Los maravillosos teoremas de Emmy Noether

Juan F. González* ** ***

Resumen

Se revisan los teoremas enunciados y demostrados por Emmy Noether desde una perspectiva histórica y matemática. Se hace énfasis en el formalismo lagrangiano y variacional o funcional, usando herramientas básicas del análisis diferencial e integral. Se indican finalmente algunos ejemplos y aplicaciones en la Física Teórica, y se explica el significado intuitivo de ambos teoremas. Finalmente, se sugieren las posibles generalizaciones y extensiones del teorema, así como una mención al formalismo de jets y de formas diferenciales que hace posible la generalización de estos teoremas con un lenguaje libre de coordenadas.

Índice

*e-mail: juanfrancisco.gonzalez1@educa.madrid.org
**alternative e-mail: hypertwistor@gmail.com
***Departamento de Física y Química. IES Humanejos, Parla(Madrid) Spain

1. Introducción

La formulación newtoniana de las leyes de la Mecánica deja sin resolver muchas cuestiones, además de que su tratamiento es complicado al versar sobre fuerzas y aceleraciones (o momentos), que son magnitudes vectoriales. En el siglo XIX, Lagrange y Hamilton, junto a otros investigadores, desarrollaron formulaciones alternativas de la Mecánica Clásica, conocida como Mecánica Analítica o Racional, usando procedimientos matemáticos que hoy día se conocen como análisis variacional y cálculo funcional.

2. Acción y lagrangianos

En la formulación de Lagrange, el objeto fundamental es la integral de acción de una función, hoy día denominada lagrangiano (o densidad lagrangiana en la versión de campos o sistemas contínuos, aunque por abuso de lenguaje se sigue llamando lagrangiano a la densidad lagrangiana). La acción es

$$S(q) = \int_M L dt \tag{1}$$

El lagrangiano L es una función matemática que depende de unas variables $q(t)$ llamadas coordenadas generalizadas (que pueden ser escalares, vectores o incluso tensores, espinores, etcétera).

2.1. Lagrangianos de primer orden, $L = L(q, \dot{q})$

Para un lagrangiano que depende de las coordenadas generalizadas y sus derivadas temporales de primer orden, se tiene que:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \tag{2}$$

Usando la regla de Leibniz de derivación de un producto, podemos escribir esta expresión como sigue:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \tag{3}$$

o reorganizando los términos

$$\delta L(q, \dot{q}) = E_1(L)\delta q + \frac{d}{dt}\left(p\delta q\right). \tag{4}$$

donde hemos definido el momento generalizado

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{5}$$

y el operador de Euler de primer orden

$$E_1(L(q, \dot{q})) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{6}$$

El movimiento de un cuerpo o sistema definido por coordenadas generalizadas es aquel que minimiza la acción (más generalmente, la extremiza), y $\delta S = 0$ implica generalmente que $\delta L = 0$ para variaciones arbitrarias de δq. De hecho, la minimización de la acción es invariante salvo términos de borde o frontera, esto tes, la minimización de la acción (o extremización) implica que se puede añadir un término de derivada total al lagrangiano, que no contribuye más que con una constante y no afecta a las ecuaciones de movimiento. El hecho de que el lagrangiano sea cuasiinvariante (invariante salvo una derivada total temporal) se expresa generalmente como el principio gauge

$$\delta L = \frac{d\Lambda}{dt} \tag{7}$$

y entonces la variación global del lagrangiano de primer orden se puede escribir

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) = E_1(L) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) \tag{8}$$

$$\delta L = E_1(L) + \frac{d}{dt}\left(p\delta q\right) = \frac{d\Lambda}{dt} \tag{9}$$

o bien

$$\delta L = E_1(L)\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) = E_1(L) + \frac{d}{dt}\left(p\delta q - \Lambda\right) \tag{10}$$

La criticalidad de la acción y el lagrangiano de primer orden, implica el cumplimiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$E_1(L) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{11}$$

Además, el término de borde o frontera, es la cantidad conservada o carga de Noether bajo transformaciones de simetría δq arbitrarias (como veremos más adelante, es uno de los teoremas de Noether):

$$C = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \Lambda\right)$$

Lo divertido de todo esto, es que podemos generalizarlo a derivadas de orden superior y de alto orden arbitrario. O incluso considerar transformaciones más generales, por ejemplo algunas que incluyan el cambio de las coordenadas temporales además de los campios en las coordenadas espaciales.

