SERIES MISTERIOSAS Y SUMAS DELIRANTES

Sea la suma $S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$
Uno pensaría en sumarla a cero así:
$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$
O incluso sumarla para obtener 1 así: $S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1$
Sin embargo los matemáticos (y algunos físicos teóricos) tienen formas más siniestras de sumar esta suma "divergente". ¿Qué hacen estos locos y locas de los físicos y matemáticos? Os cuento. Sacando factor común:
$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S; \quad S = 1 - S \to 2S = 1 \to S = \dfrac{1}{2}$
Esto parece mágico y delirante, porque que una suma infinita de números enteros alternados dé un número fraccionario es realmente de otra dimensión o universo paralelo. Pero bajo ciertas condiciones puede hacerse...Y peor aún, sirve para "probar" resultados aún más perturbadores. La siguiente suma:
$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k}$ se puede sumar usando la anterior suma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1/2$, porque si:
$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$
$2A = \quad 2 + \quad 2 + \quad 2 + \quad 2 + \cdots$
$A - 2A = -A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S$
y por tanto, como habíamos calculado siniestramente que $S = 1/2$, tenemos el resultado alucinante:
$A = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\dfrac{1}{2}$ ¡Tela! Pero hay aún más...Vamos a calcular ahora una suma que pensaríamos da infinito:
$B = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$
Para ello, vamos a hacer otro truco maquiavélico de prestidigitación matemática:
$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$
$4B = \quad 4 + \quad 8 + \cdots$
$-3B = B - 4B = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n = C$
Calculemos ahora, usando resultados anteriores:
$C = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n$
Nuestra primera suma, elevada al cuadrado, se puede escribir como sigue: $S^2 = (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)^2$
o bien $S^2 = S \cdot S$
$(-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)$
$\underline{\times(-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots)}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots =$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = C$$

Por tanto: $S^2 = C$. Como $S = 1/2$, entonces $S^2 = C = (1/2)^2 = 1/4$. Por ende, $B = -C/3 = -1/12$. Es decir (para flipar aún más), hemos demostrado que

$$\boxed{B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}}$$