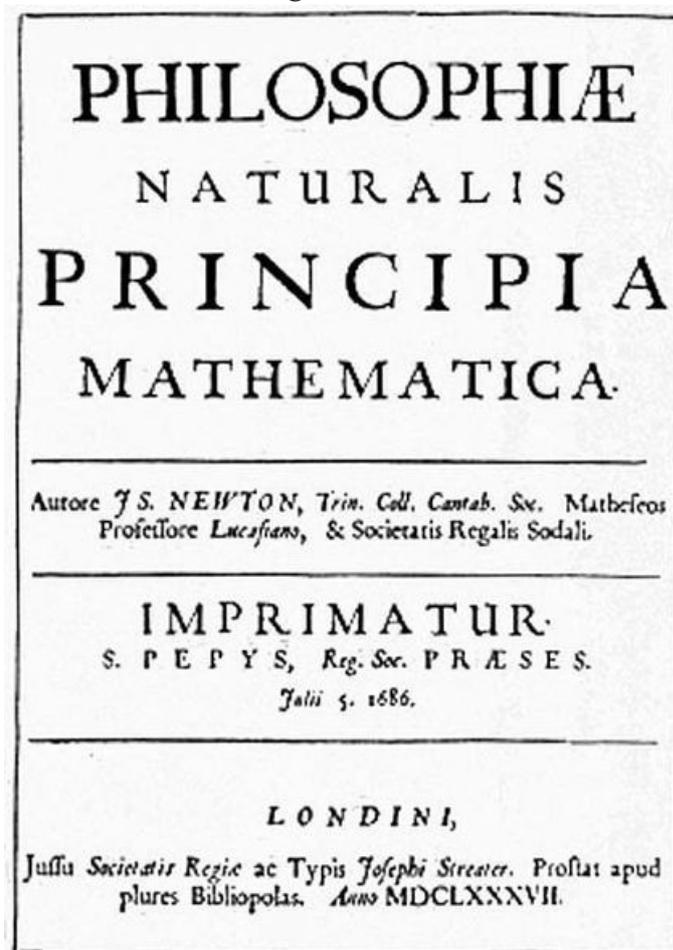


Física

2° Bachillerato

$\Theta^3\Sigma x^2$, $\partial^3\Sigma x^2$, $\Theta\Sigma$, Amarashiki, The Other, $O\Sigma$, Τήλιστος,
Mummu, Stormageddon, The Dark Lord of All, The Dark One,
The Oncoming Storm, Wolf ae sine



Índice general

1. Los métodos de la Física	11
1.1. El método científico	11
1.2. La Física como Ciencia	20
1.3. Teorías efectivas	21
1.4. Fuerzas de la Naturaleza	26
1.5. Cálculo vectorial	29
1.6. Campos, derivadas e integrales	40
1.7. Operadores diferenciales e integrales	42
1.8. Cuestiones	49
1.9. EJERCICIOS CON SOLUCIONES	51
2. Introducción a la Física	55
2.1. Cinemática	55
2.1.1. Vector de posición. Base cartesiana.	55
2.1.2. Velocidad media. Velocidad instantánea.	57
2.1.3. Aceleración	58
2.1.4. Sistema intrínseco	59
2.1.5. Magnitudes lineales y angulares: relaciones	60
2.2. Dinámica	61
2.2.1. Leyes de Newton	62
2.2.2. Momento lineal	65
2.2.3. Fuerzas intrínsecas	66
2.2.4. Otras magnitudes dinámicas	67
2.2.5. Relación entre \vec{L} y \vec{M}	68
2.2.6. Equilibrio dinámico entre fuerzas	69
2.2.7. Análisis energético de problemas dinámicos	69
2.3. Colisiones clásicas	73
2.3.1. Choque perfectamente elástico	74
2.3.2. Péndulo balístico	75
2.3.3. Choque perfectamente elástico	76

2.4.	Leyes de escala y metabolismo	78
2.5.	Ejercicios resueltos	81
2.6.	¿Qué hay que saberse?	83
2.7.	Ejercicios: Cinemática de la partícula	84
2.8.	Ejercicios: Dinámica de la partícula	91
2.9.	Ejercicios: Dinámica de sistemas de partículas	98
2.10.	Ejercicios: Trabajo y energía	104
2.11.	Ejercicios avanzados	110
3.	Oscilaciones	119
3.1.	Movimiento armónico simple (M.A.S.)	119
3.1.1.	Cinemática de un M.A.S.	120
3.1.2.	Parámetros cinemáticos del MAS	121
3.1.3.	Velocidad y aceleración en el MAS	122
3.1.4.	Dinámica del MAS	124
3.1.5.	Energía en el MAS	126
3.1.6.	Ejemplos prácticos de MAS	128
3.2.	Formulario del MAS	130
3.3.	¿Qué hay que saberse?	131
4.	Movimiento ondulatorio	133
4.1.	Introducción	133
4.2.	Velocidad de propagación	136
4.3.	Ondas armónicas	137
4.3.1.	Magnitudes de las ondas armónicas	138
4.3.2.	Relaciones entre magnitudes importantes	139
4.3.3.	Ondas armónicas: descripción matemática	139
4.3.4.	Casos particulares de ondas armónicas	140
4.3.5.	Doble periodicidad	140
4.3.6.	Fase y diferencia de fase	141
4.4.	Propagación de ondas: principios, leyes y medidas	142
4.4.1.	Principio de Huygens	142
4.4.2.	Principio de superposición	143
4.4.3.	Ley de reflexión	144
4.4.4.	Ley de la refracción o ley de Snell(óptica)	145
4.4.5.	Energía, intensidad, potencia	148
4.4.6.	Escala sonora (decibelios, dB)	149
4.5.	Ondas en una cuerda. Interferencia.	151
4.6.	¿Qué hay que saberse?	155
4.7.	Formulario de ondas	156

5. Gravitación	159
5.1. Ley de Gravitación Universal	159
5.2. Leyes de Kepler	161
5.3. Campo gravitatorio	165
5.4. Órbitas	168
5.5. Rotación y momento angular en fuerzas centrales	170
5.6. ¿Qué debo saber?	171
5.7. Formulario de Gravitación Universal (GU)	172
6. Campo magnético	175
6.1. Introducción	175
6.2. Campo magnético	178
6.2.1. Fuerza magnética para cargas puntuales	178
6.2.2. Fuerza de Lorentz: combinando fuerzas eléctricas y magnéticas	179
6.2.3. Líneas de fuerza del campo magnético	180
6.2.4. Movimientos de cargas en presencia de campos magnéticos	180
6.2.5. Movimiento en un campo magnético uniforme	181
6.2.6. Fuerza sobre una corriente eléctrica I	183
6.2.7. Campo magnético de una carga puntual móvil	184
6.2.8. Ley de Biot-Savart	185
6.2.9. Circulación de un vector. Ley de Ampère	186
6.2.10. Aplicación de la ley de Ampère	187
6.2.11. Fuerzas magnéticas entre corrientes paralelas. Definición de amperio.	192
6.2.12. Momento magnético de una espira	193
6.2.13. Aplicaciones electromagnéticas del magnetismo	194
6.3. ¿Qué debo saber?	196
6.4. Formulario	196
7. Inducción electromagnética	199
7.1. Fundamentos experimentales e historia	199
7.2. Flujo magnético	202
7.3. Leyes de la inducción electromagnética	203
7.4. Autoinducción	204
7.5. Transformadores	205
7.6. Generadores de corriente alterna (AC)	206
7.7. ¿Qué debo saber?	207
7.8. Formulario	208

8. Óptica (I): Naturaleza de la luz	209
8.1. Introducción	209
8.2. Dualidad onda-corpúsculo	212
8.3. Espectro electromagnético	213
8.4. Leyes de la reflexión y refracción de la luz	215
8.5. ¿Qué debo saberme?	217
8.6. Formulario	218
9. Óptica (II): Óptica geométrica	219
9.1. Sistemas ópticos	219
9.2. Espejos	221
9.2.1. Espejo plano	221
9.2.2. Espejos esféricos	221
9.2.3. Criterio de signos para distancias e imágenes	221
9.3. Dioptrios	222
9.4. Lámina plano-paralela (tema avanzado opcional)	223
9.5. Prisma óptico	223
9.6. Lentes delgadas	224
9.7. El ojo humano	225
9.8. Instrumentos ópticos	225
9.8.1. La lupa	225
9.8.2. El microscopio/telescopio	225
9.9. ¿Qué hay que saber?	226
9.10. Formulario	226
10. Física moderna (I): Física Cuántica	229
10.1. Física del siglo XIX	229
10.2. Radiación del cuerpo negro	230
10.2.1. Ley de Stefan-Boltzmann	231
10.2.2. Ley de Wien	231
10.2.3. Ley de Planck	231
10.3. Efecto fotoeléctrico	231
10.4. Rayos X	233
10.5. Efecto Compton	233
10.6. Espectros y modelo de Bohr	234
10.7. Ondas de materia	238
10.8. Ondas y Mecánica Cuántica	240
10.8.1. Ondas	240
10.8.2. Mecánica Cuántica	242
10.8.3. Principio de incertidumbre	244
10.8.4. Orbitales y números cuánticos	245

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
10.9. Tabla Periódica y propiedades periódicas	246
10.10. ¿Qué hay que saberse?	248
10.11. Formulario	249
11. Física moderna (II): Física relativista	253
11.1. Relatividad especial o restringida	253
11.2. ¿Qué hay que saberse?	256
11.3. Formulario	256
12. Física moderna (III): Física nuclear (y de partículas)	259
12.1. Núcleo atómico	259
12.1.1. Componentes del núcleo	259
12.1.2. Elementos e isótopos	259
12.1.3. Propiedades del núcleo atómico	260
12.1.4. Modelo Estándar y Física de Altas Energías	260
12.2. Energía de enlace nuclear	261
12.3. Radioactividad	262
12.4. Ley de desintegración radioactiva	262
12.5. ¿Qué hay que saber?	264
12.6. Formulario	264
A. Problemas complementarios	267

Cuestionario inicial

El presente cuestionario es meramente informativo. El objetivo es saber el nivel general de la clase y adaptar las lecciones a los alumnos que la cursen. No debemos olvidar que es posible cursar esta asignatura sin haber cursado Física y Química en primero (aunque suele ser improbable). Las respuestas a estas preguntas son personales y se entregarán al profesor en una hoja por separado, con el nombre y apellidos correspondientes.

- 1) ¿Tienes pendiente la Física y Química de primero de Bachillerato?
- 2) ¿Eres repetidor/a?
- 3) ¿Cursaste la Física y Química de primero de Bachillerato? Si la respuesta es afirmativa, indica la nota que sacaste.
- 4) ¿Qué calificación sacaste en Matemáticas de primero de Bachillerato?
- 5) ¿Te gusta la Física? ¿Y las Matemáticas?
- 6) Sean los vectores $u = 3i + 4j$ y $v = 2i - j$. El vector $w = 2u - v$ y el ángulo α formado por los vectores u y v es igual a:
 - $w = 2u - v =$
 - $\alpha =$
- 7) a) Escribe cuáles son las unidades fundamentales de longitud, tiempo, masa y cantidad de sustancia en el S.I.

b) Escribe el nombre de las unidades de fuerza, intensidad de corriente y carga eléctrica en el S.I., indicando si estas magnitudes son fundamentales o derivadas en tal sistema de unidades.

c) Indica el nombre de alguna otra magnitud fundamental en el S.I.
- 8) Enuncia la segunda ley de Newton de la Dinámica y escribe su formulación matemática.
- 9) Un DVD se mueve con una velocidad de 120 r.p.m. (revoluciones por minuto). Suponiendo que inicialmente esta velocidad es constante y que en cierto momento, un fallo hace que se detenga en 2 segundos, calcula la velocidad angular inicial en rad/s, la aceleración angular en unidades del

S.I. y las vueltas que ha dado hasta que se detiene.

10) Dos cargas eléctricas, con valores de $Q_1 = 1 \cdot 10^{-4}mC$ y $Q_2 = -2 \cdot 10^{-4}mC$, se hallan separadas 3 metros de distancia. Usando la ley de Coulomb, halla la fuerza eléctrica entre ambas cargas indicando si es atractiva o repulsiva. Dato: $K_C = 9 \cdot 10^9Nm^2/C^2$.

11) En un circuito eléctrico hay un conductor cuya resistencia vale 5Ω y una pila que proporciona una diferencia de potencial de $10mV$. Calcula la intensidad eléctrica que circula por el circuito.

12) Halla el valor de la energía cinética de un proyectil de 50 kg que se mueve con una velocidad de 36km/h. Si el proyectil frena en cierto momento, con aceleración en módulo igual a $1m/s^2$, calcula la distancia recorrida hasta que se detiene.

13) Despreciando el rozamiento del aire, indica qué objeto llega antes al suelo de forma razonada: a) Una manzana de 0.5 kg, b) Un lingote de oro de 1 kg.

14) Se deja caer un cuerpo de 3 kg desde una altura de 10metros. Tomando como valor de la aceleración de la gravedad $9.8m/s^2$, halla la velocidad con la que llega al suelo.

15) Un electrón-voltio es la energía que posee un electrón cuando se somete a una diferencia de potencial de un voltio. Calcula en unidades del sistema internacional a cuánta energía equivalen: a) 14 TeV. b) $10^{16}TeV$. Dato: $1T=10^{12}$.

16) ¿Crees que la Física de segundo de Bachillerato es importante para tu futuro?

17) ¿Qué expectativas tiene para esta asignatura en este curso?

18) ¿Qué piensas hacer al acabar Bachillerato? ¿Harás la P.A.U.? Si la respuesta a esta última pregunta es positiva, indica la nota que esperas alcanzar idealmente de acuerdo a lo que piensas son tus capacidades reales.

Capítulo 1

Los métodos de la Física

En este primer capítulo introductorio, estudiaremos el método científico, los métodos de estudio de la Física como Ciencia a nivel experimental y teórico.

¿Qué es la Física? Espero mostrar que la Física es una ciencia experimental encaminada al conocimiento fundamental de la Naturaleza, y que queremos aprovechar dicho conocimiento en beneficio de la Humanidad. La Física es una Ciencia en continuo desarrollo y se construye mediante experimentación, razonamiento crítico (generalmente matematizado) e imaginación creativa (en la intuición y desarrollo de teorías o interpretación de fenómenos y/o resultados experimentales).

1.1. El método científico

Una primera idea de lo que es el método de la Ciencia lo proporciona el siguiente escrito de Diderot en el libro *Intepretación de la Naturaleza*:

“(...)Poseemos tres medios principales: la *observación* de la Naturaleza, la *reflexión* y la *experiencia*. La observación recoge los hechos o fenómenos, la reflexión los combina, la experiencia verifica el resultado de la combinación. Es indispensable que la observación de la Naturaleza sea asidua, que la reflexión sea profunda y consistente, y que la experiencia sea exacta (tanto en precisión como en exactitud)(...)”

El Universo (o Poliverso/Multiverso si nos creemos intepretaciones exóticas contemporáneas de la Física Cuántica) en que vivimos está re-

gido por una serie de leyes, de carácter matemático (esta idea se debe a Galileo), generalmente “ocultas” a simple vista (o más o menos difícil de elucubrar) y que los científicos se afanan y tratan de descubrir. En particular, la Física actual trata de solucionar cuestiones tan profundas (y casi filosóficas) y fundamentales como el origen del propio Universo (Poliver-so), o la estructura más pequeña de la materia y el espacio-tiempo. No son cuestiones fáciles de responder, y para responder a estos problemas y preguntas, los investigadores siguen el denominado **método científico**, cuya versión moderna se debe al antes mencionado Galileo Galilei. Este método, puede dividirse en una serie de “pasos” o “etapas”:

- **Observación de los fenómenos naturales.** Consiste en examinar cuidadosamente los fenómenos y procesos empíricos que queremos estudiar, tratando de describir los factores que influyen en tales fenómenos. Un fenómeno observado repetidas veces, puede llegar a sernos muy “familiar”, de forma que nos parezca obvio y lógico lo que antes parecía completamente inexplicable.
- **Razonamiento o reflexión.** También llamado en ocasiones “lenguaje razonado”, de carácter lógico-matemático. Una vez “contemplado” un suceso, el paso siguiente es tratar de formar una “hipótesis” que permita explicar el fenómeno observado. La intuición, la imaginación y la crítica del investigador son parte importante de este proceso. Por ejemplo, J. Kepler, como resultado del estudio de muchas y precisas observaciones sobre los planetas realizadas por Tycho Brahe, enunció las leyes que rigen el movimiento de los planetas y que ahora llevan su nombre.
- **Experimentación.** Las hipótesis científicas se comprueban o no realizando experimentos. Consiste en repetir el fenómeno observado las veces que sea necesario bajo “condiciones controladas” y que preparemos de antemano. Estas condiciones deben ser fáciles de comprobar, de forma que se puedan variar a voluntad por una parte, y, por otra, que puedan ser reproducidas por otros científicos. Un experimento es científico si puede ser “reproducido”. De esta forma, no sólo se comprende la influencia que tienen nuestras condiciones sobre el fenómeno observado, sino que se comprueba su “universalidad”. La experimentación es la base fundamental del método científico en ciencias como la Física, porque la experiencia es el verdadero juez que determina si las hipótesis, modelos y teorías son falsas o verdaderas. Citando a N. Bohr:

“(...)No puede ser hermosa una teoría que no pueda explicar los datos experimentales de que dispone(...)”

Así pues, un principio básico fundamental del método científico es la capacidad de probar, al final, la validez de nuestras afirmaciones mediante la realización de experimentos. En cierto sentido, y de acuerdo a Popper, un criterio necesario para calificar cualquier idea, hipótesis, modelo o teoría de “científica” es su “falsabilidad”. Una afirmación es falsable si puede ser sometido a juicio experimental. Si es falsable, entonces tal afirmación es también científica. Sin embargo, muchas veces, la realidad científica de una teoría está más allá del criterio de falsabilidad de Popper. Es por ello que, en el ámbito de la Ciencia, si bien la falsabilidad proporciona un criterio útil, no siempre es posible lograr la falsación de una teoría o afirmación para que esta se abandone.

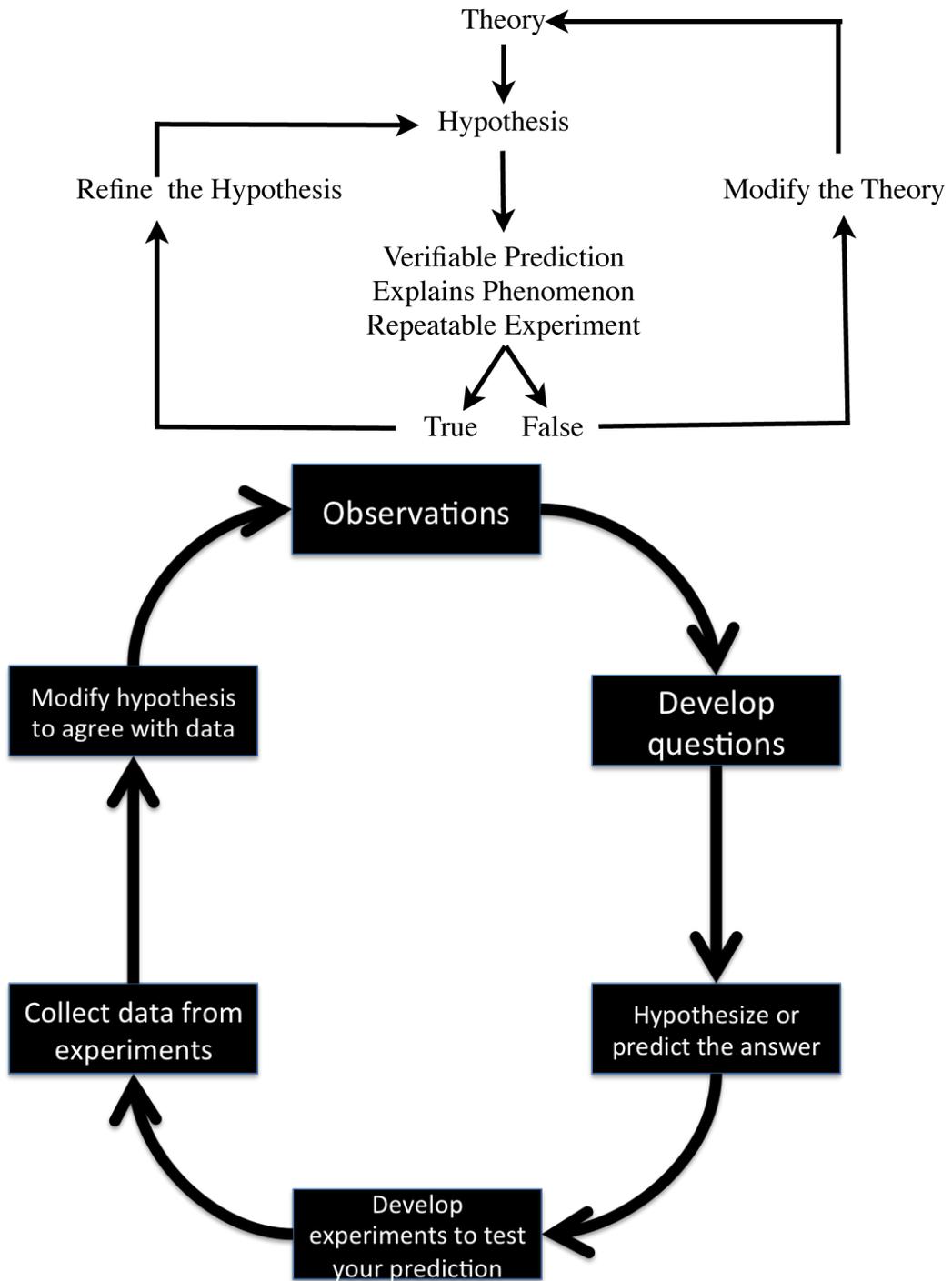
De acuerdo a lo anterior, en el contexto de esta Filosofía del conocimiento, cualquier teoría científica tiene carácter provisional. Es válida mientras explique todos los fenómenos observados. No importa cuántos experimentos están de acuerdo con una teoría tampoco para elucidar su validez y corrección. Si uno sólo contradice la teoría, entonces hay que modificarla o bien descartarla.

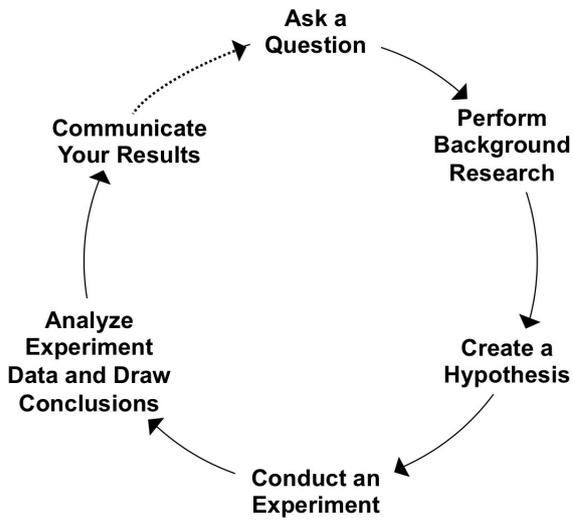
- **Elaboración de modelos y teorías.** Se puede llegar a este paso a partir de los anteriores. O bien, podemos empezar a analizar la Naturaleza estableciendo unos postulados o principios, y su formulación matemática, de forma que accedemos a las etapas anteriores. Una teoría se origina cuando las leyes empíricas deducidas de la observación y experimentación se engloban en un contexto más general o amplio. También podemos construir una teoría a partir de ciertos principios básicos basados en la experiencia y armados con un fuerte formalismo matemáticos (es el método postulacional de Einstein).

En resumen, el método de la Ciencia consiste en un proceso cíclico de observación, reflexión (o pensamiento lógico-matemático razonado) y experimentación. El propio H. Poincaré simplifica algo esta triada, afirmando, en su libro *Ciencia y método*, que:

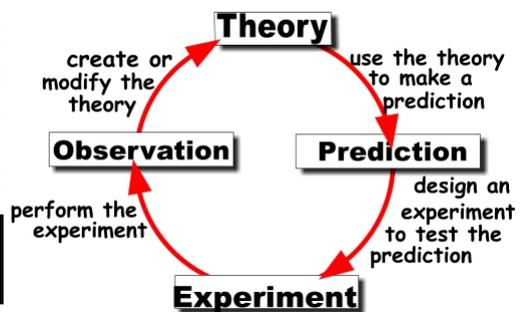
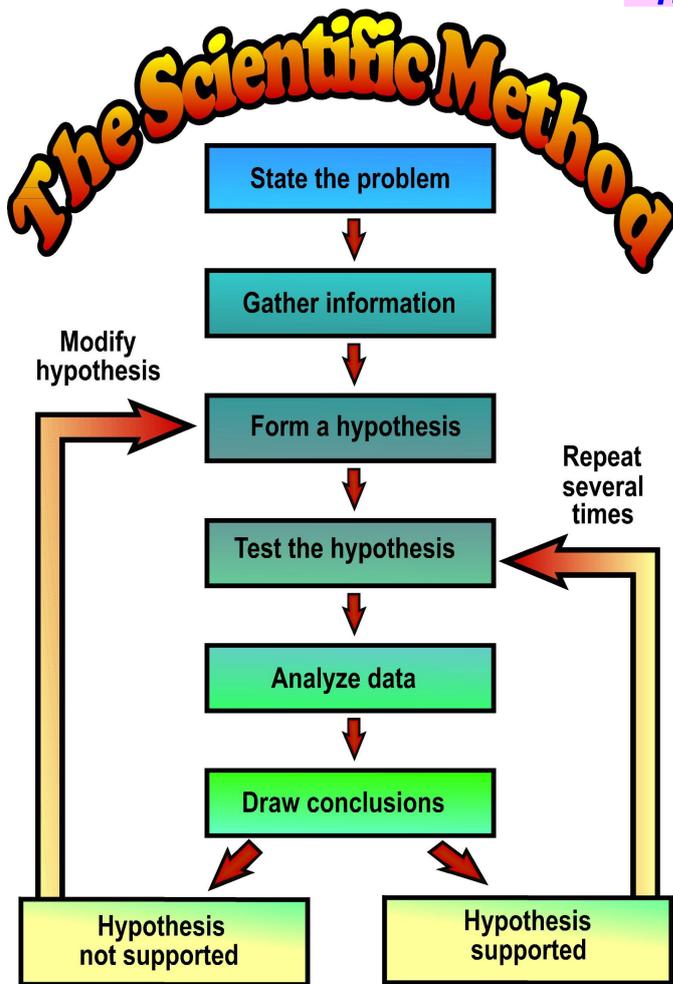
“(...)El método científico consiste en observar y experimentar (...)”

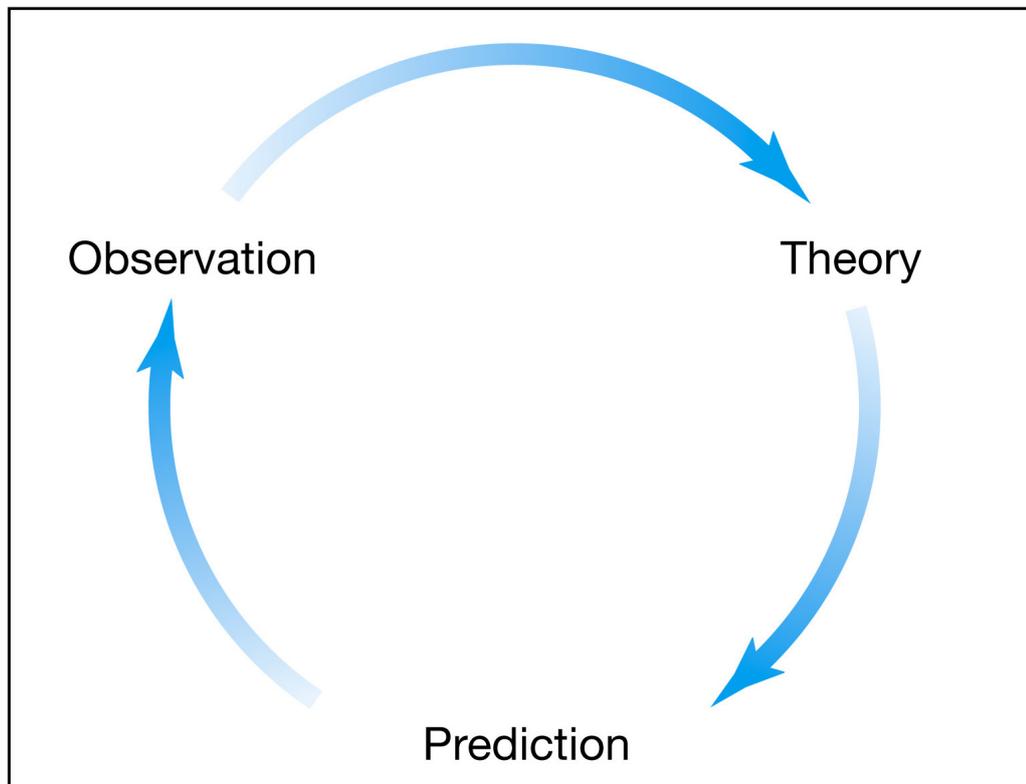
Los siguientes diagramas ayudan a visualizar el proceso del método científico:





- SCIENTIFIC METHOD**
1. Observation
 2. State the Problem
 3. Hypothesis
 4. Experimentation
 5. Gather Data
 6. Conclusion
 7. Verification





Aunque el proceso científico tiene unas características como las anteriores, no son fijas e inmutables, y son susceptibles de mejora. De hecho, el criterio de Popper es generalmente demasiado “fuerte” para muchas teorías y asertos. Además, podemos también señalar que:

1. Durante la observación de fenómenos, es importante agruparlos, categorizarlos y estudiarlos mediante criterios claros y específicos.
2. En la elaboración de hipótesis, estas suposiciones o postulados sobre la experiencia o la realidad física, debe ser formulada de manera precisa mediante variables o enunciados claros. Así, se debe establecer una relación entre las variables observadas de forma que podamos verificarlas, o bien, a partir de ellas, hacer otras que puedan ser sometidas a juicio experimental. Una variable, en general, es un elemento o factor de realidad que influye en los resultados de un experimento. Los experimentos, por tanto, deben relacionar dichas variables. Desde el punto de vista de la física, estas variables son “magnitudes”.
3. Aparte de la reproducibilidad de un experimento, es importante su comunicación. Es decir, es importante poner en conocimiento de otros científicos los resultados y conclusiones de nuestros experimentos, y

las condiciones en la que tuvieron lugar, para poder ser estudiados en todas sus etapas.