2.2. Lagrangianos de segundo orden, $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$

Supongamos ahora que $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$, que se corresponde a un lagrangiano que depende de la posición, velocidad y aceleración generalizadas. La variación del lagrangiano es ahora

$$\delta L(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \ddot{q} \tag{12}$$

o bien, de nuevo usando la regla del producto de Leibniz

$$\delta L(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \ddot{q} \tag{13}$$

Para el último término del miembro derecho, aplicamos nuevamente 2 veces la regla de Leibniz para eliminar la dependencia temporal de las variaciones hasta donde podemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \dot{q}\right) - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \dot{q}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] \tag{14}$$

Usando el mismo tipo de reorganización que con el lagrangiano de primer orden, obtenemos ahora la variación total del lagrangiano

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta q + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \dot{q}\right] \tag{15}$$

Esta expresión puede reescribirse sucintamente como

$$\delta L = E_2(L(q,\dot{q},\ddot{q})\delta q + \frac{d}{dt}\left[E_1(L(\dot{q},\ddot{q}))\delta q + E_0(L(\ddot{q}))\delta \dot{q}\right] \tag{16}$$

y donde hemos definido los operadores de Euler

$$E_2(L(q,\dot{q},\ddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \tag{17}$$

$$E_1(L(\dot{q},\ddot{q})) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \tag{18}$$

$$E_0(L(\ddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \tag{19}$$

La extremización de la acción (invarianza) y la cuasiinvariancia del lagrangiano genera las ecuaciones de movimiento

$$E_2 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0 \tag{20}$$

y la conservación de la carga de Noether en la frontera

$$C = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \Lambda\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \dot{q} \tag{21}$$

2.3. Lagrangianos de tercer orden, $L = L(q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q})$

Se deja como ejercicio para el lector interesado y fascinado por estas líneas, calcular los detalles (por fuerza bruta de derivación via regla de Leibniz) para el lagrangiano cuya variación es

$$\delta L = \delta L(q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\delta \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta \dddot{q} \tag{22}$$

Evidentemente, el problema es reescribir el término

$$\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta \dddot{q} \tag{23}$$

como sigue

$$\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta \dddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta \ddot{q}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta \dot{q}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta q\right) - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta q \tag{24}$$

con lo que la variación del lagrangiano es ahora

$$\delta L = E_3(L(q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q}))\delta q + \frac{dC}{dt} \tag{25}$$

donde ahora tenemos, en virtud de la extremización de la acción, y de la cuasiinvariancia del lagrangiano, respectivamente, las ecuaciones de movimiento y la carga de Noether del término de frontera de la acción para el lagrangiano:

$$E_3(L(q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q})) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}} = 0 \tag{26}$$

$$C = E_2(L(\dot{q},\ddot{q}))\delta q + E_1(L(\ddot{q},\dddot{q}))\delta\dot{q} + E_0(L(\dddot{q}))\delta\ddot{q} \tag{27}$$

y donde la carga de Noether para el lagrangiano de tercer orden C puede reexpresarse también como

$$C = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\right)\delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\right)\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dddot{q}}\delta\ddot{q} \tag{28}$$

2.4. Lagrangianos de orden n, $L = L(q, Dq, D^2q, \ldots, D^nq)$

Aplicando inducción, podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de enésimo orden (orden n), simplemente cuidado algo la notación de las derivadas. $D = d/dt$, $D^2 = d^2/dt^2$, ..., $D^n = d^n/dt^n$ son las derivadas temporales de orden 1 hasta orden n (por generalidad $D^0 f = 1f = f$. No es complicado deducir lo siguiente inductivamente:

$$\delta L = E_n(L(q, Dq, \ldots, D^nq))\delta q + \frac{dC}{dt} \tag{29}$$

donde ahora se tienen las ecuaciones de Euler-Lagrange y la carga de Noether

$$E_n(L) = \sum_{j=0}^{n} D^j \frac{\partial L}{\partial D^j q} = 0 \tag{30}$$

$$C = \sum_{k=0}^{n} E_k \delta D^{n-k-1} q - \Lambda\delta q \tag{31}$$

o bien

$$C = \left(\frac{\partial L}{\partial Dq} - D\frac{\partial L}{\partial D^2q} + D^2\frac{\partial L}{\partial D^3q} - \cdots - \Lambda\right)\delta q +$$
$$+\left(\frac{\partial L}{\partial D^2q} - D\frac{\partial L}{\partial D^3q} + \cdots\right)\delta Dq + \cdots + \frac{\partial L}{\partial D^nq}\delta D^{n-1}q$$

