ENERGÍA Y TRABAJO EN DINÁMICA: SÍNTESIS DEL TEMA

Juan Francisco González Hernández

Resumen

Se resumen los contenidos y conceptos del tema estudiados en clase.

Índice

1. Introducción

La noción de energía es un concepto *muy importante* y *fundamental* en la Física o la Química, y, también, debido al desarrollo de nuestra Tecnología, se ha convertido en un instrumento vital para el desarrollo de la Humanidad[1].

En la actualidad, el agotamiento de los recursos de energía fósiles, tales como el carbón o el petróleo, está llevando a las diferentes comunidades humanas y países a una nueva política energética en aras de la sostenibilidad del planeta que nos alberga.

¿Qué es la energía desde el punto de vista de la Ciencia, en particular, la Física y Química?Esto es una cuestión difícil de responder, pero trataremos de responderla con este pequeño tema.

2. Trabajo

Desde un punto de vista coloquial, y poco preciso, hablamos de **trabajo** como sinónimo virtualmente de *esfuerzo*. En Física, la noción de trabajo es algo más sutil. Trabajo *es*, desde el punto de vista de un físico, una *transferencia* de **energía**, o *energía* en tránsito, a diferencia de otras energías que permanecen latentes o escondidas en el interior de la materia. Y, ¿qué es pues energía? Simplemente, a este nivel, es la capacidad de realizar un trabajo o transferencia de energía[2].

[1] ¿Cuántas tareas que hacemos durante el día dependen últimamente de nuestras reservas o aportes de energía?Respuesta: casi todo.

[2] Esto es, de hecho, una falacia lógica debido a un razonamiento de tipo circular que no resulta, en última instancia, consistente con el método científico. Sin embargo, una comprensión profunda de lo que es energía es muy complicado y no está del todo comprendido, incluso por los teóricos. La noción más precisa de lo que "es" energía en la actualidad nos llevaría a entender el papel de la interconexión entre simetrías o invariancias y principios o leyes de conservación. Esta relación, conocida como Teorema de Noether, constituye uno de los logros más notables de la Física-Matemática del siglo XX. No obstante, aunque este teorema responde a la pregunta "¿Por qué se conserva cierta energía?", no nos dice información alguna sobre cómo o dónde encontrar nuevas fuentes de energía, que es un problema práctico importante en nuestra sociedad actual.

Supongamos que tenemos una fuerza $\vec{F}$, de forma que al aplicarla sobre un cuerpo se produce un determinado desplazamiento $\Delta\vec{r}$, siguiendo una trayectoria rectilínea que forma un ángulo φ con la fuerza. El trabajo **W** realizado por la fuerza se define como:

$$\boxed{\Delta W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\varphi = F\Delta r\cos\varphi}$$

Observación: Aunque la fuerza y el desplazamiento son vectores, en la fórmula del trabajo aparecen solamente los módulos, por lo que el trabajo es una magnitud escalar[3], es decir, es un número.

La unidad de energía o trabajo en el Sistema Internacional de unidades es el julio, que se representa por la letra J. Usando la definición de trabajo, se tiene que $1J = 1N \cdot 1m$.

Usando que la proyección de la fuerza sobre el desplazamiento vale precisamente $Proy_{F\to\Delta r} = F_{útil} = F\cos\varphi$, podemos escribir la fórmula del trabajo de la siguiente forma equivalente:

$$\Delta W = F_u\Delta r$$

La interpretación geométrica del trabajo que se deduce de esta fórmula, y de representar en unos ejes cartesianos la fuerza útil en función del desplazamiento es muy simple: el trabajo es simplemente el *área* bajo la curva de la fuerza útil al desplazarse entre dos puntos determinados un cuerpo o partícula.

Si el trabajo es *positivo*, el trabajo lo realiza el entorno sobre nuestro sistema y es un trabajo denominado **"motor"**.

Si el trabajo es *negativo*, el trabajo lo realiza el sistema en contra de la fuerza aplicada, por lo que es un trabajo **"resistente"** realizado por el sistema en contra de la fuerza.