4. Un experimento consta generalmente de un diseño experimental e instrumentos de medida. La calibración de los mismos es parte importante del mismo puesto que en todo experimento hay una precisión y una exactitud respecto a la variable o variables que medimos. También es importante en dicho experimento la forma de recogida de datos y la forma o proceso de medida.
5. Un experimento puede contrastar sus datos con otros experimentos idénticos, y poner a prueba las hipótesis con sus datos.
6. Un experimento puede, generalmente, contener además de los datos, una serie de conclusiones.
7. Hay experimentos cualitativos y cuantitativos.
8. Una teoría o modelo debe tener puede simplemente acomodar los datos o bien predecir, en ocasiones, nuevos fenómenos susceptibles de comprobación experimental.
9. Durante el análisis de cualquier experimento, se relacionan magnitudes mediante gráficas y tablas de datos. En las gráficas, generalmente se distinguen variables independientes y dependientes. En las tablas, se suelen representar los datos de las medidas de diferentes magnitudes o variables.
10. En Ciencias como la Física, se usan una serie de unidades especiales. Actualmente, el más usado y estandarizado para todo científico en el mundo es el sistema de unidades llamado Sistema Internacional de Unidades (SI). En dicho sistema hay 7 unidades patrón, y un número grande de unidades múltiplos y submúltiplos. Dichas unidades están asociadas a 7 magnitudes fundamentales: longitud (L), masa (M), tiempo (T), temperatura absoluta (t), intensidad de corriente eléctrica (I), intensidad luminosa (I_L), y cantidad de sustancia (n). Sus unidades respectivas son el metro (m), el kilogramo (kg), el segundo (s), el grado kelvin (K), el amperio (A), la candela (cd) y el mol (mol). Cualquier otra magnitud en el SI de unidades es una magnitud derivada. Por ejemplo: velocidad (m/s), volumen (m^3), carga eléctrica ($A \cdot s$), etc.
11. Para evitar expresiones matemáticas enormes, con muchas cifras, se usa la notación científica. Consiste en un número con una parte entera

y otra decimal, junto a una potencia de base 10 (decimal) con exponente positivo. Ejemplo: la velocidad de la luz puede escribirse como $c = 3 \cdot 10^8 m/s$, un mol se escribe como la cantidad correspondiente a $6,022 \cdot 10^{23}$ entidades fundamentales, la distancia entre un átomo de hidrógeno y de oxígeno en la molécula de agua es aproximadamente de $9.7 \cdot 10^{-11} m$.

12. Los prefijos científicos y símbolos usados para los mismos son los siguientes:
- Múltiplos. Tenemos deca (da) 10^1 , hecto (h) 10^2 , kilo (k) 10^3 , mega (M) 10^6 , giga (G) 10^9 , tera (T) 10^{12} , peta (P) 10^{15} , exa (E) 10^{18} , zetta (Z) 10^{21} , yotta (Y) 10^{24} .
 - Submúltiplos. Tenemos deci (d) 10^{-1} , centi (c) 10^{-2} , mili 10^{-3} , micro (μ) 10^{-6} , nano (n) 10^{-9} , pico (p) 10^{-12} , femto 10^{-15} , atto 10^{-18} , zepto (z) 10^{-21} , yocto (y) 10^{-24} . Hay otros prefijos y sufijos, pero no están universalmente reconocidos por el sistema internacional (SI).

Otra idea fundamental para el análisis de datos es el concepto de cifra significativa, así como la distinción entre precisión y exactitud. Una **cifra significativa** (CS) es un dígito que se conoce con seguridad en una medida. Hay una serie de normas para tratar operaciones con cifras que contienen diferentes números de cifras significativas:

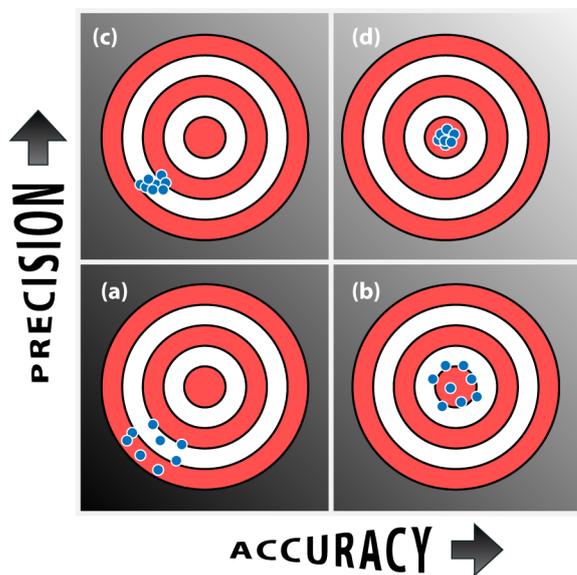
- Toda cifra significativa distinta de cero es significativa. Ej.: 321 cm (3 CS), 3.345 cm (4 CS).
- Ceros al final de cifra entera o decimal en número mayor que uno es significativa. Ej.: 6.020m (4 CS), 24.0 (3 CS).
- Ceros entre dos cifras no nulas son significativos. 106.407 s (6 CS).
- Ceros a la izquierda de la coma o ceros antes de la primera cifra no nula no son CS. Ej.: 0.405kg (3 CS), 0.0005090 m (4 CS).

La precisión de una medida depende de nuestro instrumental y del proceso de medida. La precisión de un instrumento de medida es la variación de medida más pequeña que podemos apreciar con dicho aparato y también se llama en ocasiones resolución del instrumento de medida.

Por contra, la exactitud de una medida es la diferencia entre el valor de dicha medida y el valor real (entendido como teórico o bien con el valor

medio de nuestra serie de medidas como aproximación a dicho valor real) de la variable medida.

Una medida puede ser precisa pero inexacta, exacta e imprecisa, tanto precisa como exacta o bien ni precisa ni exacta. La precisión (en inglés "precision") es el grado de "exactitud" o "acercamiento" con el que un objeto es medido, mientras que la exactitud (en inglés "accuracy") es lo cerca que estamos del valor aceptado o real de una medida. Las siguientes imágenes lo aclaran gráficamente con unas dianas:



	Accurate	Inaccurate (systematic error)
Precise		
Imprecise (reproducibility error)		

1.2. La Física como Ciencia

Ahora explicaremos por qué la Física es la más básica y fundamental de todas las ciencias experimentales, a pesar de no ser una ciencia “terminada” o “completada”. También vamos a resalta su interacción con otras ciencias en el terreno teórico y experimental.

La Ciencia intenta dar una respuesta a los sucesos que se producen en el Universo. De todas las ramas, podemos decir que la Física es la más básica. A diferencia de otras que intentan estudiar aspectos más concretos, como la Biología o la Química (actualmente restringida a los átomos y moléculas), el ámbito de estudio de la Física es todo el Universo (Poliverso). Esto realmente abarca mucho campo, y entonces la Física se divide en algunas “subespecies” o disciplinas:

- Física del Cosmos o Astrofísica.
- Física del Universo como un todo o Cosmología.
- Física de la atmósfera o Metereología.
- Física de los seres vivos o Biofísica.
- Física del Estado Sólido y la materia condensada, que estudia diferentes fases de la materia en condiciones extremas.
- Física atómica.
- Física nuclear.
- Física de partículas o de Altas Energías.
- ...

Las leyes de la Física constituyen los ingredientes elementales en los que se basan a su vez la Ingeniería o la Tecnología. La Física es importante porque trata cuestiones tan generales como el tiempo, el espacio, el movimiento, la materia, las radiaciones, la energía, la información o hasta las interacciones fundamentales que rigen el Universo a escalas de distancia enormes o muy cortas. Es un edificio en construcción. Y todos podemos ser partícipes del proceso científico hoy día gracias a las tecnologías de la información o internet. Además, la potencia de los ordenadores y computadores modernos, así como software específico disponible para todo el

mundo (libre o de pago) contribuye a incrementar el uso de las simulaciones y otros recursos computacionales para el estudio de la Física y las propias investigaciones. También son muy usados hoy día aún los llamados experimentos mentales (*gedanken experiment*), sin duda, un ejemplo claro de simulación puramente humana para probar las ideas de cualquier idea científica.

1.3. Teorías efectivas

En cualquier teoría física conocida hay generalmente dos descripciones posibles: una descripción macroscópica y una descripción microscópica. ¿Por qué? Es sencillo. Aunque la materia es discontinua (esta compuesta por “partículas”, en forma de átomos, moléculas, iones, . . .) la materia se describe generalmente por descripciones macroscópicas o continuas. Esta aproximación es convencional y útil cuando se desconocen los detalles de las propiedades de los grados de libertad internos microscópicos. Por ejemplo, la Termodinámica es una teoría efectiva o aproximación al continuo de la dinámica de un conjunto muy grandes de partículas. En ocasiones, la Termodinámica puede estudiarse a nivel estadístico, usando en mayor o menor medida la Física Cuántica o Clásica sin la aproximación del continuo, y es lo que se conoce como Mecánica Estadística. En síntesis, una teoría que aproximada a la teoría microscópica es generalmente llamada teoría efectiva, y este tipo de aproximaciones son útiles porque no suelen depender de los detalles de las teorías microscópicas sino sólo de ciertos parámetros de control o variables de estado que son medibles macroscópicamente.

Sin embargo, en muchos casos, el conocimiento de la teoría a nivel microscópico nos lleva a intentar comprender las estructuras a más pequeña escala de la Naturaleza. Así, desde la noción de átomo, núcleo o partícula subatómica, donde actualmente está confinado el último nivel hallado de estructura de la materia, es posible llegar, al menos en principio, deducir una teoría efectiva (menos fundamental).

El estudio de un fenómeno físico comienza con el aislamiento de una región del espacio o de una parte de materia de su entorno. La parte aislada (al menos de forma imaginaria o virtual) y sobre la que fijamos nuestro estudio recibe el nombre de **sistema** y todo aquello exterior al sistema se designa habitualmente como **entorno**. Una vez distinguidos sistema y

entorno, se procede a la descripción del sistema mediante magnitudes relacionadas con el comportamiento del sistema.

De acuerdo al criterio macroscópico, la materia se considera continua y distribuida uniformemente (en general) a través del espacio. Así es como la percibimos con los sentidos y experimentos básicos (hasta el advenimiento de los espectros atómicos, la hipótesis del continuo no se cuestionaba). Se supone, además, que el espacio ocupado por el sistema está lleno de materia continuamente y que las magnitudes del sistema son funciones continuas (y habitualmente diferenciables) que no varían drásticamente en procesos normales. Este tipo de magnitudes posee una serie de propiedades adicionales:

- No implican hipótesis especiales acerca de la estructura de la materia.
- Su número es pequeño.
- Nos las sugieren directamente nuestros sentidos o los aparatos capaces de medirlas.
- Habitualmente, se miden directamente. Esto es, no se deducen habitualmente de la medida combinada de diferentes magnitudes.
- Se pueden expresar usualmente mediante ecuaciones lineales. Hoy día, también es posible expresar magnitudes no lineales y medirlas. La exigencia de la linealidad es simplemente otra aproximación para la descripción de la realidad y el proceso de medida de magnitudes ligadas a teorías efectivas o fundamentales.

Por el contrario, según la descripción microscópica, la materia es discontinua y está formada por elementos discretos de realidad que podemos llamar “partículas” o “corpúsculos”. También, desde 1900, se les puede llamar “cuantos” (en inglés un “cuanto” se escribe como quantum, y en plural, se les llama “quanta”). Estas entidades elementales de materia pueden adoptar diferentes formas: moléculas (la unidad elemental más pequeña con ciertas propiedades físicas y químicas diferenciadas), átomos (la unidad más pequeña que forma parte de una reacción química) y partículas subatómicas (como protones, neutrones, neutrinos, quarks, mesones, bariones, bosones, fotones, gluones, o leptones) de dimensiones microscópicas. Los detalles que ofrece una descripción microscópica son los siguientes:

- Se hace la hipótesis corpuscular, o de discontinuidad de la materia, en la que se supone la existencia de “paquetes” mínimos de materia y de energía. Es decir, se asume que hay una última división posible por debajo de la cual no se puede “bajar”. Por supuesto, eso no significa que no podamos encontrar que las propias partículas puedan tener grados de libertad internos o composición interna (esto sucedió con lo que hoy llamamos átomos, que probaron ser divisibles). En principio, el principio corpuscular asume que hay un límite último a la divisibilidad de la materia como la energía.
- Deben especificarse muchas magnitudes, asociadas a la posición, velocidad, y resto de variables cinemáticas y dinámicas de las partículas individuales.
- El sentido común, a priori, no nos dice de forma “natural” las magnitudes a usar para la descripción microscópica. Generalmente, se hace abstracción de la realidad e intentamos identificar las variables correctas.
- Las magnitudes especificadas, generalmente, o bien no pueden medirse directamente o bien presentan limitaciones entre ellas para medirse simultáneamente y con precisión.
- Es necesario estudiar cada tipo de partícula del sistema por separado si hay varios tipos de partículas. En ocasiones, incluso cuando todas las partículas son idénticas, hay detalles de la descripción que hacen necesario un tratamiento colectivo microscópico, pero no macroscópico (como ocurre por ejemplo con los denominados condensados de Bose-Einstein).

Aunque puede parecer que las descripciones microscópicas y macroscópicas son completamente diferentes e incompatibles, están profundamente relacionadas. En cierto sentido, la descripción macroscópica es lo que hoy día se llama “teoría emergente”. Por ejemplo, otro conocido ejemplo de “emergencia” es en la Física de Fluidos. El régimen laminar o turbulento puede estudiarse macroscópicamente incluso cuando no tenemos aún pistas sólidas de la teoría microscópica de la que “emerge” el fenómeno de la turbulencia. Esto es debido al hecho de que las pocas propiedades medibles de una descripción macroscópica (efectiva o emergente) son en realidad valores medios, durante cierto intervalo de tiempo, de un número enorme de características microscópicas.

De todas las características microscópicas, sólo unas pocas sobreviven al realizar un “promedio” o “media” al pasar a una descripción macroscópica. Otro ejemplo usual es la magnitud que llamamos presión, que según la Teoría Cinética se corresponde con el promedio de la derivada de la cantidad de movimiento debida a los choques moleculares realizados sobre una determinada superficie. La presión, sin embargo, es una propiedad que puede medirse con instrumentos y con nuestros propios sentidos. De hecho, la presión es una magnitud que fue inventada mucho antes de que los físicos modernos retomaran las ideas atómicas y moleculares en el siglo XIX. Sin embargo, el concepto o idea intuitiva de presión permanece y tiene el mismo sentido macroscópico pese a que le demos una nueva interpretación microscópica, incluso si modificamos la propia teoría cinético-molecular para que abarque más subestructuras (desde los átomos a las estructuras subatómicas). Y es este hecho de universalidad de la descripción macroscópica una diferencia importante de ésta con la descripción fundamental microscópica.

En síntesis, las pocas propiedades macroscópicas medibles son tan seguras como puedan serlo nuestros sentidos y tan precisas como lo sean nuestros aparatos de medida, y tienen cierto carácter de invariabilidad o universalidad. Por contra, la descripción microscópica va más allá de nuestros sentidos y la experiencia común. Rivaliza con nuestras suposiciones más intuitivas ya que postula la existencia de partículas, su movimiento, sus interacciones (generalmente ocultas) y otras varias complicaciones. Es importante, en la elaboración de teorías y modelos, comparar dichas descripciones a nivel de fenomenología y de hipótesis o predicciones.

Hay diferentes campos de la Física que se centran en descripciones macroscópicas por su importancia. En especial, en los sistemas formados por fluidos (gases o líquidos) y materia condensada. El estudio de un gas se puede abordar usando el enfoque microscópico con la teoría cinético-molecular, pero es más fácil usar incluso la teoría macroscópica, que llamamos Termodinámica (aunque sería mejor nombrarla como Termoestática al no contener explícitamente en general la dependencia temporal de las variables). La Termodinámica estudia los sistemas de gases o fluidos atendiendo sólo a las variables macroscópicas internas de los mismos, prescindiendo de las variables microscópicas. Las **variables de estado** o **coordenadas termodinámicas** son el volumen, la temperatura y la presión habitualmente, aunque hay otras más sofisticadas.

La Dinámica del llamado Sólido Rígido es otro ejemplo habitual de

descripción macroscópica o teoría efectiva. Sin embargo, en otros campos, como la Física de Altas Energías, es esencial una descripción abstracta en sentido microscópico. Todo corpúsculo que no sea un átomo o un compuesto de átomos se considera generalmente hoy día “partícula elemental” o para ser más precisos, “partícula subatómica” (dado que sabemos que hay partículas como los protones, neutrones y, también, todo hadrón -mesón o barión- está formado por una combinación de 2 ó 3 quarks, mientras que igualmente se especula con la existencia de estados multiquark -tetraquarks, pentaquarks,... desde la Cromodinámica Cuántica, QCD -Quantum ChromoDynamics- o las “glueball” o “bolas de gluones”, sin quarks, como estados microscópicos que predicen las denominadas Teorías Cuánticas en el Retículo -Lattice Field Theory- aplicadas a QCD).

El descubrimiento de las partículas subatómicas comenzó a ser serio y científico a partir del s.XIX con el hallazgo del electrón, y el desarrollo y descubrimiento de nuevas partículas siguió en todo en el siglo XX. Continuará posiblemente en este siglo, siglo XXI, y los venideros. En particular, el año 2012 fue especial porque se hallaron pruebas consistentes de la existencia del denominado “bosón de Higgs” en el Large Hadron Collider (Gran Colisionador de Hadrones), o LHC para abreviar. El estudio de las partículas a muy alta energía es el objeto de estudio de la Física de Altas Energías, y es una rama de la Física conectada a muchos otros campos (como la Astrofísica, la Cosmología o la Física Médica).

Una clasificación convencional de las partículas subatómicas se hace según alguna de sus características microscópicas fundamentales. Según la masa, podemos distinguir partículas sin masa (como los fotones, gluones o los hipotéticos gravitones), los leptones (partículas que interactúan débilmente: electrones, muones, tauones, neutrinos y sus antipartículas), los hadrones (partículas que interactúan fuertemente, y que se subdividen en mesones y bariones; un ejemplo es el pión o mesón π , o el protón, el neutrón, y otras varias partículas exóticas). Según el tipo de interacción que se establece, a nivel fundamental, hoy sabemos que las partículas subatómicas elementales se dividen en leptones y quarks. Los leptones son 3 y cada uno tiene un neutrino asociado. Los quarks también vienen en tipos, en total son 6. Cada uno de estos tipos se clasifica en 3 generaciones, siendo la única diferencia la masa, la estabilidad y ciertos números llamados números cuánticos.

Según la carga eléctrica, las partículas pueden ser positivas, negativas o neutras. Luego hay otro tipo de cargas o números cuánticos, como el sabor

(flavor) que etiqueta los tipos de leptones y quarks o el ciertas propiedades de cada sabor. También tenemos el llamado “color” en los hadrones (nada que ver con el color de los sentidos, es una simple etiqueta para distinguir la interacción que se establece entre unidades hechas de quarks). Finalmente, tenemos el espín o momento angular “interno” de las partículas. Para las que tienen espín entero, se las llama bosones. A las que tiene espín semientero, fermiones. Todos los fermiones del denominado Modelo Estándar poseen espín $1/2$. Los bosones conocidos tienen espín 1, excepción hecha del reciente bosón de Higgs, que al ser una partícula “escalar” debe tener espín 0. El gravitón, si existe, debe tener espín 2. No existen teorías de campo interactuantes “normales” que contengan partículas de espín mayor que 2 (aunque ciertamente pueden construirse teorías exóticas y sofisticadas que tienen tales excitaciones, aunque hay discusión sobre su consistencia matemática y física).

Finalmente, otra variable esencial de una partícula subatómica es su tiempo de vida media. Las partículas estables (como el fotón, el electrón, el gluón, el gravitón, . . .) tienen una vida media infinita ($\tau = \infty$). Sin embargo, las partículas con masa son, en general, inestables. Se cree que son estables el electrón, el neutrino, el fotón y el protón (aunque se duda de este último en el contexto de las teorías de unificación o GUT-Grand Unified Theories- y la TOE, o teoría del todo-Theory Of Everything).

1.4. Fuerzas de la Naturaleza

En la actualidad, a principios del siglo XXI han quedado establecidos el denominado Modelo Estándar de las Fuerzas (o interacciones) fundamentales de la Naturaleza y la Teoría de la Relatividad General. Todas las fuerzas de la Naturaleza se reducen a 5 tipos de interacciones elementales a energías del orden de 100 GeV (aunque posiblemente sea un Modelo válido hasta cierta energía X mayor que esos 100 GeV). Estas fuerzas son:

- **La fuerza gravitatoria.** Descrita a nivel efectivo por la Relatividad General de Albert Einstein, es una teoría clásica de campos relativista para el denominado tensor métrico y la materia. No dispone de una descripción microscópica cuántica consistente todavía, que es el reto teórico de descubrir y elaborar la Teoría Cuántica de la Gravedad, algo que aún no se ha resuelto. La interacción gravitatoria es la más débil de todas las fuerzas en intensidad pero la más importante a nivel

macroscópico, pues gobierna el movimiento de planetas y galaxias (a priori, también de cúmulos y estructura a gran escala, pero ahí nos topamos con el misterio de la Materia Oscura y la Energía Oscura). La fuerza gravitatoria aplica a cualquier objeto con masa o energía y es unos 10^{-39} menos intensa que la fuerza nuclear fuerte, de color, mediada por los gluones o a nivel efectivo por piones en el núcleo. Su alcance o rango es infinito e ilimitado, ya que se piensa que el gravitón, la partícula cuántica asociada a las ondas gravitacionales, no posee masa. Esta fuerza es siempre atractiva. La relatividad general contiene a la gravitación newtoniana y predice nuevos efectos que han sido comprobados. Hasta la fecha, no hay evidencias en contra de esta teoría salvo las anomalías generadas por la existencia de la materia oscura o la energía oscura (que ha quedado establecida con los experimentos WMAP y PLANCK).

- **La interacción nuclear fuerte.** Es la más intensa pero de muy corto alcance, ya que sólo la sienten los quarks y los hadrones. El alcance es del orden de $10^{-15}m$, el diámetro aproximado de un núcleo atómico. Son las fuerzas de ligadura las que mantienen unidos a los diferentes componentes del núcleo (de carga positiva). Los protones se repelerían si no existiera la fuerza nuclear fuerte. Esta fuerza es sólo atractiva, y decae tan rápido que fuera del núcleo no se aprecia más que el hecho de que los protones se mantienen estables y juntos en los mismos.
- **La fuerza electromagnética.** Unas 100 veces menor que la fuerza fuerte, actúa sobre partículas cargadas. Puede ser atractiva o repulsiva dependiendo de si las cargas son de diferente tipo o del mismo tipo. También tiene un alcance ilimitado o infinito como la gravitación clásica. Está mediada por el fotón, partícula sin masa, y decae con el inverso del cuadrado de la distancia en la descripción coulombiana no relativista. En una descripción relativista especial y cuántica, este comportamiento se ve alterado, y se usa la Electrodinámica Cuántica, QED, para describirla. Además, el electromagnetismo es la fuerza que cohesiona átomos, moléculas y materia macroscópica en general.
- **La fuerza nuclear débil.** Con un radio de acción muy corto, pero del orden de unos $10^{-17}m$, son las interacciones más extrañas de todas. Hoy día esta interacción está unificada con la interacción electromagnética a energías del orden 100 GeV o superior, y explicada por el intercambio de fotones masivos denominados W^+ , W^- , Z^0 mediante la llamada teoría electrodébil. La interacción débil en sí misma es la

responsable de la desintegración beta de los núcleos radioactivos, por ejemplo, la de un simple neutrón en protón, electrón y antineutrino.

- **La fuerza o interacción de Higgs.** El Modelo Estándar no explica la existencia de masa por sí mismo. Sólo el añadir un nuevo campo, escalar, denominado campo de Higgs (y sus partículas asociadas), permite establecer la consistencia interna del Modelo Estándar y describir los bosones vectoriales W , Z como partículas con masa. Además, esta fuerza de Higgs es imprescindible para entender la masa de los leptones fundamentales y en menor medida de los quarks (los quarks adquieren masa dinámicamente por un proceso no perturbativo asociado a la ruptura de la llamada simetría quiral en QCD, por lo que la masa de los quarks es principalmente debida a QCD y no al campo de Higgs, que contribuye menos de un 10% a las masas de los propios quarks). El bosón de Higgs se descubrió en el LHC en 2012 y falta aún mucho por comprender de él y sus propiedades. Incluso podría todavía ser algo similar a un Higgs pero diferente (desde una partícula compuesta, a una fundamental y la menor de otras partículas escalares que podrían encontrarse en este siglo XXI o más adelante). El bosón descubierto se parece mucho al predicho por la consistencia interna del Modelo Estándar mínimo. El cuanto de Higgs es el que explica el origen de la masa de los bosones intermedios y el que el fotón o el gravitón y el gluón no la posean. Todas las partículas que poseen masa en el Modelo Estándar, se la deben totalmente (en el caso de leptones y bosones vectoriales W, Z) o parcialmente (quarks) a su interacción con el campo de Higgs. Desconocemos aún sus propiedades, aunque el Modelo Estándar predice algunas de ellas, para ir más allá de la teoría microscópica establecida de la interacción fuerte y electrodébil, es fundamental el estudio del campo de Higgs que se hace y hará en el LHC, el Colisionador Linear Internacional (ILC, International Linear Collider) y otros experimentos (posiblemente un colisionador de muones, o proyectos como el VLHC o el LEP3, ahora en estudio).

En síntesis, la fuerza fuerte actúa con intensidad 1 a corto alcance, actúa sobre hadrones, es atractiva y explica la estructura de los núcleos atómicos. La fuerza electro magnética es 100 veces más débil que la anterior, alcance ilimitado, actúa sobre cualquier carga eléctrica y es atractiva o repulsiva, explicando la cohesión de átomos y moléculas. La fuerza débil es 12 órdenes de magnitud más débil que la fuerte y es de corto alcance, pues actúa a menos de $10^{-17}m$ sobre leptones y quarks, siendo una fuerza esencialmente repulsiva y explicando los fenómenos de desintegración radioactiva y en

general el cambio de “sabor” o “flavor” de las partículas por intercambio de bosones Z y W. La interacción de Higgs también tiene un rango corto similar al de la fuerza débil, corto alcance, y actúa sobre cualquier partícula que adquiera masa, mientras que es inerte a partículas sin masa como el fotón, el gluón o los hipotéticos gravitones, en principio. La fuerza del campo de Higgs es esencial para entender el origen de la masa a nivel cuántico. Finalmente, la gravedad, de la que no disponemos una descripción microscópica consistente (la mítica Gravedad Cuántica), es la más débil de todas las interacciones, 39 ó 40 órdenes de magnitud más débil que la interacción fuerte, es de largo alcance, sólo atractiva y explica la estructura general a gran escala del Universo (con excepción de las observaciones que apoyan la existencia de la materia oscura y la energía oscura).

En general, a nivel microscópico se desprecia la gravedad, al ser muy débil, y despreciamos la interacción electrodébil cuando consideramos distancias inferiores al fermi ($1\text{fm}=10^{-15}\text{m}$) mientras no haya intercambios de bosones W y Z, lo que puede ocurrir dos órdenes de magnitud más abajo de esa escala. El LHC explorará aún distancias más pequeñas. Si nos salimos del núcleo, a distancias superiores se manifiestan las interacciones débiles y electromagnéticas. Aunque la interacción débil va progresivamente disminuyendo su influencia. Al llegar a los átomos, o escalas de distancia superiores, como las moléculas e iones, la interacción principal es la electromagnética y sólo en el fenómeno de la desintegración radioactiva se manifiesta la existencia de la fuerza débil nuclear. A mayores escalas, de los cuerpos celestes o mayores, la fuerza dominante es la gravedad. Sólo la rotación de las galaxias (que es indicio de existencia o bien de materia oscura de naturaleza desconocida o de una dinámica newtoniana o gravitacional modificada, MOND/MOG-MODified Newtonian Dynamics/MODified Gravity), y de la aparente -según WMAP y PLANCK- aceleración positiva de la expansión del Universo a nivel global (¡la gravedad no es capaz de frenar la expansión cósmica actual!) son observaciones que nos hacen sospechar que habrá que sustituir la teoría gravitacional actual por una versión mejorada y que, posiblemente, esté asociada a la Gravitación Cuántica.

1.5. Cálculo vectorial

El estudio de las magnitudes en Física es muy importante. En particular, hay diferentes tipos de magnitudes según su “direccionalidad” y propiedades de invariancia. En particular, podemos distinguir magnitudes que

están completamente especificadas por su valor numérico exclusivamente, en cualquier sistema de referencia (veremos lo que es este concepto en el tema siguiente), como la temperatura, la presión o el volumen, el tiempo o la carga eléctrica. Por contra, hay otras magnitudes que necesitan especificar algo más además de su valor: su dirección y sentido. Estas magnitudes se llaman vectores. Por ejemplo, la fuerza, el desplazamiento o la velocidad son ejemplos tradicionales de estas magnitudes, así como el campo gravitatorio o el campo eléctrico. También debemos mencionar que existen otras magnitudes que tienen una “múltiple direccionalidad”. Son los llamados tensores y generalizan por así decirlo la noción de magnitud escalar y vectorial¹.

El estudio del cálculo vectorial y de magnitudes escalares es el único que necesitaremos en este curso, además del cálculo diferencial e integral asociado a estas magnitudes². El cálculo vectorial proporciona, por un lado, una notación precisa y compacta para los cálculos físicos al nivel de este curso, y sirve para representar las ecuaciones matemáticas que modelizan las diferentes leyes o situaciones físicas. También sirven para simplificar la escritura de otrora largos conceptos, precisando una imagen mental que captura la esencia de las principales ideas de la Física.

Un vector en Física es un *segmento orientado en el espacio*³. En especial, un vector está caracterizado por 4 propiedades físicas: **el punto de aplicación u origen** (puede ser un punto llamado O, así como cualquier otro punto P) sobre el que se coloca el vector; una **dirección** o línea de acción, que es la recta que contiene al vector, o cualquier otra paralela al mismo; **el sentido** del vector es la orientación del mismo, que generalmente se simboliza con

¹Incluso hoy día se especula con la existencia de magnitudes “tipo polivector”, un agregado de diferentes tipos de tensores de tipo antisimétrico llamados multivectores, en el contexto del análisis en álgebras de Clifford. También existe el concepto de espinor y multiespinor o el de “twistor”, el de números de Grassmann y aún hay otras clases más exóticas de variables y operaciones cuyo uso en Física avanzada -no aquí- no pueden ser excluidas en el futuro. Es el poder de las Matemáticas en acción cuando logramos usar una elegante estructura para simplificar o hacer posibles los cálculos en las teorías que elaboramos

²Históricamente, el cálculo diferencial e integral fue desarrollado por Leibniz y Newton independientemente, y nos llegó hasta hoy. No estudiaremos en principio magnitudes de tipo tensorial en este curso, ni espinores, ni twistores o polivectores en álgebras de Clifford. Por tanto, ¡no tengáis miedo! Los vectores y los escalares “molan”.

³En Matemáticas, además, un vector es un elemento de cierta estructura algebraica denominada espacio vectorial. Sus operaciones son conocidas en cualquier curso de Matemáticas al nivel de Bachillerato y Educación Universitaria.

una flecha en el extremo final del mismo (aunque puede indicarse sobre el segmento adicionalmente); y, finalmente, un **módulo** o valor numérico del vector, su “magnitud o longitud”, y que se define como la longitud del vector entre su origen y extremo en cierta escala de unidades predeterminadas.

Es habitual simbolizar el origen y el extremo del vector con puntos, llamados O y P, en letras mayúsculas, aunque veremos que esto se cambia un poco en una notación que explicaremos más adelante. También es normal escribir

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \mathbf{r}$$

para representar al vector de forma abstracta. El módulo se pone entre barras verticales o eliminando la flecha superior de las anteriores notaciones o el color negrita (indicando vectorialidad de la magnitud).

