

---



---

## EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

**Fernando Chamizo Lorente**

---



---

**¿Y quién es...** JUAN F. GONZÁLEZ? *Es el autor de «The Spectrum Of Riemannium» (<http://www.thespectrumofriemannium.com/>), un magnífico blog de Física-Matemática de primer nivel, bien explicada y aderezada con ocasionales imágenes de superhéroes. Es admirable e increíble que esta joya se deba al esfuerzo altruista de alguien que no cuenta con el apoyo de ninguna institución y que no mantiene vinculación universitaria. Su artículo es singular respecto a lo habitual en esta sección y en esta publicación. Independientemente de los conocimientos de Física del lector, espero que ilustre cuán cerca de los intereses de los físicos están a veces algunos de «nuestros» objetos matemáticos abstractos.*

### Física y Teoría de Números: un romance de muchos polilogaritmos y funciones especiales

por

**Juan F. González H.**

*Dedicado a Jacob D. Bekenstein (1947–2015), R. I. P.*

*In memoriam  $S/k_B = A/(4L_p^2) = c^3 A/(4G\hbar)$*

#### 1. INTRODUCCIÓN

Las interacciones y relaciones entre la Física y las Matemáticas tienen una larga historia. En particular, la Física como Ciencia tal y como la comprendemos en la actualidad nace tras el asombroso descubrimiento de que las Matemáticas forman parte de la Naturaleza [17, 19] y, por tanto, son el lenguaje más exacto y preciso del que disponemos para la descripción de los fenómenos físicos naturales.

De la misma forma, la Física como ciencia experimental ha impulsado el desarrollo de las Matemáticas desde Galileo, y la Física se ha servido en ocasiones de nuevos instrumentos matemáticos. No es un misterio que la resolución de los problemas de

Cinemática y Dinámica fue una de las razones de la creación del cálculo infinitesimal<sup>1</sup>, o que el análisis tensorial fue necesario para la creación de la Relatividad General, que este año 2015 cumple su centenario, desde la base experimental que supone el Principio de Equivalencia [16].

Igualmente, nuevas matemáticas han llevado, con más o menos tiempo, a la formalización, generalización o revisión de conceptos aceptados por la Física, acarreado generalmente la definición rigurosa tanto de antiguos como de nuevos conceptos, y también creando y usando funciones y objetos matemáticos. Es tal la belleza y poder unificador de las Matemáticas que no ha pasado desapercibida, a pesar de su abstracción, como un arte, que en ocasiones se ha adjetivado como oscuro e irrazonablemente eficaz por sus propios creadores y usuarios [47].

El pasado siglo XX no fue muy distinto en estos juegos, y promete seguir siendo divertido e interesante este nuevo siglo y el futuro asintótico. Sin embargo, más allá de las diversas corrientes, escuelas y modas pasajeras, no hay nada más esencial, profundo y subyacente en el corazón de las Matemáticas que la noción de «número». La Teoría de Números ha sido siempre la estrella y rama más pura de las Matemáticas. No es sin embargo la idea de número algo ajeno o sin importancia tampoco en Física, y por extensión, en toda Ciencia Natural (en esencia experimental) establecida como tal, y que requiera de un proceso de observación y medida, o bien de formalización de su cálculo o de un razonamiento riguroso de tipo lógico-matemático.

Las grandes teorías y revoluciones científicas de la Física del siglo XX, la Relatividad (en sus dos versiones, especial y general) y la Física Cuántica han estado ligadas al uso y creación de herramientas matemáticas avanzadas. ¿Qué puede ofrecer la Teoría de Números a la Física? ¿Qué clase de objetos matemáticos teórico-numéricos y de funciones especiales interesan a los físicos, especialmente a los que son teóricos o matemáticos? ¿Por qué debería un matemático, en particular un especialista en Teoría de Números, estar interesado en las «realizaciones» físicas de las funciones y objetos que define o de sus aplicaciones en ciertas teorías como las Teorías Cuánticas de Campos (TCC) o la Teoría de la Relatividad (TR)? ¿Cómo aparecen los polilogaritmos en TCC, Termodinámica o Física Estadística? ¿Por qué puede ser interesante para los dos mundos una colaboración y comunicación más amistosa, cercana e intensa? El presente artículo es una humilde contribución a la respuesta de estas cuestiones y a dar un nuevo «feedback» y motivación a la fructífera (y, en cierto modo, necesaria e inevitable) correspondencia entre Física y Matemáticas.

## 2. POLILOGARITMOS Y OTRAS FUNCIONES ESPECIALES

La Física Matemática, FIM, (o Física Teórica, FIT, según se mire) ha sido invadida por objetos y funciones presentes en la Teoría de Números (TEN) en los últimos siglos. ¿Cuáles son estos entes? Sin ser completamente exhaustivo debido a los límites y objetivos de este artículo, vamos a presentar a algunas de estas conocidas especies transgresoras, para revisar algunas de sus aplicaciones actuales en

<sup>1</sup>I. Newton, en *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) y *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1736), o G. W. Leibniz, *Nova Methodus pro Maximis et Minimis y De Geometria Recondita et Analyti Indivisibilium et infinitarum* (1686).

las siguientes secciones. En primer lugar, ¿cuál es la joya de la corona de la TEN? Posiblemente, todo matemático (y todo físico) que se precie habrá sido seducido por la preciosa función zeta de Riemann [37] (ver [10, 28]):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

donde  $p$  recorre todos los números primos. La función zeta es un bonito ejemplo y prototipo de función aritmética que ha sido generalizada y extendida a otras clases de funciones maravillosas. Sería tarea posiblemente enciclopédica hacer una lista de todas ellas, por lo que nos centraremos en algunas subespecies muy concretas. En primer lugar, resulta bonita la función zeta de Hurwitz<sup>2</sup>

$$\zeta(s, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(Q+n)^s}.$$

Otras funciones zeta que aparecen últimamente de forma universal y recurrente en diversos lugares de la Física son las polizetas (PO), o valores zeta múltiples, y sus generalizaciones, los polilogaritmos (PLOG). En versión estándar o «coloreada» con  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$ , son:

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_m) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_m > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_m^{s_m}} = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_m > 0} \prod_{j=1}^m \frac{1}{n_j^{s_j}},$$

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad \text{Li}_{\mathbf{s}}(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_m > 0} \frac{z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_m^{s_m}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_m^{s_m}}.$$

Como caso particular interesante, nótese que el PLOG estándar de la unidad es la función zeta de Riemann, es decir,  $\text{Li}_s(1) = \zeta(s)$ . Además, el nombre de la función PLOG se debe a la representación integral

$$\text{Li}_s(z) \equiv \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^1 (-\ln u)^{s-1} \frac{du}{1-uz}.$$

Así, para  $s = n \in \mathbb{N}$  se definen los «monologaritmos», «dilogaritmos», «trilogaritmos», «cuadrilogaritmos»... Incluso puede definirse el «nulogaritmo» (logaritmo de orden cero o nulo). El «monolog» y el «nulog» son bastante simples,

$$\text{Li}_1(z) = \log(1-z), \quad \text{Li}_0(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Dado que los logaritmos de diferente orden cumplen la ecuación de recurrencia

$$z \frac{d}{dz} \text{Li}_{s+1}(z) = \frac{d}{d \ln z} \text{Li}_{s+1}(z) = \text{Li}_s(z),$$

---

<sup>2</sup>La zeta de Hurwitz es también interesante: es de las pocas funciones zeta conocidas que no cumple típicamente la hipótesis de Riemann.

y teniendo presente la fórmula de duplicación  $\text{Li}_s(z) + \text{Li}_s(-z) = 2^{1-s} \text{Li}_s(z^2)$ , se puede usar el nulog para obtener PLOG de orden entero negativo,  $\text{Li}_{-n}(z)$ , para todo  $n \geq 1$ . Estas funciones racionales se han llamado **polipseudologaritmos** [11]. Se deja como ejercicio de investigación al lector interesado buscar otras propiedades y generalizaciones de estas funciones en los artículos y libros correspondientes de las referencias (e.g., [31]).