3. Campos y densidades lagrangianas

El caso anterior puede generalizarse cuando pasamos de coordenadas discretas de partículas $q(t)$ a campos en una determinada variedad (en física, generalmente el espacio-tiempo, aunque no siempre es esta la única variedad que se estudia). Un campo $\phi(x) = \phi(x^\mu)$ depende de las coordenadas x^μ de la variedad espacio-tiempo. El lagrangiano L se convierte en una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, y la acción se define análogamente sobre dicha variedad

$$S = \int_M \mathcal{L} = \int_M \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \ldots, \partial^s\phi)d^Dx \tag{32}$$

donde D es ahora la dimensión (no confundir con el D usado para la derivada temporal antes). La derivada temporal es ahora solamente una de las derivadas parciales $\partial = \partial_\mu$. Mutatis mutandis, si cambiamos $q(t)$ por $\phi(x)$, las derivadas temporales por derivadas parciales, todo lo anterior puede generalizarse. Ahora la carga es una corriente J (la carga de Noether sería esencialmente la integral volúmica de la componente temporal de la corriente) que será conservada. Esto es debido a que la ecuación de continuidad tiene la forma

$$\partial_\mu J^\mu = 0 = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_t Q + \partial_i J^i \tag{33}$$

de donde

$$Q = -\int \partial_i J^i dt \tag{34}$$

por lo que Q se conservará cuando dicha integral se anule. La condición de cuasiinvariancia del lagrangiano pasa ahora a ser una cuasiinvariancia de una divergencia, es decir, $\mathcal{L}$ puede cambiar como una transformación de gauge hasta una derivada partial de una cantidad λ^μ manteniendo la integral de acción invariante, ya que $\partial_\mu \lambda^\mu$ en los bordes o frontera no contribuirá generalmente a las ecuaciones de movimiento clásicas.

3.1. Densidades lagrangianas de orden 1

Ecuaciones de movimiento:

$$E_1(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \tag{35}$$

Corriente de Noether:

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi - \lambda^\mu \right) \tag{36}$$

3.2. Densidades lagrangianas de orden 2

Ecuaciones de movimiento:

$$E_2(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \partial_\nu \phi} = 0 \tag{37}$$

Corriente de Noether:

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \partial_\nu \phi} - \lambda^\mu \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \partial_\nu \phi} \delta \partial_\nu \phi \tag{38}$$

3.3. Caso de densidades lagrangianas de orden 3

Para facilitar la notación, indicaremos las sucesivas derivadas por índices. Así, $\partial_\mu \partial_\nu \phi = \phi_{\mu\nu}$, ... $\partial^s \phi = \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_s} \phi = \phi_{\mu_1 \cdots \mu_s}$. Con esta notación, escribimos las ecuaciones de movimiento y la corriente de Noether como sigue.

Ecuaciones de movimiento:

$$E_3(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} + \partial_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu}} - \partial_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}} = 0 \tag{39}$$

Corriente de Noether:

$$\begin{aligned} J^\sigma = & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\sigma} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\sigma}} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\sigma}} - \lambda^\sigma \right) \delta\phi + \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\sigma\nu}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\sigma}} \right) \delta\phi_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\sigma}} \delta\phi_{\mu\nu} \end{aligned}$$

3.4. Densidades lagrangianas de orden n

Ecuaciones de movimiento:

$$\delta\mathcal{L} = E_n(\mathcal{L}(\phi, D\phi, \ldots, D^n\phi))\delta\phi + \partial_\mu\lambda^\mu \tag{40}$$

y ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange de campo y la corriente de Noether adquieren las formas funcionales

$$E_n(\mathcal{L}) = \sum_{j=0}^{n} D^j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^j\phi} = 0 \tag{41}$$

$$J = \sum_{k=0}^{n} E_k \delta D^{n-k-1}\phi - \lambda\delta\phi \tag{42}$$

o bien

$$J = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D\phi} - D\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^2\phi} + D^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^3\phi} - \cdots - \lambda\right)\delta\phi +$$
$$+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^2\phi} - D\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^3\phi} + \cdots\right)\delta D\phi + \cdots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^n\phi}\delta D^{n-1}\phi$$