Otra diferenciación entre tipos de vectores es la siguiente. Hay que distinguir 4 clases especiales de vectores:

- Vectores libres.** Vienen dados por las 3 componentes en un sistema cartesiano o rectangular de coordenadas, y, entonces, por las 3 proyecciones sobre los ejes de dicho sistema de referencia ortonormal que escogemos generalmente para simplificar los cálculos. Un sistema de referencia ortonormal está dado por un punto de origen O y una base canónica (vectores unitarios y ortogonales entre sí uno a uno) denotada por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Algunos autores prefieren escribir e_1, e_2, e_3 o bien u_1, u_2, u_3 en vez de la anterior tríada. Nosotros usaremos, salvo que haya riesgo de confusión, la notación $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. En esta base y sistema de coordenadas, un vector se escribe como

$$\vec{V} = \mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (1.1)$$

y donde $V_x = OA$, $V_y = OB$, $V_z = OC$. Estas tres componentes determinan el módulo del vector y su línea de acción o dirección de la forma siguiente:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (1.2)$$

y

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{|\mathbf{V}|} \quad (1.3)$$

$$\cos \beta = \frac{V_y}{|\mathbf{V}|} \quad (1.4)$$

$$\cos \gamma = \frac{V_z}{|\mathbf{V}|} \quad (1.5)$$

Estos cosenos, funciones trigonométricas, son los denominados cosenos directores de la recta que define el vector. Si el vector es unitario (de longitud unidad o uno) se verifica trivialmente que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.6)$$

pero la ecuación es igualmente válida para un vector general arbitrario (entendida con cuidado). Un vector **libre** pueden trasladar su origen a cualquier punto del espacio manteniendo su longitud o módulo y el sentido constante, siempre y cuando la dirección sea paralela a la que contiene el vector. Ejemplos de vectores libres las fuerzas ejercidas sobre una superficie.

- **Vectores deslizantes.** Son vectores que pueden trasladar su origen a lo largo de la línea de acción o recta que los contiene, determinados también por sus componentes cartesianas, pero también pueden desplazarse libre y exclusivamente por esta recta (y no por direcciones paralelas). Un ejemplo de vector deslizante es la fuerza ejercida sobre un sólido rígido (que conserva las distancias entre partículas constituyentes).
- **Vectores fijos.** Para determinar estos vectores, es necesario conocer las 4 características: origen, dirección, sentido y módulo. En los vectores fijos, las 4 propiedades físicas del vector se hayan completamente determinadas. Ejemplo de vector fijo es la velocidad de un móvil o la fuerza que aplicamos en un cierto punto.
- **Vectores axiales.** También se les llama **pseudovectores**. A diferencia de los vectores estudiados hasta el momento, que no están ligados a giros o rotaciones, y que podemos llamar vectores **polares**, existen estos objetos llamados vectores axiales o pseudovectores que se comportan de forma peculiar ante rotaciones. El módulo del vector se sigue indicando con un valor numérico, la dirección del vector es

la del eje de rotación, y el sentido de esta especial clase de vectores se señala con la **regla de Maxwell** (también llamada del sacacorchos o de la mano derecha). Esta regla indica que el sentido de un vector axial viene dado por el del giro de un sacacorchos cuando éste avanza en el sentido que indica el vector, o el de ese mismo sacacorchos imaginario si colocamos el dedo corazón e índice como un triedro a derechas, de forma que el pulgar marca el sentido si el corazón se desplaza hacia el índice o en sentido opuesto al pulgar si el dedo índice se desplaza sobre el corazón.

Otras dos clases de vectores que alguna vez se mencionan en Física y Matemáticas son las siguientes:

- **Vectores equipolentes:** vectores libre que tiene le mismo módulo, dirección y sentido, pero diferente origen. Sus rectas soportes son paralelas o coincidentes. No se precisa el punto de aplicación. Todos los vectores equipolentes entre sí tiene las mismas componentes cartesianas en la base canónica. Estos números dan carácter vectorial a la magnitud, a diferencia de las magnitudes escalares que, como hemos visto, vienen determinadas por un solo número. Es una definición análoga a la de vector libre.
- **Vectores opuestos:** son vectores de cualquier clase que tienen mismo módulo, misma dirección pero sentidos contrarios.

¿Qué operaciones podemos hacer con los vectores? Las habituales a las que estamos acostumbrados. Podemos hallar **la suma o resultante** de dos vectores: la suma o resultante de dos vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 es el vector obtenido al unir el origen de \mathbf{v}_1 con el extremo de \mathbf{v}_2 , cuando éste se aplica en el extremo del primero, o también, equivalentemente, la resultante o suma es la diagonal del paralelogramo construido sobre los dos vectores, siendo éstos los lados que parten del mismo vértice. Matemáticamente:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Esta regla puede aplicarse de forma reiterada para sumar cualquier número arbitrario de vectores:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$$

En componentes, la suma o resultante de un vector tiene por componentes la suma de las respectivas componentes de los vectores que sumamos. Es decir:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \leftrightarrow (V_x, V_y, V_z) = (V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y}, V_{1z} + V_{2z}) = (V_{x1}, V_{y1}, V_{z1}) + (V_{x2}, V_{y2}, V_{z2})$$

La diferencia de vectores se define como la suma de un vector con su opuesto y no ofrece dificultad ninguna. Es decir:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \leftrightarrow (V_x, V_y, V_z) = (V_{1x} - V_{2x}, V_{1y} - V_{2y}, V_{1z} - V_{2z}) = (V_{x1}, V_{y1}, V_{z1}) - (V_{x2}, V_{y2}, V_{z2})$$

Otra operación interesante es el producto de números o más generalmente funciones escalares arbitrarias por un vector. Un número real K por un vector \mathbf{v} es otro vector $\mathbf{V} = K\mathbf{v}$ que tiene la misma dirección que \mathbf{v} y el mismo sentido o el contrario, dependiendo del signo de K , y un módulo igual al resultado de multiplicar K por la longitud del vector. Si K es nulo, el vector es el propio vector nulo (que tiene todas las componentes iguales a cero).

Según esta definición, todo vector se puede expresar como el producto de su módulo o longitud por un vector unitario (de longitud unidad, i.e., igual a uno) que tenga la misma dirección y sentido que el mismo vector. Es decir:

$$\mathbf{V} = |\mathbf{v}|\mathbf{u}_V$$

en donde \mathbf{u}_V es el vector unitario tal que $|\mathbf{u}_V| = 1$. Combinando esta definición, con las propiedades de los números reales, se tiene que:

$$\mathbf{V} = K\mathbf{v} = K(v_x, v_y, v_z) = (Kv_x, Kv_y, Kv_z)$$

Esto es útil para el propio establecimiento de las bases canónicas orthonormales, pues, en ellas, se tiene que (imagina un sistema de referencia $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) que el vector de posición de un punto P arbitrario se puede escribir:

$$\mathbf{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

según hemos visto anteriormente. El desplazamiento entre dos puntos, A y B es la diferencia de los vectores de posición respectivos OA y OB . Esto lo veremos con atención en el tema siguiente:

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{AB} = OB - OA = (X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A) = (X_B - X_A)\vec{i} + (Y_B - Y_A)\vec{j} + (Z_B - Z_A)\vec{k}$$

▣ EJERCICIO. Hallar la suma o resultante total de los tres vectores siguientes: \vec{u} , 10 metros al Noroeste; \vec{v} , 20 metros Este y 30 grados hacia el Norte; \vec{w} , 35 metros hacia el Sur. **Solución:** $\vec{s} = (s_x, s_y) = (10\sqrt{3} - 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2} - 25)$, con $\tan \alpha = s_y/s_x = 1.749$ o bien $\alpha = 60^\circ 14' 41''$.

▣ EJERCICIO. Determinar los ángulos α, β, γ que forma el vector $\vec{u} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ con los ejes positivos de un sistema cartesiano de coordenadas, y probar que se cumple en general que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

▣ EJERCICIO. Sean los vectores $u_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $u_2 = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $u_3 = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ y $u_4 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, hallar los valores de los escalares a, b y c , de forma que $u_4 = au_1 + bu_2 + cu_3$. **Solución:** $a = -2, b = 1, c = -3$.

Otra operación posible entre 2 vectores es el denominado producto escalar, generalmente denotado por un punto (con lo que en ocasiones se le llama producto "punto" de dos vectores). Se define como sigue:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \quad (1.7)$$

Las propiedades de este producto son las siguientes:

1. Es un número, es decir, un escalar y no un vector.
2. Es "conmutativo" o simétrico, puesto que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
3. El producto escalar de dos vectores es igual que el producto de escalar de uno de ellos por el vector proyección ortogonal del otro sobre él. Así, matemáticamente, se tiene que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_n \cdot \vec{b} = |\vec{a}_n||\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}_n||\vec{b}| = |\vec{b}_n||\vec{a}|$$

en donde $\vec{a}_n = |\vec{a}_n| \cos \theta \vec{u}_n$ y $|\vec{a}_n| = |\vec{a}| \cos \theta$. Como consecuencia, el módulo de la proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b} es igual al producto escalar de los dos vectores, dividido por el módulo del vector sobre el que proyectamos, por ejemplo \vec{b} , de la forma sencilla siguiente:

$$a_n = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \text{Proy}(a \rightarrow b)$$

o bien

$$b_n = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \text{Proy}(b \rightarrow a)$$

4. El producto escalar de 2 vectores es cero sí y sólo si uno de ellos es el vector nulo, o bien si los dos vectores son ortogonales y forman 90° .
5. La expresión analítica del producto escalar en la base canónica viene dada por la expresión siguiente (fácil de recordar):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\text{si } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ y } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Entre las aplicaciones más importantes del producto escalar están las de determinar de forma invariante el módulo de un vector arbitrario como la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector consigo mismo:

$$|\mathbf{V}| = +\sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} = +\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (1.8)$$

y la expresión analítica para el ángulo formado por dos vectores:

$$\cos \theta = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (1.9)$$

▣ EJERCICIO. Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, calcular: a) Su producto escalar, b) El ángulo que forman, b) La proyección de u sobre v y la de v sobre u. **Solución:** a) 4. b) Aproximadamente 79° . c) $4/7$, y $4/3$.

Existe otra operación entre vectores que podemos definir en principio (atendiendo a sus propiedades matemáticas y algebraicas) sólo en el espacio euclídeo tridimensional. Es el llamado producto vectorial (o producto cruz):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (1.10)$$

en coordenadas cartesianas, y que en dichas componentes rectangulares se escribe como

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y \quad (1.11)$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z \quad (1.12)$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x \quad (1.13)$$

Estas componentes pueden recordarse fácilmente usando la palabra mágica *XYZZY* para la primera componente del producto vectorial c_x y luego permutando cíclicamente las letras X, Y, Z para obtener las dos siguientes componentes ($X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$).

En forma libre de coordenadas se define como el vector que cumple los axiomas siguientes:

1. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \leftrightarrow \times : V \times V \rightarrow V$. Es decir, es una operación binaria que toma dos vectores de un espacio vectorial y fabrica otro "vector" en dicho espacio vectorial. Realmente es un "pseudovector", pero la distinción no es evidente desde la definición como aplicación bilineal.
2. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(a, b)$ o bien, equivalentemente, la propiedad equivalente (identidad de Lagrange)

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

3. La dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$ es la de la recta perpendicular al plano generado por los dos vectores. Es decir, que tenemos que $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$.
4. El sentido de $(\vec{a} \times \vec{b})$ debe ser tal que si los vectores OA, OB y OC son representantes de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ (equipolentes a ellos), y se considera un tornillo o sacacorchos perpendicular al plano OAB en O , entonces al girar describe el menor ángulo OA, OB , entonces el avance del tornillo será en el sentido de OC . Esto es la regla de Maxwell.
5. $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}$ y además si los vectores \vec{a}, \vec{b} son paralelos o proporcionales, el producto vectorial también se anula.
6. El producto vectorial es anticonmutativo (antisimétrico o hemisimétrico) porque:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

El valor del momento de un vector no cambia si el vector se desplaza sobre su recta soporte, ni tampoco cambia si el punto O se desplaza a lo largo de una recta paralela a la recta soporte del vector.

El producto vectorial permite definir dos conceptos importantes: el momento de un vector respecto de un punto y el momento de un par de vectores respecto de un punto.

Se llama **momento** de un vector \mathbf{v} respecto de un punto O al producto vectorial del vector de posición del origen del vector respecto de O por el propio vector. Matemáticamente:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.15)$$

Si $OA = \vec{r} = (a_x, a_y, a_z)$ y $AB = B - A = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z) = \vec{v}$, entonces

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

Se llama **par de vectores** al conjunto formado por dos vectores que tienen mismo módulo, misma dirección y sentidos contrarios. Sus rectas soporte son paralelas y su suma o resultante es nula. Entonces aplicando la definición anterior de momento respecto de un punto, el momento de un par es igual a la siguiente expresión:

$$\vec{M}_{par} = (\vec{r}_1 \times v_1) + (\vec{r}_2 \times v_2) = (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + (\vec{r}_2 \times (-\vec{v}_1)) =$$

o bien

$$\vec{M}_{par} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v}_1 = \vec{r} \times \vec{v}_1$$

De esta forma, el módulo del par es igual a

$$|\vec{M}_{par}| = |\vec{r}||\vec{v}_1| \sin \alpha = |\vec{r}| \sin \alpha |\vec{v}_1| = d|\vec{v}_1|$$

en donde d es la distancia llamada "brazo del par", que, por definición, es independiente del punto O respecto del cual se toman los momentos.

El momento de un vector \vec{v} con respecto a un eje E se define como la proyección sobre dicho eje del momento de ese vector con respecto a un punto cualquiera del eje E. El momento respecto de un eje es, por tanto, independiente del punto elegido sobre el eje. Matemáticamente, si \mathbf{M}_E es

el momento del vector \vec{v} respecto del eje E, y O es un punto del eje E, entonces:

$$\mathbf{M}_E = \text{Proy}_E \mathbf{M}_0$$

con $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, definiendo además un vector unitario respecto del eje \mathbf{u}_E tal que

$$|\mathbf{M}_E| = \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{u}_E = |\mathbf{M}_0| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = |\mathbf{M}_0| \cos \alpha$$

▮ EJERCICIO. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 2, -5)$, hallar:
a) El momento del vector \vec{a} respecto del punto P(-2,1,0) y aplicado en el origen O(0,0,0). b) El momento del vector \vec{b} , aplicado en el punto A(-1,2,3), respecto del eje E definido por la recta de ecuación

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$$

Solución: a) (-1,-2,-4), b) $-91/\sqrt{14}$.

Comentario: En un espacio euclídeo de cualquier dimensión D se puede generalizar sin problema el producto escalar. El producto vectorial es más complicado algebraicamente. De hecho, con los axiomas del producto vectorial dados antes, se sabe que el producto vectorial puede definirse como una operación entre un número arbitrario k de vectores en D dimensiones para dar otro vector, y está bien definida en los siguientes casos:

- El antes estudiado producto vectorial de k=2 vectores en D=3 dimensiones.
- Un producto vectorial de k=2 vectores en D=7 dimensiones. Su expresión analítica es complicada.
- Un producto vectorial de k=3 vectores en D=8 dimensiones. Su expresión analítica es complicada.
- Un producto vectorial de k=D-1 vectores en D dimensiones (aplicando una operación llamada dual de Hodge). Su expresión analítica es una simple extensión analítica de la regla del determinante que usamos en el producto vectorial en 3 dimensiones.
- Un producto vectorial de k=1 vectores (con un factor) en una dimensión par arbitraria ($D=2n$, $n = 0, 1, \dots, \infty$).
- Un producto vectorial de k=0 vectores y 2 factores en 0 dimensiones.

1.6. Campos, derivadas e integrales

Cuando a todo punto del espacio (o del espacio-tiempo) se puede asociar una función escalar $f(x, y, z) = f(\vec{r})$ o $f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t)$, se dice que hemos definido un campo escalar en el espacio (o el espacio-tiempo). Análogamente, podemos definir campos vectoriales (tensoriales, espinoriales, . . .) si a todo punto podemos asociar un vector (tensor, espinor, . . .). Ejemplos de campos escalares son la distribución de temperatura en una barra, y de campos vectoriales el campo de vectores definido por las velocidades de cada punto en el interior de un fluido en movimiento.

La derivada de un vector se define como el objeto

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

De forma análoga pueden definirse las derivadas sucesivas. La derivada es un operador lineal (aunque hay derivadas más exóticas no lineales que no estudiaremos aquí, como la derivada de Jackson) y las siguientes propiedades:

1. $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}$
3. $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}$
4. $\frac{d}{dt}(F\mathbf{u}) = F \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dF}{dt} \mathbf{u}$

✎ EJERCICIO. Una partícula se mueve con ecuaciones paramétricas dadas por $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ y $z = 3t - 5$. Calcula las componentes de la velocidad, la aceleración y las integral del vector de posición respecto del tiempo definido por las ecuaciones de la curva. Halla la velocidad y la aceleración en $t=0$ y $t=1$.

Cuando las funciones vectoriales dependen de varias variables escalares, es preciso definir el concepto de derivadas parciales. Para el caso de 3 dimensiones espaciales y una dimensión temporal:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \partial_x \mathbf{v} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x + \Delta x, y, z, t) - \mathbf{v}(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \partial_y \mathbf{v} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x, y + \Delta y, z, t) - \mathbf{v}(x, y, z, t)}{\Delta y} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \partial_z \mathbf{v} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x, y, z + \Delta z, t) - \mathbf{v}(x, y, z, t)}{\Delta z} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \partial_t \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x, y, z, t + \Delta t) - \mathbf{v}(x, y, z, t)}{\Delta t} \quad (1.20)$$

Las derivadas parciales de orden superior también pueden definirse, y para funciones matemáticas suficientemente “regulares” o “bonitas” tienen ciertas propiedades de simetría. También pueden calcularse derivadas parciales de productos escalares o vectoriales sin especial dificultad.

✎ EJERCICIO. Si tenemos una función vectorial de dos variables dada por $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$, tal que:

$$\mathbf{v}(x, y) = (2x^2y - x^4)\vec{i} + (e^{xy} - y \sin x)\vec{j} + (x^2 \cos y)\vec{k}$$

Calcular: a) $\partial_x \vec{v}$.

b) $\partial_y \vec{v}$.

c) $\partial_{xx} \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}$.

d) $\partial_{xy} \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x \partial y}$.

e) $\partial_{xy} \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y \partial x}$.

Se llama matriz jacobiana a la siguiente matriz:

$$J = J_F(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Esta matriz se construye con una función $F : R^n \rightarrow R^m$ que toma n-tuplas de números, es decir, un vector de n-componentes en un vector de m-componentes, esto es, F es una correspondencia entre vectores con n-componentes y vectores de m-componentes, generalmente de variable real. Tal función es dada por m-funciones (reales en general) con

n -componentes, $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)$, y la matriz jacobiana en un punto del espacio de n -componentes está organizada de la manera anterior (si existe, pues puede no existir debido a la indefinición de alguna derivada parcial). La matriz jacobiana es una matriz de formato $(m \times n)$.

Otra matriz importante para el análisis vectorial en de varias variables es la matriz hessiana $H(f)$. Se define como la matriz $(n \times n)$, para una variable escalar de n -componentes $f(x_1, \dots, x_n)$, dada por las derivadas parciales continuas $H(f)_{ij}(\mathbf{x}) = D_i D_j f(\mathbf{x})$, es decir, por:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

1.7. Operadores diferenciales e integrales

Un operador es un objeto que aplicado sobre "algo" lo transforma en otro objeto. En el cálculo diferencial hay varios operadores diferenciales e integrales útiles. Para definirlos, nos podemos ayudar de un objeto llamado operador vectorial diferencial **nabla**. En 3 dimensiones, se define como:

$$\nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.23)$$

Su generalización a n -dimensiones está dado, en la base e_1, \dots, e_n , por

$$\nabla = \sum_i \vec{e}_i \partial_i = \vec{e}_1 \partial_{x_1} + \vec{e}_2 \partial_{x_2} + \dots + \vec{e}_n \partial_{x_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (1.24)$$

A partir de **nabla**, en un espacio de 3 dimensiones, es posible construir 3 operaciones diferenciales básicas: el gradiente, la divergencia y el rotacional.

El vector gradiente se define como una operación aplicada a una función escalar F con **nabla**, de forma que se transforma en un vector:

$$\vec{\nabla}F = \overrightarrow{\text{grad}F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = i \frac{\partial F}{\partial x} + j \frac{\partial F}{\partial y} + k \frac{\partial F}{\partial z} \quad (1.25)$$

El vector gradiente se generaliza fácilmente a cualquier dimensión. El producto escalar del gradiente de F con un vector unitario según cierta dirección se llama **derivada direccional** de F según dicho vector. En el caso de que el gradiente y el vector unitario anterior tengan la misma dirección, el módulo del gradiente representa la máxima derivada direccional o la máxima variación de F según la dirección de ese vector por unidad de longitud.

▮ EJERCICIO. Probar que el vector gradiente es un vector perpendicular a una superficie $F(x, y, z) = C$. Como aplicación, hallar un vector unitario que sea normal a la superficie $x^2y + 2xz = 4$ en el punto $P(2, -2, 3)$. Ayuda: Calcular el producto escalar del gradiente con un diferencial de desplazamiento según la superficie dada.

Se llama divergencia de una función vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ a la cantidad obtenida de operar escalarmente nabra con dicho vector. Así pues, la divergencia toma una función vectorial y la transforma en un escalar con la ayuda de nabra:

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.26)$$

Y donde $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Un vector \vec{v} con divergencia nula se llama solenoidal. Además, se puede probar que si el campo vectorial \vec{v} define la velocidad de un punto cualquiera de un fluido, entonces el volumen de fluido que sale por unidad de volumen y de tiempo a través de las superficies de un paralelepípedo elemental de centro en el punto $P(x, y, z)$ y aristas paralelas a los ejes de coordenadas, con dimensiones $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ viene aproximadamente dado por la divergencia. Entonces, la divergencia mide la cantidad de flujo de un "fluido" en cierto volumen, cuánto entre y cuánto sale de dicho fluido en el recinto delimitado por el correspondiente volumen.

▮ EJERCICIO. Dado el vector $\vec{v} = x^2z\vec{i} - 2y^3z^2\vec{j} + xy^2z\vec{k}$, hallar su divergencia en los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(1, -1, 1)$.

Otro operador vectorial diferencial útil es el denominado **rotacional**. Sea $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ una función vectorial definida en cierta región del espacio, tal que es una función diferenciable (derivable). Entonces se puede definir

el rotacional de dicho campo como la expresión siguiente (en coordenadas cartesianas o rectangulares):

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

En Componentes tenemos:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_x = \partial_y v_z - \partial_z v_y = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

$$(\text{rot } \mathbf{v})_y = \partial_z v_x - \partial_x v_z = \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

$$(\text{rot } \mathbf{v})_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

A partir de la definición de rotacional, es fácil demostrar las siguientes propiedades:

$$\nabla \times (\nabla F) = \vec{0} \leftrightarrow \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad} F}) = \vec{0} \quad (1.31)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \leftrightarrow \text{div}(\text{rot } F) = 0 \quad (1.32)$$

El operador rotacional confiere a un campo propiedades de rotación o giro si el rotacional es no nulo. Si, en particular, el campo \vec{v} fuera el campo de velocidades de un fluido en movimiento, y colocásemos una rueda con paletas en diversos puntos de dicho fluido, entonces esta rueda giraría en los puntos en los que el rotacional fuera diferente de cero, y dejaría de girar en los puntos donde se anulara. Un campo vectorial cuyo rotacional es nulo en todo punto del espacio (o más generalmente en cierto dominio o subregión del espacio) se denomina **irrotacional**. De los campos irrotacionales se dice que derivan de una función potencial porque siempre es posible encontrar localmente (en cada punto de la región donde se anula el rotacional del campo) una función escalar F de forma que (en acuerdo con las propiedades arriba indicadas)

$$\vec{v} = \nabla F = \overrightarrow{\text{grad} F}$$

A la función F se le llama generalmente función potencial (escalar). De forma análoga, cuando la divergencia de un campo se anula localmente

en todo punto del espacio o región del mismo, el campo solenoidal puede escribirse en función de otro campo vectorial. Así, si $\text{div} \vec{v} = 0$, podemos escribir

$$\vec{v} = \text{rot} \vec{u} \leftrightarrow \text{div} \vec{v} = 0$$

puesto que la divergencia de un rotacional es nula en virtud de las propiedades de los operadores vectoriales que hemos visto. En cierta forma, el potencial de un campo solenoidal es un campo vectorial, de forma análoga a como el potencial de un campo irrotacional es un campo escalar.

▮ EJERCICIO. Hallar el rotacional del vector $\vec{v} = xz^3 \vec{i} - 2x^2yz \vec{j} + 2yz^4 \vec{k}$, y evaluar dicho campo en el punto $(1,-1,1)$ y $(0,0,0)$. Indica si el campo es irrotacional o solenoidal.

También es posible, usando las propiedades del cálculo, hallar la integral de un vector (realmente la integral es un operador inverso a la derivación, y se puede definir formalmente como "derivadas de orden negativo" con el oportuno cuidado):

$$\int \vec{v} dt = \int v_x dt \vec{i} + \int v_y dt \vec{j} + \int v_z dt \vec{k}$$

Si $\vec{u} = \frac{d}{dt} \vec{v}$, entonces

$$\int \mathbf{u}(t) dt = \int \frac{d}{dt} (\mathbf{v}(t)) dt = \mathbf{v}(t) + \mathbf{k}$$

y donde \mathbf{k} es un vector constante que no depende del parámetro t . La integral definida entre los límites $t = a$ y $t = b$ de una integral vectorial se define de forma análoga a la regla de Barrow habitual del cálculo infinitesimal de variable escalar:

$$\int_a^b \mathbf{u}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\mathbf{v}(t)) dt = [\mathbf{v}(t) + \mathbf{k}]_a^b = \vec{v}(b) - \vec{v}(a)$$

Esta integral se puede entender como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos mixtilíneos formados al descomponer, en un intervalo $[a, b]$, en n pedazos bajo la curva delimitada por $\vec{v}(t_i)$ y con longitud Δt_i . Cuando dicha longitud se hace infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$, y tenemos formalmente

$$\int_a^b \vec{v}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \vec{v}(t_i) \Delta t_i \quad (1.33)$$

Otras nociones de integrales de función vectorial requieren el uso de las operaciones producto escalar y vectorial, y también cierta noción de

direccionalidad en las operaciones. Por ejemplo, dada una curva γ , el vector de posición $\mathbf{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ y una orientación de dicha curva, podemos definir la integral llamada **circulación** entre dos puntos A y B , correspondientes a t_1, t_2 de la siguiente forma. Definamos $\vec{v}(x, y, z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ como una función vectorial de la posición entre dos puntos de una curva γ . La circulación a lo largo de la curva de un vector (campo vectorial) $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$ es igual a la integral

$$\int_{\gamma} v = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (1.34)$$

La circulación de un campo vectorial puede representar diferentes magnitudes físicas. Por ejemplo, si el campo es un vector de velocidad en un fluido, un campo magnético o una fuerza, la circulación tiene diferentes interpretaciones físicas aunque la idea matemática subyacente es la misma. En el caso particular de que el vector sea la fuerza aplicada a una partícula en un punto, la circulación mide el trabajo o energía realizado por dicha fuerza a lo largo de la curva. Si tenemos que la curva es "cerrada", y no se corta a sí misma, entonces se suele representar de la siguiente forma

$$\oint_{\gamma} v = \oint_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (1.35)$$

Si el campo vectorial es irrotacional o derivable de una función escalar (potencial), esto es, si $\vec{v} = \nabla F$, entonces se tienen las siguientes condiciones equivalentes:

1. La circulación del campo vectorial no depende del camino elegido para ir desde A hasta B a lo largo de la curva, sino sólo de las posiciones inicial y final A y B . Es decir:

$$\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla F \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{dF}{dr} dr = \int_A^B dF = F(B) - F(A)$$

2. La circulación a lo largo de cualquier trayectoria o curva cerrada del campo es cero.

$$\oint_{\gamma} v = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

3. El campo vectorial es **conservativo**, i.e., el campo vectorial es irrotacional y se puede escribir como el gradiente de un potencial

$$\vec{v} = \nabla F = \overrightarrow{\text{grad}F} \leftrightarrow \nabla \times \vec{v} = \text{rot}\vec{v} = 0$$

▣ EJERCICIO. Hallar la circulación $\int_{\gamma} v$ desde $A(0,0,0)$ hasta $B(1,1,1)$ del campo vectorial $\vec{v} = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$, siendo γ la curva definida por las ecuaciones $x = t, y = t^2, z = t^3$. Solución: $\Gamma = \int_{\gamma} v = 5$.

Otro tip de integrales dirigidas a lo largo de una curva son más complicadas y no tienen interpretación inmediata (aunque la tienen) Por ejemplo:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \times d\vec{r}$$

o

$$\int_{\gamma} \vec{v} \times \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

o también

$$\int_{\gamma} (\vec{v} \times \vec{w}) \times d\vec{r}$$

Por contra, yendo a dimensiones superiores e integrales múltiples si hay dos objetos útiles en física. Son las nociones de integrales de superficie y de volumen.

Una superficie también puede representarse por un vector de los llamados axiales o pseudovectores. El vector superficie es un vector normal a la misma, su módulo es igual a la superficie o proporcional al área que representa y el sentido se toma como el de la exterior a la superficie, es decir, el marcado por el vector que pasa desde la cara interior de la superficie hacia la cara exterior de la misma. Si dividimos una superficie W en pedazos de superficie ΔS_i , con $i = 1, 2, \dots, n$ los n trozos o pedazos en que la subdividimos, y definimos un campo vectorial \vec{v} y el vector unitario normal exterior a la superficie \vec{n}_i en un punto P_i asociado a cada pedazo, podemos formar la suma

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$$

El límite de esta suma cuando hay infinitos pedazos muy diminutos o pequeños es la llamada **integral de superficie o flujo** del campo vectorial \vec{v} :

$$\phi = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$$

o bien, suele escribirse simplemente

$$\phi(\vec{v}) = \iint_W \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_W \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_W \vec{v} \cdot \vec{n} |d\vec{S}| = \int_W v \quad (1.36)$$

Hablaremos más de esta magnitud en el tema de campo gravitatorio, campo eléctrico y campo magnético, pues es una magnitud muy importante. Si la superficie es una superficie cerrada, se puede escribir también

$$\phi(\vec{v}) = \oiint_W \vec{v} \cdot \vec{dS} = \oiint_W \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_W \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_W v \quad (1.37)$$

Similarmente, se puede introducir la noción de integral a lo largo de un volumen V encerrado por cierta superficie en el espacio. Haciendo una descomposición análoga en diferenciales de volumen, se puede definir la integral a lo largo de un volumen de una variable escalar o vectorial:

$$\int_V F dV = \iiint_V F dV = \iiint_V F d^3x \quad (1.38)$$

$$\int_V \vec{v} dV = \iiint_V \vec{v} dV = \iiint_V \vec{v} d^3x \quad (1.39)$$

así como las integrales respectivas para regiones cerradas del espacio

$$\oint_V F dV = \iiint_V F dV = \iiint_V F d^3x \quad (1.40)$$

$$\oint_V \vec{v} dV = \iiint_V \vec{v} dV = \iiint_V \vec{v} d^3x \quad (1.41)$$

El cálculo integral y diferencial puede generalizarse a otras magnitudes más complicadas como campos tensoriales, pero requiere el uso de técnicas avanzadas de geometría diferencial y álgebra multilineal (en particular, el cálculo exterior en variedades, también llamado de formas diferenciales, el álgebra tensorial e incluso los instrumentos de álgebras de Clifford en dimensiones superiores para alcanzar el caso de variables que son suma

de polivectores -suma de escalares y multivectores de cualquier "grado", pero no se verán en este curso).