Un último ejemplo de función divertida, que también está apareciendo cada vez más en diferentes contextos, es la denominada función de Lambert. La función de Lambert,  $W(z)$ , se define habitualmente como la función inversa que resuelve una ecuación implícita:

$$Xe^X = Y \iff W(z)e^{W(z)} = z.$$

La función de Lambert también se conoce como función omega o logaritmo producto. Como función, en el campo de los números complejos, está bien definida para cualquier número complejo y posee dos ramas, generalmente denotadas por  $W_0$  y  $W_{-1}$ . Es una función que tampoco tiene una conexión evidente con las funciones elementales ni, que se sepa a fecha de publicación del presente artículo, con las funciones hipergeométricas. Difiere en ello, por tanto, de los PLOG y las funciones PO, que sí guardan relaciones ocultas con las funciones hipergeométricas (generalizadas). Hay mucho misterio y entretenimiento para matemáticos interesados con estas funciones. Por ejemplo, la función de Lambert permite calcular y resolver cierto tipo de ecuaciones trascendentes o ciertas ecuaciones con infinitas potencias. Para ser precisos, la ecuación  ${}^\infty z = c$ , donde  ${}^\infty z$  es la «tetración» (exponenciación) infinita, se resuelve con  $c = -W(-\ln(z))/\ln(z)$ .

### 3. SERIES: DE LAS MATEMÁTICAS A LA FÍSICA Y VICEVERSA

Los PLOG aparecen de forma ubicua en sitios cada vez más numerosos de la Física. Un diagrama de Feynman es un objeto esencial en lo que se llama TCC a nivel perturbativo, esto es, una TCC definida en términos de «aproximaciones sucesivas». Un diagrama de Feynman es al físico de partículas lo que una serie de potencias para un matemático. Esencialmente, cualquier diagrama de Feynman puede visualizarse como un grafo  $G$ , que puede incluir o no ciertos ciclos (*loops* o lazos son la palabra habitual usada en la jerga por los físicos), y estar decorado por diversas etiquetas. Así, un diagrama de Feynman es una representación útil de partículas e interacciones entre objetos que aparece de forma natural en los cálculos de procesos de amplitudes de *scattering*<sup>3</sup>, sean partículas de TCC [13, 20] o amplitudes en teoría de supercuerdas (e.g. [8, 41]), debido a interacciones y fuerzas entre partículas. Una amplitud de scattering, de la que el diagrama de Feynman es una representación abstracta y visual, está generalmente definida a nivel perturbativo como una serie formal  $I = \sum I_k \varepsilon^k$ . Esta serie es generalmente «divergente», y hay que emplear toda una serie de recetas «mágicas» para sumarla o ignorar los «infinitos malignos» que

<sup>3</sup>Las amplitudes son generalmente números complejos que proporcionan en TCC probabilidades de eventos, secciones eficaces...



Cuatro de los 72 diagramas que intervienen en las correcciones cuánticas del momento giromagnético del muón a 3 loops. Para una lista completa de los grafos involucrados y detalles sobre el cálculo puede consultarse [26, 27].

no son «físicos», al menos hasta cierto punto<sup>4</sup>. Tras unos procesos que los físicos llaman *regularización* y *renormalización*, uno puede obtener resultados finitos de esta clase de series y diagramas. Lo absolutamente delirante es que este tipo de técnicas funciona extraordinariamente bien, y tanto, que uno logra resultados correctos con una precisión increíble que alcanza hasta una parte en  $10^{12}$ . En TCC, las series perturbativas son lo que los físicos llaman «series asintóticas», series truncadas hasta cierta potencia, y que módulo una parte infinita permiten cálculos que pueden contrastarse con datos experimentales para ciertas magnitudes «observables».

Es bastante sorprendente cómo los polilogaritmos intervienen en algunos de estos cálculos monstruosos, y que hoy día virtualmente sólo pueden realizarse con asistencia y ayuda computacional. Por ejemplo, la corrección al denominado *factor giromagnético del muón* (o del electrón) en electrodinámica cuántica (QED<sup>5</sup>). Para el matemático no físico o no aficionado a la Física de partículas, un muón puede imaginarse como un electrón «gordo», en concreto 207 veces más masivo que el electrón<sup>6</sup>. El factor giromagnético es un número, que convenientemente «reescalado», puede medirse con los experimentos de Física y está relacionado con el momento magnético del electrón (o muón), una magnitud que mide el comportamiento angular del electrón (muón) cuando se somete a la acción de un campo magnético. Los cálculos con diagramas de Feynman en QED, «a mano» o «a máquina», a 3 loops («lazos» o ciclos) involucran, tras analizar las contribuciones de 72 diagramas de Feynman, la siguiente expresión numérica compacta en el caso del muón<sup>7</sup>:

$$A = 1.181241456587\dots = \frac{28259}{5184} + \frac{17101}{810}\pi^2 - \frac{298\pi^2 \ln 2}{9} + \frac{139}{18}\zeta(3) + \frac{100}{3} \left( \text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln^4(2)}{24} - \frac{\pi^2 \ln^2 2}{24} \right) - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{83}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5).$$

<sup>4</sup>Tiene puntos de controversia matemática, física y hasta filosófica el «destino final» de las divergencias en una TCC.

<sup>5</sup>*Quantum Electro Dynamics*, y no *Quod Erat Demonstrandum*...

<sup>6</sup>También hay un «electrón supergordo», llamado tauón o partícula tau, unas 3480 veces la masa del electrón. Nadie tiene claro aún por qué existen estas réplicas masivas del electrón. El cálculo de este mismo factor para el electrón es una de las medidas más precisas y exactas de la Física.

<sup>7</sup>Horrible o no, humana o no, tiene una muy sutil belleza... ¿verdad? Resulta que los polilogaritmos y funciones asociadas, o sus generalizaciones, aparecen tanto en los procesos perturbativos como en los no perturbativos, dando fórmulas cerradas elegantes, aunque en ocasiones puedan ser computacionalmente tediosas.

Las ideas que hay detrás de la aparición de los polilogaritmos o algunas de sus generalizaciones en trabajos recientes [43] son varias: 1) las integrales de Feynman son «períodos» de algún tipo [9, 32], y están relacionadas con PO, PLOG y otras funciones similares; 2) el álgebra de PLOG y PO está íntimamente relacionada con integrales iteradas y sumas anidadas como los PLOG y PO, al menos en cierto límite; y 3) hay profundas conexiones geométrico-algebraicas en el propio método de regularización dimensional conocido por los físicos [46].

#### 4. EL EFECTO CASIMIR

Otra aplicación útil de los PLOG es en los cálculos que involucran «efectos de vacío». Es habitual en Electrodinámica Clásica oír lo que pasa cuando se calcula, por ejemplo, el campo eléctrico en las diferentes regiones que forman un cable coaxial que intercala vacío con materiales dieléctricos. Clásicamente, el vacío *no* se polariza. El vacío cuántico es algo mucho más sutil que el vacío clásico porque puede polarizarse como si fuera un «medio»<sup>8</sup>. Por cuestiones de espacio, nos restringiremos aquí a ver meros retazos de los efectos de vacío en TCC<sup>9</sup>, destacando la relevancia del uso de la función zeta y los PLOG en el efecto Casimir<sup>10</sup>. ¿Qué es el efecto Casimir? Esencialmente, es la aparición de fuerzas entre superficies hechas de algún material, pero separadas una distancia muy pequeña, debidas a la presencia de campos cuantizados. El efecto Casimir puede entenderse entonces, equivalentemente, como la aparición de una fuerza atractiva entre dos placas paralelas (o más generalmente conductores con cierta geometría) sin carga neta próximas entre sí. Cuando la cercanía es suficiente, las fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético puede provocar que se produzcan fotones, correspondientes a ondas estacionarias entre las placas, que inducen la denominada fuerza de Casimir.