4. Los 2 teoremas

4.1. Formalismo matemático

Sean n campos $\phi^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, que dependen de D variables o coordenadas $x = x^\mu = (x^1, x^2, \ldots, x^D)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de primer orden (se puede extender la discusión a cualquier orden de derivadas mediante el uso de fibrados jet) se escriben

$$E_i(\varphi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} = 0 \tag{43}$$

Para la integral de acción

$$S = \int_M \mathcal{L}(x; \phi^i, \partial_\mu\phi^i) d^D x \tag{44}$$

se definen las transformaciones de coordenadas y campos:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{45}$$

$$\phi^i(x) \to \phi'^i(x') = \phi^i(x) + \delta\phi^i = \phi^i(x) + \overline{\delta}\phi^i + \partial_\mu\phi^i\delta x^\mu \tag{46}$$

que son transformaciones infinitesimales de las cantidades x^μ, ϕ^i. Al más bajo orden, la acción cambia

$$\delta S = \int_M \mathcal{L}(x', \phi'(x'), \partial\phi'(x')) d^D x' - \int_M \mathcal{L}(x, \phi(x), \partial\phi) d^D x \tag{47}$$

para dar

$$\delta S = \int_M \left[E_i(\phi)\overline{\delta}\phi^i + \partial_\mu B^\mu(x, \phi, \partial\phi, \delta x, \delta\phi)\right] \tag{48}$$

y donde B^μ, $\mu = 1, 2, \ldots, D$ son funciones lineales en $\delta x^\mu, \delta\phi^i$. Con estas expresiones, Noether enunció sus dos teoremas.

4.2. Teorema 1 (Noether, grupos r-paramétricos)

El enlace de simetrías (invariancias) y leyes de conservación es el contenido del primer teorema de Noether. La importancia del teorema de Noether reside en la conexión de simetrías (o leyes de invariancia) con las leyes de conservación. Así, la invariancia del lagrangiano frente a traslaciones implica la conservación del momento, la invariancia frente a traslaciones temporales implica la conservación de la energía (más generalmente, la invariancia frente a traslaciones espaciotemporales implica la conservación del denominado tensor energía-momento-impulso), la invariancia frente a rotaciones implica la conservación del momento angular (generalmente un bivector, pero dual a un vector en 3d), la invariancia frente a boosts implica que el centro de masas (o centro de energía en versión relativista) se mueve con movimiento uniforme,...Y más generalmente, el primer teorema de Noether indica que la invariancia de la acción (cuasiinvarincia del lagrangiano) frente a un determinado grupo de transformaciones (fijar el tipo de grupo a nivel matemático es importante, generalmente se prefieren grupos contínuos, habitualmente de Lie-Backlünd, pero pueden ser grupos más esotéricos como el grupo de Poincaré, el grupo conforme, el grupo de De Sitter, y otros varios).

Por ende, el primer teorema de Noether establece una correspondencia uno a uno (Noether probó esto) y lo recíproco, que una ley de conservación está asociada a una simetría o invariancia, al mismo tiempo que una simetría o invariancia está asociada a una cantidad conservada incluso aunque no sea trivial. Las leyes de conservación de los grupos contínuos son leyes aditivas, mientras que las simetrías discretas obedecen leyes de conservación multiplicativas (por ejemplo, la invariancia bajo inversión del sentido del tiempo, la invariancia bajo cambio de partículas por antipartículas o la invariancia bajo reflexión especular con las llamadas simetrías T, C y P, y son también simetrías en la Física de forma combinada, pero no al parecer de forma separada).