⚡ EJERCICIO. Halla el vector unitario perpendicular u ortogonal al plano determinado por los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

⚡ EJERCICIO. Un sólido rígido gira alrededor de un eje que pasa por un origen O con una velocidad angular dada ω . Demostrar que la velocidad lineal de un punto P del sólido con vector de posición dado por \vec{r} viene dada por $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$, en donde ω es un vector de módulo igual a la velocidad angular dada y cuya dirección y sentido son los dados por la regla de Maxwell para el producto vectorial que hemos estudiado.

⚡ EJERCICIO. Una partícula se mueve a lo largo de una curva con ecuaciones dadas por $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos(3t)$ y $z = 2 \sin(3t)$, donde la variable t representa el tiempo en segundos. Halla: a) La velocidad y la aceleración de la partícula. b) El módulo de la velocidad y de la aceleración en $t=0$. c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

⚡ EJERCICIO. El vector de posición de una partícula viene definido por $\vec{r}(t) = A \cos \omega t \vec{i} + A \sin \omega t \vec{j}$, en donde A es una constante y ω es la velocidad angular, también constante. A) Demostrar que la velocidad es perpendicular a la posición en cualquier punto. B) Demostrar que la aceleración está dirigida hacia el origen y su módulo es proporcional a la distancia al mismo. C) Probar que el vector $\vec{r} \times \vec{v}$ es constante.

⚡ EJERCICIO. Hallar el valor de $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{r})$, siendo \vec{r} un vector de posición arbitrario y \vec{A} un vector tal que $\nabla \times \vec{A} = 0$.

⚡ EJERCICIO. Hallar el trabajo o energía total que es necesario realizar para desplazar una partícula en un campo de fuerzas definido por el vector $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ a lo largo de la curva definida por $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$, desde el punto definido por $t = 1$ hasta $t = 2$.

1.8. Cuestiones

A continuación se proponen algunas cuestiones para clarificar ideas y conceptos, así como para "investigar" un poco para aquellos alumnos más avezados e interesados.

▣ CUESTIÓN 1. De las magnitudes físicas que se citan a continuación, indica el carácter de cada una de ellas (escalar o vectorial): peso, masa, calor, tiempo, calor específico, presión, fuerza, densidad, desplazamiento, energía, volumen, superficie, potencia, campo eléctrico, campo gravitatorio, campo magnético.

▣ CUESTIÓN 2. Indica si es posible que la suma de dos vectores de módulos 3 y 5 sea un vector de módulo 2. ¿Y de módulo 9?

▣ CUESTIÓN 3. Nombra la magnitud o magnitudes que pueden definirse a partir del producto escalar y vectorial de dos vectores.

▣ CUESTIÓN 4. Explica cómo obtener las potencias escalares y las potencias vectoriales de un vector, indicando sus diferencias.

▣ CUESTIÓN 5. Justifica que el momento de un vector respecto de un punto no cambia si se desplaza el vector sobre su línea de acción.

▣ CUESTIÓN 6. Explica, sin hacer las cuentas, el pasos que hay que dar para demostrar que el momento de un vector respecto de un eje no cambia al elegir puntos distintos sobre el eje para hacer la proyección.

▣ CUESTIÓN 7. Si un vector tiene módulo constante, su derivada puede no ser nula. Explica por qué es posible esto y crea o pon un ejemplo.

▣ CUESTIÓN 8. ¿Qué hace falta para que la derivada de un vector sea nula?

▣ CUESTIÓN 9. Citar algún caso conocido de un vector cuya derivada sea nula y otro cuya derivada sea constante.

▣ CUESTIÓN 10. Indica la dirección que tiene un vector que es la derivada de otro de dirección constante y módulo inversamente proporcional al tiempo.

▣ CUESTIÓN 11. Indica el significado del producto escalar del vector superficie elemental por el vector velocidad del fluido que atraviesa la superficie en un instante dicha superficie.

▣ CUESTIÓN 12. Indica el módulo, dirección y sentido de la velocidad angular de cada una de las agujas de un reloj de pared con minutero y

segundo.

▣ CUESTIÓN 13. Investiga y encuentra una definición intuitiva (y abstracta si lo deseas) de: espinor, biespinor, twistor, supertwistor, tensor, forma diferencial, k-vector (también llamado multivector), polivector, matriz e hipermatriz, indicando la diferencia que hay entre ellos y sus diferentes categorías.

▣ CUESTIÓN 14. Averigua, para cada una de las exóticas clases de magnitudes nombradas en el ejercicio anterior, dónde o para qué se usan (si es que lo hacen) en Física.

1.9. EJERCICIOS CON SOLUCIONES

1) Tomando como origen de ángulos el semieje positivo de abscisas, hallar la resultante de un desplazamiento de 2m y 40° , con otro de 4m y 127° . Primero por composición gráfica, y segundo por componentes en unidades adecuadas. Sol.: (-0.78,4.49)m.

2) Un cuerpo se desplaza hacia el este con velocidad de 10km/h. Calcular la velocidad con que debe desplazarse hacia el noreste un segundo cuerpo sabiendo que continuamente se dirige hacia esa dirección con respecto al primero, siendo la resultante igual a 30km/h. Sol.:20km/h.

3) Calcular las componentes de un vector que tiene módulo 8, contenido en el plano YZ, y forma 30° con el eje OZ. Sol.: $(0, 4, 4\sqrt{3})$

4) Demostrar que si tres vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no están en el mismo plano, ni son paralelos, entonces si $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ implica que $x = y = z = 0$.

5) Halla las componentes de un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que la resta de los vectores $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}$. Sol.: $(3/7, 6/7, -2/7)$

6) Un vector de módulo 4 posee cosenos directores proporcionales a los números 3,1,-2. Halla las componentes de dicho vector en coordenadas cartesianas. Sol.: $(6\sqrt{2/7}, 2\sqrt{2/7}, -4\sqrt{2/7})$.

7) Probar que el segmento que une los puntos medios de los lados de

un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a su mitad.

8) Sean los vectores $u(2,1,3)$, $v(-1,3,-1)$. Calcula: a) El ángulo que forman, b) El módulo del vector suma de ambos. c) Un vector unitario en la misma dirección que u . Sol.: a) $\cos \alpha = -2\sqrt{1/154}$, b) $\sqrt{21}$, c) $\sqrt{1/14}(2, 1, 3)$.

9) Halla las coordenadas del centro e masas de un triángulo de vértices $A(1,2,3)$, $B(-1,3,5)$, $C(2,0,-4)$, también llamado baricentro, si sobre los vértices hay colocadas unas masas puntuales de 2,3, y 5 unidades. Sol.: $(9/10, 13/10, 1/10)$.

10) Escribe las componentes de 3 vectores que formen un triángulo rectángulo.

11) Un vector de módulo 3 tiene su punto de aplicación en $(2,3,0)$, y forma ángulos de 30 grados con OX y de 60 grados con OY. Halla su momento con respecto al punto $P(5,3,-7)$. Sol.: $(21/2, -21\sqrt{3}/2, 9/2)$.

12) Halla los cosenos directores de los ángulos que el vector \mathbf{AB} forma con los ejes de coordenadas en forma general abstracta. Aplica el resultado obtenido a los puntos $A(1,3,-2)$ y $B(-1,-2,1)$.

13) Si se cumple que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{z}$, indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no de forma razonada: A) $\vec{y} = \vec{z}$, B) $Proy_x(y) = Proj_x(z)$, C) $Proj_y(x) = Proj_z(y)$. Sol. A) Falsa, B) Verdadera, C) Falsa.

14) Dados los vectores coplanarios $\vec{a} = (3, -4, 0)$ y $\vec{b} = (1, 2, 0)$, se pide: a) Hallar su producto vectorial, b) comprobar que el vector es perpendicular a los dos vectores mediante el producto escalar, c) la ubicación del vector suma de los dos vectores coplanarios.

15) Sean los vectores:

$$u = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$$

$$v = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$$

$$w = \frac{1}{7}(6, 2, -3)$$

Demostrar que: a) Son unitarios. b) Son perpendiculares entre sí. c) w es el

producto vectorial de los otros dos.

16) Sean los vectores:

$$u = (2, -3, 1)$$

$$v = (1, 2, -1)$$

$$w = (-1, -1, 1)$$

Calcula: a) $u+v-w$, b) $(u+v) \times w$, c) Ángulo formado por u y $b+c$. d) $(u-v) \cdot 3w$.

17) Sean los vectores libres: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $3\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula: a) el ángulo que forman, b) el momento que resulta respecto del punto $(3, 5, 2)$.

18) Dado el vector $\vec{a} = (2t^2, t, (t+1)^2)$, halla su derivada, su segunda derivada y su tercera derivada. Halla el módulo del vector y de dichas derivadas en $t = 2$.

19) Halla la velocidad lineal de un punto P del sólido rígido cuya velocidad angular es $\omega = \vec{i} - 2\vec{k}$, y cuyo vector de posición respecto de un punto del eje fijo alrededor del cual gira es igual a $\vec{r} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Sol.: $(4, -5, 2)$.

20) Dada la curva:

$$x = t^2 + 1, y = 4t, z = 2t^2 - 6t$$

halla el vector de módulo 1 que en el instante $t=3$ es tangente a la curva en uno cualquiera de sus puntos. Sol.: $(3/\sqrt{22}, 2/\sqrt{22}, 3/\sqrt{22})$.

21) Halla la expresión analítica del vector velocidad y aceleración, y sus respectivos módulos, para la partícula cuyo movimiento está descrito por las ecuaciones $x = 3 \cos(2t)$, $y = 3 \sin(2t)$, $z = 5t$. Indica cualitativamente el tipo de trayectoria que realiza la partícula.

22) Dada la función escalar de posición $F(x, y, z) = 2xy^2 - 3yz^2$, halla su gradiente en el punto $(2, 1, -1)$.

23) Halla la divergencia de la función $\vec{v}(x, y, z) = 2xyz\vec{i} - x^2z^2\vec{j} + 2y^3z\vec{k}$ en el punto $(2, -2, 1)$. Sol.: -20.

24) Halla el rotacional del vector $\vec{v} = (2xz^3, -xy^2z, 2y^2z^2)$ en el punto de coordenadas $(2, -1, 3)$. Sol.: $(-34, 108, -3)$

25) Una partícula se desplaza con aceleración:

$$\vec{a}(t) = 3 \sin(2t)\vec{i} - 5 \cos(2t)\vec{j} + 4t\vec{k}$$

Si consideramos nulas la posición y la velocidad inicial, calcula: a) La velocidad en función del tiempo. b) La posición en función del tiempo. c) El espacio recorrido en función del tiempo.

26) Halla la integral curvilínea del vector $\vec{v} = 2xy^2z\vec{i} + (x+2y-z)\vec{j} + 5x^2z\vec{k}$, entre los puntos A(0,1,0) y B(2,2,1), a lo largo de la curva cuyas ecuaciones vienen dadas por:

$$x = 2t, y = t^2 + 1, z = t^3$$

Capítulo 2

Introducción a la Física

En Dinámica y Cinemática, se usará el modelo de la partícula puntual. Una partícula puntual es un objeto sin dimensiones (matemáticamente un punto de dimensión cero), no deformable, localizable mediante “un punto”. Por supuesto, esto es sólo una aproximación, ya que no considera la posibilidad de los objetos sean “extensos” y posean deformaciones/elasticidad, así como otras características geométricas y físicas. Sin embargo, el nivel de matemáticas y de física del alumno medio, y los propios objetivos del curso, nos llevan a tener en cuenta en general esta simplificación de la realidad física, muy válida para la mayoría de los propósitos prácticos de este curso.

2.1. Cinemática

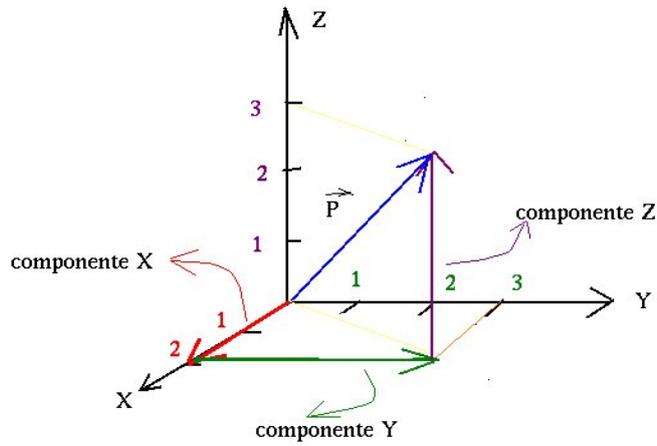
La Cinemática describe el movimiento sin atender a las causas que lo producen. Es una parte básica de la Mecánica.

Se define movimiento como “el cambio de la posición de un móvil u objeto con respecto al tiempo”.

En Cinemática hay una serie de magnitudes importantes que hay que estudiar y definir.

2.1.1. Vector de posición. Base cartesiana.

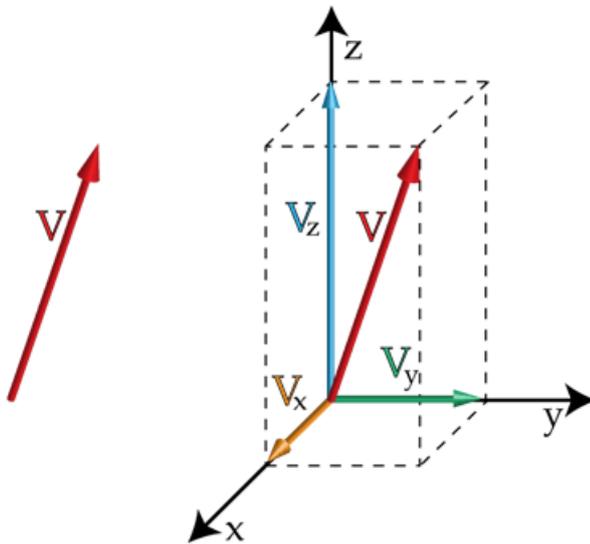
En el espacio, podemos localizar cualquier punto mediante las llamadas coordenadas cartesianas, y una base elemental de vectores:



$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad (2.1)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0) \quad (2.2)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1) \quad (2.3)$$



Algunos autores emplean en lugar de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ las notaciones (u_x, u_y, u_z) o incluso (e_1, e_2, e_3) , pero todas ellas son equivalentes. En coordenadas cartesianas (x, y, z) (o bien x_1, x_2, x_3) y usando la base anterior, un punto en el espacio se localiza mediante un vector de posición en un instante de tiempo t correspondiente. Es decir, es como si fotografiamos al punto en un momento dado del tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (2.4)$$

Tiene dimensiones de longitud y se mide en metros.

Si un móvil se desplaza entre dos puntos arbitrarios A y B, o equivalentemente entre una posición original P_0 y un punto final P , se llama vector desplazamiento a la diferencia de los respectivos vectores de posición de dicha partícula:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \quad (2.5)$$

Equivalentemente, podemos expresar esta última ecuación vectorial como un conjunto de 3 ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} \Delta x = x_B - x_A \\ \Delta y = y_B - y_A \\ \Delta z = z_B - z_A \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \\ \Delta z = z - z_0 \end{cases}$$

Si el desplazamiento es infinitesimal, podemos escribir el diferencial

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (2.6)$$

2.1.2. Velocidad media. Velocidad instantánea.

Se define velocidad media como la variación del vector de posición durante un determinado intervalo de tiempo. Matemáticamente:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \quad (2.7)$$

La dimensiones de la anterior magnitud es LT^{-1} y sus unidades m/s . La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es muy pequeño e infinitesimal. Matemáticamente

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \quad (2.8)$$

y en donde se ha usado que la definición del correspondiente límite es igual a la derivada, en nuestro caso, del vector de posición respecto del tiempo. En notación por componentes, usaremos que

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (2.9)$$

tanto para la velocidad media como para la velocidad instantánea. Esto es,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array} \right.$$

2.1.3. Aceleración

Se llama aceleración media al cociente:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \vec{k} \quad (2.10)$$

Las dimensiones de esta magnitud son LT^{-2} y sus unidades m/s^2 .

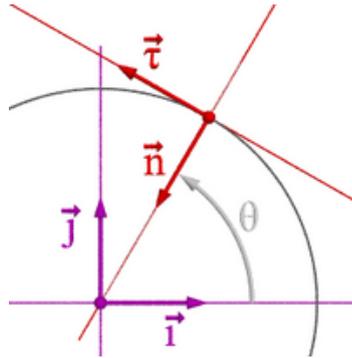
Se llama aceleración instantánea a la magnitud:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) \quad (2.11)$$

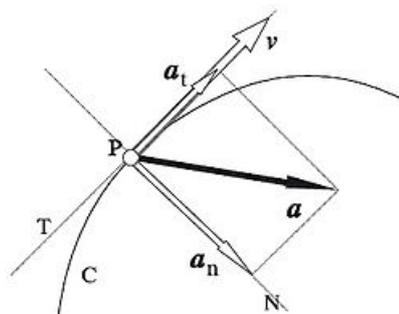
De nuevo, usaremos la notación para las componentes siguientes (sea aceleración media o instantánea):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

2.1.4. Sistema intrínseco



En lugar del sistema cartesiano, se puede elegir un sistema “natural” o “intrínseco” para la descripción del movimiento. Dicho sistema consiste en un sistema de referencia centrado en el cuerpo u origen donde se halla la partícula en cada instante del tiempo. Dicho sistema de referencia es “móvil” y no está, por lo tanto, en un sitio fijo en el espacio, y se desplaza con éste a medida que se mueve.



Las componentes intrínsecas de este referencial posee dos aceleraciones características:

- **Aceleración tangencial.** Es el ritmo de cambio del módulo de la velocidad con respecto del tiempo.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (2.12)$$

- **Aceleración normal o centrípeta.** Mide el ritmo de cambio de la dirección de la velocidad respecto del tiempo.

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{R} \quad (2.13)$$

y donde R es el radio de curvatura.

En ambas componentes, se entiende que el módulo de la velocidad está representado por $v = |\vec{v}|$. Este módulo, es por supuesto la definición usual de “longitud” de un vector:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Además, las componentes intrínsecas forman un sistema conjunto de forma que matemáticamente están relaciones de la siguiente forma

$$a = a_t \vec{\tau} + a_c \vec{n} \quad (2.14)$$

en donde $\vec{\tau}$ y \vec{n} son vectores unitarios tangente y normal (ortogonal) a la trayectoria de la partícula en cada punto de la trayectoria. Dicho sistema es útil porque satisface la siguiente relación pitagórica:

$$a^2 = a_t^2 + a_c^2 \quad (2.15)$$

2.1.5. Magnitudes lineales y angulares: relaciones

Para un sistema de magnitudes angulares, en movimiento circular uniforme (MCU), o en movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA), hay unas magnitudes análogas a las lineales interesantes de estudiar. Son las siguientes:

- **Desplazamiento angular.** $\Delta\theta$. Se mide en radianes y no tiene dimensiones en el S.I. Generalmente $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A = \theta_f - \theta_0$.
- **Radio de la trayectoria circular.** $R = |\vec{r}|$. Es constante tanto en el MCU como en el MCUA.
- **Velocidad angular.** Se define como

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.16)$$

o bien por

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.17)$$

a nivel infinitesimal. Las unidades de velocidad angular son los rad/s . En dimensiones T^{-1} .

- **Aceleración angular.** Se definen las aceleraciones angulares media e instantánea como sigue

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.18)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.19)$$

Las dimensiones son ahora T^{-2} y las unidades rad/s^2 . En un MCU la aceleración angular es nula, pero no la centrípeta. En un MCUA, la aceleración angular es constante.

Las relaciones útiles que conectan las magnitudes lineales con las angulares son las siguientes

$$s = R\theta \quad (2.20)$$

o bien

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \quad (2.21)$$

de donde

$$v = R\omega \quad (2.22)$$

con $v = |\vec{v}|$ y, además,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = \alpha R \leftrightarrow a_t = \alpha R \quad (2.23)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \leftrightarrow a_n = \omega^2 R \quad (2.24)$$

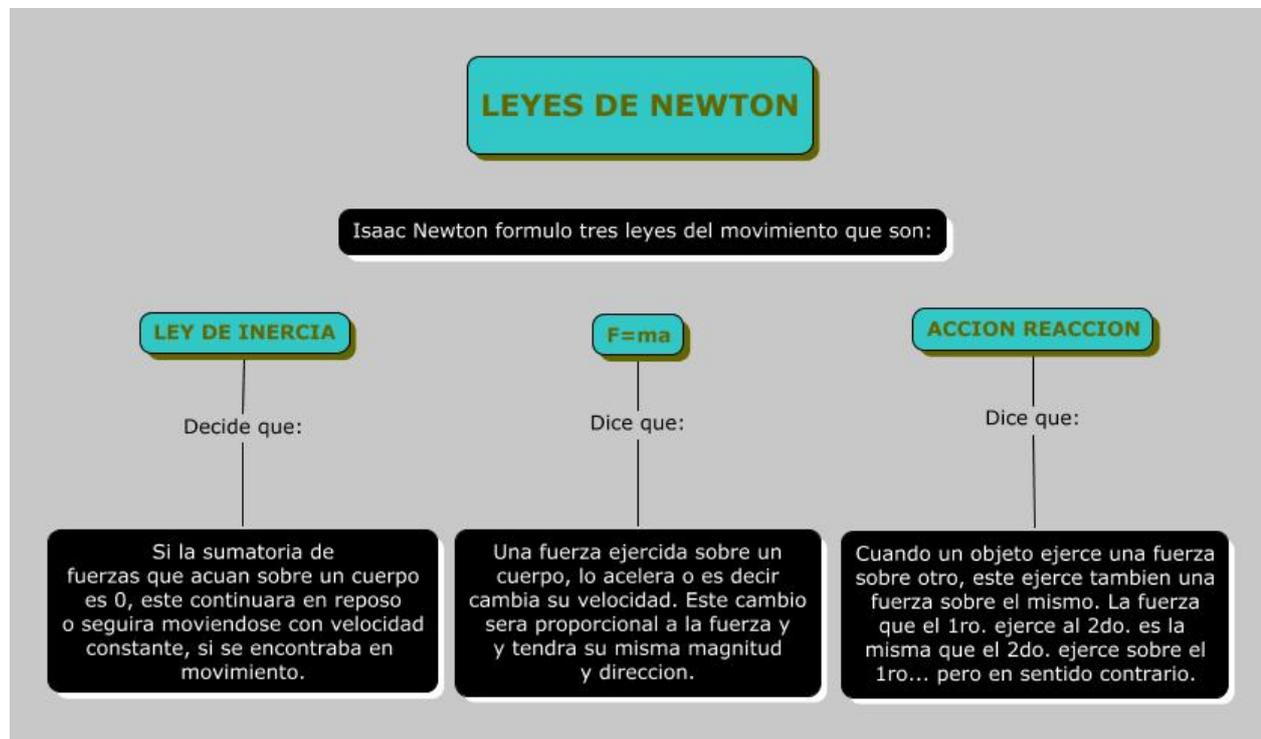
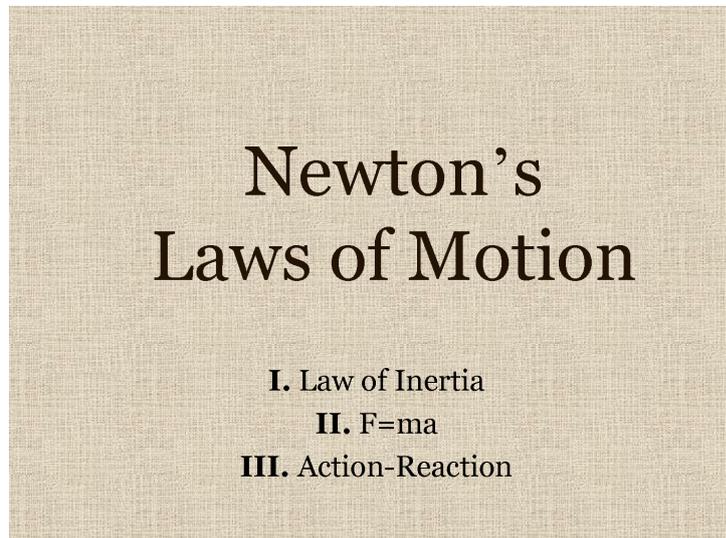
2.2. Dinámica

Describe el movimiento atendiendo a las causas que lo producen.

Las causas que producen el movimiento se identifican con el concepto o noción de fuerza e interacción.

También se hace uso del importante concepto y magnitud llamada energía.

2.2.1. Leyes de Newton



- **Primera ley de Newton (Principio de inercia de Galileo).** Establece que todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza externa está en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme (MRU).



- **Segunda ley de Newton (Ley fundamental de la Dinámica).** La resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es proporcional a su masa y las aceleraciones que le producen. Matemáticamente

$$\vec{F}_t = \sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (2.25)$$

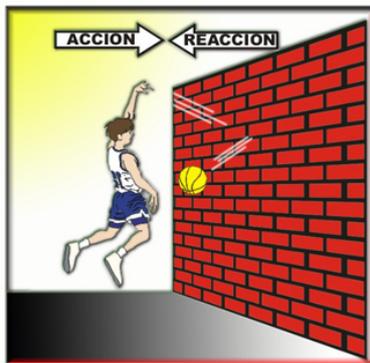
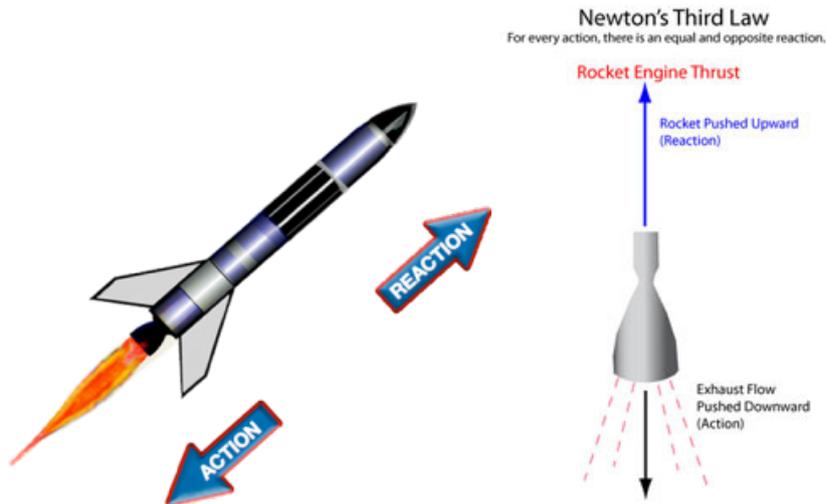
y en donde m es la llamada masa inerte o inercial del cuerpo, una medida de la resistencia que ofrece el mismo a ser acelerado. Se llama inercia a la propiedad que tienen los cuerpos de conservar su estado de reposo o de M.R.U. de forma natural sin que sobre ellos actúen fuerza alguna.

$$\vec{F}_{\Sigma} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

- **Tercera ley de Newton (Principio de acción y reacción).** Si dos partículas, A y B, interactúan entre sí con alguna fuerza \vec{F}_{AB} , se cumple que si una de ellas ejerce una fuerza sobre la otra, ésta reacciona

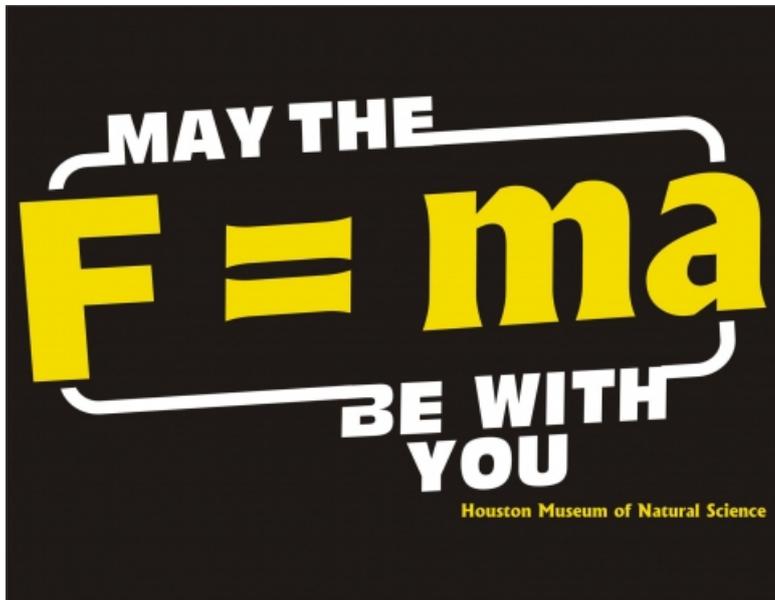
con una fuerza igual y de sentido contrario.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (2.26)$$



$$F = ma$$

↑
↑
↑
 N kg m/s²



2.2.2. Momento lineal

Se llama momento lineal o simplemente momento a la magnitud siguiente:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.27)$$

Sus unidades son kgm/s y sus dimensiones MLT^{-1} , dado que la masa se mide en kilogramos en el S.I. Esta magnitud se ha llamado de otras formas durante la historia de la Física: ímpetu, cantidad de movimiento o impulso. Hoy día, simplemente se le llama momento o momento lineal si queremos evitar confusiones con otras magnitudes.

Hay una serie de ecuaciones y relaciones útiles para el momento lineal:

- Relación fuerza-impulso.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.28)$$

- Conservación del momento lineal. Si $\sum \vec{F} = 0$, entonces, usando la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{p} = \text{constante} = \sum_i \vec{p}_i$$

- En un sistema aislado el momento lineal es constante.

- En un sistema cerrado se tiene que

$$\vec{F}_t = \sum F_{int} + \sum F_{ext} = \sum F_{ext}$$

de donde

$$\sum F_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

porque para un sistema cerrado se cumple la tercera ley de Newton, en general, si las fuerzas son “suficientemente simétricas”

$$\sum F_{int} = 0$$

2.2.3. Fuerzas intrínsecas

En el sistema de referencia intrínseco, tenemos las fuerzas

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \quad (2.29)$$

y

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad (2.30)$$

Casos particulares de ambas fuerzas:

- M.R.U. $\vec{F}_n = \vec{F}_t = 0$.
- M.R. $\vec{F}_n = 0, \vec{F}_t \neq 0$.
- M.C.U. (o cualquier movimiento uniforme en general) $\vec{F}_n = m\omega^2 R \neq 0, \vec{F}_t = 0$.
- Movimiento curvilíneo general. $\vec{F}_n \neq 0, \vec{F}_t \neq 0$.

Las fuerzas de rozamiento o fricción son fuerzas de contacto entre dos medios. Para las fuerzas de rozamiento usuales, se tiene que

$$\vec{F}_r = \mu \vec{N} \quad (2.31)$$

Hay tres tipos de coeficientes de rozamiento μ :

- Rozamiento estático. Es el necesario para iniciar el movimiento. μ_e .
- Rozamiento cinético o dinámico μ_c . Es el necesario para mantener el movimiento sin deslizar y el que se usa más frecuentemente.
- Rozamiento deslizando o generalizado μ . $\mu_c \leq \mu \leq \mu_e$.