De hecho, todo esto tiene cierta justificación heurística e intuitiva. Uno de los primeros resultados asombrosos en TCC es que, aunque uno puede imaginarse que el vacío tiene, a priori, energía infinita, la variación de esta constante, aunque sea virtualmente infinita, no está bien definida sino sujeta a variaciones finitas  $\Delta E$  debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Estas fluctuaciones cuánticas en la energía satisfacen  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ . Por lo tanto, el número de partículas en el vacío, y la energía, pueden cambiar al precio de que ocurran en una cantidad suficientemente pequeña de tiempo  $\Delta t$ . Esto ocurre, esencialmente, en el efecto Casimir, incluso a

<sup>8</sup>¡Esto es realmente extraño! Pero en Física o Matemáticas nos acostumbramos fácilmente a los «fenómenos extraños» (el vacío se polariza en Física Cuántica similarmente a un dieléctrico, ¡hala!) una vez se les da validez experimental o demostración rigurosa. El último teorema de Fermat es raro, la relatividad especial y general son raras, incluso la Mecánica Cuántica o la Teoría Cuántica de Campos son extrañas, pero ciertas. Además, hasta tenemos quarks extraños...

<sup>9</sup>El llamado *efecto Schwinger*, o producción de (pares de) partículas en campos «fuertes» o intensos, aparece generalmente en el sector no perturbativo de una TCC. El interés del autor del presente artículo por los PLOG y otras funciones especiales asociadas aumentó exponencialmente cuando observó que muchos resultados se podían escribir en forma cerrada usando estas funciones. La importancia de las formas cerradas en Matemáticas ha sido discutida en [7].

<sup>10</sup>Para una introducción más avanzada a los efectos de Schwinger y Casimir, pueden consultarse los artículos [6, 14] y los libros [1, 21, 22].

temperatura  $T \sim 0\text{K}$ . Los efectos físicos del vacío tienen, en principio, consecuencias observables, y uno querría dar algo de sentido a esto matemáticamente. Una forma es sumar todas las energías del estilo  $E = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega(n + 1/2)$  y separar hábilmente la energía en dos contribuciones, una finita y otra infinita. La presencia del factor  $1/2$  «del punto cero» es sutil y maliciosa en TCC, adicional al término tipo serie divergente, y podemos ignorarla en la siguiente discusión. Las energías  $E_n = n\hbar\omega$  corresponden a las energías posibles de las ondas estacionarias en una onda sinusoidal, e.g., de tipo  $\text{sen}(\pi n/a)$ , por lo que ignorando la contribución de  $E_0$ , esto no es más que la famosa fórmula de Planck y Einstein para un fotón. La suma de todas las energías, ¿es pues realmente finita o infinita? Usando la función zeta de Riemann, damos un sentido a la suma

$$E/(\hbar\omega) = (1 + 2 + 3 + \dots)$$

y resulta, sustraída la energía  $E_0$ , un resultado finito. ¿Por qué? El término entre paréntesis no es infinito usando el procedimiento de continuación analítica a  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , de forma que  $\zeta(-1) = -1/12$ . Esta regularización de la función zeta es algo mágico pero ciertamente formal y unívoco desde el punto de vista del análisis complejo. Que la suma infinita de todos los números enteros es un número negativo y fraccionario, desde el punto de vista de la prolongación analítica de una función de variable compleja, no puede dejar indiferente a nadie y ciertamente uno pensaría que se trata o bien de una auténtica locura o una genialidad sin par. ¿Hay algún otro modo de justificar tal cosa de forma rigurosa? Un físico es un matemático ingenuo y bestia la mayor parte de las veces, por su desconocimiento de los últimos y más modernos métodos u objetos matemáticos. En vez de la función zeta, uno podría querer «sumar» la serie «apantallándola» con una función exponencial de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}.$$

Suponiendo que cometemos semejante acto de desesperación, en aras de la finitud, si estudiamos el comportamiento de la serie asintóticamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} n = -\frac{d}{d\varepsilon} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} \right) = \frac{1}{4 \text{senh}^2(\varepsilon/2)} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + O(\varepsilon^2),$$

podemos ver que, en el límite dado, el resultado es efectivamente algo del tipo  $\infty + \zeta(-1)$ . Ignorando la contribución proporcional a  $1/\varepsilon^2$ , regularizamos la suma dándole un valor finito que coincide con la regularización de la función zeta. Aun así, como ocurre con las fantasías recurrentes, uno podría protestar todavía sobre la validez de esto. Sin embargo, parece que la fantasía tiene bastante de «real», porque es un resultado frecuente que aparece en Cosmología y otras partes de la FIT, como la teoría de supercuerdas<sup>11</sup>. Afortunadamente para los físicos, los astutos y prodigiosos

<sup>11</sup>En particular, que la suma de los enteros positivos sea  $-1/12$  se requiere para probar, e.g., que la teoría de supercuerdas bosónica está libre de taquiones, partículas o estados generalmente «siniestros» de energía (o masa) cuadrática negativa, en la dimensión crítica  $D = d + 1 = 26$ , o bien en  $D = d + 1 = 10$  si la teoría posee una propiedad matemática denominada supersimetría (SUSY).

matemáticos ya han pensado también en estos resultados antes que ellos, por lo que el grado de posible locura se reduce considerablemente al aumentar la estadística. Ramanujan y Hardy [4, 24] son, tal vez, dos de los más célebres matemáticos que dedicaron parte de su vida a entender las diabólicas series divergentes, éstas que han demostrado ser vitales para el entendimiento de algunos aspectos de la TCC. Sin embargo, aún hoy, la comprensión fundamental de los infinitos en dicha teoría es un tema sujeto a fuertes discusiones. Lo más sorprendente es, posiblemente, que las constantes «infinitas», o cantidades que las poseen, sean medibles u observables o bien tengan efectos medibles y observables. Al parecer, los infinitos malignos en Física pueden «domesticarse», aunque ciertamente de forma algo salvaje, que hace que un matemático usual (o también algún físico célebre como P. A. M. Dirac) se tire literalmente de los pelos cuando se hacen ciertas manipulaciones aritméticas y algebraicas, que involucran a veces funciones especiales como los PLOG, de los que, como ya hemos visto, la función zeta es un caso muy particular. En el contexto del efecto Casimir, habiendo una fuerza, uno puede definir cierta energía. Sea un conjunto de cierto tipo de partículas, como los fotones, supongamos que en  $D = d + 1$  dimensiones. Esta energía *libre* es

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta^{d+1}} \frac{\Gamma(d+1) \zeta(d+1)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) d},$$

donde  $\beta = 1/(k_B T)$ , y donde despreciamos el efecto del momento angular intrínseco del fotón (espín). Esta energía libre es un concepto termodinámico asociado a la energía que puede ser transformada en trabajo. La energía de Casimir de tales partículas está asociada a su energía regularizada, y usa la prolongación analítica de la función  $\zeta(s)$ , de forma que

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^d \right)_{\text{reg}} = 2\zeta(-d), \quad \varepsilon_0(\text{reg}) = -\frac{1}{\beta^{d+1}} \pi^{d/2} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \zeta(-d).$$

Curiosamente, la ecuación funcional fundamental de la función zeta de Riemann

$$\xi(\nu) = \xi(1 - \nu)$$

se verifica si y sólo si  $\varepsilon_0 = \mathcal{F}$ . Además, la presencia espectacular de los PLOG en los cálculos de energías y fuerzas de Casimir puede observarse en un ejemplo bastante reciente [23]. En él se deduce la siguiente expresión general para la fuerza de Casimir de un gas de «fotones» atrapado en un campo electromagnético con cierta geometría:

$$F_c = \frac{k_B T_c \hbar^2}{d^5 m^2 \pi^2 \omega_c^2} \left( \phi^3 \pi^2 \text{Li}_2(e^\phi) - 5\phi^2 \pi^2 \text{Li}_3(e^\phi) + 12\phi \pi^2 \text{Li}_4(e^\phi) - 12 \text{Li}_5(e^\phi) \right).$$

