de varios libros de texto escolar de Física y Matemáticas, además de llevar a cabo interesantes investigaciones en el campo de la cristalografía. Otro hermano de Hermann, Robert, también se dedicó a las matemáticas y ambos trabajaron conjuntamente en muchos proyectos.

Durante su juventud, Hermann fue educado por su madre, mujer de una vasta cultura. Luego acudió a una escuela privada, antes de ingresar en el Instituto de Stettin, en el que daba clases su padre. La mayoría de los matemáticos despuntan ante sus profesores desde muy jóvenes, sin embargo, y a pesar de tener unas extraordinarias oportunidades al pertenecer a una familia proclive a la educación, Hermann no destacó de modo especial en sus años de estudios secundarios, hasta el punto de que su padre pensó que debía dedicarse a algún tipo de trabajo manual, como el de jardinero o artesano.

Hermann apreciaba la música y aprendió a tocar el piano, a la vez que proseguía sus estudios, en los que poco a poco iba mejorando y en los exámenes finales de los estudios secundarios, con 18 años, terminó el segundo de su promoción. Tras demostrar al final de sus estudios su competencia académica, Hermann decidió estudiar teología y en 1827 se trasladó a Berlín junto a su hermano mayor para cursar estudios en su Universidad. Realizó estudios de teología, lenguas clásicas, filosofía y literatura, y no parece que acudiera a ninguna clase de matemáticas o física.

A pesar de que parece evidente que Hermann no tuvo formación universitaria formal alguna en matemáticas, ésta era la materia que más le interesaba cuando regresó a Stettin, en otoño de 1830, tras haber completado sus estudios universitarios en Berlín. Evidentemente, la influencia de su padre en esta vía fue muy importante, y pudo haber llegado a ser profesor de matemáticas, pero ya se había decidido a llevar a cabo investigaciones matemáticas por su cuenta. Después de pasar un año investigando en matemáticas y preparando el examen para profesor de instituto, Hermann se fue a a Berlín en diciembre de 1831, para presentarse a dichos exámenes. Parece ser que sus ejercicios escritos no debieron ser muy bien valorados, puesto que sus examinadores le dieron el título para enseñar sólo en los primeros niveles de la secundaria. Se le dijo que antes de poder enseñar en los niveles superiores debería volver a examinarse y demostrar unos mayores conocimientos en los temas por los que había concursado. En la primavera de 1832 obtuvo una plaza de profesor ayudante en el Instituto de Stettin.

Fue sobre esta época cuando realizó sus dos primeros descubrimientos matemáticos significativos, que estaban destinados a llevarlo a las importantes ideas que desarrollaría años después. En la premisa de su *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig del Mathematik* (**Teoría de la extensión lineal, una nueva rama de la matemática**, 1844), Grassmann describe como había ido llegando a estas ideas ya alrededor del año 1832.

En 1834 Grassmann empezó a dar clases de matemáticas en la Gewerbeschule de Berlín. Un año más tarde regresó a Stettin patra dar clases de matemáticas, física, lengua alemana, latín, y religión en un centro educativo nuevo, la Otto Schule. Esta gran variedad de materias a impartir es prueba de que aún estaba habilitado solamente para impartir clases en las escuelas en los niveles más bajos. En los cuatro años siguientes, Grassmann superó los exámenes que le permitieron dar clases de matemáticas, física, química y mineralogía en todos los niveles de los centros de educación secundaria.

Grassmann se sentía en parte frustrado por el hecho de tener que dar clases sólo en niveles de secundaria, a pesar de ser capaz de elaborar una matemática innovadora. En 1847 pasa a ser "Oberlehrer". En 1852 se le asignó la el puesto que anteriormente había desempeñado su padre en el Instituto de Stettin, y obtuvo de ese modo el título de profesor. En 1847 solicitó al ministro prusiano de Educación ser tenido en cuenta para el desempeño de un puesto de profesor universitario, y el ministro solicitó a Ernst Eduard Kummer su opinión acerca de Grassmann. Kummer contestó diciendo que el ensayo de Grassman, que había sido premiado en 1846, tenía "(...) buen material expresado de modo inadecuado". Este informe de Kummer acabó con la esperanza de Grassmann de llegara a obtener una plaza de profesor universitario. Este episodio confirma además el hecho de que las autoridades con las que Grassmann contactó nunca reconocieron la importancia real de sus ideas.