En síntesis, el primer teorema de Noether señala que las leyes de conservación implican invariancia y viceversa. Si la integral de acción es invariante para un grupo r-paramétrico de Lie (Lie-Backlünd hoy día):

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x, \varphi; \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r) \tag{49}$$

$$\phi^i(x) \to \phi'^i(x') = F^i(x, \varphi; \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r) \tag{50}$$

donde los valores

$$\varepsilon = \varepsilon^\rho = 0 = (0, \ldots, 0) = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^r) \tag{51}$$

con $\rho = 1, \ldots, r$ dan la transformación identidad. Entonces, para la parametrización

$$\delta x^\mu = X^\mu{}_\rho(x, \phi)\varepsilon^\rho, \ \ |\varepsilon| \acute{} 1 \tag{52}$$

$$\delta\phi^i = Z^i{}_\rho(x, \phi)\varepsilon^\rho \tag{53}$$

se demuestra, como hizo Noether, que existen r corrientes conservadas

$$J^\mu{}_\rho = T^\mu{}_\nu X^\nu{}_\rho - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} Z^i{}_\rho, \ \ \rho = 1, 2, \ldots, r \tag{54}$$

con el tensor energía-momento-impulso dado por

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}\partial_\nu \phi^i - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L} \tag{55}$$

para las soluciones $\phi^i(x)$ de las ecuaciones de movimiento

$$E_i(\phi) = 0$$

de un lagrangiano de primer orden.

Ejemplo 1. Traslaciones espacio-tiempo. Las transformaciones de coordenadas

$$x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu \delta\phi^i = 0 \tag{56}$$

proporcionan las corrientes

$$J^{\mu}{}_{\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}, \;\; \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, D \tag{57}$$

Ejemplo 2. Simetrías internas. Sean las transformaciones internas de los campos

$$\delta x^\mu = 0 \tag{58}$$

$$\phi'^i(x) = Y^i_p(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^r)\phi^p(x) \tag{59}$$

Entonces las siguientes corrientes son conservadas supuestas válidas las ecuaciones de movimiento $E_i(\phi) = 0$.

$$J^{\mu}{}_{\rho} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu(\phi^i)}Z^i{}_{\rho}, \;\; \rho = 1, 2, \ldots, r \tag{60}$$

También se cumple el recíproco: si hay ρ cantidades conservadas, entonces hay grupos de transformaciones que dejan la acción invariante.

4.3. Teorema 2 (Noether, grupos ∞-paramétricos o transformaciones gauge)

El segundo teorema de Noether conecta identidades diferenciales (dependencias de las ecuaciones de movimiento) con invariancia gauge. El segundo teorema de Noether es mucho más abstracto y sutil, y generalmente no tiene unas consecuencias apreciables como el primero. Si el grupo de invariancia se sustituye por un grupo de dimensión infinita y las transformaciones son gauge de un determinado conjunto de funciones hasta un determinado orden en las derivadas, Noether probó que no todas las ecuaciones de movimiento son independientes y hay redundancia o dependencias entre ellas. Al conjunto de estas relaciones, generalmente en la forma de identidades bajo la forma de operadores diferenciales, se le denomina identidades de Bianchi (aunque suele confundirse este término con las identidades de Bianchi de ciertos tensores que pueden o no tener relación con este teorema). No obstente, en la jerga moderna suele denominarse identidades de Noether a estas relaciones entre ecuaciones de movimiento bajo la presencia de grupos de transformaciones que dependen de funciones arbitrarias hasta cierto orden en las derivadas.

El enunciado matemático del segundo teorema de Noether es más complicado, y se incluye en el siguiente artículo(apartado) una versión del mismo algo arcaica. Las versiones más modernas usan formas y tensores, además del elegante lenguaje de fibrados jet de una variedad lagrangiana.

En síntesis, el segundo teorema de Noether demuestra que la invariancia bajo un grupo infinitodimensional de transformaciones “gauge” implican dependencias funcionales (redundancias, identidades diferenciales) entre las ecuaciones de movimiento y viceversa.