Como último ejemplo, en [12] se deduce la bella expresión para la energía de Casimir de un conjunto de «electrones» sin masa<sup>12</sup> en el interior de dos placas paralelas en

<sup>12</sup>Los electrones usuales tienen masa y pertenecen a un tipo de partículas, llamados fermiones, que veremos más adelante. Los fermiones obedecen el Principio de Exclusión de Pauli, PEP, que dice que dos fermiones no pueden ocupar simultáneamente el mismo estado cuántico, i.e., tener todos los números cuánticos idénticos en un sistema compuesto por muchos fermiones.



un espacio-tiempo de  $D$  dimensiones en función de la zeta de Hurwitz:

$$E(D) = \frac{f(D)}{L^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \zeta\left(\frac{1-D}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

## 5. TERMODINÁMICA Y ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS

Para tener una visión más autocontenida de esta sección, definiremos antes algunos conceptos de Termodinámica y Estadísticas Cuánticas elementales que pueden encontrarse en libros clásicos o algunos más modernos disponibles en la web. En la Naturaleza, en principio, se han observado solamente dos tipos fundamentales de partículas: bosones (partículas con espín, momento angular intrínseco, entero) y fermiones (partículas con espín semientero). Los bosones tienen estados de ocupación etiquetados, pues, por números enteros<sup>13</sup>, y los fermiones por dos estados. Esto se denota generalmente como los conjuntos y el operador energía  $H$ :

$$n_\alpha(B) = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad n_\alpha(F) = \{0, 1\}, \quad H|n\rangle = E_\alpha|n\rangle = \sum_\alpha n_\alpha \varepsilon_\alpha |n\rangle,$$

donde  $H$  se llama también hamiltoniano, y caracteriza las energías de los diferentes estados cuánticos de bosones y fermiones que, actuando sobre el estado de ocupación del número de partículas, cada estado tiene energía  $\varepsilon_\alpha$ . Además de los estados de partícula simple, otro objeto fundamental en Mecánica Estadística (ME) es la función de partición. Hay diferentes tipos de función de partición, que caracterizan a las diversas colectividades («ensembles») y representaciones de sistemas de muchas partículas. En presencia de muchas partículas (moléculas, átomos...), uno puede definir la temperatura absoluta  $T$  desde un punto de vista microscópico, y justificar la existencia de  $T$  para cualquier cuerpo como una consecuencia de la «agitación cinética» de sus microconstituyentes o subestructura. Si pensamos en un sistema de partículas como un gas, con interacciones despreciables, la energía cinética media  $E_\alpha$  será proporcional a la temperatura absoluta  $T$  multiplicada por una constante para que las unidades «cuadren». Esta constante es la constante de Boltzmann  $k_B$  que hemos encontrado ya en apartados anteriores. La ME y la Termodinámica nos dicen que la probabilidad de que una partícula tenga estado con energía  $E_\alpha$  decae exponencialmente con energía cinética media, esto es,  $p_\alpha = e^{-\beta \varepsilon_\alpha}$ ,  $\beta = 1/(k_B T)$ . Como la probabilidad debe normalizarse, i.e., las probabilidades sumadas deben dar la unidad, la constante de proporcionalidad es el inverso de la denominada *función de partición canónica*<sup>14</sup>  $Z_N = \sum e^{-\beta E_\alpha} = \sum e^{-\beta n_\alpha \varepsilon_\alpha}$ , y donde  $\sum n_\alpha = N$  es el número total de partículas. Esta función de partición canónica opera de forma similar a las

<sup>13</sup>Imaginemos un físico o científico alienígena que fuera un torpe analfabeto matemático. Al parecer, se habría encontrado con los números enteros y semienteros porque ¡la propia Naturaleza habría forzado a hacerle contar o inventarlos para caracterizar los estados de las partículas elementales! O también enumerar/contar los átomos e isótopos del Sistema Periódico nos lleva inexorablemente a la aparición de los enteros. La existencia de los fermiones lleva a inventar los semienteros. No es magia, es Matemáticas, una Ciencia Natural.

<sup>14</sup>Algo que debería estremecer a todo matemático, lo conozca o no, es la extraña y majestuosa conexión entre la función de partición canónica y la función zeta de Riemann. Si  $E_\alpha = E_0 \ln n$ ,

funciones generatrices en combinatoria o la función característica en probabilidad. La energía media puede computarse por medio de la función de partición canónica de esta forma:

$$\bar{E} = U = \frac{1}{Z} \sum E_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z.$$

Cuando el gas no está lo suficientemente diluido, bien porque las interacciones entre partículas son fuertes debido a cierta energía potencial, o bien porque hay una alta densidad, o porque el sistema no está aislado sino que interactúa intercambiando partículas y energía (o masa) con el entorno, en tal caso hay que ponderar la función de partición canónica con el llamado *potencial químico*  $\mu$ , de la siguiente forma:

$$Q = \Xi = \sum_N e^{\beta \mu N} Z_N = \prod_{\alpha} \left( \sum_{\alpha} e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}} \right).$$

Esto es la denominada **gran función de partición**.  $\mu$  es el denominado potencial químico (intuitivamente, hemos visto que está intrínsecamente relacionado con la variación del número de partículas debido a la existencia de interacciones entre partículas), y de nuevo  $\beta = 1/(k_B T)$  (donde T es la temperatura y  $k_B$  es la constante de Boltzmann). Las siguientes sumas sobre partículas simples (para bosones y fermiones) son fácilmente evaluables:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon - \mu)n} = \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}\right)^{-1}, \quad \sum_{n=0,1} e^{-\beta(\varepsilon - \mu)n} = 1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}.$$

Análogamente al caso de la función de partición canónica, a partir de la gran función de partición para cada tipo de estadística, usando las sumas anteriores, sabiendo que la probabilidad de usar cada estado mediante la gran función de partición es  $e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)n_{\alpha}}$ , usando  $Q$  para bosones y fermiones,

$$Q_B = \prod_{\alpha} \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}\right)^{-1}, \quad Q_F = \prod_{\alpha} \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}\right),$$

se puede obtener el gran potencial  $\Omega$  para cada tipo de partícula. El gran potencial es un tipo de energía y se define como

$$\Omega_B = k_B T \sum_{\alpha} \ln \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}\right), \quad \Omega_F = -k_B T \sum_{\alpha} \ln \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}\right),$$

o bien, en forma «unificada»,

$$\Omega_{B,F} = \Omega(T, V, \mu) = \pm k_B T \sum_{\alpha} \ln \left(1 \mp e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}\right).$$

---

entonces tenemos  $Z_N(\beta, E_0) = \zeta(\beta E_0)$ . El hipotético sistema estadístico cuántico que define la función zeta de Riemann se conoce como gas de primones. ¿Por qué esto debería enamorarnos? Respuesta y motivación extra: la hipótesis de Riemann. ¿Qué interpretación estadística otorgamos a los ceros triviales y no triviales en tal imagen?