Durante los disturbios políticos que se desarrollan en Alemania en 1848-49, Hermann y Robert Grassmann editaron un periódico en Stettin para apoyar la unificación de Alemania en el marco de una monarquía constitucional. Después de escribir una serie de artículos sobre leyes constitucionales, Hermann, cada vez menos de acuerdo con la línea política del periódico, lo dejó.

Grassmann tuvo once hijos, de los que siete llegaron a adultos. Uno de sus hijos, Hermann Ernst Grassmann, llegó a profesor de matemáticas en la Universidad de Giessen.

B.3. Oliver Heaviside

Oliver Heaviside, telegrafista y matemático inglés, nació en Londres (Inglaterra) el 18 de mayo de 1850, falleciendo en Torquay (Inglaterra) el 3 de febrero de 1925. Oliver fue el cuarto hijo de la familia formada por Thomas Heaviside y Rachel West. El padre era un dotado grabador en madera, pero su oficio estaba resintiéndose ya de la competencia de las nacientes técnicas fotográficas y la familia anduvo siempre muy escasa de dinero. La madre montó una especie de pequeña escuela para señoritas en su casa alquilada de Camden Town para conseguir más ingresos. El ambiente familiar debió ser tenso y malhumorado. La situación se complicó en el caso de Oliver porque de pequeño sufrió la escarlatina, como consecuencia de lo cual quedó prácticamente sordo. Esto dificultó su relación con los demás, especialmente con los otros chicos, y probablemente constituyó la base del carácter huraño y retraído que mostró durante el resto de su vida, aunque recuperase mucho la audición posteriormente, durante la adolescencia.

El tema fundamental de las investigaciones iniciales de Heaviside fue la propagación de las señales por las líneas telegráficas, especialmente la distorsión que sufrían a su paso por líneas subterráneas o de clable submarino.

Un legado recibido en 1863 significó una notable mejora económica para la familia. Los Heaviside se trasladaron a una vivienda mejor del mismo barrio y Oliver pudo ir a la escuela, donde destacó en ciencias naturales, ganando una medalla en los exámenes de 1865. Pero su escolarización tuvo que finalizar al año siguiente. El resto de su formación intelectual fue autodidacta, siendo al parecer un asiduo y ávido visitante de las bibliotecas públicas. Le atraían especialmente las obras científicas y fue así como profundizó en los tratados de Newton y de Laplace.

No pudiendo ir a la universidad, hubo de ponerse a trabajar. En 1867 se trasladó a Newcastle, donde inició su vida laboral como telegrafista. Esta orientación, tan decisiva para su posterior carrera, fue el resultado de circunstancias familiares. Una hermana mayor de su madre, Emma West, se había casado con Charles Wheatstone, coinventor de un sistema de telégrafo con W. F. Cooke, lo que le hizo rico y poderoso. Un hermano mayor de Oliver, Arthur W. Heaviside, se convirtió en ayudante de su tío, pasando luego a dirigir la compañía telegráfica local de Newcastle; terminó teniendo un puesto importante en el Post Office. Por su parte Oliver empezó como ayudante de su hermano y en el otoño de 1868 fue asignado al funcionamiento del nuevo cable submarino tendido entre Newcastle y Dinamarca, primero como operador y luego como electricista, nombre que se daba entonces a los especialistas de la materia, la más novedosa e interesante de toda la electrotecnia. Los años siguientes los pasó Oliver en los talleres y a bordo de los barcos encargados del mantenimiento de la línea, lugares privilegiados donde se experimentaban y se analizaban todos los aspectos de los nuevos fenómenos y problemas que continuamente se presentaban. Durante este tiempo siguió estudiando física por su cuenta, tanto teórica como experimentalmente.

Heaviside elaboró una terminología consistente para la designación de los fenómenos y magnitudes eléctricos a lo largo de su obra. En 1884 estableció el operador generalizado de resistencia eléctrica, al que llamó impedancia y le asignó el símbolo Z, como se sigue utilizando actualmente.