Si la integral de acción es invariante bajo un grupo gauge (infinitodimensional), los elementos del grupo dependen de s-funciones suaves o regulares $\xi^\rho(x)$, $\rho = 1, \ldots, s$ y sus derivadas hasta orden r_ρ, de forma que las variaciones son

$$\bar{\delta}\phi^j = \sum_{\rho=1}^{s} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_D=0}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_D=r_\rho} (\varepsilon^j(x,\phi;\partial\phi)_{\rho,\sigma_1,\ldots,\sigma_D} \frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_D}}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\cdots\partial(x^D)^{\sigma_D}} \xi^\rho(x) \tag{61}$$

y existen s-identidades llamadas identidades de Noether (o identidades de Bianchi) dadas por las expresiones

$$\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_D=0}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_D=r_\rho} (-1)^{\sigma_1+\cdots+\sigma_D} \frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_D}}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\cdots\partial(x^D)^{\sigma_D}} (\varepsilon(x,\phi,\partial\phi)_{\rho,\sigma_1,\ldots,\sigma_D} E_i(\phi)) = 0 \tag{62}$$

donde $\rho = 1, \ldots, s$, y que dan relaciones o dependencias entre las n-ecuaciones de Euler-Lagrange. La prueba usa integración y el hecho de que uno puede elegir $\xi^\rho = 0$ y también que podemos escribir

$$\frac{\partial^{\sigma_1+\cdots+\sigma_D}}{\partial(x^1)^{\sigma_1}\cdots\partial(x^D)^{\sigma_D}} \xi^\rho = 0 \tag{63}$$

en la frontera o borde de M, topológicamente denotado por ∂M.

Ejemplo 1. Electrodinámica clásica. En Electrodinámica Clásica se tiene que

$$E_\mu(A) = \partial^\nu F_{\nu\mu} \tag{64}$$

y

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \tag{65}$$

La acción invariante es

$$S(A,F) = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{66}$$

Bajo las transformaciones gauge

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \xi(x) \tag{67}$$

se deduce que

$$\partial^\mu E_\mu(A) = 0 \tag{68}$$

que es obvio resultado por la antisimetría de F, $F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$.

Ejemplo 2. Relatividad general. En Relatividad General (RG), se tienen las ecuaciones no lineales de campo

$$E_{\mu\nu}(g) = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{69}$$

y donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de curvatura. La invariancia de la acción integral de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R \tag{70}$$

bajo difeomorfismos o transformaciones generales de coordenadas parametrizadas en la forma

$$\delta x^\mu = \Xi^\mu(x) \tag{71}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = D_\mu \Xi_\nu + D_\nu \Xi_\mu \tag{72}$$

donde D_μ es la derivada covariante, proporciona 4 identidades de Bianchi (identidades de Noether, dependencias) dadas por

$$D^\mu E_{\mu\nu}(g) = 0 \tag{73}$$

que es obvio por la simetría de $G_{\mu\nu}$ y esperable por la conservación del tensor energía-momento-impulso $T_{\mu\nu}$. Estas relaciones fueron descubiertas por Hilbert y discutidas por él en su primer artículo sobre relatividad general en 1915.

5. Teoría de invariantes y álgebra

Emmy Noether(1882-1935) logró su doctorado (Ph.D) en Matemáticas en 1907 en la Universidad de Erlangen. Otra de las facetas de Noether era la teoría de invariantes algebraicos. La teoría de invariantes algebraicos estudia formas multilineales con la expresión formal

$$F^{D,p}(y_1, \ldots, y_n; \varepsilon) = \sum_{i_1, \ldots, i_D = 1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_D} (y_{i_1})^{\alpha_{i_1}} \cdots (y_{i_D})^{\alpha_{i_D}} \tag{74}$$

con

$$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_D} = p \tag{75}$$

Si uno pasa de variables y_j a las variables x_i por transformaciones lineales $x_i = C_{ij} y_j$, $|C_{ij}| \neq 0$, e insertamos estas relaciones en la fórmula precedente, esperamos encontrar una nueva forma del mismo tipo

$$G^{D,p}(x; b) = F^{D,p}\left[y(x; c); a\right] \tag{76}$$

donde los coeficientes $b^{j_1 \cdots j_D}$ son funciones de los coeficientes $a^{j_1 \cdots j_D}$ a través de la matrix de elementos C_{ij}. La principal cuestión de la teoría de invariantes algebraicos es: ¿qué funciones algebraicas $f(a)$ de los coeficientes $a^{j_1 \cdots j_D}$ son invariantes bajo transformaciones lineales, tales que se verifica la relación

$$f(b) = |C_{ij}|^g f(a) \tag{77}$$

donde g es un número racional? Resulta que hay una conexión profunda entre invariantes algebraicos e invariantes diferenciales, que se descubrió ya en el siglo XIX. La propia geometría de Riemann, esencial en la Teoría de la Relatividad General, usa invariantes diferenciales del tipo

$$f(x, dx) = g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{78}$$

aunque se podría también estudiar en principio invariantes más complicados (otras geometrías), del tipo

$$f(x, dx) = g_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx^{i_1} \cdots dx^{i_p} \tag{79}$$

que corresponde a las denominadas geometrías de Finsler.