En las fuerzas de tipo “tensión” de una cuerda se cumple el principio de acción y reacción en cada punto de la misma.

2.2.4. Otras magnitudes dinámicas

Hay otras magnitudes dinámicas que hay que conocer. Son las siguientes

- **Momento de una fuerza respecto de un punto P.** Tomando un punto P como origen, se tiene la definición

$$\vec{M} = \vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.32)$$

En componentes

$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

Y en donde

$$|\vec{M}_P| = rF \sin \varphi$$

- **Momento angular (o cinético) respecto de un punto P.** Tomando un punto P como origen, se define como

$$\vec{L} = \vec{L}_P = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.34)$$

En componentes

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

Y en donde

$$|\vec{L}_P| = rp \sin \varphi = rmv \sin \varphi$$

El producto vectorial de dos vectores se define en general como sigue. Sean $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ y $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$, entonces $C = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$ con

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

y de donde

$$C = A \times B = \begin{cases} C_x = A_y B_z - A_z B_y \\ C_y = A_z B_x - A_x B_z = -(A_x B_z - A_z B_x) \\ C_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases} \quad (2.37)$$

y cuyas componentes pueden recordarse con la palabra mágica XYZZY. Además, el módulo es igual a

$$|C| = |A \times B| = |A||B| \sin \varphi$$

Entonces el vector producto vectorial (o “producto cruz”) es ortogonal o perpendicular al plano que generan ambos vectores y el sentido dado por la regla del sacacorchos (por el camino más corto de giro).

NOTA: Si dos vectores son paralelos o proporcionales, entonces el producto vectorial se anula.

2.2.5. Relación entre \vec{L} y \vec{M}

De la definición de momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, se obtiene por derivación con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

de donde

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}} \quad (2.38)$$

Existe un teorema de conservación para el momento angular como existe para el momento lineal. Si en un sistema con varias partículas el momento angular total es la suma de los momentos angulares de cada partícula, entonces:

$$\vec{L}_{total} = \sum_i \vec{L}_i \quad (2.39)$$

y el momento es la suma de los momentos

$$\vec{M}_{total} = \sum_i \vec{M}_i \quad (2.40)$$

Entonces, se tiene que

$$\frac{d\vec{L}_{total}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \quad (2.41)$$

Por ende, si la suma de todos los momentos de fuerzas (algunas veces llamados torques) o momento total se anula, el momento angular total se conserva en el sentido de que es constante como vector:

$$\vec{M}_{total} = 0 \longrightarrow \vec{L}_{total} = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_n = \text{constante} \quad (2.42)$$

Hay un caso particular importante de fuerzas, las llamadas **fuerzas centrales**, que merece atención especial. Un fuerza se dice que es central si puede escribirse de la forma siguiente

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{u}_r} \quad (2.43)$$

Es decir, una fuerza es central si su magnitud depende sólo de la distancia a un punto, denominado centro de fuerzas, y está dirigida en la recta que une la partícula con dicho centro. De esta forma, para una fuerza central, se tiene que $\vec{F} \parallel \vec{r}$, y esto implica a su vez dos consecuencias importantes:

- El momento angular total se conserva siempre para una fuerza central, i.e., $\vec{L}_{total} = \text{constante}$.
- El momento de la fuerza central con respecto al centro de fuerza es nulo, i.e., $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_C = 0$. También es cero el momento en el caso de que la partícula esté situada en el punto de aplicación de la fuerza $\vec{r} = 0$.

2.2.6. Equilibrio dinámico entre fuerzas

Se define equilibrio dinámico de fuerzas como la situación física en la que se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $\sum F_{ext} = 0 \leftrightarrow \vec{p} = \text{constante}$.
- $\sum M_{ext} = 0 \leftrightarrow \vec{L} = \text{constante}$.

2.2.7. Análisis energético de problemas dinámicos

- **Trabajo.** La noción de trabajo de una fuerza se basa en la siguiente definición

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos \varphi} \quad (2.44)$$

A nivel diferencial, esta ecuación puede escribirse también como sigue

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad (2.45)$$

Las unidades de trabajo o “energía” son los julios (J) y las dimensiones físicas son $[W] = ML^2T^{-2}$.

Es importante recordar aquí las fórmulas básicas del producto escalar de dos vectores A, B :

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.46)$$

en donde $A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ y $B = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$. Además, se tiene que

$$A \cdot B = |A||B| \cos \varphi \quad (2.47)$$

con lo que el producto escalar es cero sólo si uno de los factores es cero o bien $A \perp B$. Para el trabajo elemental, se puede integrar sobre una trayectoria Γ para hallar el trabajo entre dos puntos (algunas veces llamado “circulación”):

$$W_\Gamma = \int_\Gamma dW \leftrightarrow W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.48)$$

Si la trayectoria es cerrada, suele escribirse

$$W_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.49)$$

y en ambos casos escribimos en componentes cartesianas

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (2.50)$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad (2.51)$$

- **Potencia.** La potencia media se define como

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (2.52)$$

y la potencia instantánea como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.53)$$

Las unidades de potencia habituales son los vatios (W) y su dimensión física es $[P] = ML^2T^{-3}$. Otras unidades comunes de potencia son el C.V., con $1C.V. = 735W$.

- **Energía cinética.** Se llama energía cinética a la cantidad

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

El teorema de las fuerzas vivas señala que el trabajo necesario para llevar una partícula del punto A hasta el punto B si se aplica una determinada fuerza externa coincide con la variación de energía cinética. Es decir,

$$W_{A \rightarrow B} = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = E_c(f) - E_c(i) = \sum_i W_i \quad (2.54)$$

La demostración es muy sencilla:

$$W_{A \rightarrow B} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int \frac{1}{2} d(\vec{v}^2)$$

de donde

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{m}{2} \Delta v^2 \equiv \Delta E_c$$

con $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

- **Energía potencial.** Hay en general dos tipos de fuerzas, según posean o no este tipo particular de energía "potencial". Se dice que una fuerza es *conservativa* si $W_{A \rightarrow B}$ no depende del camino elegido para calcular el trabajo, sino sólo de la posición inicial y final. En caso contrario, la fuerza se dice que *no es conservativa* o que es *dissipativa*. Para una fuerza conservativa se cumple que existe una función matemática, llamada energía potencial E_p , tal que

$$W_{A \rightarrow B}(F_{cons}) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \quad (2.55)$$

Algunos tipos sencillos de energía potencial que veremos en este curso:

- Energía potencial gravitatoria. $E_p(grav) = mgh$, o también puede escribirse

$$E_p(grav) = -G \frac{Mm}{r}$$

- Energía potencial eléctrica. $E_p(elec) = K \frac{Qq}{r}$.
- Energía potencial elástica. $E_p(el) = \frac{1}{2}kx^2$.

- **Relación entre fuerza y energía potencial.** Para una fuerza conservativa, hay una relación “bonita” entre energía potencial y fuerza. Si denotamos a la energía potencial como U , se tiene que, para toda fuerza conservativa,

$$\boxed{\vec{F}(\text{cons}) = -\nabla U = -\overrightarrow{\text{grad}U}} \quad (2.56)$$

y donde el gradiente (grad) se calcula usando el operador vectorial nabla sobre la función energía potencial U :

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

En una sola dimensión, o también en la dirección radial del espacio (no solamente del plano o el propio espacio) tenemos que

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{i} \leftrightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r \quad (2.57)$$

- **Fórmulas complementarias de análisis vectorial diferencial.** Se llama rotacional al operador

$$\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (2.58)$$

El operador divergencia se define como

$$\text{div}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.59)$$

Se tienen además las propiedades

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad}U) = \nabla \times \nabla U = 0$$

- **Teorema de conservación de la energía mecánica E_m .** Si NO hay fuerzas disipativas (no conservativas), la energía mecánica, formada por la suma de las energías cinética y potencial, se conserva. Es decir, la cantidad

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} \leftrightarrow \Delta E_m = 0 \quad (2.60)$$

En el caso de que haya fuerzas disipativas, el teorema generalizado de la energía mecánica señala que:

$$\Delta E_m = -W(dis) \leftrightarrow \Delta E_m + W(dis) = 0 \quad (2.61)$$

Observación: $W(dis)$ es siempre negativo, porque es energía “perdida” en el entorno del sistema, lo que explica el signo introducido en la ecuación anterior. Generalmente, usando el llamado criterio “egoísta” para el calor y el trabajo:

1) El trabajo que realiza el sistema sobre el entorno se considera negativo. El trabajo que el entorno realiza sobre el sistema se considera positivo.

2) El calor desprendido por el sistema (o cedido) al entorno se considera negativo. El calor absorbido por el sistema del entorno se considera positivo.

2.3. Colisiones clásicas

El momento lineal (impulso, cantidad de movimiento o ímpetu) permite la resolución de problemas de colisiones entre objetos. Recordemos que el impulso es la variación de momento lineal o el producto de fuerza por el tiempo que está actuando dicha fuerza

$$\Delta \vec{I} = \Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$$

o bien a nivel diferencial

$$d\vec{I} = d\vec{p} = \vec{F} dt$$

Si una fuerza verifica la tercera ley de Newton (la ley de acción-reacción), entonces para un sistema cerrado se conserva el momento lineal total. La demostración es muy sencilla, ya que si

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

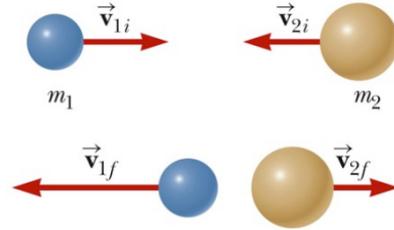
entonces

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_{21} \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_{12} \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

$$\Delta \vec{p}_{tot} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$



$$m_1 \vec{v}_{1f} - m_1 \vec{v}_{1i} = -(m_2 \vec{v}_{2f} - m_2 \vec{v}_{2i})$$

$$m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}$$

Recuerda: En todas las colisiones se conserva el momento lineal.

Sin embargo, hay varias diferencias entre los tipos de colisiones siguientes:

- Colisiones perfectamente inelásticas. En estas colisiones, la identidad de las partículas se pierde y forman un solo conjunto común tras la colisión o choque. Es decir, quedan “pegados” todos los objetos que sufren choques perfectamente inelásticos. La energía mecánica NO se conserva. Ejemplo: dos bolas deformables (de plastelina) que se quedan adheridas tras una fuerte colisión.
- Colisiones inelásticas. Se pierde también energía mecánica en la colisión. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, la identidad de las partículas no se pierde en general, y los cuerpos no se quedan adheridos tras este tipo de choque. Ejemplo: dos bolas de goma deformables.
- Colisiones elásticas (o perfectamente elásticas, para ser más precisos). La energía mecánica (y también la energía cinética en particular) se conserva antes y después de la colisión. El ejemplo típico son dos bolas rígidas no deformables de billar chocando entre sí.

Hay que notar que la energía mecánica se conserva (y la energía cinética) si y sólo si no hay fricción o calentamiento durante el choque.

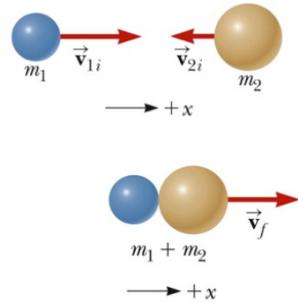
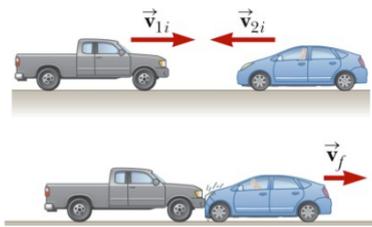
2.3.1. Choque perfectamente elástico

El subcaso del choque perfectamente elástico se puede resolver muy fácilmente

Conservation of momentum: $p_i = p_f$

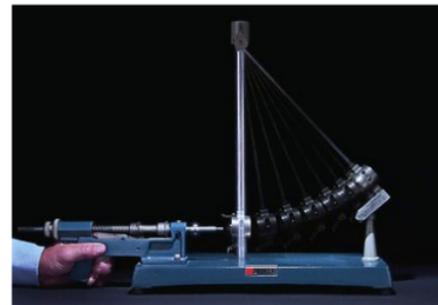
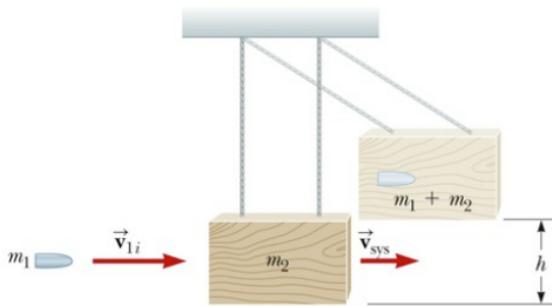
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$



2.3.2. Péndulo balístico

Otro problema interesante es el llamado péndulo balístico: un cuerpo impacta con otro en reposo y le hace ascender debido a que éste se halla sujeto por un hilo indeformable a un plano horizontal en el techo. La resolución de este ejercicio es también muy simple



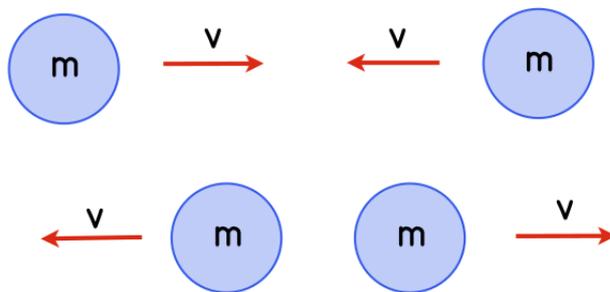
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \quad v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) g h \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

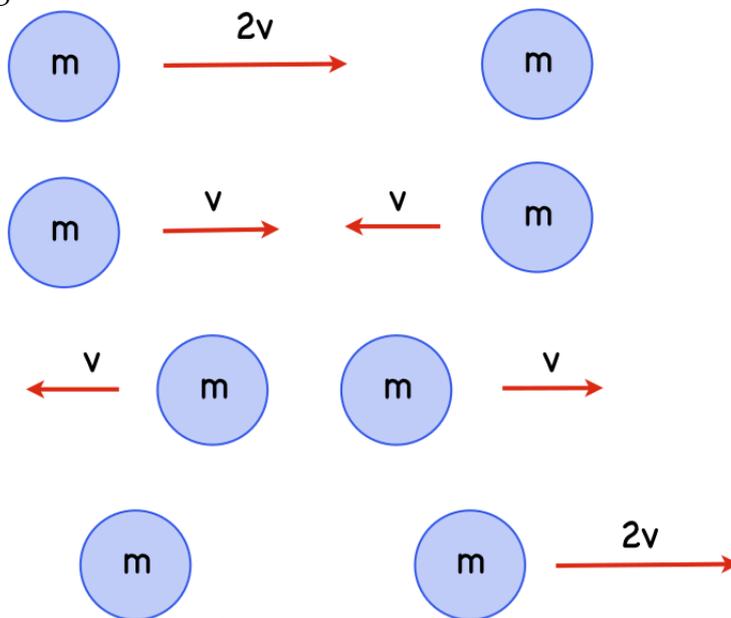
$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

2.3.3. Choque perfectamente elástico

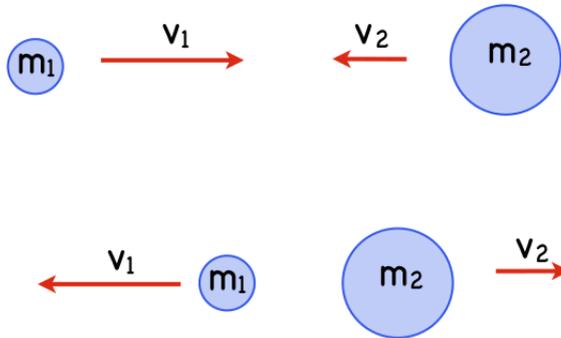
Analicemos primero cualitativa e intuitivamente lo que ocurre en varios casos sencillos. En primer lugar, para masas iguales y velocidades iguales en valor pero sentidos opuestos (choque frontal), la colisión perfectamente elástica produce la siguiente imagen



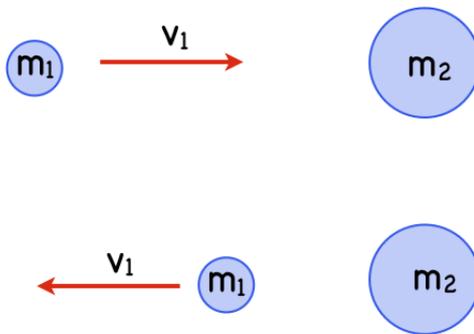
Para iguales masas pero una de ellas en reposo, el diagrama es el siguiente



Para masas no iguales y momentos en sentidos opuestos se tiene



Para el choque de una partícula con una masa muy grande en reposo, se tiene que



Matemáticamente, estos dibujos pueden ser analizados con ayuda de la conservación del momento lineal Y la energía cinética. Es decir, usando las ecuaciones

$$E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2} \quad (2.62)$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \quad (2.63)$$

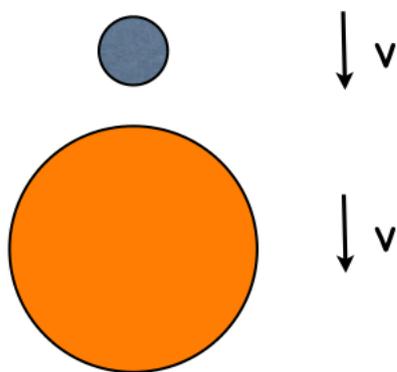
Estas ecuaciones pueden generalizarse para un número arbitrario de partículas chocando elásticamente de forma perfecta fácilmente. Para el caso de 2 partículas, con masas diferentes, se tiene que, salvo un signo menos de sentido vectorial

$$v'_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2}$$

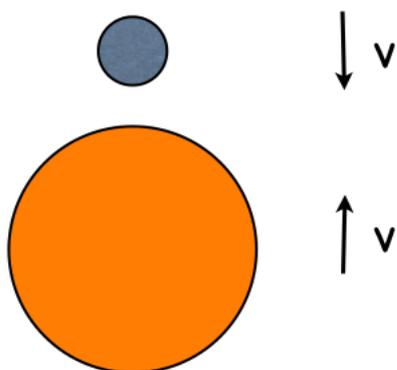
Cuando la masa m_2 es muy grande (muy "pesada"), entonces su velocidad tras el choque es despreciable (tiende a cero).

Ejercicio (para saber si entendemos los conceptos de este apartado). Supongamos que dejamos caer verticalmente una bola de baloncesto y justamente tras ella una pelota de tenis. Al llegar al suelo chocan y rebotan de forma perfectamente elástica. Suponiendo que la masa de la pelota de baloncesto es mucho mayor que la masa de la pelota de tenis, calcula cuántas veces más alto asciende la pelota de tenis tras el choque. (Ayuda: piensa en el sistema de referencia más adecuado y usa la conservación de la energía). Solución: 3 veces la altura de la pelota de baloncesto.

Las pelotas antes del choque en el sistema de referencia “malo”



Las pelotas tras el choque de la pelota de baloncesto con el suelo en el sistema de referencia “malo”



2.4. Leyes de escala y metabolismo

En la naturaleza se da una gran variedad de formas y tamaños. En el caso de los seres vivos encontramos desde la descomunal balleza azul, el mayor ser vivo que ha existido, con una masa de más de 200 toneladas, hasta el

micoplasma, un diminuto microorganismo con masa del orden de 10^{-13} g. Entre las masas de ambos extremos hay 21 órdenes de magnitud. Surge la pregunta entonces de hasta qué punto son comparables fenómenos que observamos en objetos a diferentes escalas de longitud. Evidentemente, para que se pueda hablar de regularidad ha de darse una cierta semejanza, tanto en tamaño como en la función. Realmente no podemos comparar cosas totalmente dispares sin algún factor de transformación. La pregunta entonces cómo dependen los fenómenos del tamaño de los objetos. Esto lleva a considerar las llamadas leyes de escala y el denominado análisis dimensional.

Arquímedes estableció el llamado principio de semejanza: en figuras geométricas semejantes, la superficie es proporcional al cuadrado de la dimensión lineal, el volumen lo es al cubo,...Sin embargo, Galileo, 2000 años después, se dio cuenta de que este principio presentaba limitaciones. Aun guardando la semejanza de las proporciones geométricas, el tamaño de las cosas no puede aumentar de forma arbitraria. La simetría de escala no es una simetría obvia de la Naturaleza y se halla "rota" generalmente. Un diseño eficaz a escalas pequeñas puede resultar ineficiente a mayor escala. Por ejemplo, un coche del tamaño de un camión y viceversa. Un prototipo resultará probablemente amazotado si se reduce la escala: basta pensar en un elefante del tamaño de una ardilla intentando trepar por los árboles.

Se aprecia en general una relación entre tamaño y función de los seres vivos: a mayor tamaño, mayor complejidad. Los seres unicelulares presentan menor grado de organización que los seres pluricelulares. La forma responde también a relaciones de tipo funcional y a la comparación de diversos factores. En los animales terrestres, por ejemplo, predominan las formas cilíndricas que facilitan la locomoción, a la par que responden a exigencias de las leyes de la elasticidad. Veremos en algunos ejercicios cómo una hormiga con el tamaño de un hombre resulta un animal extraordinariamente débil: la hormiga es un animal fuerte a su escala. Análogamente, un hombre a la escala del tamaño de una bacteria encontraría grandes dificultades para moverse.

El problema de encontrar relaciones generales para extrapolar y comparar propiedades a diferentes escalas es uno de los objetos del análisis dimensional y las leyes de escala. La dependencia con la escala de ciertas propiedades es algo muy importante a nivel de conocimiento físico, químico, matemático o biológico.

Una primera propiedad que podemos estudiar como primer ejemplo es el ritmo metabólico: es la energía consumida en la unidad de tiempo como consecuencia de los procesos derivados del metabolismo y que a la larga se convierte en calor o energía térmica. Una posible hipótesis biológica consiste en suponer que el ritmo metabólico es simplemente proporcional a la masa del organismo, ya que los procesos metabólicos ocurren en todo el cuerpo. Es decir:

$$RM \sim M$$

Un animal con el doble de masa que otro, debería tener un consumo doble de energía en su metabolismo de acuerdo a esta relación. Esto es un ejemplo de scaling o ley de escala. Sin embargo, esta hipótesis no se ve comprobada experimentalmente en el caso de los mamíferos. Tenemos que buscar otra relación para ellos. Consideremos que el calor se escapa a través de la superficie de la piel. Entonces un análisis ingenuo nos diría entonces que el ritmo metabólico es proporcional al área del animal:

$$RM \sim A$$

Como el área es proporcional a una longitud característica al cuadrado, y la masa ha de ser proporcional al volumen, que lo es a su vez del cubo de la longitud, tendremos que

$$A \sim L^2$$

$$M \sim L^3$$

de donde $L \sim M^{1/3}$. Entonces, el área es proporcional a

$$A \sim M^{2/3}$$

y por tanto el ritmo metabólico sigue una ley de escala del tipo siguiente

$$RM \sim A \sim M^{2/3}$$

Esta ley se aproxima más a la realidad experimental, pero tampoco es satisfactoria. En realidad, la ley de escala de los mamíferos obedece una ley de tipo $RM \sim M^{3/4}$, cuya justificación es algo más complicada.

Dimensionalmente, todas las magnitudes tienen cierta dimensión física. Dependiendo del sistema de unidades elegido, así hay tantas magnitudes fundamentales. En el S.I. hay 7, pero en ciertos sistemas "naturales" de unidades hay 3,4,5 u otras cantidades de magnitudes elementales.

2.5. Ejercicios resueltos

1) Calcular en $t = 2s$ la aceleración tangencial y la centrípeta si el vector de posición está dado por $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$.

Solución:

Calculamos la velocidad y la aceleración mediante derivación explícita

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k} \quad m/s$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k} \quad m/s^2$$

Usando la definición de componentes intrínsecas

$$\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$$

se obtiene que

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(2t)^2 + (t^2)^2 + t^2} = \sqrt{5t^2 + t^4} \quad m/s$$

de donde

$$a_t = v'(t) = \frac{10t + 4t^3}{2\sqrt{5t^2 + t^4}} \quad m/s^2$$

Si $t = 2s$, tenemos

$$a_t = \frac{16}{\sqrt{36}} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \quad m/s^2$$

Para calcular la aceleración normal usamos la relación pitagórica

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

La aceleración total en 2 segundos es igual a

$$a = \sqrt{21} \quad m/s^2$$

y la normal será pues

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = \frac{20}{9} \longrightarrow a_n = \frac{\sqrt{20}}{3} \quad m/s^2$$

El radio de curvatura puede calcularse para $t = 2s$ y sale

$$a_n = \frac{v^2}{R} \leftrightarrow R = \frac{27\sqrt{20}}{5} \quad m$$

2) El vector de posición de una partícula viene dado por $\vec{r} = (\cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j})$.
 Calcula: a) la velocidad y aceleración instantáneas, b) las componentes intrínsecas de la aceleración, c) la velocidad angular ω .

Solución:

a)

$$\vec{v} = -20(\sin(2t)\vec{i} - \cos(2t)\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = -40(\cos(2t)\vec{i} + \sin(2t)\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

b) $v=20\text{m/s}=\text{constante}$. Además,

$$a = 40\text{m/s}^2$$

Entonces $a_t = 0$ y $a_n = 40\text{m/s}^2$, con $R = 10\text{m}$.

c) $\omega = v/R = 2\text{rad/s}$.

3) Una partícula de 2kg se mueve con vector de posición $\vec{r} = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}$.
 Calcula su momento lineal.

Solución: $\vec{p} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

4) Un cuerpo tiene una masa de 0.2 kg y se encuentra inicialmente en reposo. En cierto momento, se le aplica una fuerza $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ newtons durante 0.2 segundos. Hallar: a) \vec{a} , b) \vec{v} al cesar la fuerza tras los 0.2s, c) el momento tras los 0.2s.

a) $\vec{a} = 10\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k} \text{ m/s}^2$

b) $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \text{ m/s}$

c) $\vec{p} = 0.4\vec{i} + 0.6\vec{j} - 0.2\vec{k} \text{ kgm/s}$

5) Un cuerpo de 20g tiene $\vec{r} = 2t\vec{i} - t^2\vec{j}$ metros. Calcular la fuerza sobre la partícula, y sus componentes normal y tangencial.

Solución:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -0.04\vec{j} \text{ N.}$$

$$F_t = \frac{0.04t}{\sqrt{1+t^2}}N$$

$$F_n = \frac{0.04}{\sqrt{1+t^2}}N$$

6) Una masa de 10 g recorre una circunferencia de medio metro de radio centrada en el origen, con una velocidad lineal de 4m/s. Calcula el momento angular y el momento respecto del origen.

Solución:

a) $L = 0.02kgm^2/s$.

b) $\vec{M} = 0$.

7) Una partícula de medio kilogramo de masa tiene $\vec{r} = 3t\vec{i} + t^2\vec{j}$ como vector de posición en función del tiempo. Calcula el momento angular respecto del origen:

Solución: $\vec{L} = -\frac{3}{2}t^2\vec{j}$.

8) Sea $\vec{F} = 2\vec{i} - 3t\vec{j} + t^2\vec{k}$ N la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m, tal que $\vec{r} = t\vec{i} - 2t\vec{j} + \vec{k}$ metros. Hallar: a) La potencia dada por la fuerza, b) el trabajo elemental realizado por la fuerza dada.

a) $P = 2 + 6t$ W

b) $dW = (2 + 6t)dt$.

2.6. ¿Qué hay que saberse?

- Las definiciones importantes: todo.
- Notación vectorial y operaciones con vectores: manejo práctico.
- Componentes intrínsecas.
- Magnitudes angulares: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $f = 1/T$.
- MRU, MCU, MRUA, MCUA. Ecuaciones fundamentales y planteamiento-solución de problemas cinemáticos.

- Leyes de Newton de la Dinámica. Formulación energética de la Mecánica. Noción y tipos principales de energía y teoremas de conservación asociados. Fuerzas conservativas vs. disipativas, fuerzas centrales: definición y consecuencias.
- Tipos de ejercicios de Cinemática que hay que saber resolver: dado un movimiento, escribir sus ecuaciones en un sistema de referencia y en componentes; dado un movimiento compuesto, descomponerlo en componentes y hallar sus vectores \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} , como magnitudes características.
- Tipos de ejercicios de Dinámica que hay que saber resolver: dadas una fuerza y un vector de posición, hallar la potencia, el momento y el trabajo elemental; dadas la masa y un vector de posición, hallar la velocidad, el momento, la fuerza y otras magnitudes; hallar las componentes intrínsecas de la aceleración y de la fuerza; calcular el momento angular y el momento de una fuerza con las definiciones correspondientes; aplicar la definición de trabajo y la conservación de la energía potencial para fuerzas centrales; aplicar la conservación de la energía mecánica (o la energía cinética) en problemas concretos.

2.7. Ejercicios: Cinemática de la partícula

1) La expresión que da la posición de una partícula que se mueve en la trayectoria recta es (S.I.) $x = 7t^2 - 2t^3 + 3t - 1$. Hallar la ecuación de la velocidad y de la aceleración. Calcular el espacio recorrido por la partícula entre $t = 2s$ y $t = 3s$.

2) La velocidad de una partícula que se mueve sobre una recta está dada por la ecuación $v(t) = 4t^3 - 6t + 2$. Sabiendo que el origen de espacios se encuentra tres metros a la izquierda del origen de tiempos, calcular la ecuación de la posición en función del tiempo, la aceleración, la velocidad en $t=0$ s y, también, la velocidad y aceleración medias entre $t=1s$ y $t=2s$.

3) Una partícula con movimiento rectilíneo recorre un espacio de 7 m antes de empezar a contar el tiempo y cuando $t=2s$, posee una velocidad de 4m/s. Si la aceleración viene dada en el S.I. por $a = a(t) = 3t^2 - 1$, calcular la ecuación de la velocidad, la ecuación de la posición, la velocidad media entre $t = 2s$ y $t = 4s$, y la distancia al origen de tiempos cuando $t = 7s$.

4) El movimiento de un punto material viene dado (en el S.I.) por $x = x(t) = e^{3t} - 5$. Hallar la velocidad y la aceleración instantáneas, así como los valores de la posición, velocidad y aceleración en el origen de tiempos.

5) Las componentes del vector de posición de un punto son: $x(t) = 4 + 3t$, $y(t) = t^2 + 5$, $z(t) = 2t + 4t^2$ en el S.I. Hallar la velocidad y la aceleración en $t = 1$ s.

6) Un cañón dispara con elevación de 45° respecto a la horizontal, siendo la velocidad de salida de 490m/s. Hallar el alcance, la altura máxima y el tiempo necesario para tal avance y tal ascenso. Hallar la posición y velocidad del proyectil al cabo de 2s del disparo. Si el cañón se coloca en la cima de un acantilado de 50 m de altura, determinar el tiempo que tarda el proyectil en llegar a la superficie del mar, la posición del impacto, la velocidad en dicho instante y el ángulo que forma el vector velocidad con la superficie del mar. Dato: $g=9.8m/s^2$.