En 1884 definió el concepto de vector de flujo de energía, al mismo tiempo que lo hacía Poynting, pero de manera más clara y completa, a pesar de lo cual se le suele conocer como "vector de Poynting".

También propugnó la racionalización de las unidades eléctricas, cuyo sistema se encontraba en elaboración en Inglaterra (sistema de unidades de la British Association, o B. A.) y estaba dando los primeros pasos hacia su internacionalización.

Heaviside trabajó en 1873 en un sistema dúplex de telegrafía, es decir, que permitiese la simultánea emisión y recepción de señales por una misma línea, lo que era un objetivo muy deseado por la mejora de rendimiento económico que suponía. J. B Stearns había propuesto un año antes un esquema práctico para ello y Heaviside analizó el proceso e inventó dos nuevas formas de realizarlo.

Tras el éxito de la conexión transatlántica por radio de Marconi en 1901, el mundo se preguntaba cómo se las apañaban las ondas para seguir la curvatura de la tierra. Heaviside conjeturó un mecanismo que lo hacía posible, suponiendo que eran guiadas por una capa ionosférica conductora y por el mar. A. E. Kennelly hizo al mismo tiempo una conjetura semejante y esta capa, cuya existencia real fue luego comprobada en 1925, se designa como capa de Kennelly-Heaviside.

En mayo de 1874 abandonó su trabajo en Newcastle y retornó a casa de sus padres en Londres, tanto por razones de salud (sufría una especie de ataques seudoepilépticos) como por un deseo de dedicarse exclusivamente al estudio y a la investigación. No volvió a tener un empleo fijo remunerado, salvo que se considere como tal el esporádico de articulista, que le proporcionaba un escuálido rendimiento. Rechazó todas las posibilidades de empleo que su hermano y otras personas le proporcionaron, eligiendo un modo de vida extremadamente austero a cambio de la libertad total para sus investigaciones. "Nací filósofo natural, no inquieto ingeniero ni hombre práctico en sentido mercantil", se caracterizó a sí mismo al final de su vida. Muchas de sus aportaciones teóricas tuvieron importantes aplicaciones prácticas, pero él nunca intentó obtener rendimiento económico de ellas (probablemente siguiendo las huellas de Faraday, uno de sus ídolos), a pesar del furor inventivo y la consiguiente solicitud de patentes propios de la época, incluido el cercano ejemplo de su tío Wheatstone.

Después de 1900 la actividad científica de Heaviside declinó apreciablemente en cantidad y calidad, cesando prácticamente en 1906, aunque su último libro se publicase en 1912. Una de las causas fundamentales fueron los problemas ocasionados por su persistente mala salud.

Oliver y sus padres se fueron a vivir en septiembre de 1889 con su hermano Charles, que tenía una tienda de instrumentos musicales en Paington (Devonshire), siguiendo otra de las líneas operativas familiares iniciadas por Wheatstone, quien también había inventado el acordeón o concertina. Tras el fallecimiento de sus padres en 1894 y 1896, Oliver se trasladó en 1897 a una casa independiente en el campo, cerca de Newton Abbot y no muy lejos de Paington, pero la experiencia no fue muy satisfactoria y en 1908 volvió a vivir como huésped en Torquay, donde falleció en 1925, tras llevar una vida cada vez más solitaria y excéntrica.

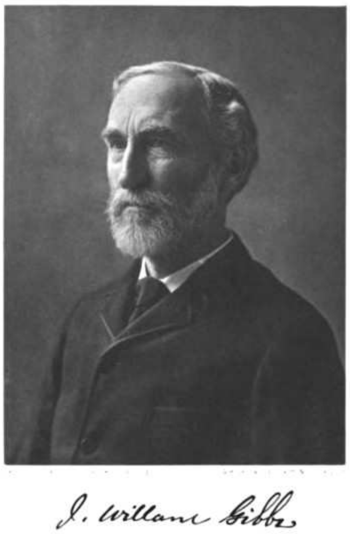
A pesar de su vida eremítica, la obra publicada y las actividades de sus amigos influyentes grangearon numerosos reconocimientos a Heaviside, aunque él no pareciese apreciarlos en exceso. Son destacables los siguientes:

- 1891: Miembro de la Royal Society de Londres.
- 1899: Miembro honorario de la American Academy of Arts and Sciences.
- 1905: La Universidad alemana de Göttingen le concede el doctorado honoris causa.
- 1908: Miembro honorario de la Institution of Electrical Engineers inglesa.
- 1918: Miembro honorario del American Institute of Electrical Engineers.
- 1921: Primer galardonado con la medalla Faraday de la Institution of Electrical Engineers.