Su justificación es sencilla. El número medio o esperanza del número de partículas resulta ser

$$N = \frac{1}{Q} \sum_{\alpha} e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Q = \sum_{\alpha} \left( e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1 \right)^{-1}.$$

En la última igualdad, cada sumando está asociado a una energía de partícula  $\varepsilon_{\alpha}$  y es el número medio de partículas con una energía dada. En el caso de una distribución continua de energía, cada energía  $\varepsilon_{\alpha}$  posee una medida  $g(\varepsilon) d\varepsilon$ , con lo que la densidad de partículas en un volumen vendrá dada por

$$\rho = \frac{N}{V} = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1},$$

donde el +1 (-1) corresponde a los bosones (fermiones). Como veremos en la siguiente sección, esta integral puede escribirse en forma cerrada por medio de PLOG. Del gran potencial, por derivación respecto a la energía, se obtienen las distribuciones de la densidad del número de partículas con energía simple (número medio de partículas con energía dada) y el número total de partículas

$$\langle n_{\alpha} \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon_{\alpha}} = \left( e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1 \right)^{-1}, \quad N(T, V, \mu) = \sum_{\alpha} \left( e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1 \right)^{-1}.$$

### 5.1. TERMOESTADÍSTICA POLILOGARÍTMICA UNIVERSAL

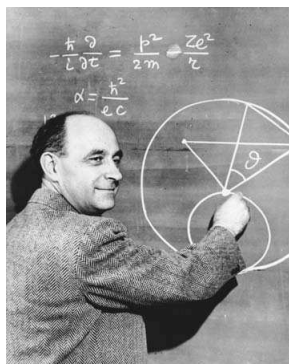
Los PLOG unifican (y generalizan) el tratamiento de la Termodinámica y Estadísticas de gases cuánticos. Véase, e.g., [30], y artículos relacionados. En Física elemental, la energía total de una partícula o sistema «libre», de masa  $m$  y sin interacciones, es igual a su energía cinética  $E_c = mv^2/2 = E$ . O bien, definiendo el momento lineal  $p = mv = \hbar k$ , donde  $k$  es el número de ondas,  $E(p) = p^2/(2m)$ . Esta expresión es incluso válida en un espacio de  $d$  dimensiones, como  $\mathbb{R}^d$ , aunque generalmente  $d = 1, 2, 3$ . En  $d$  dimensiones, la distribución radial de momentos viene dada por la medida  $\omega_d p^{d-1} dp$ , donde  $\omega_d$  es el volumen de la esfera unidad en  $\mathbb{R}^d$ . Los físicos, en ME, dividen esta constante por  $(2\pi\hbar)^d$ , correspondiente a un reescalado de unidades. En este modelo de juguete, la densidad de energía viene dada por la integral

$$\rho = \frac{\omega_d}{(2\pi\hbar)^d} \int_0^{\infty} \frac{p^{d-1} dp}{z^{-1} e^{\beta(p^2/(2m))} \pm 1},$$

donde  $z = e^{\mu\beta}$ . La representación integral del PLOG,

$$\text{Li}_s(\omega) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{\omega^{-1} e^t - 1},$$

puede ser demostrada por cualquier matemático y lector de este artículo de forma trivial (¡ejercicio!), y tras un cambio de variables permite encontrar las fórmulas para la densidad de partículas en términos de PLOG que veremos a continuación (dichas



Enrico Fermi y Paul A. M. Dirac, los físicos a los que debe su nombre la función de distribución estadística de los fermiones. Es importante destacar que los fermiones son objetos intrínsecamente cuánticos en su comportamiento. (Curiosidad: la fórmula de la constante de estructura fina electromagnética de la fotografía izquierda es errónea, pues debería ser  $\alpha = e^2/(\hbar c)$ . Seguramente Fermi andaba pensando en su paradoja sobre los extraterrestres, o estaba despistado por el/la periodista que hacía la fotografía.)

fórmulas son más sencillas de deducir trabajando con unidades «naturales», en las que  $\hbar = 1$ ). La distribución de Fermi-Dirac (FDD) está definida por una densidad de número de partículas

$$\rho = n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d/2-1} d\varepsilon}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) + 1}.$$

Introduciendo una relación de dispersión  $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / (2m)$  y la denominada longitud térmica de De Broglie  $\lambda = \hbar(2\pi / (mk_B T))^{1/2} = \hbar(2\pi\beta/m)^{1/2}$ , una especie de longitud de onda «media» en un gas, con  $\hbar = h/(2\pi)$ , la integral anterior puede ser evaluada en términos de PLOG, como hemos visto, por  $\rho\lambda^d = -\text{Li}_{d/2}(-z)$ , donde  $z = \exp(\beta\mu)$  es la denominada fugacidad. Similares técnicas muestran que, para la misma relación de dispersión no relativista, la densidad de número de partículas y la longitud térmica de De Broglie están vinculadas a un PLOG en el caso de la distribución de Bose-Einstein (BED); en este caso

$$\rho = n = \frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d/2-1} d\varepsilon}{\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) - 1} \longleftrightarrow \rho\lambda^d = \text{Li}_{d/2}(z).$$

Esto sugiere la unificación de los dos formalismos como anticipábamos con la representación integral. Definiendo

$$\zeta = \begin{cases} z, & \text{BED,} \\ -z, & \text{FDD,} \end{cases}$$

entonces se tiene que

$$\rho = \lambda_T^{-d} \text{Li}_{d/2}(\zeta) \quad \text{y} \quad \rho = -\lambda_T^{-d} \text{Li}_{d/2}(-z).$$

La gran función de partición se puede expresar como un PLOG,

$$\frac{\lambda^d}{V} \ln Q(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \text{Li}_{d/2+1}(\zeta) \longrightarrow \begin{cases} Q(\zeta) = \exp(\text{sgn}(\zeta) V \lambda^{-d} \text{Li}_{d/2+1}(\zeta)), \\ Q_{\text{BED}}(\zeta) Q_{\text{FDD}}(\zeta) = 1. \end{cases}$$

Las cantidades termodinámicas más usuales<sup>15</sup>, presión ( $P$ ), energía interna ( $U$ ), entropía ( $S$ ) y fluctuación en el número de partículas ( $Y$ ), pueden también ser computadas en términos de PLOG. El resultado para el caso de una relación de dispersión no relativista (la relativista se obtiene con un truco<sup>16</sup>) es el siguiente:

$$\beta \rho^{-1} P = \frac{\text{Li}_{d/2+1}(\zeta)}{\text{Li}_{d/2}(\zeta)}, \quad \beta \frac{U}{N} = \frac{d}{2} \frac{\text{Li}_{d/2+1}(\zeta)}{\text{Li}_{d/2}(\zeta)},$$

$$\beta T \frac{S}{N} = \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \frac{\text{Li}_{d/2+1}(\zeta)}{\text{Li}_{d/2}(\zeta)} - \ln |\zeta|, \quad Y = \frac{\text{Li}_{d/2-1}(\zeta)}{\text{Li}_{d/2}(\zeta)}.$$

La presión  $P$  es una forma macroscópica de medir la fuerza por unidad de superficie de las moléculas del gas sobre las paredes del recipiente que las contiene. La energía interna  $U$  es la energía media interna de las moléculas del gas.  $S$  es la entropía de las moléculas del gas, quizás familiar para un matemático porque, salvo un signo y una constante, en circunstancias de equilibrio suele coincidir con la definición de Shannon y es una medida de las configuraciones de las moléculas del gas. Finalmente, las fluctuaciones en el número de partículas  $Y$  es lo que el propio nombre indica. ¡Estas cuatro funciones, llamadas funciones de estado por los físicos, son PLOG en este caso!

### 5.2. EL CUERPO NEGRO EN $D$ DIMENSIONES: $\zeta(z)$ Y $W(z)$

El problema de la radiación emitida por un cuerpo negro (un gas de bosones en equilibrio térmico con temperatura  $T$  y en un recipiente de volumen  $V$ ) es un viejo conocido de los físicos y matemáticos. Planck fue el primero en darse cuenta de la necesidad de discretizar la variable energía del oscilador correspondiente para lograr determinar la ley de Stefan-Boltzmann en el caso general, y no solamente la ley de Wien a bajas frecuencias. La belleza del formalismo unificado antes es que nos permite usar, en este caso particular, una función especial como la función zeta de Riemann, caso particular del PLOG, y que proporciona elegancia y simplicidad muchas veces al duro problema de recordar algunas expresiones algebraicas relacionadas con el cuerpo negro en  $D$  dimensiones (ND). La densidad de energía del

<sup>15</sup>En particular,  $U$  y  $N$  se deducen de  $U = -\partial_\beta \ln Q$  y  $N = \langle N \rangle = z \partial_z \ln Q$ .