7) Un avión en vuelo horizontal, a la velocidad de 360 km/h y 1000 m de altura, lanza una bomba. Calcula la distancia desde el objetivo fijo e inmóvil debe lanzarse para que logre alcanzarlo. Si el objetivo es un camión que se mueve por una carretera horizontal a 72 km/h y en la misma recta que el bombardero, halla la distancia en este nuevo caso a la que se debe arrojar la bomba para alcanzar el camión "blanco".

8) Un avión en vuelo horizontal a velocidad constante de 500km/h, lanza tres bombas en intervalos de tres segundos. Dibujar un esquema o diagrama indicando la posición de las tres bombas, la del avión, al cabo de 3 segundos de lanzar la tercera (y última). Razona a qué distancia entre sí caerán cada una de ellas.

9) Dos aviones están situados en la misma vertical. La altura de uno de ellos es 4 veces mayor que la del otro. Pretenden bombardear el mismo blanco u objetivo. Si la velocidad del más alto es igual a V , indica la velocidad que debe llevar el más bajo en relación a V para que se produzca el impacto en el mismo punto de la bomba que arroja cada uno.

10) (PAU-Selectividad) Desde el punto más alto del palo mayor de un velero que navega por un lago a velocidad constante de 5m/s se deja caer una piedra. Sabiendo que dicho palo mayor tien 20m de altura, determinar: a) El tiempo que tarda la piedra en llegar a la cubierta, b)la distancia

que avanza el velero durante ese tiempo, c) la ecuación de la trayectoria que sigue la piedra en su movimiento de caída vista por un observador en reposo a orillas del lago, d) el punto de la cubierta del velero sobre el que cae la piedra. Dato: $g=10\text{m/s}^2$.

11) (PAU-Selectividad) Durante una tormenta de verano se ve un relámpago y se escucha un trueno. Si la velocidad del sonido es de 340m/s : a) Determina la distancia a la que nos encontramos del núcleo de la tormenta si después de ver el relámpago se tarda 120s en oír el trueno, b) Indicar la razón por la que es posible suponer que vemos el relámpago en el mismo instante en que se produce.

12) Una pelota se lanza desde una altura (H) desde el suelo con velocidad inicial \vec{v}_0 de 3 formas distintas: 1) Horizontalmente, 2) Con una inclinación hacia arriba respecto de la horizontal, 3) Con una inclinación hacia abajo respecto la horizontal. a) Comparar las velocidades (en módulo) de llegada al suelo, b) Dar el orden de llegada al suelo. Indicar si lanzar verticalmente la pelota altera en algo los resultados de a) y de b).

13) Una pelota se lanza hacia arriba con velocidad de 25m/s . El viento le comunica una aceleración horizontal de $a = 2\text{m/s}^2$. Hallar: a) Las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración en cualquier instante, b) La ecuación de la trayectoria, c) la distancia del punto del lanzamiento a la que cae la pelota, d) la altura máxima que alcanza. Dato: $g=10\text{m/s}^2$.

14) Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30° con la horizontal y al llegar al extremo queda en libertad con una velocidad de 10m/s . La altura del edificio es de 60m y la anchura de la calle 30m . Calcula: a) las ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad, b) la ecuación de la trayectoria, c) Si llegara directamente al suelo o chocará antes en la pared opuesta, d) el tiempo que tarda en llegar al suelo y su velocidad en ese instante.

15) En el S.I., las coordenadas de un punto en movimiento son $x = t^2$ e $y = (t - 1)^2$. a) Hallar la ecuación de la trayectoria e identificar la figura geométrica que describe (si es posible). b) Hallar la posición del punto cuando la velocidad es de 10 m/s .

16) En el S.I. una partícula se mueve con $x(t) = 7t^3 - 2t^2 + 3t - 1$. Calcula: a) la ecuación de la aceleración y la velocidad en cualquier instante, b) el espacio recorrido entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos.

17) Calcular la aceleración normal en el ecuador terrestre. ¿Cuándo podemos considerar a la Tierra como un sistema inercial? Dato: $R_T = 6400\text{km}$ en el ecuador terrestre.

18) En el libro de Galileo: "Dos nuevas ciencias", este autor dice que "(...) para elevaciones que sean mayores o menores de 45° en la misma cantidad, los alcances son iguales". Demostrar esta afirmación.

19) Una pelota rueda con una velocidad de 1.5m/s por la parte superior de una escalera. Si la altura y anchura de los escalones es de 30cm , razona en qué escalón da el primer bote. Apoya tu resultado con cálculos matemáticos.

20) Dos cuerpos A y B, situados a 2km de distancia, salen simultáneamente en la misma dirección, ambos con movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración del más lento (cuerpo B) igual a $a_B = 0.320\text{cm/s}^2$. Deben encontrarse a 3.25 km de distancia del punto de partida del cuerpo B. Hallar el tiempo que tardarán en ello, la aceleración de A y las velocidades de ambos en el momento de encontrarse.

21) En un plano referido a los ejes cartesianos OX, OY, un cuerpo puntual se desplaza siguiendo una trayectoria de coordenadas $x = 3t$ e $y = -t^2 + 4t$. Hallar: a) La trayectoria descrita, la velocidad y la aceleración del movimiento. b) El módulo de la velocidad media desde el instante inicial hasta los 3 s de iniciado el movimiento. c) El radio de curvatura de la trayectoria en el punto alcanzado por el móvil a los 2 segundos .

22) Desde lo alto de una torre se dejan caer dos piedras, la segunda 0.1 segundos después de la primera. Calcula al cabo de cuánto tiempo la separación de las piedras será de 1 metro . Halla el espacio recorrido por cada piedra en ese tiempo y la velocidad en ese instante de cada una de ellas.

23) Calcula la velocidad angular de un punto alrededor del ecuador terrestre, y también su velocidad lineal. Calcula la velocidad angular de la Tierra alrededor del Sol (usa el radio medio de la trayectoria terrestre, $150\text{ millones de km}$) y la velocidad lineal de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol.

24) Un volante parte del reposo y en 5 segundos adquiere una veloci-

dad angular de 40rad/s . Calcula su aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas que ha dado, así como el espacio lineal que habría recorrido en ese tiempo.

25) Se deja caer un pelota desde la cornisa de un edificio y tarde 0.3 segundos en pasar por delante de una ventana de 2.5m de alto. Calcula la distancia a la que se encuentra la cornisa respecto del marco superior de la ventana con estos datos.

26) Un volante gira alrededor de su eje a razón de 3000 r.p.m. Un freno lo detiene en 20 s. Calcula la aceleración angular, supuesta constante, y el número de vueltas que da hasta que se detiene. Calcular la velocidad angular cuando ha dado 100 y 200 vueltas.

27) Un cilindro de cartón de 20 m de altura gira alrededor de su eje a razón de 1 vuelta cada 10 segundos. En la dirección de la generatriz se hace un disparo y se observa que los radios que pasan por los impactos hechos en las bases forman un ángulo de 1° . Calcular la velocidad del proyectil.

28) Se dispara un proyectil con un ángulo de 15° con respecto a la horizontal, saliendo el proyectil con una velocidad de 200 m/s. Se desea saber la distancia teórica que alcanzará la bala medida sobre la horizontal, la velocidad con que llegará a tierra medida en módulo y dirección (sentido). ¿Tropezará con una colina que está a la mitad de su alcance, si ésta tiene 300 metros de altura? En caso afirmativo, indica razonadamente cómo podríamos solucionar el problema de impactar en el mismo objetivo y con el mismo proyectil, disparando desde el mismo sitio y con la misma velocidad inicial.

29) Una piedra de un kilogramo se deja caer desde un acantilado de 10 m de altura. En el mismo instante se lanza hacia arriba desde la base del acantilado una pelota con una velocidad inicial de 15m/s . a) Calcula el tiempo transcurrido cuando se encuentran. b) Al encontrarse, indica si está ascendiendo todavía la pelota o no. c) Si la piedra tuviera una masa de 2kg , indica qué le pasa a la respuesta del apartado a) y razona la respuesta.

30) Representa en un diagrama velocidad tiempo la siguiente situación cinemática: Inicialmente, un punto se mueve con velocidad constante de 10m/s desde el instante inicial $t=0$ hasta $t=5\text{s}$. En ese momento, acelera de forma constante, de forma que adquiere una velocidad de 30m/s entre $t=5\text{s}$ y $t=10\text{s}$. Entre $t=10$ s y $t=15$ s, se mantiene con velocidad de 30m/s . De

nuevo, cambia de velocidad, pero esta vez frenando, y alcanza el reposo ($v=0\text{m/s}$) entre $t=15\text{s}$ y $t=25\text{s}$ (o sea, frena hasta detenerse en 10 s netos) respecto al tiempo inicial. Para esta situación, además, calcula: a) Aceleración media en el intervalo total de tiempo, esto es, la aceleración media entre $t=0\text{s}$ y $t=25\text{s}$. b) La aceleración que posee en el instante $t=2\text{s}$. c) La aceleración en el instante $t=13\text{s}$. d) La aceleración media en el intervalo (20, 25) s. e) La distancia recorrida en el intervalo (0, 25) segundos, especificando también la distancia que recorre en cada tramo.

31) Un observador situado en tierra ve caer las gotas de lluvia con inclinación de 15° respecto a la vertical. Para otro observador, en un tren, las gotas caen verticalmente. Hallar la velocidad con la que las gotas de lluvia llegan al suelo para cada uno de estos dos observadores (en tierra y en un tren). La velocidad del tren es constante e igual a 36km/h .

32) Una partícula se mueve en el plano XY según las ecuaciones $x(t) = t^2/2 + 2$ e $y = t^2 - 1$. Hallar la ecuación de la trayectoria y los vectores de velocidad y aceleración de la partícula.

33) Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de modo que su posición en cualquier instante viene dada por $x(t) = 5t^2 + 1$, donde $x(t)$ se expresa en metros y el tiempo en segundos. Calcula la velocidad media en los siguientes intervalos de tiempo: a) $t=2\text{s}$ y $t=3\text{s}$. b) 2s y 2.1s . c) 2s y 2.001s . d) 2s y 2.0001s . e) Calcula su velocidad instantánea en $t=2\text{s}$, comentando el resultado en relación a los anteriores apartados.

34) Mario y Luigi, dos amigos italianos, hacen una apuesta sobre quién llegará antes a la dulce y bella Beatriz, que se encuentra justo en frente de ellos, pero separada por un río de 100 metros de ancho y una corriente de velocidad 3 m/s . Mario (que no sabe Física) acepta encantado, pues es mejor nadador que Luigi, y se lanza en línea recta hacia la hermosa Beatriz. Luigi (que sabe Física) nada a su modo hacia Beatriz. Indica quién llega antes a la guapísima Beatriz con los siguientes datos: las velocidades de natación son $v(\text{Mario})=6.25\text{m/s}$, $v(\text{Luigi})=5\text{m/s}$, mientras que las velocidades con la que corren en tierra son $v(\text{Mario})=4\text{m/s}$, $v(\text{Luigi})=3\text{m/s}$. Observa que como Luigi sabe de Física, él no va a necesitar correr en tierra pues nadará a su modo para llegar exactamente en frente de Beatriz (cómo es parte de la resolución de este problema).

35) Una piedra de 1kg se deja caer desde un principio de 10 m de altura. En el mismo instante, se lanza hacia arriba desde la base del principio

otra piedra con 15m/s de velocidad inicial. a) Halla el tiempo que tardan en encontrarse. b) Halla si estará o no ascendiendo la segunda piedra. c) Si la piedra de 1kg tuviera una masa de 2kg, indica la respuesta de a) en ese caso de forma razonada.

36) Una piedra cae libremente y pasa a las 10h frente a un observador situado a 300 m de altura sobre el suelo; a las 10h y 2s pasa frente a otro observador que está a 200 m sobre el suelo. Hallar: a) La altura desde la que cae la piedra, b) el momento en que llega al suelo contando desde el momento en que se dejó caer, c) la velocidad con la que llega al suelo.

37) Las coordenadas de un punto en movimiento son $x = 2 \sin \omega t$, $y = 2 \cos \omega t$. Calcula: a) la ecuación de la trayectoria, b) la velocidad en cualquier instante, c) las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante, d) el tipo de movimiento de esta partícula.

38) Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con un intervalo de diferencia de 2 segundos. El primero parte con velocidad inicial de 50m/s y el segundo una velocidad de 80m/s. Calcular: a) el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentran a la misma altura, b) la altura a la que se encuentran, c) la velocidad de ambos proyectiles en ese momento.

39) Demostrar que un movimiento plano cuyo vector de aceleración es constante y no nulo puede ser tanto curvilíneo como rectilíneo, dependiendo de las condiciones iniciales del vector velocidad.

40) (Ejercicio largo) En todo el siguiente ejercicio se supone despreciable la resistencia del aire y se considera que la bola se comporta como un punto. Además tomaremos $g=10m/s^2$.

Un niño participa en un juego que consiste en lanzar una bola sobre una serie de cajas apiladas una sobre otra y hacer caer el máximo número de ellas. Supondremos que la caja alcanzada caerá y, junto a ella, todas las que estuvieran por encima. Para efectuar su lanzamiento, el niño levanta el brazo hacia arriba y lanza la bola en A, situado a una distancia $H=1.80$ m del suelo. La bola sale con velocidad \vec{v}_0 y módulo 10m/s, formando un ángulo de 12° hacia arriba con la horizontal. Se apilan 3 cajas, una encima de otra, sobre un soporte sobreelevado una altura de 1.55 metros sobre el suelo. La distancia más pequeña entre las cajas y la vertical que pasa por A es $L=4$ metros. Cada caja tiene una altura $a=10$ cm. Calcular: i) Las ecuaciones paramétricas del movimiento de la bola respecto del sistema

de referencia canónico $(0; \vec{i}, \vec{j})$, eligiendo el instante de salida de la bola en A como el origen de tiempos (O es el punto del suelo horizontal que pertenece a la recta vertical que pasa por A). ii) La ecuación de la trayectoria y el número de cajas que caen en el ensayo definido anteriormente. iii) El chico quiere alcanzar el punto medio M de la caja que está en la base de la pila formada por las 3 cajas, lanzando la bola con velocidad v_1 , que forma también un ángulo de 12° con la horizontal. La magnitud de v_1 , ¿es más grande o menor que el valor anterior de \vec{v}_0 , 10m/s? Justifica la respuesta sin hacer cálculos.

41) Un punto se mueve de acuerdo con la ecuación vectorial dada por $\vec{r} = mt\vec{i} + n \sin(mt)\vec{j}$, donde n y m son dos constantes (números reales). a) Demostrar que el módulo de la aceleración es proporcional a la distancia entre la partícula y el eje OX. b) Determinar la ecuación de la trayectoria y representarla de forma gráfica (cualitativamente, en todo caso).

2.8. Ejercicios: Dinámica de la partícula

1) Calcular la fuerza que un hombre de 90kg ejercer sobre el piso de un ascensor cuando: a) Está en reposo el ascensor. b) El ascensor sube con velocidad constante de 1m/s. c) El ascensor desciende con velocidad constante de 1m/s. d) El ascensor asciende con aceleración constante de 1m/s. e) El ascensor desciende con aceleración constante de 1m/s.

2) Un tren formado por 3 vagones de 15000 kilopondios de peso cada forman una locomotora. El primer vagón actúa de máquina y ejerce una fuerza de tracción de 4800 kilopondios (kp). Sabiendo que la fuerza de rozamiento en cada uno de los vagones es de 100 kp, calcula: a) la aceleración del tren, b) la tensión en la unión de los dos primeros vagones, c) la tensión en la unión del segundo y tercer vagón.

3) Un bloque de 50kg está en reposo sobre un suelo horizontal. La fuerza horizontal mínima para que inicie el movimiento es de 15kp y la fuerza horizontal mínima para mantenerle en movimiento con una velocidad constante es de 10 kp. a) Calcular los coeficientes de rozamiento estático y cinético. b) Calcular la fuerza de rozamiento cuando se aplique al bloque una fuerza horizontal de 5kp.

4) Un cuerpo A de 10 kg situado sobre una mesa horizontal está unido,

mediante un hilo que pasa por la garganta de una polea, situada al borde de la mesa, al cuerpo B, de 5kg, que pende libremente como una plomada. Al dejarlo en libertad, este sistema se pone espontáneamente en movimiento. Se pide: a) el valor de la aceleración del sistema. b) La tensión en el hilo durante la caída. c) El espacio recorrido en los 2 primeros segundos de su movimiento. d) El calor desarrollado por el rozamiento en ese tiempo. Datos: el coeficiente de rozamiento entre A y la mesa vale 0.2, mientras que el peso de la polea y su rozamiento se consideran despreciables.

5) Se tiene un plano de 30° de inclinación y 10 m de longitud. a) Halla la velocidad, paralela al plano, que debe comunicarse a un cuerpo de 1kp para que al ascender llegue a final del plano con velocidad nula. b) El tiempo que tarda en recorrer el plano. c) El cuerpo, una vez parado, inicia el descenso debido a su peso. Halla el tiempo que tarda en recorrer los 10 metros del plano de nuevo. Dato: el coeficiente de rozamiento vale 0.1.

6) Un cuerpo desliza sobre una rampa inclinada de 45° sobre la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento 0.2. Calcula: a) El espacio recorrido al cabo de 3s de iniciarse el movimiento. b) La velocidad al cabo de dicho tiempo. c) El valor que debe tener el coeficiente de rozamiento para que descienda el cuerpo con velocidad constante.

7) Una piedra de 200 gramos se ata al extremo de una cuerda de 1 metro y se la hace girar en el plano vertical. Calcula: a) La velocidad mínima para que se produzca tal movimiento y la piedra no se caiga. b) Si la velocidad se duplica, calcula la tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria y en el más bajo. c) Si la cuerda se rompe en el momento en que la piedra pasa por el punto más elevado, indica razonadamente la forma en que se moverá la piedra. Dato: este tipo de problema se denomina péndulo cónico.

8) Halla la máxima velocidad a la que puede ir un auto por una curva sin peraltar, de radio 40 m, sin derrapar, suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo es de 0.5. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento fuese lo suficientemente grande como para que no derrapara, hallar la velocidad máxima que podría alcanzar sin volcar, siendo la altura del centro de gravedad sobre el suelo 75 cm y el ancho de la vía 1.5m.

9) Con ayuda de una cuerda se hace girar un cuerpo de 1kg en una circunferencia vertical de 1 m de radio, cuyo centro está situado 10.8 metros por encima del suelo horizontal. La cuerda se rompe cuando la tensión es de 11.2 kp, lo que ocurre cuando el cuerpo está en el punto más bajo de su

trayectoria. Se pide: a) La velocidad del cuerpo cuando se rompe la cuerda. b) El tiempo que tarda en caer al suelo. c) La velocidad en el instante de chocar con el suelo.

10) Un vehículo de 100 kp describe una curva de 20m de radio, con velocidad de 2m/s. El coeficiente de rozamiento es de 0.2. Determinar: a) Si el suelo es plano, la velocidad máxima que puede alcanzar el auto para que no se deslice lateralmente. b) Si no hubiese rozamiento, halla el peralte de la curva para que a esa velocidad no deslice lateralmente.

11) Un bloque de 5kg está sostenido por una cuerda y es arrastrado hacia arriba con una aceleración de 2m/s. a) Calcula la tensión en la cuerda. b) Si después de iniciado el movimiento la tensión de la cuerda se reduce a 49 N, indica el tipo de movimiento que ocurre. c) Si se afloja la cuerda por completo, se observa que el bloque sigue moviéndose, recorriendo 2m hasta detenerse. Halla la velocidad inicial en el momento en que se afloja la cuerda por completo.

12) El piloto de un aeroplano se lanza en picado a 400km/h y termina su picado describiendo, a esa velocidad, un arco de circunferencia vertical. Halla el radio mínimo para que la aceleración en el punto más bajo no exceda de $7g$, donde g es la aceleración de la gravedad. En ese momento, halla el peso aparente del piloto.

13) Un cuerpo de 2kg de masa pende del extremo de un cable. Calcula la tensión del cable si se mueve: a) Con aceleración de $5m/s^2$ hacia arriba. b) La misma aceleración, pero hacia abajo.

14) Una cuerda inextensible y sin masa que pasa por una polea sin rozamiento tiene colgadas de sus extremos masas m_1 y m_2 . Este sistema se llama máquina de Atwood. Hallar la aceleración de las masas y las tensiones en el hilo.

15) Una doble máquina de Atwood está formada por una polea, de la cual en un extremo cuelga m_1 y del otro extremo cuelga otra polea de la que a su vez cuelgan dos masas m_2 y m_3 . Suponiendo que esta segunda polea de la que cuelgan m_2 y m_3 tiene masa despreciable, calcula las tensiones en las 2 cuerdas y las aceleraciones de las 3 masas. Opcional: Resuelve el problema si la masa de la polea de la que cuelgan m_2 y m_3 no es despreciable, sino que vale m_4 . Opcional (II): Resuelve el problema considerando el efecto del llamado momento de inercia de las poleas (incluso la de la

primera, que sigue fija).

16) Un bloque de masa $m_1 = 30\text{kg}$ descansa sobre un plano inclinado de 30° y está unido mediante un hilo que pasa por una polea pequeña sin rozamiento a un bloque de masa $m_2 = 18\text{kg}$, que cuelga verticalmente. Si el coeficiente de rozamiento entre el plano y m_1 es de 0.2, halla: a) La aceleración de cada bloque. b) La tensión en la cuerda. c) La fuerza de rozamiento. Resuelve a), b) y c) si el rozamiento vale 0.1.

17) Una pelota de 160 g llega a la pared e un frontón con una velocidad de 50m/s. Si permanece en contacto con la pared durante 0.02 segundos, y sale rebotada en la misma dirección, responde a las siguientes preguntas: a) Indica si el momento lineal de la pelota se conserva. b) Halla el impulso que la pared ejerce sobre la pelota y la fuerza media que opone la pared.

18) Un cuerpo de masa 8kg se mueve a velocidad de 10m/s, que suponemos constante. Si una fuerza constante y opuesta al movimiento actúa durante 3s, comunicando una velocidad de 2m/s en sentido contrario, calcula: a) El impulso que actúa sobre el cuerpo. b) El valor de la fuerza. c) El momento lineal del cuerpo antes y después de actuar la fuerza.

19) Sobre un plano horizontal se coloca un cuerpo A de 280kp. Se le une, mediante una cuerda inextensible y sin masa que pasa por un apolea sin rozamiento, otro cuerpo B de 700 kp que desliza por una rampa de 30° , prolongación del plano horizontal. Calcula: a) La aceleración del sistema. b) La fuerza con la que hay que sujetar el cuerpo A para que el sistema se mueva con movimiento uniforme. No hay rozamiento.

20) Sobre un plano de 30° de inclinación se tiene un cuerpo. Halla la aceleración que debemos dar al plano, y en qué sentido, para que el cuerpo no baje. No hay rozamientos. Indica si cambia la respuesta y cómo si hay un rozamiento de coeficiente 0.2.

21) Se arrastra un sillón de 1m de largo y cuyo centro de gravedad se puede considerar a 0.5 m del suelo, con una aceleración de 2m/s, sobre un suelo de rozamiento 0.2. Siendo el peso del sillón igual a 20kp, halla la fuerza que se ejerce y las acciones sobre sus cuatro patas. La fuerza se ejerce a lo largo de la horizontal que contiene al centro de gravedad (c.d.g.). Dato: $g=10\text{m/s}^2$.

22) Determinar la altura de un plano inclinado de 10 m de base, de

modo que un cuerpo que se desliza sin rozamiento a lo largo de este plano, tarde el menor tiempo posible en llegar a su base. Calculo dicho tiempo.

23) Una partícula de 2kg de masa se mueve con velocidad de $4\vec{i}$ m/s. En el mismo instante inicial, el vector de posición vale $6\vec{j}$ m. Calcular el momento angular respecto del origen de coordenadas.

24) Dos cuerpos, de 5 y 10 kg, situados uno junto a otro, son empujados por una fuerza de 120 N que se le aplica a uno de ellos. Hallar la fuerza neta sobre cada uno. Razona si se obtiene el mismo resultado si la fuerza se aplica sobre el otro cuerpo.

25) En una mesa horizontal, hay dos cuerpos A y B conectados por una cuerda. El cuerpo B, a su vez, se conecta a una polea situada en el extremo de la mesa y de masa despreciable. De dicha polea cuelga un cuerpo C. Si las masas de A, B y C son 2, 3 y 5 kg respectivamente, y si el coeficiente de rozamiento entre A y B, y B y el suelo, valen ambos 0.2, calcula las tensiones de las cuerdas y la aceleración del sistema. Las cuerdas se consideran ideales e inextensibles.

26) En una mesa horizontal hay dos cuerpos A y B, estando B situado encima del cuerpo A. El cuerpo A se conecta a una polea situada en el extremo de la mesa, y de dicha polea cuelga un cuerpo C. El coeficiente de rozamiento entre A y el suelo es de 0.2, mientras que las masas de A y de C valen 10 y 5 kg. La cuerda y la polea son ideales. Calcula: a) La masa mínima de B para que el sistema NO se mueva. b) Si Eliminamos B, halla la aceleración del sistema.

27) UN tiovivo está formado por un aro de 3m de radio del que cuelga una cuerda de 4m. El conjunto gira alrededor de un eje perpendicular al aro en su centro. Si de la cuerda se cuelga un hombre del 80kg, halla la velocidad angular con la que ha de girar el conjunto para que la cuerda se separe de la vertical un ángulo de 37° .

28) Halla la aceleración mínima que debe llevar el un carrito formado por un plano inclinado de 30 grados y una polea en su extremo superior a la que se adhiere un cuerpo de masa M para que dicha masa no se caiga. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo (en su pared vertical) vale μ .

29) Una masa de 4kg se halla en un plano inclinado de 45° y sujeta por un muelle a la parte superior del plano. El muelle sufre una deformación de 5cm. Halla la constante elástica del muelle y la aceleración si, tras alargar el muelle 2 cm más, se deja el cuerpo en libertad. No hay rozamiento.

30) Un bloque de 100 kg de masa se arrastra por una superficie horizontal por acción de una fuerza de 1000N. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0.25, calcula la velocidad que adquiere, partiendo del reposo, al cabo de un minuto y el espacio recorrido en ese tiempo.

31) Un bloque de hierro de 7kg de masa es arrastrado sobre una mesa horizontal de madera por acción de una masa de 2kg que cuelga verticalmente de una cuerda, unida al bloque de hierro, que pasa por una polea. El coeficiente de rozamiento entre el hierro y la mesa es 0.15. Hallar la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda.

32) Sobre un plano inclinado de 30° con respecto a la horizontal se coloca un cuerpo de 100 g de masa cuyo coeficiente de rozamiento con el plano es de 0.4. Calcular la fuerza que provoca el deslizamiento, la aceleración, la velocidad a los 5 segundos de iniciado el movimiento y el espacio recorrido en ese tiempo.

33) Un cuerpo de 100 g de masa se impulsa a lo largo de un plano inclinado de 30° con respecto a la horizontal. La velocidad instantánea es de 5m/s inicialmente, y asciende por el plano hasta que se para. El coeficiente de rozamiento es de 0.2. Calcular el espacio recorrido sobre el plano hasta que se detiene y el tiempo que tarda en hacerlo.

34) Por la garganta de una polea que gira sin rozamiento alrededor de su eje horizontal, pasa un hilo de masa despreciable cuyos extremos sostienen dos masas M y m . En una primera experiencia, los dos ramales de la cuerda son verticales, valiendo $M=539\text{g}$ y $m=441\text{g}$. Despreciando la masa de la polea, calcular la aceleración del sistema, el espacio recorrido y la velocidad adquirida al cabo de 3 segundos. En una segunda experiencia, el ramal que sostiene la masa menor m es paralelo a la línea de máxima pendiente de un plano inclinado 30° sobre la horizontal, por el que desliza m sin rozamiento. Calcular los valores que deben tener M y m , cuya masa se mantiene en total igual que en la experiencia anterior (980g en total, $M+m$), para que la velocidad del sistema al cabo de los 3 segundos primeros sea la misma que en la experiencia anterior. Calcular la tensión del hilo durante el movimiento. En esta segunda experiencia se corta el hilo en el

instante en que han transcurrido 3 segundos de comenzar el movimiento. Calcula la posición y la velocidad de m al cabo de 1.2 segundos de haberse roto el hilo. Dato: $g=9.8m/s^2$.

35) Sobre un plano inclinado 30° , se tiene una masa de 500 g que está unida por una cuerda que pasa por una polea con otro cuerpo de 200 g en un plano inclinado 60° con respecto a la horizontal. El coeficiente de rozamiento en ambos planos es de 0.2. Calcula la aceleración del conjunto, la tensión en la cuerda y el espacio recorrido por cada masa en un segundo.

36) Tenemos un plano inclinado 40° sobre la horizontal, y su longitud total es de 1 metro. En la parte más alta abandonamos un cuerpo prismático para que baje deslizándose. Dibujar todas las fuerzas que hay sobre el objeto deslizante. Sabiendo que el rozamiento vale 0.5, indica si deslizará o no. En caso afirmativo, halla la aceleración de bajada, el tiempo invertido en la misma y la velocidad con la que llega al extremo del plano.

37) En el extremo superior de un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal, hay una polea de masa y rozamiento despreciables, por cuya garganta pasa una cuerda inextensible y sin masa. Uno de los ramales de la cuerda sostiene una masa de 10 kg que cuelga libremente y el otro está sujeto a una masa de 10 kg que reposa sobre el plano. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0.5, calcula la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda.

38) Un cuerpo de 2 kg de masa se encuentra sujeto al extremo de una cuerda de 100 cm de longitud y, al girar verticalmente describiendo una circunferencia, cuando pasa por el punto más bajo, la tensión vale 100 N. Si en ese momento la cuerda se rompe, se pide: a) La velocidad con la que sale despedida el cuerpo. b) La tensión en la cuerda en el punto más alto de la trayectoria si no se rompiera.

39) Un cuerpo de masa m desciende sin rozamiento por un plano inclinado que forma un ángulo α con el suelo de un ascensor. Calcula la aceleración de m respecto al plano inclinado en los siguientes casos: a) El ascensor sube con velocidad constante. b) El ascensor baja con aceleración constante. c) El ascensor baja con desaceleración constante. d) Se rompe el cable del ascensor.

40) Una masa m colocada sobre una mesa lisa horizontal está unida, mediante una cuerda ideal que pasa por un agujero a la mesa, a un cuerpo

de masa M . Si la masa m describe una circunferencia de radio R con velocidad V , halla el valor de la tensión para que se mantenga el movimiento. Halla la aceleración del sistema.

41) El vector de posición de un punto está dado por: $\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$. En dicha ecuación a, b, ω son constantes reales. Demostrar: a) Que la trayectoria es una elipse. b) Que la fuerza que actúa sobre el punto va dirigida hacia el origen y su módulo es proporcional a la distancia de la partícula al origen.

2.9. Ejercicios: Dinámica de sistemas de partículas

1) Un proyectil, en el punto más alto de su trayectoria, lleva una velocidad V y estalla, de forma que se rompe en 3 pedazos iguales. Uno de ellos sale impulsado hacia atrás con una velocidad $v_1 = V/2$. Los otros dos salen hacia delante formando un ángulo de 60° y -60° con respecto a la horizontal (eje OX). Calcular las velocidades de los 2 trozos.