[3] De hecho, el trabajo se define más precisamente como el *producto escalar* del vector fuerza por el vector desplazamiento $\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$, que, usando la definición y noción matemática de producto escalar,coincide con nuestra expresión anterior.

Si el trabajo es *nulo*, sólo hay tres posibilidades, dos de ellas obvias (que la fuerza total o el desplazamiento realizado son nulos) y una posibilidad algo menos trivial: que la fuerza y el desplazamiento sean perpendiculares (en un MCU, por este motivo, la fuerza centrípeta *no* realiza trabajo sobre la partícula, porque es perpendicular a la misma).

3. Energía cinética

Se llama energía cinética, $\mathbf{E_c}$, a la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathrm{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Conceptualmente, mide el trabajo que puede realizar una partícula que se mueve con una determinada velocidad. Se puede justificar su origen mediante la fórmula del trabajo y una partícula o sistema que realiza un MRUA, siguiendo la segunda ley de Newton. Usando que $F = ma$, al sustituir en la ecuación del trabajo se tiene que:

$$\Delta W = F\Delta r = ma\Delta r$$

Suponiendo que tenemos un MRUA, por otra parte, tenemos la ecuación que relaciona el desplazamiento con la aceleración

$$2a\Delta r = v^2 - v_o^2 \rightarrow a\Delta r = \frac{v^2 - v_o^2}{2}$$

que sustituyendo en la ecuación del trabajo del párrafo anterior resulta

$$\Delta W = m\frac{v^2 - v_o^2}{2} = \Delta E_c = E_c(final) - E_c(inicial) = E_{c(f)} - E_{c(i)}$$

y en donde $E_{c(f)} = \frac{1}{2}mv_f^2,\ E_{c(i)} = \frac{1}{2}mv_o^2$. Este resultado constituye el denominado

Teorema de las fuerzas vivas

> "El trabajo necesario para acelerar de forma uniforme una partícula o sistema es igual a la variación de energía cinética que experimenta dicha partícula o sistema"

Este resultado puede generalizarse si tenemos varias fuerzas fuerzas constantes en nuestro sistema o problema de la siguiente forma: el trabajo total de todas las fuerzas será igual a la variación de energía cinética de nuestro sistema. Matemáticamente

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} W_i = \Delta E_c$$

4. Potencia

Se denomina **potencia**, al *ritmo de cambio del trabajo* respecto del tiempo, o, lo que es lo mismo, a la "rapidez" con la que se realiza un trabajo dado. Matemáticamente se define la potencia media como:

$$\boxed{P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

La unidad de potencia en el watio, W, que usando la definición no es equivale a $1W = \dfrac{1J}{1s}$.

Existe una expresión alternativa para la potencia media, usando nuestros superconocidos conceptos cinemáticos

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_u \Delta r}{\Delta t} = F_u \frac{\Delta r}{\Delta t} = F_u v$$

esto es

$$\boxed{\mathrm{P}_m = F_u v}$$

Una unidad antigua de potencia, remanente de la Revolución Industrial del siglo XIX, es el llamado caballo de vapor (CV). Su equivalencia es: **1CV = 735W**.

5. Energía potencial

Siempre que una partícula tiene una propiedad característica de un campo de fuerzas de un tipo especial llamado "conservativo", existe una energía típica de ese campo, llamada energía potencial, que conceptualmente significa la energía de dicha partícula o sistema por estar en el mencionado campo. Hay tantos tipos de energías potenciales como campos conservativos, pero en este curso nos centraremos en unos pocos tipos de casos fundamentales.