<sup>16</sup>Para una relación de dispersión de tipo  $\varepsilon = \nu p$ , donde  $\nu$  es una velocidad, las expresiones anteriores deben ser reevaluadas pero son también PLOG, sólo hay que hacer unos reescalados en la dimensión y en el grado de degeneración de espín y no afecta a la forma global del resultado. Esto tiene su importancia en Cosmología relativista, donde uno está interesado en calcular la densidad total de partículas, incluyendo todos los bosones y fermiones. Hay un misterioso factor  $7/8$  cuyo origen oculto está en la relación  $-\text{Li}_{d+1}(-1)/\text{Li}_{d+1}(1) = 1 - 2^{-d}$  para  $d = 3$ , y que viene de la proporcionalidad entre las integrales de las BED y FDD en  $D = d + 1$  dimensiones.

cuerpo negro en  $D$  dimensiones viene dada por la expresión (notar que  $h\nu = \hbar\omega$ )

$$\rho_T(\nu) d\nu = 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{c} \right)^D \frac{D-1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \frac{h\nu^D}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \longrightarrow \rho_T = \int_0^\infty \rho_T(\nu) d\nu = a(D)T^{D+1},$$

$$a(D) = \left( \frac{2}{hc} \right)^D (\sqrt{\pi})^{D-1} k_B^{D+1} D(D-1) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \zeta(D+1).$$

La radiancia espectral permite escribir la ley de Stefan-Boltzmann en  $D$  dimensiones:

$$R_T = \sigma(D)T^{D+1} \longleftrightarrow \sigma(D) = \left( \frac{2}{c} \right)^{D-1} \pi^{D/2-1} \frac{k_B^{D+1}}{h^D} D(D-1) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D+1).$$

La aparición de la función zeta es conocida [42]. Lo que es menos conocido es que la función de Lambert tiene también un rol en el cuerpo negro ND: permite generalizar la ley de Wien a  $D$  dimensiones [36]. En particular, para  $D$  general, es importante notar que  $x_d = (d+2) + W(-(d+2)e^{-d-2})$ . Para el caso  $d=3$ ,  $x_d = hc/(k_B\lambda_m T) \equiv 5 + W(-5e^{-5}) \approx 4.965$ . ¿No es esto asombroso? Otras apariciones de la función de Lambert en Física se pueden ver en [33, 35, 38]. En Matemáticas, es reciente también el interés por esta función en TEN, en particular su aplicación en la estructura de los ceros no triviales «grandes» de la función zeta de Riemann. El lector interesado puede ver, e.g., [18, 44].

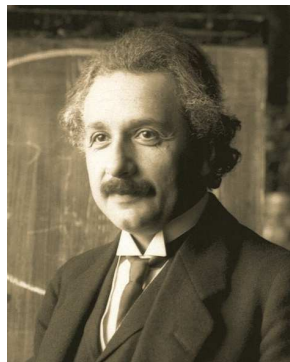
### 5.3. CONDENSACIONES DE BOSE-EINSTEIN

Los condensados de Bose-Einstein son un estado particular de la materia (diferente al sólido, líquido, gas y plasma) en el que se manifiestan de forma coherente y macroscópica fenómenos cuánticos. Para un gas diluido no interactuante de bosones, este comportamiento suele aparecer a temperaturas cercanas al cero absoluto ( $T \sim 0$  K). A esta extremadamente baja temperatura se logra que una gran fracción de los bosones (partículas de espín entero) ocupen el estado cuántico fundamental, o de menor energía, donde se manifiestan ciertas propiedades típicamente cuánticas de forma macroscópica.

Los PLOG permiten estudiar el fenómeno denominado condensación de Bose-Einstein (BEC) de una forma sorprendentemente general. Nos vamos a centrar en el caso de un gas «ideal» con masa no relativista (NR), y posteriormente algunas extensiones divertidas, aunque la discusión es totalmente válida para partículas relativistas con el debido cuidado y complicación en las fórmulas. En el caso bosónico NR, la temperatura a la que se alcanza la condensación de Bose-Einstein es, en  $d$  dimensiones, igual a la expresión

$$k_B T_c(\text{NR}) \equiv \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{n}{\zeta(d/2)} \right)^{2/d} \longrightarrow k_B T_c(3d, \text{NR}) \simeq 3.31\hbar^2 \frac{n^{2/3}}{m},$$

con el valor de la función zeta de Riemann  $\zeta(3/2) \simeq 2.612$ . La temperatura crítica está íntimamente relacionada con el PLOG. El propio lector descubrirá, si es suficientemente perspicaz, que la temperatura crítica corresponde al valor de la longitud



Satyendra Nath Bose y Albert Einstein, los dos físicos involucrados en la predicción del comportamiento de los bosones a baja temperatura.

de onda térmica de De Broglie cuando se anula el potencial químico, i.e.,  $T_c$  se obtiene de  $\rho\lambda^d = \text{Li}_{d/2}(1)$  simplemente imponiendo  $T = T_c$  y despejando. Además, es importante destacar algo sobre la BEC, fuente de frecuentes confusiones. Algunas veces se oye que no hay BEC en 2 dimensiones. Eso no es preciso. El fenómeno de la BEC depende no sólo de la dimensionalidad sino también de la relación de dispersión  $\varepsilon = \varepsilon(p)$  que usemos y, como veremos en unas líneas, de la clase de estadística también. No sin antes destacar que el estudio de gases de bosones (o fermiones) en  $D = d + 1$  dimensiones se simplifica con el uso de PLOG y las funciones zeta<sup>17</sup>.

¿No hay más juegos polilogarítmicos? Hasta ahora, hemos descrito solamente bosones «libres», esto es, bosones que no están «atrapados» cruelmente en un «campo de fuerzas», o, equivalentemente, no tienen «energía potencial». Si la tuvieran, se pueden modificar las fórmulas anteriores. Sin entrar en deducciones, me gustaría citar el siguiente resultado [40]: para un gas de  $N$  bosones NR bajo la relación de dispersión  $\varepsilon = p^2/(2m)$  y el potencial confinante definido por una  $U = Ar^\alpha$ , donde  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ , la temperatura de BEC está dada por la expresión

$$k_B T_{\text{BEC}} = \left( \left( \frac{2\hbar^2}{m} \right)^{\frac{d}{2}} A^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{\alpha} + 1\right) \zeta\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{\alpha}\right)} N \right)^{\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{\alpha}\right)^{-1}}.$$

La observación final es que, en el caso interactuante del potencial isótropo dado anteriormente, hay condensación de BE si y sólo si  $d/2 + d/\alpha > 1$ . ¿Hay más variantes de este juego? ¡Sí! Entre las muchas generalizaciones posibles involucrando estadísticas que van más allá de las de Fermi-Dirac y Bose-Einstein, está la estadística no extensiva de Tsallis [39], o también la variante «simétrica» relacionada con  $(q, p)$ -ones y la llamada estadística de Polychronakos. Los  $(q, p)$ -ones están relacionados con un

<sup>17</sup> Este hecho suele pasar muy desapercibido en muchos libros y textos de Termodinámica y Estadísticas Cuánticas, especialmente los más antiguos (e.g. [29]), pero también en algunos más actuales [48]. Una bella excepción es el «reciente» libro [5].