Los esfuerzos y gestiones de J. Perry, G. F. FitzGerald, O. Lodge y otros amigos lograron que se le concediera a Heaviside una pensión oficial de 120 libras anuales en 1896 (elevada a 220 libras en 1914), consiguiendo también que éste terminase por aceptarla, pues dos años antes había rechazado otra ayuda del Scientific Relief Fund de la Royal Society, gestionada del mismo modo, por considerarla "caridad".

B.4. Josiah W. Gibbs

Josiah Willard Gibbs (11 de febrero, 1839 en New Haven: Connecticut, USA-íd.28 de abril 1903) fue un matemático y físico estadounidense que contribuyó de forma destacada a la fundación teórica de la termodinámica.



Estudió en la Universidad de Yale, obteniendo su doctorado en 1863 con una tesis sobre los dientes de engranajes, e ingresando en la sociedad secreta Los Calavera y Huesos.

En 1886 fue a vivir a Europa, donde permanció tres años: París, Berlín y Heidelberg. En 1871 fue nombrado profesor de Física Matemática en la Universidad de Yale. Enfocó su trabajo al estudio de la Termodinámica; y profundizó asimismo la teoría del cálculo vectorial, donde paralelamente a Heaviside opera separando la parte real y la parte vectorial del producto de dos cuaternios puros, con la idea de su empleo en Física. En estos campos, se le consideró uno de los grandes pioneros de la actualidad.

B.5. Arthur Cayley

Arthur Cayley (Richmond, Reino Unido, 16 de agosto de 1821 - Cambridge, 26 de enero de 1895) fue un matemático británico. Es uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras.

Además de su predilección por las matemáticas, también era un ávido lector de novelas, le gustaba pintar, apasionado de la botánica y de la naturaleza en general, y aficionado al alpinismo.

Fue educado en el Trinity College de Cambridge. Estudio durante algún tiempo la carrera de leyes con lo que trabajó de abogado durante 14 años, a la vez que publicaba un gran número de artículos. Luego pasó a ser profesor en Cambridge. Fue el primero que introdujo la multiplicación de las matrices. Es el autor del teorema de Cayley-Hamilton que dice que cualquier matriz cuadrada es solución de su polinomio característico. Dió la primera definición moderna de la noción de grupo. Además, generalizó los cuaternios de Hamilton a octoniones, llamados hoy también números de Cayley, pero que ya habían sido concebidos antes por un amigo de Hamilton, Graves, en correspondencia con éste, y que los llamaba en su lugar *octavas*.

Recibió la Royal Medal en 1859 y la Medalla Copley en 1882.

En combinatoria, su nombre está unido a la fórmula que enumera los árboles decorados con n vértices.

Se llama a veces octavas de Cayley o números de Cayley a los octoniones.

Es el tercer matemático más prolífico de la historia, sobrepasado tan solo por Euler y Cauchy, con aportaciones a amplias áreas de la matemática. Cayley es autor de una colección de artículos suyos llamado "Collected Mathematical Papers of Cayley", que contiene 966 artículos en trece grandes volúmenes. También destacan sus trabajos sobre funciones elípticas, la teoría de determinantes y su generalización. Es poco conocido también, que Cayley definió un invariante algebraico llamado hiperdeterminante para "hipermatrices" $2\times2\times2$, en paralelo con el clásico determinante, y que no ha recibido uso hasta años recientes.