5.1. Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria de un objeto viene dada por la expresión general siguiente:

$$E_p^g = -\frac{GMm}{r}$$

donde G es la constante de Newton de gravitación universal, que vale $6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$. Para los problemas dinámicos de este año es suficiente considerar una aproximación que se deduce de esta expresión, cuando las distancias al centro de fuerza son pequeñas, y que es la conocida fórmula de la energía potencial gravitatoria

$$\boxed{\mathrm{E}_p^g = mgh}$$

y donde g es la aceleración de la gravedad terrestre en la superficie. Como resultado, esto me dice que la variación de trabajo necesario para llevar la partícula de un punto A hasta otro B, en el campo gravitatorio terrestre, conservativo, es igual por definición a

$$\boxed{\Delta W_{A\to B} = -\Delta E_p^g = E_p(A) - E_p(B) = -mg\Delta h = mg(h_A - h_B)}$$

Conviene tomar un sistema o nivel de referencia, o altura, en los problemas donde apliquemos la energía potencial gravitatoria, que *debemos* mantener durante todo el ejercicio. Normalmente se escoge el suelo o superficie terrestre como origen.

5.2. Energía potencial eléctrica

Análogamente al caso gravitatorio, una partícula en un campo eléctrico tiene una energía potencial dada por

$$E_p^{el} = \frac{KQq}{r}$$

y donde K es la constante de Coulomb, que vale $9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$. Análogamente al apartado anterior se tiene el siguiente resultado, casi idéntico salvo el signo negativo[4] que ahora no está presente a diferencia de la energía potencial gravitatoria ($E_p^g = -\frac{GMm}{r}$):

$$\boxed{\Delta W_{A \to B} = -\Delta E_p^{el} = E_p(A) - E_p(B)}$$

5.3. Energía potencial elástica

En el caso de una partícula sometida a la ley de Hooke, que no es más que una fuerza recuperadora directamente proporcional a los desplazamientos, la energía potencial elástica se define como

$$\boxed{\mathrm{E}_p^{elas} = \frac{1}{2}kx^2}$$

y donde k es la constante recuperadora del muelle, resorte o elástica de la ley de Hooke, y “x” es el alargamiento producido. Cuando se estira o comprime un muelle, la variación de trabajo producido es igual a

$$\boxed{\Delta W_{A \to B} = -\Delta E_p^{elas} = -\frac{1}{2}k\Delta(x)^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2}$$

[4]El signo negativo de la energía potencial gravitatoria tiene un significado mucho más profundo que no puede citarse aquí. Nos limitaremos a ser cuidadosos con el signo de las energías potenciales gravitatoria y eléctrica, recordando que para la gravitatoria es negativo en su foma original, y que se miden las alturas desde el punto que haya asignado como origen de mi sistema de referencia, preferentemente en la superficie de la Tierra, o suelo, como ya hemos mencionado en más de una ocasión.

6. Energía mecánica

Se denomina **energía mecánica**, a la suma de energía cinética y todos los tipos de energía potencial que tenga en mi sistema:

$$\mathbf{E_m = E_c + E_p}$$

En un campo gravitatorio, en particular, se tiene el resultado particular importante siguiente: la energía mecánica permanece constante en cada punto del campo. Es lo que se llama

Teorema de conservación de la energía mecánica

> "La energía mecánica de una partícula o sistema
> permanece constante en cada punto del
> campo gravitatorio, o, más generalmente,
> en cada punto de un campo conservativo."

Matemáticamente $E_m = cte. \longleftrightarrow \Delta E_m = 0$

7. Conservación de la energía mecánica: teorema general

Cuando en un sistema actúan fuerzas que no derivan de una energía potencial, es decir, cuando hay fuerzas *disipativas* o *no conservativas*, que ceden trabajo en forma de calor al entorno, y tenemos un teorema general de conservación de la energía que dice que la variación de energía mecánica debe ser igual al trabajo realizado por las fuerzas disipativas (que siempre es negativo con los convenios que hemos tomado):

Teorema de generalizado de conservación de la energía mecánica

> "La variación de la energía mecánica de una partícula o sistema es igual a menos la variación del trabajo realizado por las fuerzas disipativas que existan entre los puntos A y B que haya considerado."