cálculo diferencial modificado<sup>18</sup>, en el que las derivadas son «biparamétricas», y se definen junto a los  $(q, p)$ -símbolos como

$$\mathcal{D}_{(q,p)}f = \frac{f(qx) - f(px)}{(q-p)x}, \quad [n]_{(q,p)} = \frac{q^n - p^n}{q-p} \longrightarrow \mathcal{D}_{(q,p)}x^n = [n]_{(q,p)}x^{n-1}$$

y ¡tachán!, ¡habemus  $(q, p)$ -PLOG!:

$$\text{Li}_s^{(q,p)}(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[r]_{(q,p)} z^r}{r^s}.$$

La variante simétrica de los  $(q, p)$ -ones, en la que  $p = q^{-1}$  o bien en la que  $p = 1$ , es una de las más estudiadas en Mecánica Estadística deformada y suele llamarse estadística de  $q$ -ones. En el caso simétrico con  $p = 1/q$  y una dispersión arbitraria de tipo  $\varepsilon = ap^\sigma$ , y si se define la función auxiliar

$$H_n(z, k, q) = \text{Li}_n(zkq^k) - \text{Li}_n(zkq^{-k}),$$

la temperatura de condensación para este gas  $q$ -ónico simétrico es ([34])

$$k_B T_c = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{\sigma}{d}} \frac{ah^\sigma}{\pi^{\sigma/2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{\sigma})} \frac{q - q^{-1}}{H_{\frac{d}{\sigma}+1}(q^2, 1, q)} n\right)^{\sigma/d}.$$

Aparte de la relación de dispersión, para el fenómeno de la condensación importa la función deformación

$$\Upsilon(d, \sigma, q) = \frac{q - q^{-1}}{H_{d/\sigma+1}(q^2, 1, q)} = \frac{q - q^{-1}}{\text{Li}_{d/\sigma+1}(q^3) - \text{Li}_{d/\sigma+1}(q)}.$$

Si  $q \neq 1$ , es notable que  $\Upsilon < \infty$  para todo  $d$ , con lo que existe condensación BE para el gas  $q$ -ónico simétrico libre en cualquier dimensión. Además, se tiene el interesante límite  $\lim_{q \rightarrow 1} \Upsilon = 1/\text{Li}_{d/\sigma}(1) = 1/\zeta(d/\sigma)$ , que se anula para  $d \leq \sigma$ , y con lo que es posible la condensación de partículas en cualquier dimensión para casos determinados de deformación en la Estadística Cuántica. Sin embargo, el problema, desde el punto de vista físico, no es tanto la función polilogarítmica, que da una bonita forma cerrada del problema, sino la realización física de esta clase general de sistemas<sup>19</sup>.

<sup>18</sup>Aquí, cualquier matemático, físico o persona instruida, pero algo traumatizada, tras aprender durante años el cálculo infinitesimal y algunos de sus secretos más oscuros debería exclamar ¡Cielos! ¡Las derivadas contraatacan! Sin embargo, se veía venir. Forman ya parte de las Matemáticas y se usan con más o menos profusión en la Física las derivadas fraccionales, las diferentegrales, el cálculo de Jackson, la integración de Berezin. . .

<sup>19</sup>Se piensa que los modelos con deformación son útiles en sistemas compuestos fuertemente ligados o interactuantes, aunque experimentalmente, más allá de algunos ejemplos de estadística fraccional en el laboratorio, los  $(q, p)$ -ones y los  $q$ -ones son aún pura especulación teórica. Sin embargo, recientemente se ha propuesto usarlos, en el caso de la denominada estadística infinita, como un modelo para describir la materia oscura [15]. La temperatura de condensación para estadística infinita NR contiene un factor multiplicativo  $f(d) = (2^{1-4/d})/(2^{d/2} - 1)^{2/d}$  adicional a la del gas bosónico NR. ¿Son los  $q$ -ones o los  $(q, p)$ -ones partículas existentes en la Naturaleza?



## 6. CONCLUSIONES

¿Es casualidad o hay alguna razón profunda para que los PLOG aparezcan en lugares tan diferentes como la Termodinámica, la Física Estadística, las amplitudes de scattering de TCC o incluso de teorías de (super)cuerdas? Posiblemente no lo sea. El problema más fundamental desde el punto de vista matemático es «contar» objetos. Es, sin embargo, la forma en que contamos objetos donde hay disparidad de métodos y formalismos. Así, la aparición de PLOG y sus generalizaciones en Física es debida a la necesidad de «calcular procesos» y «contar configuraciones de objetos». Desde un punto de vista, las Matemáticas y la Física no son ciencias naturales inconexas, sino que forman parte de algo más grande y universal. La «suma» no trivial de Física y Matemáticas ha sido denominada Fismática por Zaslow [49]. Siendo la TEN algo esencial en las Matemáticas, no es de extrañar su aparición en la Física. Incluso más, se especula su rol como teoría física definitiva en [45]. Hemos visto que los PLOG clásicos aparecen en la Termodinámica y Mecánica Estadística de las partículas conocidas (bosones y fermiones) y algunas de sus generalizaciones. Sin embargo, existen otras muchas conexiones que aún están siendo exploradas en estadísticas exóticas o generalizadas. Si el logaritmo (o el PLOG) tiene extensiones, no es raro que haya interés en nuevas funciones entropía generalizadas y sus propiedades o viceversa. Nuevas extensiones de la Mecánica Estadística han llevado a la introducción de nuevas funciones, nuevos (poli)logaritmos y nuevas entropías. Las siguientes analogías, conexiones y relaciones son muy útiles:

Cuantos o partículas  $\longleftrightarrow$  Excitaciones de los campos  $\longleftrightarrow$  Ondas/Oscilaciones

Mecánica Cuántica/TCC  $\longleftrightarrow$  Campos y fuerzas  $\longleftrightarrow$  Dinámica y Cinemática

Las interacciones y «equivalencias»<sup>20</sup> entre la Termodinámica y la TCC no son nuevas. De hecho, la TCC es el límite de la Mecánica Cuántica para sistemas de muchas partículas ( $N \rightarrow \infty$ ), lo que «explica» que tiene nexos profundos con la Termodinámica que han sido explotados en los últimos tiempos. Ha sido esencial en, por ejemplo, el descubrimiento de la radiación de los agujeros negros por Hawking [25], completando y complementando lo que es hoy día algo más que una mera analogía entre las leyes termodinámicas, sugerida inicialmente por Bekenstein en [2, 3]. Otras correspondencias interesantes

Espectro  $\longleftrightarrow$  Funciones (especiales)  $\longleftrightarrow$  Ecuaciones de campo

Teoría de Números  $\longleftrightarrow$  Análisis y Geometría  $\longleftrightarrow$  Álgebra

sugieren que los fascinantes nexos presentes en la Fismática son simplemente un espejo de la unidad y holismo presentes en la Ciencia.

Vivimos en un mundo complejo, en un Universo complejo y estamos rodeados de fenómenos complejos<sup>21</sup>. En un mundo en desequilibrio, sólo localmente en equilibrio, quizás sería mucho más eficiente «hacer Matemáticas, y no la guerra», colaborar y no

<sup>20</sup>Quizás un físico teórico contemporáneo las llamaría «dualidades».

<sup>21</sup>¿Y de números complejos? También. ¿Por qué? Ésa es otra historia curiosa, que no cabe aquí.

pelear más que con «extraños infinitos» o «partículas virtuales», porque, en el final, todos estamos hechos de la misma materia: átomos, números y fantasías fisimáticas. Pitágoras, Platón, Fourier y otros lo destacaron ya de una u otra forma. *Et ignem regunt numeri!*

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece a Fernando Chamizo su rigurosidad y paciencia durante el proceso de redacción y revisión final del presente artículo.