2) Un revólver de 800 g de masa dispara una bala de 10 g con una velocidad de 700m/s. Calcular la velocidad de retroceso de esa arma.

3) Una avioneta de masa total 3200 kg, se mueve horizontalmente a 600km/h referido a un sistema de referencia en tierra y lanza horizontalmente una masa de 40kg con una velocidad (referida a la avioneta) igual a 600km/h. Calcular: a) La velocidad de la avioneta tras el lanzamiento. b) La velocidad de la masa 5 segundos después de ser lanzada. Dar los resultados respecto al sistema de referencia en la tierra y respecto al sistema de referencia de la avioneta.

4) Un hombre de masa 80 kg, en pié, se encuentra en el borde de una balsa de 40kg. Da un salto con una velocidad de 2m/s para saltar a otra balsa de 60kg. Calcular la velocidad con la que se mueve cada balsa después del salto.

5) Un átomo de sodio, inicialmente en reposo, emite un fotón de luz amarilla (598 nm de longitud de onda). ¿Cuál es la dirección y el módulo de la velocidad de retroceso del átomo cuya masa es de $3.8 \cdot 10^{-26} \text{kg}$? El

fotón tiene un momento lineal dado por $p = h/\lambda$, donde λ es la longitud de onda y h es la constante de Planck. $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$.

6) Un hombre de 60kg está de pie en una pista de hielo, de rozamiento despreciable. Si da una patada a un patín de 0.5kg y éste sale con una velocidad de 4m/s ¿qué velocidad adquiere el hombre?

7) Un cuerpo de 4kg de masa se mueve con una velocidad de 10m/s en el sentido positivo del eje OX, chocando contra otra masa de 16kg situada en reposo en el origen. Tras el choque, la masa de 4kg sale con una velocidad de 5m/s, formando un ángulo de 60° con el eje X. Calcular la velocidad de la otra masa y la velocidad del centro de masas.

8) Dos cuperos de masas $m_1 = 200\text{g}$ y $m_2 = 800\text{g}$ están unidos por un resorte o muelle. En cierto instante, la velocidad de la primera masa es $\vec{v}_1 = 0.5\vec{i}\text{m/s}$ y la velocidad de la segunda masa $\vec{v}_2 = 2\vec{i}\text{m/s}$. Calcular la velocidad de la primera masa en el instante en que la segunda masa tiene velocidad $\vec{v}_2 = \vec{i}\text{m/s}$.

9) Una granada de 3kg cae verticalmente, explota y se divide en dos trozos cuando se encuentra a 1000 m, teniendo en ese momento una velocidad vertical de 60m/s. a) Calcular la posición del centro de masas 5 segundos después de la explosión. b) Sabiendo que las masas de cada fragmento son 1kg y 2kg respectivamente, y que el primer trozo se mueve, inmediatamente después de la explosión, formando un ángulo de 30° con la vertical y con una velocidad de 100m/s, hallar la velocidad del otro trozo. c) Determinar la posición de ambos trozos a los 4 segundos de ocurrir la explosión.

10) Un bote de 2kg de masa explota, rompiéndose en tres trozos. Dos de ellos tienen una masa de 0.5 kg cada uno y salen despedidos en direcciones perpendiculares con velocidad de 20m/s. Calcular el vector de velocidad del tercero inmediatamente después de la explosión.

11) Un sistema está formado por tres partículas materiales de masas 2kg, 3kg y 5kg respectivamente. En un determinado momento, los vectores de posición de las mismas partículas son: $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{r}_2 = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_3 = -2\vec{j}$, mientras que sus velocidades son $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 3\vec{j}$ y $\vec{v}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcular, en dicho instante: a) El vector de posición del centro de masas, b) La velocidad del centro de masas, c) El momento lineal del sistema.

12) Una masa de 2kg está colocada en el eje OK en el punto $x_1 = 2m$, y otra masa de 4kg está situada en el punto $x_2 = 3m$. La primera se mueve en el sentido positivo del eje OX con velocidad 5m/s y la otra se mueve con 3m/s en el sentido contrario. Determinar: a) La posición del centro de masas del sistema en el momento inicial. b) La velocidad del centro de masas. c) El momento lineal del sistema.

13) Tres masas de 2,3 y 4 kg respectivamente se mueven a lo largo del eje OX con velocidades de 5,-2 y 3m/s respectivamente. Hallar: a) El momento lineal total del sistema. b) La velocidad del centro de masas.

14) Calcular la posición del centro de masas del sistema Tierra-Luna, sabiendo que la distancia entre ellas es de $D = 60R$, donde R es el radio de la Tierra. Datos: $M_{\oplus} = M_T = 6 \cdot 10^{24}$, $M_L = 7.3 \cdot 10^{22}kg$.

15) Dos masas m_1, m_2 inicialmente en reposo están situadas a una distancia de 3 angstroms (Å). Esán cargadas eléctricamente y se atraen de modo que van a caer una sobre la otra. Determina: a) La posición y movimiento del centro de masas del sistema referido a la posición inicial de la masa m_1 . b) Posición del punto de encuentro.

16) Tres masas iguales ocupan los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Hallar la posición del centro de masas.

17) Un punto material aislado, de 4kg de masa, se mueve inicialmente con velocidad de 2m/s según el eje OX. Al cabo de 10 s, y debido exclusivamente a fuerzas interans, la partícula se escinde en dos, de masas iguales, una de las cuales se mueve formando un ángulo de 45° , respecto a la dirección inicial del movimiento, con una velocidad de 10m/s. Calcular la velocidad de la otra partícula y la posición del centro de masas 15 segundos después de la explosión.

18) Un núcleo en reposo emite un electrón con momento lineal a $9.22 \cdot 10^{-16} gcm/s$. Perpendicularmente a la dirección del electrón, se emite un neutrino con momento igual a $5.33 \cdot 10^{-16} gcm/s$. a) ¿En qué dirección retrocede el núcleo residual? b) ¿Cuál es su momento lineal?

19) Calcular el centro de masas de un disco circular homogéneo de radio R, que tiene un orificio circular de radio R/2 tangente a su periferia.

20) Hallar el centro de masas (CDM) del siguiente sistema de puntos

materiales (con masa y coordenadas indicadas): $m_1 = 3\text{kg}$ situada en $(0,1,3)$, $m_2 = 4\text{kg}$ situada en $(-1,2,1)$, $m_3 = 2\text{kg}$ situada en $(1,0,-5)$, $m_4 = 1\text{kg}$ situada en $(-2,-1,3)$.

21) En una vía horizontal hay un vagón plataforma de 2000 kp que puede moverse sin rozamiento. En él hay 10 hombres de un peso medio cada de 75kg. Si estos hombres van corriendo uno tras otro a 3m/s y saltan desde el extremo de la plataforma, calcular: a) La velocidad de la plataforma si inicialmente estaba en reposo. b) Si sería lo mismo correr todos juntos o bien separados como se supuso antes. c) Razonar las mismas cuestiones si la plataforma se mueve inicialmente con velocidad de 2m/s y los hombres corren en sentido contrario para saltar a 3m/s.

22) Dos puntos materiales A y B separados 20 cm e inicialmente en reposo, se atraen con una fuerza igual a $1.3 \cdot 10^{-10}\text{N}$. Si las masas respectivas valen 0.2 y 0.4 kg, hallar la distancia a la posición de A del punto de choque y estudiar el movimiento del centro de masas del sistema.

23) Una granada inicialmente en reposo explota en tres fragmentos. Uno sale hacia el Oeste con velocidad de 18km/s y otro sale hacia el Norte con velocidad de 10km/s. Hallar la velocidad del tercer fragmento.

24) Un sistema está formado por dos partículas con las siguientes propiedades: $m_1 = 1\text{kg}$, $x_1 = t$, $y_1 = 2t$ (en metros y segundos); $m_2 = 2\text{kg}$, $x_2 = t - 1$, $y_2 = t$. Calcular al cabo de 2 segundos: a) La posición del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas. c) El momento lineal del sistema.

25) Dos masas iguales de 500 g que se encuentran en los extremos de una barra de masa despreciable y de 1 metro de longitud giran en torno al centro de la barra con una velocidad de 2m/s. Calcular el momento angular del sistema respecto a su centro de masas.

26) Tres puntos materiales de igual masa, 0.5 kg, están unidos por tres muelles iguales. Si se aplica la fuerza de $\vec{F} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$ a una cualquiera de sus partículas, calcular: a) La aceleración del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas al cabo de 2 segundos si la velocidad inicial es nula. c) El momento lineal del sistema. d) El desplazamiento del CDM en el tiempo anterior.

27) Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo de 4 cm de radio y 6cm de altura, cuya densidad vale $3.8g/cm^3$, con respecto al eje de simetría. Calcular su radio de giro. Calcular su momento angular cuando gira alrededor del eje de simetría con velocidad angular igual a $10rad/s$.

28) Dos esferas de 30 y 80 gramos de masa están unidas por una barra rígida de masa despreciable. La distancia entre los centros de las esferas vale 25cm. Calcular el momento de inercia del sistema en los siguientes casos: a) Respecto del eje A, que pasa a través de las esferas y en la dirección de la barra. b) Un eje B, situado a 20 cm a la derecha de la masa situada a más a la izquierda respecto de su centro y perpendicular a la barra. c) Un eje C, perpendicular a la barra, y que está pasa por la mediatriz de la recta que une las dos esferas. d) El momento angular del sistema cuando gira alrededor del eje C on una velocidad angular de $4rad/s$.

29) Calcular el momento angular de un cubo de 10 cm de arista y 5kg de masa que gira alrededor de un eje que pasa por los centros de dos caras opuestas, con velocidad angular de $10rad/s$. Dato: $I_x = \frac{1}{12}M(y^2 + z^2)$, $I_y = \frac{1}{12}M(x^2 + z^2)$, $I_z = \frac{1}{12}M(x^2 + y^2)$.

30) Calcular el momento angular de un cilindro de 60 cm de diámetro y 100 g de masa que gira alrededor de un eje paralelo al de simetría y distante de él 18cm, con una velocidad angular de $8 rad/s$.

31) Un patinador gira, en un determinado instante, con una velocidad angular de $18 rad/s$ y su momento de inercia es de $20kgm^2$. Un instante después, cambia de postura y su momento de inercia se hace igual a $10kgm^2$. Calcular su velocidad angular.

32) Un cuerpo de 500 g gira alrededor de un eje por la acción de un par de $0.8N \cdot m$. Sabiendo que el radio de giro del cuerpo es de 50 cm, calcular: a) El momento de inercia del cuerpo, b) La aceleración angular, c) La velocidad angular al cabo de 5 segundos. d) La velocidad lineal, al cabo de 5 segundos, de un punto situado a 40 cm del eje de giro.

33) Un disco de 20 kg y radio 0.8cm puede girar libremente alrededor de su eje principal. Calcular su aceleración angular cuando sobre su borde se aplica una fuerza de 20N.

34) Una rueda de 0.5 m de radio de giro y 50 kg de masa gira alrededor de un eje perpendicular a su centro, con una velocidad angular de 150 rad/s, y está sujeta a un par de rozamiento de $4N \cdot m$. Calcular: a) El tiempo que tarda en detenerse completamente. b) Las vueltas que da antes de pararse.

35) Un cilindro de 10 kg y 0.3 m de radio está girando alrededor de su eje de simetría a razón de 800 r.p.m. Calcular la fuerza tangencial que es preciso aplicarle para conseguir detenerlo en 30s.

36) Sobre un cilindro homogéneo de masa 5kg y radio 0.1m, que descansa sobre un plano horizontal, se aplica una fuerza tangencial de 2 N. Calcular: a) las aceleraciones angular y lineal del cilindro, b) la fuerza de rozamiento.

37) Un cilindro de radio 10 cm y masa 4kg es arrollado por una cuerda. Calcula la aceleración angular del cilindro: a) Si se la cuelga un peso de 10kp. b) Si se tira de la cuerda con una fuerza de 10kp.

38) Dos masas puntuales de valor m , iguales, se colocan en los extremos de una varilla rígida de masa despreciable y longitud 21 metros. La varilla gira alrededor de un eje vertical, formando con él un ángulo constante, y con velocidad angular constante ω . Hallar el momento angular del sistema.

39) Calcular el momento de inercia de un disco de 20 cm de radio respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro. El disco tiene un orificio circular, de 10 cm de diámetro, con el centro en el punto medio de uno de los radios del disco. El espesor del disco es despreciable y su densidad superficial es de $3000kg/m^2$.

40) Un plato de tocadiscos, de radio R y momento de inercia I , gira en sentido de las agujas del reloj con velocidad angular ω_0 . Sobre el borde del plato se mueve una mosca de masa m , en sentido contrario al de las agujas del reloj, con una velocidad v respecto de tierra. La mosca se encuentra una miga de pan de masa despreciable y se detiene. Calcular la velocidad angular del plato al detenerse la mosca. No hay rozamientos.

41) Se dispara una granada con una velocidad inicial de 600m/s y elevación 45° . Al llegar al punto más alto de su trayectoria, la granada explota en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales cae al suelo con velocidad inicial nula. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae el otro

fragmento? Dato: $g = 10\text{m/s}^2$.

42) Una esfera homogénea rueda sin deslizar por un plano inclinado 30° . Si la masa de la esfera es de 2kg, calcular la aceleración del centro de la esfera y la fuerza de rozamiento.

2.10. Ejercicios: Trabajo y energía

1) Hallar el trabajo realizado por una fuerza de 10 N que forma un ángulo de 15 grados con el eje OX, cuando actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo de dicho eje en los siguientes casos: a) Desde $x=2\text{m}$ hasta $x=7\text{m}$. b) Desde $x=5\text{m}$ hasta $x=-2\text{m}$.

2) La posición de un punto material viene dada por el vector $\vec{r} = x\vec{i}$. Sobre ella actúa una fuerza $\vec{F} = -3x\vec{i}$. Calcular el trabajo para el desplazamiento desde $x = -2\text{metros}$ hasta $x = 3\text{ metros}$.

3) Una partícula está sometida a una fuerza que vale:

$$\vec{F} = -\frac{4 \cdot 10^4}{z^2} \vec{k} \text{ N}$$

y su posición viene dada por el vector $\vec{r} = (x, y, z)$. Calcular el trabajo cuando se desplaza desde un punto con $z = 6.4 \cdot 10^6$ hasta otro en el que $z = 6.5 \cdot 10^6$.

4) Un camión que pesa 50000 N sube por una pendiente de 10 grados a velocidad constante. Expresar la fuerza y el vector de posición en función de sus componentes vertical y horizontal. Hallar el trabajo para un recorrido de 200 m medidos sobre la carretera.

5) Un trozo de hielo de 5kg, a 0° , cae desde 20 m de altura. ¿Cuánto hielo se funde? Datos: calor de fusión del hielo 335J/g. Suponer que el calor desarrollado en el choque se invierte solamente en fundir el hielo.

6) Sobre un sólido en reposo de masa 5kg se aplica una fuerza de 100 N formando un ángulo de -30° con la horizontal. Calcular la velocidad que tiene cuando ha recorrido 5 m bajo la acción de dicha fuerza. El coeficiente de rozamiento vale $\mu = 0,2$. Tomar $g = 9.8\text{m/s}^2$.

7) Sobre un péndulo, cuya lenteja es de 500 kg, se dispara un proyectil de 50 g a 500m/s. El proyectil atraviesa la lenteja y sale a una velocidad de 300m/s. Calcula la altura a la que se eleva la lenteja del péndulo.

8) Un sistema se mueve impulsado por una fuerza $\vec{F} = (4t^3 - 6t)\vec{i}$, donde t es el tiempo transcurrido. Su desplazamiento viene dado por la expresión $s = t^2 - 1$. Calcular el trabajo realizado desde $s_0 = 3m$ hasta $s_f = 8m$.

9) Un cuerpo de 0.2 kg se lanza desde un punto a 20 m por encima de la superficie terrestre, formando un ángulo de 60° hacia arriba, con velocidad de 20m/s. a) ¿Cuál es su energía total? b) ¿Cuál es su energía total cuando está a 25 m sobre el nivel del suelo? c) ¿Cuál es su velocidad a esa altura?

10) Un objeto de masa m cae resbalando con velocidad inicial despreciable desde lo alto de una superficie semiesférica de radio R . Expresar el ángulo para el cual deja de estar en contacto con la superficie.

11) Un bloque de 2kg situado a 5m de altura y en reposo, empieza a deslizar sobre una rampa sin rozamiento y a continuación recorre 6 metros sobre una superficie horizontal rugosa hasta que se para. a) Calcula la velocidad del bloque hasta al final de la rampa. B) Calcula el trabajo realizado por el rozamiento sobre el bloque. c) Halla el valor del coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.

12) Se dispara una bala de 10 g en dirección horizontal y choca con un bloque de madera de masa 10 kg que está en reposo sobre una mesa horizontal. La bala queda incrustada en el bloque y el conjunto resbala sobre la mesa, recorriendo 0.15 m hasta pararse. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es de $\mu = 0,4$. Calcular: a) La velocidad del conjunto después del choque. b) La velocidad de la bala antes del choque.

13) Calcula la potencia desarrollada por un ciclista que, con su bicicleta, pesa 700 N y sube una pendiente de 10 grados a velocidad de 30km/h.

14) Un objeto de 10kg de masa se eleva verticalmente hasta cierta altura, a la que llega con una velocidad de 20 m/s. Para ello se ha realizado un trabajo de 6KJ. ¿Cuál es la variación de energía potencial? Calcula la altura alcanzada por el objeto.

15) Con un motor de 2C.V. se eleva una carga de 20 kp a 30m de altura.

¿Qué tiempo se emplea, suponiendo un rendimiento del 80 %?

16) Se dispara una bala de 10 g, con velocidad de 800m/s y se incrusta en un bloque de madera, en el que alcanza una profundidad de 30cm. Calcula la fuerza media con la que se opone la madera al movimiento de la bala.

17) Calcular el rendimiento de un turbina que recibe un caudal de $20m^3/s$ de agua a una velocidad de 20m/s, produciendo una potencia de $2.352 \cdot 10^3W$.

18) Un moto elevador, de 4CV de potencia, se usa para llenar un depósito de 200 metros cúbicos cuyo borde está situado a 3 m sobre el nivel de un lago. Calcular, si el rendimiento del motor es 0.8, el tiempo empleado para esa tarea.

19) Se quiere instalar una bomba para elevar el caudal de 420l/min de agua a un depósito que se encuentra a 25 m de altura. Calcula la potencia del motor, en CV, si su rendimiento es del 75 %.

20) Un cuerpo de 2kg se lanza sobre un plano horizontal con una velocidad inicial de 6 m/s. Si el coeficiente de rozamiento vale 0.3, calcula el tiempo que tarda en detenerse y el espacio recorrido. Finalmente, calcula la energía disipada.

21) Un bloque de 2kg se lanza a lo largo de una superficie horizontal rugosa con $\mu = 0.2$ y velocidad de 20 m/s. Una vez el bloque ha recorrido 5m por la superficie horizontal, encuentra una rampa inclinada 30 grados con respecto a la horizontal, con mismo coeficiente de rozamiento. Calcula la altura que alcanza el bloque, medida sobre la horizontal, al ascender por el plano inclinado.

22) Una masa de 2kg es lanzada con velocidad de 10m/s desde la posición A y sigue una trayectoria horizontal. En el punto B (a la derecha de A) sigue una trayectoria curvilínea en forma de U hasta llegar a un punto D, al borde de un plano inclinado de 60° respecto la horizontal. Indica de forma razonada a qué altura asciende en el plano inclinado.

23) Un cuerpo de masa m y pequeñas dimensiones desliza sin rozamiento por el riel de un plano inclinado α grados, hacia abajo partiendo del reposo. En el extremo del plano, a altura cero, hay un "loop" de radio R . La altura máxima del plano inclinado es $OA=3R$, y la distancia BD del

punto inferior B del loop y del plano inclinado hasta un punto horizontal D es $BD=5R$. Halla la velocidad en B, en C (punto más alto del loop), y en D (final del trayecto). En el caso de que existiera una fuerza de rozamiento constante durante todo el trayecto, de valor $F = mg \sin \theta$, indica el lugar donde se detiene el cuerpo.

24) Un punto material o partícula se mueve sobre el eje OX desde el origen hasta un punto situado 2 m en el eje positivo de ese mismo eje. La fuerza es $F = 2x + 3x^2$. Calcula el trabajo realizado sobre la partícula.

25) Una partícula de 0.5 kg se mueve con una velocidad de 2 m/s y choca con otra de 0.6 kg que estaba en reposo. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico, hallar la velocidad de cada partícula después del choque.

26) Una pelota de 0.1kg choca perpendicularmente con una pared a 2 m del suelo. Si la velocidad de la pelota era de 15 m/s, calcular: a) La distancia respecto de la pared a la que llega al suelo. b) Las componentes de la velocidad en ese momento. c) La altura máxima alcanzada tras el choque. Ayuda: suponer que todos los choques son elásticos.

27) Una bola de 2kg, animada con velocidad 0.8m/s, choca frontalmente con otra de 3kg y velocidad 0.4m/s en la misma dirección y sentido. Suponiendo que el choque es elástico, calcular: a) Las velocidades después del choque. b) El cambio en el momento lineal de cada bola. c) El momento lineal total.

28) Una pelota se deja caer desde 2m, y después de botar en el suelo alcanza una altura de 1.2m. Calcular: a) El coeficiente de restitución. b) La velocidad con que debería llegar al suelo para que alcanzara 3 m de altura.

29) De un mismo punto en el techo cuelgan dos hilos inextensibles de masa despreciable. En los extremos se cuelgan dos masas m_1, m_2 . La primera masa vale 0.1kg y la segunda 0.2kg. La toma la segunda masa y se lleva hasta una altura d respecto la primera masa, que se queda colgando en posición vertical. Si d vale 0.2 m, y se deja caer la segunda masa sobre la primera, hallar las alturas que alcanzan las bolas en los siguientes casos: a) Elástico. b) Completamente inelástico ($k=0$). c) Semielástico con $k=0.9$.

30) Un bloque de 2kg se mueve en un plano con velocidad $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Este bloque choca contra otro de 1kg y velocidad $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$. Tras el choque permanecen unidos. Calcula la pérdida de energía cinética tras el choque.

31) Una bolita de acero de masa 10 g cae sobre un alosa de mármol y después de botar alcanza una altura igual al 90 % de la desde la que cae. Si se deja botar de forma continuada, calcular: a) La altura a la que sube al cabo de cinco botes. b) La pérdida de energía cinética total al cabo de los 5 botes.

32) Calcular la energía cinética de rotación de un cilindro de 2kg y 6 cm de radio, si gira a razón de 200 vueltas por minuto alrededor de su eje de simetría.

33) Un disco de masa 20 kg y radio 0.8 metros está inicialmente en reposo y se le aplica una fuerza de 20 N tangente a su borde durante 10 s. Calcular sus velocidades angulares al cabo de: a) 2s, b) 8s, c) 10 s. Calcular su energía cinética al cabo de 8 s.

34) Las partes giratorias de una máquina tiene una masa de 50kg y un radio de giro de 50cm. Calcular, cuando giran a 1200r.p.m., a) el momento angular, b) la energía cinética, c) el par que es necesario aplicar para conseguir esta velocidad angular en 10 s, partiendo del reposo.

35) Un volante de 1m de diámetro puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular a su centro. Se arrolla una cuerda sobre la circunferencia del volante, que inicialmente está en reposo, y se tira de ella con una fuerza de 10 N constante. En 5 segundos, se han desenrollado 8.6 metros de cuerda. Calcular: a) la aceleración angular al cabo de 5s, b) La velocidad angular en dichos 5 segundos, c) la energía cinética en ese tiempo, d) el momento de inercia del volante.

36) Un cilindro macizo de 80 cm de diámetro y 100 kg de masa rueda sin deslizar por un plano inclinado de 5m de altura. Sabiendo que en la parte superior del plano estaba en reposo, calcular su energía cinética: a) de traslación, b) de rotación, c) total, cuando haya llegado a la base del plano.

37) Una regla de longitud L se sostiene verticalmente por un extremo apoyada de un plano horizontal y se deja caer. Hallar la velocidad del otro extremo al llegar al suelo, si el extremo apoyado en el suelo no resbala.

38) Desde lo alto de un plano inclinado se sueltan un cilindro y una esfera homogéneos, de masa m y radio R , iguales, pero la esfera se suelta 1 segundo después del cilindro. Suponiendo que ruedan sin deslizar y que no hay rozamiento, razona si la esfera alcanza al cilindro. En caso afirmativo, calcular el tiempo que tarda en alcanzarlo.

39) Una rueda gira con velocidad angular de 500 r.p.m. alrededor de un eje de momento de inercia despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo e idéntica a la anterior, se conecta mediante un embrague al mismo eje. Calcular la velocidad angular del conjunto. Razonar si se conserva la energía cinética.

40) Una bola de billar recibe un golpe con el taco. Si conocemos la velocidad inicial de la bola, v_0 , su radio R , su masa M y la fuerza de rozamiento que la permite rodar sin deslizar, calcular cuánto avanza la bola antes de detenerse.

41) Un cilindro se coloca en la parte superior de un plano inclinado 20° y de longitud $9/6$ metros. Si el cilindro rueda sin deslizar, hallar la velocidad con que llega al final del plano.

42) Dos cuerpos de igual masa descienden por un plano inclinado desde la misma altura. Uno de ellos rueda sin deslizar y el otro desliza sin rodar. Se supone que ambos tienen la misma forma. Explica razonadamente cuál llega antes al suelo.

43) Una barra de longitud 0.80 m y masa 6.4kg está suspendida de un eje horizontal a 20 cm de su extremo superior. En su extremo inferior choca un cuerpo de masa 1kg que se desplaza horizontalmente a 10m/s y que tras el choque sigue con velocidad de 4m/s. Calcula: a) la velocidad angular de la barra después del choque, b) la velocidad lineal de los dos extremos de la barra, c) la pérdida de energía cinética del sistema. Dato: el momento de inercia de la barra respecto a un eje que pasa por su centro es igual a $I = (1/12)ML^2$.

44) Un yo-yo está formado por dos discos de 6 cm de diámetro y 0.5 cm de altura unidos por otro cilindro de 2cm de diámetro y 1 cm de altura. Todos ellos son coaxiales. Sobre el cilindro central se enrolla un hilo de 1.5m de longitud y masa despreciable y se suelta el YO-YO. Calcular la velocidad del sistema cuando haya descendido 1 metro, sabiendo que la

masa de cada disco es de 50 g y la del cilindro interior es de 2g.

45) Dos partículas iguales, de masa m , se encuentran en los extremos de una varilla de longitud L y masa despreciable. El sistema gira con velocidad angular ω_0 constante, en torno a un eje fijo perpendicular a la varilla a una distancia $1/3$ de uno de sus extremos. Calcular: a) la velocidad del centro de masas, b) el momento angular respecto al punto de corte con el eje de giro, c) la energía cinética del sistema.

2.11. Ejercicios avanzados

1) MRUA en 1D y 3D. Supongamos que la aceleración es constante de un cuerpo y que se conoce la velocidad inicial del móvil y su posición inicial. Hallar la posición y la velocidad del móvil en 1D y 3D.

2) Movimiento de una pulga. Una pulga salta 0.1 m en un salto vertical. Halla su velocidad inicial. Si ha alcanzado esa velocidad mediante una extensión de sus patas en una distancia de 0.0008 m, halla su aceleración inicial. La distancia de aceleración en el ser humano es de 0.5 m. Si un hombre saltase con la misma aceleración que una pulga, calcula la altura a la que llegaría. Solución: $v(\text{pulga},0)=1.4\text{m/s}$; $a=1226\text{m/s}^2$, $h=62.5\text{m}$.

3) Supongamos una partícula distante 0.1 m de un eje motor que gira a 3000rpm. Calcula la aceleración centrípeta del objeto y compararla con la de la gravedad. Sol.: $a/g=4028$.

4) Supongamos un objeto de 5 kg de masa y velocidad de 5m/s. En $t=0$, el objeto entra dentro de una zona donde experimenta una aceleración de resistencia, proporcional a la velocidad, $a = \alpha v$, y donde α es una constante positiva igual a 2s^{-1} . a) Hallar la expresión para la velocidad del objeto a los 0.5 s, suponiendo que en el instante inicial el objeto estaba en el origen de coordenadas. b) Hallar las coordenadas del punto donde se para. Sol.: $x(t) = v_0/\alpha(1 - e^{-\alpha t})$, $x(0,5) = 2,5\text{m}$.

5) Un hombre pesa 80 kg y un chico de 40kg de masa llevan patines en una superficie de hielo con rozamiento despreciable. Tras empujarse mutuamente, el hombre se leja del chico a una velocidad de 0.3 m/s respecto al hielo. Halla la distancia a la que se encuentran al cabo de 5 s. Sol.: 4.5m.

6) Una rana de 50 g de masa está en el extremo de una tabla de madera de 5 kg de masa y de 5 m de longitud. La tabla está flotando en la superficie de un lago. La rana salta con velocidad inicial v_0 formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcula el valor de la velocidad inicial para el que la rana, al saltar, llega al otro extremo de la tabla. Suponer despreciable el rozamiento de la madera y el agua. Sol.: $v_0^2 = gL/((1+m/M) \sin 60)$. $v_0 = 7,49 \text{ m/s}$.

7) En los dos extremos de una cuerda que pasa por dos poleas están colgadas dos masas iguales m . Hallar la distancia que baja una tercera masa del mismo valor m si se encuentra colgada en el centro de la cuerda. La distancia entre los centros de las poleas es de 2 m. Sol.: 0.58 m.

8) Una aplicación interesante del principio de acción y reacción es la propulsión a chorro. Este sistema es aplicado no sólo por las tecnologías humanas, sino también por la Naturaleza. Aviones, cohetes y similares usan el mismo principio que usan el calamar y el pulpo para realizar movimientos. Estos animales guardan cierta cantidad de agua en una bolsa y la expelen para propulsarse de forma rauda que en ocasiones les permite huir de depredadores potencialmente peligrosos. En este problema vamos a observar y explicar la ventaja de usar un cohete de varios cuerpos o etapas sobre uno monoetapa. A) Suponer que un cohete de una sola etapa tiene una masa de 13 toneladas, de las que 9.75 son de combustible. Si el cohete está inicialmente en reposo, halla la velocidad inicial cuando acaba el combustible. b) Suponer que un cohete similar, con la misma masa, está formado por 2 cuerpos, uno con una masa de 12 toneladas, de las que 9 son de combustible, y otro de 1 tonelada, de la que 0.75 es combustible. Cuando se agote el combustible del primer cuerpo, halla la nueva velocidad inicial. Tras este hecho, se enciende el otro cohete, teniendo como velocidad inicial la velocidad inicial de la primera etapa. Halla ahora la nueva velocidad final cuando se agota el combustible de la segunda etapa. Compararla con el resultado a). c) Deducir las expresiones teóricas de la velocidad del cohete monoetapa y multietapa.

9) En un estudio sobre el vuelo de los insectos se puede suponer que el mecanismo de sustentación es puramente mecánico y que viene dado por la fuerza de reacción que ejerce el aire impulsado por sus alas. Suponiendo que el animal tiene una masa $m = 0,001 \text{ g}$, que el área de sus alas es de $0,006 \text{ cm}^2$ y que la densidad del aire es de $0,0013 \text{ g/cm}^3$, calcular la frecuencia con que el insecto ha de mover las alas para sustentarse. Dato: $F_s = M\Delta V\rho Az^2\omega^2/\pi$. Sol.: 1292 Hz. Obs.: discrepancia de 5 veces la observada debida a la viscosidad del aire, con lo que el volumen batido es $1/25$

el volumen de aire en movimiento debido a la interacción de las moléculas de aire.