Matemáticamente

$$\boxed{\Delta E_m = \Delta W_{dis}}$$

8. Choques o colisiones

Cuando dos o más cuerpos chocan o colisionan, se intercambian momento y/o energía cinética, dependiendo de si rebotan sin deformarse (choque elástico) o se quedan incrustados o unidos (choque inelástico). En cualquiera de estos dos choques se conserva, o permanece constante, el momento lineal.

8.1. Choques elásticos

En este tipo de choques permanecen constantes tanto el momento lineal como la energía cinética. Es decir, a nivel de planteamiento o conceptual se tiene que:

$$\text{Choque elástico} \longleftrightarrow \begin{cases} \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \leftrightarrow \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 + \ldots = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2 + \ldots \\ E_c(ant) = E_c(des) \leftrightarrow E_{c1} + E_{c2} + \ldots = E'_{c1} + E'_{c2} + \ldots \end{cases}$$

Planteando las ecuaciones de conservación del momento lineal y de la energía cinética para un sistema de referencia cartesiano, con el origen situado en nuestro punto de impacto, es posible calcular las velocidades y momentos finales, y energías cinéticas respectivas, de cada partícula, o bien, conocidos los momentos o velocidades finales de nuestras partículas, y sus energías cinéticas respectivas, podemos saber la velocidad y momento iniciales de las mismas, y, entonces, su energía cinética inicial.

8.2. Choques inelásticos

En este tipo de choques sólo se conserva el momento lineal, puesto que parte de la energía del choque se invierte en deformar los cuerpos, al quedarse unidos o acoplados, y redistribuirse las energías internas de los mismos, disipándose en forma de calor Q:

$$\text{Choque inelástico} \leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}_{ant} = \vec{p}_{des} \leftrightarrow m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)\vec{\mathbf{V}} \\ E_c(a) = E_c(d) + \mathbf{Q} \leftrightarrow E_{c1} + E_{c2} + \ldots = E'_{c1+c2+\ldots} + \mathbf{Q} \end{cases}$$

En este caso, para resolver el problema solamente se usa la conservación del momento para calcular la velocidad del conjunto, $\vec{V}$, y, excepcionalmente, se calcula la disipación de calor[5].

A. FORMULARIO BÁSICO DE ENERGÍA

A.1. Definiciones de variables energéticas

Trabajo ☺

$$\boxed{\Delta W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\varphi = F\Delta r\cos\varphi}$$

Potencia media ☺

$$\boxed{P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F_u v}$$

[5]Realmente hay muy pocos choques que se puedan considerar perfectamente elásticos, por lo que hay que considerar siempre el caso de la disipación de calor mediante un concepto denominado coeficiente de restitución, relacionado con la disipación Q. No obstante, no lo haremos aquí, al sobrepasar los niveles exigidos para este curso y etapa.

Energía cinética ☺

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Energía potencial gravitatoria, eléctrica y elástica ☺

$$\boxed{E_p^g = mgh} \quad \boxed{E_p^{el} = K\frac{Qq}{r}} \quad \boxed{E_p^{elas} = \frac{1}{2}kx^2}$$

Energía mecánica ☺

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

A.2. Teoremas y principios generales

Teorema general de conservación de la energía mecánica ☺

$$\boxed{\Delta E_m = \Delta W_{dis}}$$

Choques elásticos ☺

$$\text{Choque elástico} \longleftrightarrow \begin{cases} \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \leftrightarrow \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 + \ldots = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2 + \ldots \\ E_c(ant) = E_c(des) \leftrightarrow E_{c1} + E_{c2} + \ldots = E'_{c1} + E'_{c2} + \ldots \end{cases}$$

Choques inelásticos ☺

$$\text{Choque inelástico} \leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}_{ant} = \vec{p}_{des} \leftrightarrow m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)\vec{\mathbf{V}} \\ E_c(a) = E_c(d) + \mathbf{Q} \leftrightarrow E_{c1} + E_{c2} + \ldots = E'_{c1+c2+\ldots} + \mathbf{Q} \end{cases}$$