B.6. W. K. Clifford

William Clifford nació en Exeter el 4 de mayo de 1845. Durante sus año de escuela fue una joven promesa. A la edad de 15 años ingresó en el King's College de Londres. En 1868 fue elegido fellow del Trinity College de Cambridge, tras ser elegido segundo wrangler en 1867 y segundo premio Smith.El destino de ser segundo lo compartió con otros posteriores famosos matemáticos, como William Thomson (lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. En 1870 formó parte de una expedición a Italia para observar un eclipse y sobrevivió a un naufragio en las costas sicilianas.

En 1871 fue nombrado profesor de Matemática y Mecánica del University College de Londres, y en 1874 miembro de la Royal Society. Fue además miembro de la London Mathematical Society y de la Metaphysical Society.

En 1875 contrae matrimonio con la novelista de Barbados Lucy Lane. En 1876 sufre un colapso, probablemente debido al exceso de trabajo (durante el día se dedicaba a las tareas docentes y administrativas propias de su cargo, y por la noche escribía). Pasó seis meses de descanso en Argelia y España, tras lo cual retomó sus deberes, sufriendo 18 meses después otro colapso. Fue a Madeira a recuperarse, pero murió de tuberculosis allí tras algunos meses, el 3 de marzo de 1879, dejando viuda y dos hijos.

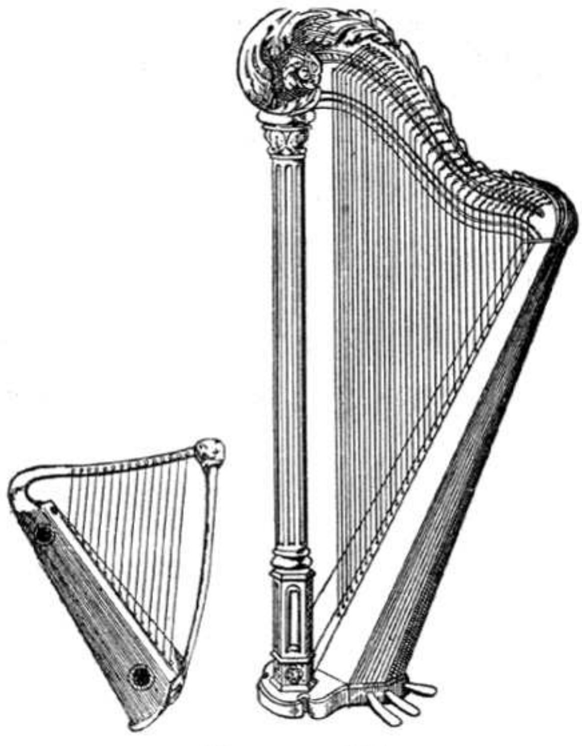
Sus contemporaneos lo consideraban una persona de agudeza y originalidad extraordinarias, adornado con rapidez de pensamiento y palabra, estilo lúcido, ingenio y gusto poético, y afectuoso.

Al igual que Charles Dodgson (más conocido como Lewis Carroll), disfrutaba escribiendo cuentos de hadas. Dejó una colección titulada La gente menuda.

Como curiosidad, 11 días después de su muerte nació Albert Einstein, quien dió forma rigurosa a la intuición de Clifford sobre la gravedad.

B.7. Nabla

Nabla es un símbolo, que se escribe como ∇ . El nombre viene de una palabra griega para un arpa hebrea con una forma similar al símbolo que representa.



Harps, p. 984.

Palabras relacionadas también existen en arameo, siriaco y hebreo. El símbolo fue usado por primera vez por William Rowan Hamilton en la forma de un triángulo girado: $\triangleright$. Otro nombre hoy día menos común para este símbolo es *atled* (delta pronunciada al revés) debiado a que nabla es una delta invertida.

Nabla se usa en Matemáticas para denotar el operador derivada en sentido vectorial. También puede referirse a una conexión en geometría diferencial o representar la relación todo en teoría de retículos. Sobre su introducción por Hamilton, W. Thomson escribió en 1884:

> Me tomé la libertad de preguntar al Profesor Bell si tenía un nombre para este símbolo y él me mencionó la palabra nabla, una sugerencia

en tono humorístico de Maxwell. Se trata del nombre de una antigua arpa egipcia, que tiene esa forma.