Los teoremas de Noether son relevantes en el estudio del movimiento de fuerzas centrales del tipo inverso del cuadrado (problema de Kepler, con simetría oculta no trivial), el estudio de trompos asimétricos en más dimensiones. Por ejemplo, se puede generalizar al denominado grupo $SO(n)$ el grupo $SO(3)$ usual de un cuerpo o trompo rígido con ecuaciones de Euler (no confundir estas ecuaciones con las ecuaciones de Euler-Lagrangre):

$$\frac{dJ_i^B}{dt} + \sum_{j,k=1}^{n} C_{ijk}\omega^j J^{kB} = M_i^B \tag{80}$$

con $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, también tiene aplicación en teorías de (super)cuerdas, Mecánica Cuántica, Teorías Cuánticas de Campos (QFT), teorías del estado sólido, incluso en la teoría de agujeros negros (el agujero negro de Kerr con masa y momento angular tiene una constante de movimiento no trivial llamada constante de Carter asociada a una simetría no trivial del agujero negro, llamada simetría de Killing), Cosmología, o en la más humana Ciencia de la atmósfera en fluidos (donde cantidades como vorticidad y enstrofía juegan un papel importante en la dinámica no lineal asociada a los mismos).

Los teoremas de Noether son tan bellos debido a su generalidad y a la relevancia de la simetría en el mundo y en el Universo. A pesar de que se pueden formular hoy día con una elegancia, generalización, abstración y nivel de sofisticación mayor (quizás escriba una tercera parte sobre este aspecto), la esencia sigue siendo la misma:

- Simetrías contínuas implican leyes de conservación, y viceversa. Matemáticamente, se expresa como ecuaciones de continuidad (campos) o cantidades cuya derivada temporal es cero (en el caso de sistemas de partículas).
- Simetrías gauge implican dependencias o relaciones funcionales entre ecuaciones de movimiento de campos (partículas), y viceversa. Matemáticamente, se expresa como identidades entre ciertos operadores diferenciales en ecuaciones de tipo ordinario (sistemas de partículas) o en derivadas parciales (teorías de campos).

A. Emmy Noether

Figura 1: Fotografía de Emmy Noether en su juventud.

B. Problemas de variaciones invariantes

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17

Figura 2: La primera página de [6], un artículo legendario y de culto entre los físicos teóricos.

Referencias

[1] *Emmy Noether 1882–1935*. Birkhäuser Boston, 2012.

[2] Gualtiero Badin and Fulvio Crisciani. Variational formulation of fluid and geophysical fluid dynamics. *Mech. Symmetries Conservation Laws*, 2018.

[3] Tristan Johnson. Noether's theorem: Symmetry and conservation. 2016.

[4] Hans A Kastrup. The Contributions of Emmy Noether, Felix Klein and Sophus Lie to the modern concept of symmetries in physical systems. Technical report, PRE-27220, 1984.

[5] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Books On Physics. Dover Publications, 1986.

[6] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257, 1918.

[7] Emmy Noether. Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186–207, jan 1971.

[8] Emmy Noether. *Invariant Variational Problems*, pages 3–22. Springer New York, New York, NY, 2011.

[9] Peter J Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer Science & Business Media, 1993.

[10] Chris Quigg. Colloquium: A century of noether's theorem. *arXiv preprint arXiv:1902.01989*, 2019.

[11] G. Sardanashvily. Gauge conservation laws in a general setting. superpotential. 2009.

[12] Ken Zetie. Emmy Noether's wonderful theorem (revised and updated edition) by Dwight E. Neuenschwander, pp. 344, £22 (paper), ISBN 978-1-42142-267-1, Johns Hopkins University Press (2017). *The Mathematical Gazette*, 102(554):378–379, 2018.