## REFERENCIAS

- [1] L. ÁLVAREZ-GAUMÉ Y M. A. VÁZQUEZ-MOZO, *An Invitation to Quantum Field Theory*, Lecture Notes in Physics, vol. **839**, Springer, 2011.
- [2] J. D. BEKENSTEIN, Black holes and entropy, *Phys. Rev. D (3)* **7** (1973), 2333–2346.
- [3] J. D. BEKENSTEIN, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics, *Phys. Rev. D (3)* **9** (1974), 3292–3300.
- [4] B. C. BERNDT, *Ramanujan's notebooks. Part I* (with a foreword by S. Chandrasekhar), Springer-Verlag, New York, 1985.
- [5] S. J. BLUNDELL Y K. M. BLUNDELL, *Concepts in Thermal Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [6] M. BORDAG, U. MOHIDEEN Y V. M. MOSTEPANENKO, New developments in the Casimir effect, *Phys. Rep.* **353** (2001), 1–205.
- [7] J. M. BORWEIN Y R. E. CRANDALL, Closed forms: what they are and why we care, *Notices Amer. Math. Soc.* **60** (2013), 50–65.
- [8] J. BROEDEL, O. SCHLOTTERER Y S. STIEBERGER, Polylogarithms, Multiple Zeta Values and Superstring Amplitudes, *Fortsch. Phys.* **61** (2013), 812–870.
- [9] F. BROWN, Periods, Feynman integrals and Number Theory, CNRS (Institut de Mathématiques de Jussieu), 2009; <http://conference.ippp.dur.ac.uk/event/284/contribution/7/material/slides/>.
- [10] R. E. CRANDALL, On the quantum zeta function, *J. Phys. A* **29** (1996), no. 21, 6795–6816.
- [11] D. CVIJOVIĆ, Polypseudologarithms revisited, *Physica A* **389** (2010), 1594–1600.
- [12] R. D. M. DE PAOLA, N. B. RODRIGUES Y N. F. SVAITER, Casimir energy of massless fermions in the slab-bag, *Mod. Phys. Lett. A* **14** (1999), 2353–2361.
- [13] C. DUHR, Mathematical aspects of scattering amplitudes, 2014; <http://arxiv.org/abs/1411.7538>.
- [14] G. V. DUNNE, Heisenberg-Euler effective Lagrangians: basics and extensions, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan Memorial Collection, vol. 3, 445–522, World Scientific Publishing, 2005.
- [15] Z. EBADI, B. MIRZA Y H. MOHAMMADZADEH, Infinite statistics condensate as a model of dark matter, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2013**, no. 11, 057.

- [16] A. EINSTEIN, *El significado de la relatividad*, Obras maestras del pensamiento contemporáneo, Planeta-Agostini, 1985.
- [17] EUCLIDES, *Elementos*, Biblioteca Clásica Gredos, vol. 191, Editorial Gredos, Madrid, 1994.
- [18] G. FRANÇA Y A. LECLAIR, Statistical and other properties of Riemann zeros based on an explicit equation for the  $n$ -th zero on the critical line, 2013; <http://arxiv.org/abs/1307.8395>.
- [19] GALILEO GALILEI, *Il Saggiatore*, Roma, 1623. Traducción inglesa de S. Drake y C. D. O'Malley en *The Controversy on the Comets of 1618*, University of Pennsylvania Press, 1960.
- [20] A. B. GONCHAROV, M. SPRADLIN, C. VERGU Y A. VOLOVICH, Classical polylogarithms for amplitudes and Wilson loops, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010), no. 15, 151605, 4 pág.
- [21] W. GREINER, B. MÜLLER Y J. RAFELSKI, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields: With an Introduction into Modern Relativistic Quantum Mechanics*, Springer, 1985, reeditado en 2011.
- [22] A. A. GRIB, S. G. MAMAYEV Y V. M. MOSTEPANENKO, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, Energoatomizdat, Moscú, 1988. Traducción inglesa en Friedmann Laboratory Publishing, San Petersburgo, 1994.
- [23] S. D. HAN Y E. AYDINER, Oscillating Casimir force of trapped bose gas in electromagnetic field, 2015; <http://arxiv.org/abs/1508.01040>.
- [24] G. H. HARDY, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.
- [25] S. W. HAWKING, Particle creation by black holes, *Comm. Math. Phys.* **43** (1975), 199–220.
- [26] F. JEGERLEHNER, *The anomalous magnetic moment of the muon*, Springer Tracts in Modern Physics, vol. 226, Springer, 2008.
- [27] F. JEGERLEHNER Y A. NYFFELER, The muon  $g - 2$ , *Phys. Rept.* **477** (2009), 1–110.
- [28] K. KIRSTEN, Basic zeta functions and some applications in physics, *A window into zeta and modular physics*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 57, 101–143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [29] P. T. LANDSBERG, *Thermodynamics and statistical mechanics*, Dover Publications, New York, 1990. Reimpresión corregida del original de 1978.
- [30] M. H. LEE, Polylogarithms and logarithmic diversion in Statistical Mechanics, *Acta Physica Polonica B* **40** (2009), 1279–1301.
- [31] L. LEWIN, *Polylogarithms and associated functions* (with a foreword by A. J. Van der Poorten), North-Holland, New York-Amsterdam, 1981.
- [32] M. MARCOLLI, Feynman integrals and algebraic geometry, 2009; <http://www.its.caltech.edu/~matilde/FeyAlgGeomShort.pdf>.
- [33] I. MEZO Y A. BARICZ, On the generalization of the Lambert  $W$ -function with applications in theoretical physics, 2015; <http://arxiv.org/abs/1408.3999v2>.

- [34] B. MIRZA Y H. MOHAMMADZADEH, Thermodynamic geometry of deformed bosons and fermions, *J. Phys. A* **44** (2011), no. 47, 475003, 11 pág.
- [35] G. MUGNAINI, Generalization of Lambert  $W$ -function, Bessel polynomials and transcendental equations, 2015; <http://arxiv.org/abs/1501.00138>.
- [36] R. RAMOS Y H. BOSCHI-FILHO, The size of compact extra dimensions from blackbody radiation laws, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **393** (2014), 261–267.
- [37] B. RIEMANN, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1859), 671–680.
- [38] K. ROBERTS Y S. R. VALLURI, Solution of the quantum finite square well problem using the Lambert  $W$ -function, 2014; <http://arxiv.org/abs/1403.6685>.
- [39] L. SALASNICH, BEC in nonextensive statistical mechanics, *Int. J. Mod. Phys. B* **14** (2000), 405–409.
- [40] L. SALASNICH, Ideal quantum gases in  $D$ -dimensional space and power-law potentials, *J. Math. Phys.* **41** (2000), no. 12, 8016–8024.
- [41] S. STIEBERGER Y T. R. TAYLOR, Closed string amplitudes as single-valued open string amplitudes, *Nuclear Phys. B* **881** (2014), 269–287.
- [42] K. M. UDAYANANDAN, R. K. SATHISH Y A. AUGUSTINE, Transcending three dimensions in physics, *Physics Education* **30**, no. 3 (2014).
- [43] P. VANHOVE, The physics and the mixed Hodge structure of Feynman integrals, *String-Math 2013*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 88, 161–194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [44] M. VISSER, Primes and the Lambert  $W$ -function, 2013; <http://arxiv.org/abs/1311.2324>.
- [45] I. V. VOLOVICH, Number theory as the ultimate physical theory,  *$p$ -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.* **2** (2010), no. 1, 77–87.
- [46] S. WEINZIERL, Introduction to Feynman integrals, *Geometric and topological methods for quantum field theory*, 144–187, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
- [47] E. P. WIGNER, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 1–14. Reimpreso en *Mathematical analysis of physical systems* (R. E. Mickens, ed.), 1–14, Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.
- [48] R. O. ZAITSEV, *Modern Statistical Physics: A set of lectures*, URSS ed., 2008.
- [49] E. ZASLOW, *PhySmatics*, conferencia en el Fields Institute, 2005; <http://arxiv.org/abs/physics/0506153>.