En 1901 Gibbs y Wilson señalan:

> Este operador simbólico fue introducido por Sir W.R.Hamilton y es ahora universalmente usado. No parece haber, sin embargo, un acuerdo universalmente reconocido para nombrarlo, aunque la aparición frecuente del símbolo ocasiona una necesidad práctica para denominarlo. Se encuentra por experiencia que el monosílabo "del" es tan corto y fácil de pronunciar que incluso en toda fórmula complicada den la que aparece varias veces no hay inconvenientes para el hablante u oyente de confundirse cuando se repite.

Referencias

[1] *Numbers* (Graduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics),Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, and Max Koecher (Paperback - Jan 18, 1996).

[2] B. L. van der Waerden, *Hamilton's discovery of quaternions.* Mathematics Magazine, 49 (1976), pp. 227-234.

[3] M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, Dover Publications (1994).

[4] *El lenguaje vectorial en Geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann.* Revista SUMA, nº25, págs. 61-70 (1997). Víctor Arenzana Hernández.

[5] *La forma de volumen.* Javier Peralta, en "Contribuciones matemáticas: libro-homenaje al profesor José Javier Etayo", 1994, ISBN 84-7491-510-4, págs. 189-202.

[6] W. R. Hamilton's *Lectures on Quaternions*, 1853.

[7] *On Jacobi's elliptic functions*, en *The collected mathematical papers of Arthur Cayley.Vol. 1 (Paperback).* Scholarly Publishing Office, University of Michigan Library (December 20, 2005).

[8] *Mathematical papers*, William Kingdon Clifford. Ed. by Robert Tucker, With an introduction by H. J. Stephen Smith. (Paperback). Scholarly Publishing Office, University of Michigan Library (December 20, 2005).

[9] *Multi-dimensional vector product*, Z. K. Silagadze, math/0204357

[10] B. Eckmann, *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, Comm. Math. Helv. **15**, 318-339 (1943).

[11] M. Rost, *On the Dimension of a Composition Algebra*, Doc. Math. J. DMV **1**, 209-214 (1996).

[12] D. B. Fairlie and T. Ueno, *Higher-dimensional generalizations of the Euler top equations*, hep-th/9710079.

[13] T. Ueno, *General solution of 7D octonionic top equation*, Phys. Lett. A **245**, 373-381 (1998).

[14] R. Dundarer, F. Gursey and C. Tze, *Generalized Vector Products, Duality And Octonionic Identities In D = 8 Geometry*, J. Math. Phys. **25**, 1496-1506 (1984).

[15] S. Maurer, *Vektorproduktalgebren*, Diplomarbeit, Universität Regensburg, 1998.
http://www.math.ohio-state.edu/~rost/tensors.html#maurer

[16] J. A.Nieto and L.N. Alejo-Armenta, *Hurwitz theorem and parallelizable spheres from tensor analysis*, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 4207-4222 (2001).

[17] M. Kocher and R. Remmert, *Composition algebras*, *en Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 123 (Springer, 1990). Edited by J. H. Ewing, pp. 265-280.

[18] M. Günaydin and F. Gürsey, *Quark Structure And Octonions*, J. Math. Phys. **14**, 1651-1667 (1973);
V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, *Why We Like Octonions*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **86**, 274-286 (1986);
F. Gürsey and C. H. Tze, *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics* (World Scientific, Singapore, 1996);
G. M. Dixon, *Division algebras: octonions, quaternions, complex numbers and the algebraic design of physics* (Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994);
S. Okubo, *Introduction to octonion and other nonassociative algebras in physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[19] J. C. Baez, *The Octonions*, math.ra/0105155.

[20] R. L. Brown and A. Gray, *Vector cross products*, Comm. Math. Helv. **42**, 222-236 (1967);
A. Gray, *Vector cross products on manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **141**, 465-504 (1969); *Errata to "Vector cross products on manifolds"*, ibid. **148**, 625 (1970) (erratum).

[21] Adolf Hurwitz, Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898) 309–316.

[22] Richard D. Schafer, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York, 1995.

[23] Max Zorn, Theorie der alternativen Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **8** (1930), 123–147.

[24] William K. Clifford, *Applications of Grassmann's extensive algebra*, Amer. Jour. Math. 1 (1878), 350-358.