10) A partir de la ley de gravitación universal, calcular la aceleración de la gravedad terrestre.

11) Un satélite describe una órbita circular de radio R en torno a un exoplaneta. El periodo de rotación es T y constante. Hallar la relación entre el radio de la órbita y el periodo orbital del planeta.

12) Un camión transporta una caja de 200 kg de masa uniformemente repartida. La caja tiene 2 m de altura y su base es un cuadrado de 1m de lado. El coeficiente estático de rozamiento entre la caja y la plataforma del camión vale 0.8. Hallar la aceleración constante que ha de adquirir el camión para que la caja vuelque. Sol.: $a=0.5 g$ para que no se vuelque, $a=0.8 g$ para que no resbale. Si el rozamiento fuese de 0.3, 0.5 g para no volcar y 0.3 g para no resbalar.

13) Hallar la velocidad máxima que un coche puede tener al entrar en una curva con curvatura R , ángulo de peralte φ y rozamiento μ entre neumáticos y asfalto. Para ángulos pequeños hallar su aproximación de orden cero y de orden 1. Sol.: $v(\text{aprox}) = \sqrt{\mu R g}$, $v(\text{approx},1) = \sqrt{R G \frac{\varphi + \mu}{1 - \varphi \mu}}$

14) Un individuo se mueve sobre el borde de la plataforma de un tiovivo y con el mismo sentido de giro. Usando la forma de la fuerza centrípeta, encontrar la expresión de la fuerza ficticia de Coriolis que siente el individuo. Sol.: $v = v' + \omega \times r$, $a_c = v^2/R + \omega^2 R + 2\omega v$

15a) Un hombre está ubicado sobre un trineo en la nieve sin rozamiento. Con una ametralladora dispara balas de 0.013 kg con una velocidad de salida de 800 m/s. a) Halla la cantidad de movimiento de cada bala. b) Si cada tiro dura 0.2 s, halla la fuerza media experimentada por el hombre por cada bala que dispara. c) Halla la velocidad que alcanza el trineo con el hombre y la ametralladora (masa total 90 kg) tras disparar 100 balas. Despreciar los rozamientos con el aire, el suelo y la pérdida de masa debida a la pérdida de la masa de las balas disparadas. Sol.: 11.5m/s.

15b) Calcular los siguientes momentos de inercia: a) Esfera hueca respecto a un eje por su diámetro. b) Esfera maciza por su diámetro. c) Cilindro hueco respecto al eje de simetría. d) Cilindro macizo respecto al

eje de simetría. e) Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por el centro. Sol.: a) $2/3MR^2$, b) $2/5MR^2$, c) MR^2 , d) $1/2MR^2$, e) $1/12ML^2$.

16) Un par de estrellas giran alrededor de su centro de masas. La masa M de una de ellas es el doble de la masa m de la otra. Los centros de las estrellas están a una distancia d grande comparada con sus radios. A) Deducir la forma del periodo de rotación de las estrellas alrededor de su centro de masas. B) Comparar los momentos angulares de las dos estrellas respecto del centro de masas común. C) Calcular el cociente entre sus energías cinéticas de traslación. Sol.: A) $\tau = 2\pi \sqrt{d^3/(3Gm)}$, B) $L_m = 4/9m\omega d^2$, $L_M = 2/9\omega M d^2$, $L_M/L_m = 1/2$. C) $E_m/E_M = 2$.

17) Una estrella homogénea de radio R y masa M gira con velocidad angular ω . Sabemos que la estrella se contrae debido a las fuerzas gravitacionales internas por la ley $R = R_0(1 - Kt)$, donde K es una constante. Calcula la variación de la velocidad angular de rotación en función del radio y del tiempo. Sol.: $\omega = \omega_0/(1 - Kt)$.

18) Un objeto de masa m situado en un punto P con una latitud λ en el hemisferio Norte cae hacia la superficie terrestre. Se supone que P está muy cercano a la superficie. Deseamos calcular la desviación respecto de la vertical local del punto P , en cada instante del tiempo, debida a la rotación de la Tierra (fuerza de Coriolis, $F = -2m\omega \times v$). Sol.: $I(0) = m(r + \Delta r)^2 \cos^2 \lambda$, $I(t) = mr^2 \cos^2 \lambda$, $\omega(t) = \omega(1 + \Delta r/r)^2$.

19) La tensión máxima de la fibra lisa de los músculos aductores de los moluscos bivalvos es de 80 N/cm^2 . Supongamos que la distancia de inserción de los músculos hasta la articulación de las valvas es de 0.5 cm y que la longitud de las valvas es de 5 cm . Hallar la fuerza que tendremos que hacer para abrir un molusco si el músculo correspondiente es un cilindro de 2 mm de radio. Sol.: $F(m) = 10.05 \text{ N}$, $F(\text{abrir}) = M(\text{max})/d = 1.01 \text{ N}$. Nota: recordar que en equilibrio $\sigma F = 0$, $\sigma M = 0$.

20) Dos personas de distinta estatura llevan una caja juntos. a) Calcula quién hace más fuerza. b) Si la caja tiene 5 kg de masa repartida uniformemente, halla la fuerza que hace cada persona. Suponer que las fuerzas que realizan son verticales. Sol.: $F_1 = 5,77 \text{ N}$, $F_2 = 44,23 \text{ N}$.

21) El músculo deltoides sube el brazo hasta posición horizontal. El músculo está fijado a 15 cm de la articulación y forma un ángulo de 18

grados con el húmero. Suponiendo que el peso del brazo es de 40 N y que se puede aplicar todo él en el centro de masas situada a 35 cm de la articulación, calcular la fuerza que hace la articulación \vec{R} , el ángulo que dicha fuerza forma con el húmero cuando el brazo está horizontal y la tensión \vec{T} que realiza dicho músculo. Sol.: $R = 292,15\text{N}$, $\varphi = 10,51^\circ$. El deltoides hace una fuerza de 302.03N pero la articulación a 292.15, unas 8 veces el peso que levantan. A pesar de ello, este sistema tienen gran movilidad, que no tendría si el músculo estuviera a mayor distancia.

22) Cuando una persona está de pie, los huesos de las piernas están distribuidos de forma que la fuerza \vec{F}_a es la realizada por los aductores, \vec{R} es la realizada por el ilion sobre la cabeza del fémur, y \vec{P}_c es el peso de la pierna. Hay también una normal que ejerce el suelo sobre las piernas. Si la persona es de 85 kg, la pierna tiene 10kg de masa y el ángulo α es de 60° , hallar $\vec{F}_a, \vec{R}, \varphi$. Sol.: $F=691\text{N}$, $R=980\text{N}$, $\varphi = 69.35^\circ$.

23) Una pierna se mantiene en equilibrio gracias a la acción del ligamento patelar. A partir de las condiciones de equilibrio halla la tensión T del ligamento, y el valor y dirección de la fuerza R oblicua hacia el suelo ejercida sobre los huesos. Datos: masa de la persona 90 kg, masa de la pierna 9 kg, ángulo que forma la tensión con la horizontal 40° . Sol.: $T=4668\text{N}$, $\varphi = 43.16^\circ$. $R=4902\text{N}$.

24) Sobre el tendón de Aquiles se ejercen diferentes fuerzas sobre un hombre de 90 kg cuando está agachado. La fuerza de contacto ejercida por la tibia actúa en el punto O. a) Determinar el módulo de la fuerza que realiza el tendón de Aquiles. b) El módulo y la dirección de la fuerza de contacto necesarios. Sol.: a) $N=441.45\text{N}$, $T=5975\text{N}$, $\varphi = 41,19^\circ$. b) $F=6257\text{N}$.

25) Deducir la expresión de la energía potencial gravitatoria a baja altura, a partir de la forma encontrada a nivel planetario.

26) Un bloque de 5kg, sujeto a un muelle de constante 500N/m, desliza por un plano sin rozamiento. Si se comprime el sistema formado por el muelle (sin masa) y el bloque una distancia 5 cm respecto a la posición de equilibrio: a) Determina la energía potencial elástica almacenada en el sistema. b) Halla la velocidad máxima del muelle y su posición en ese instante.

27) Se determina que el cráneo humano se rompe cuando un objeto con un área superficial de pocos cm cuadrados incide produciendo un es-

fuerzo de $5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$. Un martillo con cabeza cilíndrica de 2kg de masa y diámetro de base 2.5 cm se suelta desde una altura h y, por desgracia, cae sobre la cabeza de una persona calva con la base del martillo paralela a la superficie de la cabeza. Si el contacto entre la cabeza y el martillo dura 2ms, halla el máximo valor de h para el que no hay rotura de cráneo. Sol.: 7.68 m.

28) Una bola de 5kg de masa se mueve horizontalmente con una velocidad de 10 m/s. Choca de forma elástica contra un plano inclinado de 45° de 25 kg de masa y que está inicialmente en reposo. Si se desprecia el rozamiento, halla: a) la velocidad de la bola tras el choque, b) la velocidad del plano inclinado tras el choque, c) aparentemente no se cumple la conservación del momento lineal, dado que antes del choque solo existe momento en la dirección horizontal y tras el choque hay momento en ambas direcciones. Comentar el resultado. Sol.: a) 2m/s, b) 8.94m/s, c) Hay fuerzas externas, por lo que el momento no tiene por qué conservarse.

29) Calcular la velocidad que ha de tener un proyectil para que, disparado verticalmente, pueda escapar del campo gravitatorio terrestre (Radio terrestre igual a 6370 km).

30) Pierre Simon de Laplace fue el primero en considerar objetos tan densos que ni siquiera la luz pudiera escapar a ellos. Estos objetos se llaman agujeros negros. La teoría de los agujeros negros eclosionó con la teoría de la gravitación relativista, o relatividad general, y la moderna Cosmología y Física Teórica. Clásicamente, los agujeros negros no emiten radiación alguna luminosa, pero podemos calcular el radio de un objeto compacto tipo agujero negro para que la luz no pueda escapar. Expresa el resultado en función de la masa del Sol y de la masa de la Tierra.

31) Un estudiante de Física, tras leer la obra de Julio Verne *De la Tierra a la Luna*, piensa en la posibilidad de colocar un satélite en órbita mediante un proceso parecido al usado en la obra del prestigioso escritor: mediante un cañón de gran potencia se dispara un proyectil que se situará en órbita. Analizar la posibilidad real de usar este procedimiento. Sol.: el exigir que se cumplan las dos leyes de conservación (momento angular y energía) más la segunda ley de Newton lleva a $\sin^2 \varphi = (R_T^2 + h^2 + 2R_T h) / (R_T^2 + 2R_T h)$. Mediante un impulso único inicial es imposible poner en órbita un cuerpo con el proceso Verne.

32) Una masa m está situada junto a un muelle sin masa y de constante elástica k . Se comprime el muelle y después se suelta de golpe, oscilan-

do alrededor de la posición de equilibrio (sin rozamiento). Encontrar, por análisis dimensional, la dependencia del periodo T de la oscilación en función de los dos parámetros del sistema m y k .

33) Aproximadamente, las necesidades alimenticias de los individuos normales de un mismo género son proporcionales a su masa. Aunque el novelista Jonathan Swift no conocía las leyes de escala, aventuró en su libro *Los viajes de Gulliver* que los liliputienses debían dar 1828 de sus raciones al gigante Gulliver, doce veces mayor que ellos. Razona la corrección o incorrección de dicha conjetura. Sol.: Es correcta por scaling.

34) Comparar la velocidad normal de pase de dos personas de la misma complexión y alturas L_1, L_2 . Suponer que, paseando, el tiempo que tarda una pierna en dar un paso viene dado por el periodo de un péndulo simple de longitud proporcional a la de la pierna. Sol.: $v_1/v_2 = \sqrt{L_1/L_2}$.

35) Una hormiga puede levantar 3 veces su peso. Mientras, un elefante sólo puede con la cuarta parte. Si las dimensiones medias son, respectivamente, 1.2 y 504 cm, razona si es correcto decir que la hormiga es la más fuerte. Sol.: No. Por scaling sería más frágil. El elefante del tamaño de la hormiga también sería poco óptimo.

36) Supongamos que nos persigue un oso enfadado y hambriento. Si al intentar escaparnos corremos por un plano horizontal, su velocidad es superior y nos alcanzará. Usando argumentos de análisis dimensional, demostrar que para tener más posibilidades de escapar es preferible correr en subida. Suponer que la potencia muscular depende del área de la sección transversal máxima del músculo. Sol.: $P \sim L^3 v, v \sim L^{-1}$.

37) Comparando la habilidad de los animales para saltar, hacemos experimentos con mamíferos e insectos. Supongamos que en el caso de los mamíferos, la altura del salto NO depende del tamaño de los animales y que en cambio, cuando se realizan experimentos con insectos, observamos que la altura del salto depende del tamaño según un scaling de tipo $h \sim L^{2/3}$. Indica cuál de las siguientes hipótesis es la más correcta en cada caso: a) La energía suministrada por unidad de masa del músculo es la misma para todos los animales. b) La potencia suministrada por unidad de masa del músculo es la misma para todos los animales. Sol.: a) Plausible. b) Plausible con insectos, pero implausible con mamíferos.

38) Demostrar a partir del teorema del trabajo y la energía que un ani-

mal será tanto más rápido cuanto más ligeras sean sus patas y cuanto más largos sean los músculos de sus patas. Probar también que la velocidad de carrera de los animales no depende del tamaño. Sol.: $F_m d = 1/2 m v^2$, $v^2 \sim 1$. La velocidad de carrera de dos animales de mismas dimensiones y misma especie similar.

39) Determinar cómo depende de las dimensiones de un animal terrestre la energía por unidad de masa y de longitud recorrida usada en moverse. Sol.: $C \sim L^{-3/2} \sim M^{-1/2}$. Nota: datos de la revista Science en 1972, por Schmidt y Nielsen, dan una dependencia con respecto a la masa con exponente -0.4. Las discrepancias con los argumentos de este problema se deben a las hipótesis limitadas usadas. Un perfeccionamiento de las hipótesis permite acercarse al comportamiento experimental real, pero la aproximación trivial funciona relativamente bien aquí.

40) Experimentalmente se observa que el coste energético por unidad de masa por unidad de longitud recorrida C en animales que nadan depende de la masa según un exponente -0.3. Justificar este resultado mediante argumentos dimensionales. Sol.: $C \sim M^{-1/3}$, pues $P = Fv \sim L^2 v^3$. Nota: usar que hay que evaluar C suponiendo que el oxígeno entra en el cuerpo proporcional a su superficie, y la relación usual entre masa y volumen.

41) Comparando el ritmo metabólico de 1000 bacterias de $10\mu m$ de diámetro con otro colectivo de bacterias de $20\mu m$ se observa que el ritmo metabólico de la primera es de 2kcal/día, y el de la segunda es de 8kcal/día. Razonar si este comportamiento es compatible con una ley de escala de tipo $RM \sim M^{2/3}$.

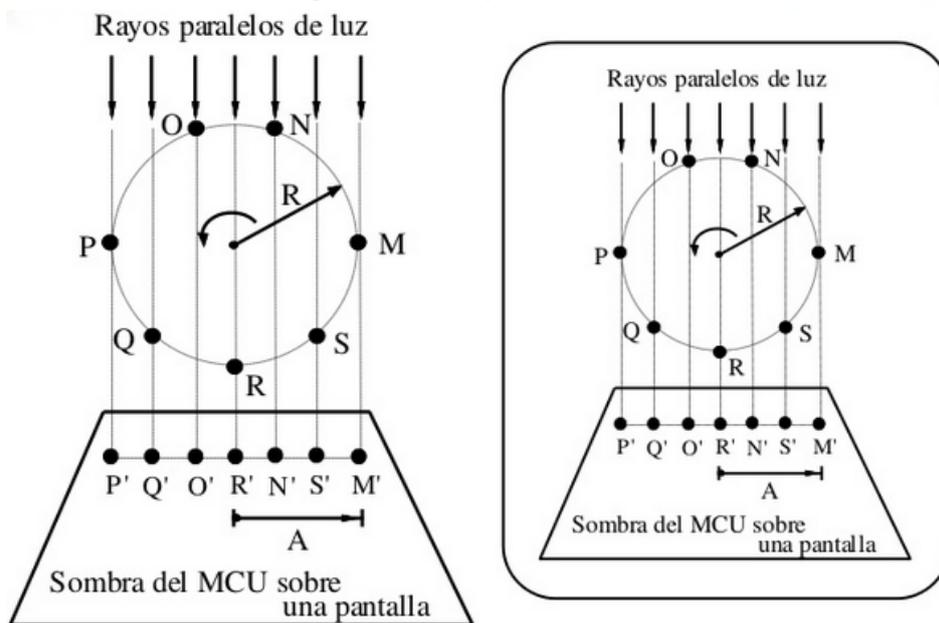
42) Supongamos que tenemos un cachalote de 500kg, y que puede permanecer bajo el agua media hora sin respirar. Estima el tiempo de inmersión de una ballena de 5000kg. Suponer que el ritmo metabólico es a) proporcional al área, b) proporcional a $M^{3/4}$. Sol.: a) 64.63min. b) 53.35 min.

Capítulo 3

Oscilaciones

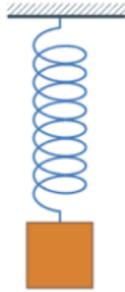
3.1. Movimiento armónico simple (M.A.S.)

Un movimiento armónico simple (M.A.S.) es un caso particular de movimiento oscilatorio. Se define como la proyección sobre una recta de las posiciones de un Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.). Este hecho puede observarse en el siguiente dibujo:



Observación: El MAS constituye en un movimiento de “vaivén” sobre la recta de proyección de una partícula, en torno a un punto central de equilibrio, y posee una amplitud máxima y una amplitud mínima. Por tanto, el

MAS no es más que un MCU “camuflado” o “difrazado”. El ejemplo típico es el de un muelle como éste



3.1.1. Cinemática de un M.A.S.

Usando como referencia el MCU no proyectado del que deriva un MAS, tenemos unas magnitudes que definirán este movimiento:

- Velocidad angular ω .
- Ángulo φ .

Recordemos que un MCU tiene una serie de ecuaciones, determinadas por

$$\alpha = 0 \quad (3.1)$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0 \rightarrow \omega = \text{constante} \quad (3.2)$$

$$\varphi_0 \quad (3.3)$$

De donde

$$\alpha = 0 \quad (3.4)$$

$$\Delta\omega = 0 \leftrightarrow \omega = \text{constante} \quad (3.5)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (3.6)$$

Queremos proyectar sobre una recta este movimiento. Si elegimos que la recta sea el eje OX, tendremos por descomposición trigonométrica:

$$x(t) = R \cos \varphi \quad (3.7)$$

$$\varphi = \varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

y entonces

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.10)$$

Nota: Se prefiere usar en vez de R la letra A para recordar que es el máximo valor de la amplitud del movimiento, y este caso escribimos la ecuación fundamental del MAS de la siguiente forma

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.11)$$

Se puede proyectar también sobre el eje OY , obteniendo en tal caso

$$Y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.12)$$

Comentario: Hay que recordar las propiedades trigonométricas siguientes, porque resultan útiles en la práctica

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi$$

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi$$

Esto significa que las gráficas del seno o del coseno son la misma función, pero desfasadas un ángulo de $\pi/2$ radianes (se diferencian en una traslación angular de esa magnitud).

De forma equivalente, tenemos también

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$$

Conclusión: Para la Cinemática del un MAS podemos escoger como ecuación de movimiento una "elongación" o vibración elemental de forma sinusoidal cualquiera (seno o coseno) porque cualquiera de ellas son equivalentes salvo una fase inicial.

3.1.2. Parámetros cinemáticos del MAS

Tomando como ecuación fundamental del MAS

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

tenemos los siguientes parámetros físicos

- Elongación $X(t)$. Se llama elongación a la posición o estado vibratorio del MAS en el instante del tiempo t . El centro de vibración es el punto $X(t) = 0$ y se llama también punto de equilibrio.
- Amplitud. Es el valor máximo de la elongación. Como el valor de la función seno o coseno oscila entre -1 y 1, el máximo valor del MAS es $+A$, mientras que el mínimo es la amplitud cambiada de signo, $-A$.
- Fase. Es el argumento del seno o coseno que tenemos en la ecuación del MAS $\omega t + \varphi_0$. Suele representarse por φ o θ , aunque también puede usarse cualquier otra letra griega o latina que no se confunda con otras magnitudes. Así

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

$$\varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0$$

en el caso de que el tiempo inicial no se sincronice con el inicio de tiempos sino a cierto tiempo t_0 .

- Período. T . Es el tiempo que tarda un MAS en pasar por el mismo estado de vibración o elongación. Se mide en segundos.
- Frecuencia. Es el número de "vueltas" u oscilaciones en un segundo. Se mide en hercios (Hz), con $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.
- Algunas relaciones útiles:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

3.1.3. Velocidad y aceleración en el MAS

Usando la definición de velocidad, tenemos que

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

de donde

$$\boxed{v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)} \quad (3.13)$$

La velocidad máxima será pues $v_m = +A\omega$. De forma similar, obtenemos la aceleración

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 X(t)$$

luego

$$\boxed{a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 X(t)} \quad (3.14)$$

Otras relaciones: Usando la ley fundamental de la trigonometría euclídea $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, se puede ver que entonces $\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ y entonces

$$v(t) = \pm A\omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t - \varphi_0)}$$

Como $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, tenemos

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

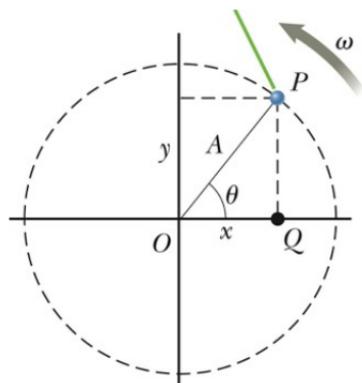
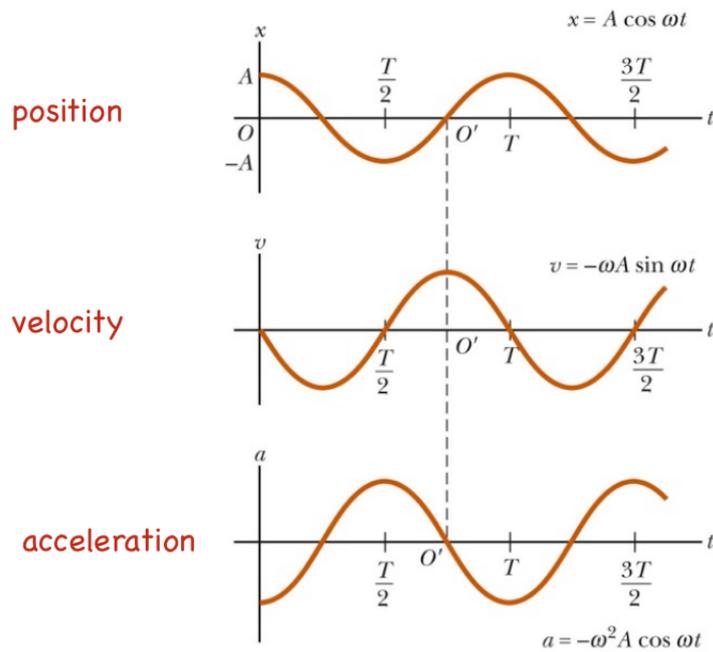
de donde

$$v(t) = \pm A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

En esta última igualdad hay que tener cuidado al introducir la amplitud en la raíz y no debe olvidarse que la elongación $x = X(t)$, es decir, la elongación es una función del tiempo en un MAS.

- En los extremos del MAS, la velocidad es cero, y la amplitud vale $+A$ o bien $-A$. La aceleración valdrá $a = +A\omega^2$ o $a = -A\omega^2$ en los dichos puntos, dirigida hacia el centro de equilibrio en ambos casos.
- En el centro de equilibrio del MAS, la elongación vale cero, $X(t) = 0$ y la velocidad vale $\pm\omega A$, siendo positiva si se mueve hacia la derecha, y negativa si se mueve hacia la izquierda. En dicho punto no hay aceleración.

El siguiente dibujo nos ayuda a resumir lo que hemos visto en este apartado gráficamente



$$x = A \cos \theta$$

$$\theta = \omega t$$

$$x = A \cos \omega t$$

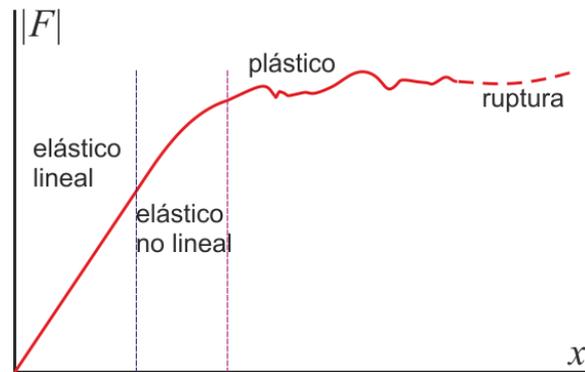
3.1.4. Dinámica del MAS

Un MAS está gobernado por una ley de fuerza tipo Ley de Hooke, también llamada interacción “elástica”. Un cuerpo que reacciona ante una fuerza estirándose o contrayéndose de forma proporcional a la misma y la deformación que le produce, se rige por la llamada Ley de Hooke:

$$\boxed{\vec{F}_H = -K\Delta\vec{x}} \quad (3.15)$$

y donde $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ es el desplazamiento producido por la deformación. La fuerza \vec{F}_H se llama fuerza recuperadora porque todo objeto deformado de esta forma tiende a recuperar su estado de longitud no deformado

inicial, con longitud L_0 , mientras no se supere el límite de elasticidad. Gráficamente, la expresión de la ley de Hooke en función del desplazamiento se representa con un bonito "triángulo":



Para un muelle, por ejemplo, se tiene que $\Delta x = l - l_0$, y $F' = -k(l - l_0)$ en general. Podemos relacionar con un MAS la ley de Hooke empleando la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-k\vec{x} = m\vec{a}$$

de donde

$$-k\vec{x} = m\vec{a} \longrightarrow m\vec{a} + k\vec{x} = 0$$

Si consideramos un MAS en sólo una dirección del espacio, podemos prescindir de las flechas de los vectores y escribir

$$ma + kx = 0$$

o bien

$$a = -\frac{kx}{m}$$

Esta última ecuación es muy similar a la aceleración de un MAS, $a = -\omega^2 X$. Si identificamos ambas aceleraciones, se tiene que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow m\omega^2 = k$$

Interpretación: Un MAS es el movimiento resultante como consecuencia de la existencia de una ley de fuerzas tipo Hooke (elástica) actuando sobre un cuerpo. Ejemplos de este tipo son los muelles y resortes, los sólidos elásticos y los cuerpos vibrando en régimen de "pequeñas oscilaciones"

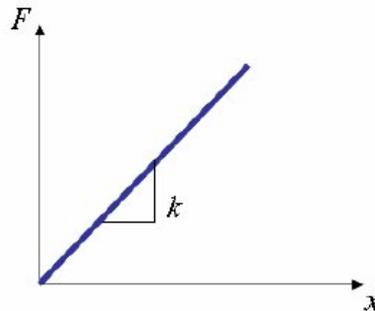
alrededor de un punto fijo de equilibrio. Dichos movimientos son comunes en átomos, moléculas u objetos de todo tipo de tamaño. También hay una relación entre período y constante recuperadora. De $T = 2\pi/\omega$, usando la relación para el MAS, se obtiene que

$$T_{MAS} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Observación: el período de un MAS NO depende de la amplitud del mismo. En movimientos que no son MAS, el período sí depende en general de la amplitud de las oscilaciones.

3.1.5. Energía en el MAS

La ley de Hooke es una ley de fuerzas de tipo central y conservativa. Entonces, existe una función energía potencial llamada energía potencial elástica $E_p(el)$. Usando la gráfica antes vista,



y que $F(x) = kx$, el trabajo es el área bajo la curva $F = F(x)$, por tanto,

$$W = \frac{1}{2}Bh = \frac{1}{2}x(kx) = \frac{1}{2}kx^2$$

Luego

$$E_p(el) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.16)$$

en donde x es la elongación respecto del punto de equilibrio. La energía cinética del MAS puede calcularse fácilmente:

$$E_c(el) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - X^2)$$

$$E_c(el) = \frac{1}{2}k(A^2 - X^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - X^2) \quad (3.17)$$

La energía mecánica será

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k(A^2 - X^2) + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$

Es decir, como debe ser, es una constante o número que no depende del tiempo

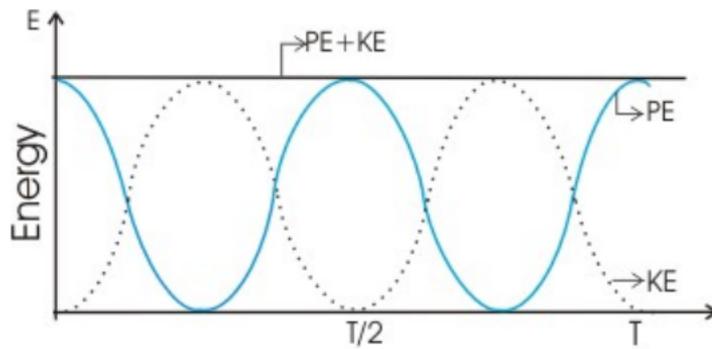
$$E_m(el) = \text{constante} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \quad (3.18)$$

Observamos que:

- La energía cinética es máxima si $x = 0$, en el centro de equilibrio. La energía cinética es nula si $x = \pm A$, en los extremos del MAS, porque ahí la velocidad se anula.
- La energía potencial elástica es máxima también si $x = x_{max} = +A$, o si $x = x_{min} = -A$, i.e., si $x = \pm A$ es máxima, en los extremos. La energía potencial será mínima en el centro de equilibrio, $x = 0$.
- La energía mecánica para el MAS es una constante en cualquier momento del tiempo, porque la fuerza elástica es conservativa.

En resumen, hay que saber que

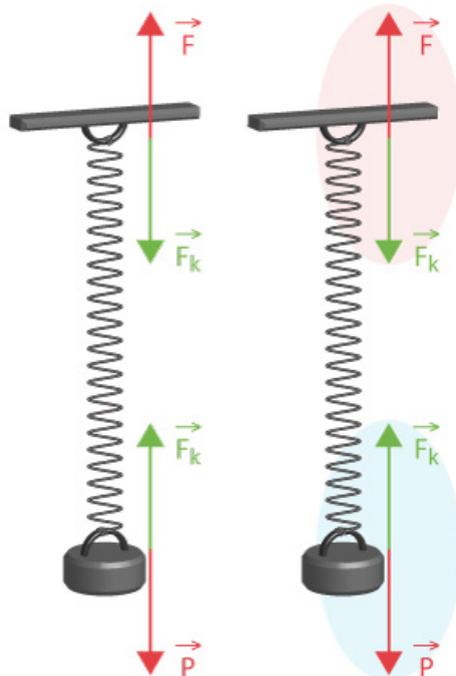
$$\begin{aligned} E &= KE + PE = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\omega A \sin \omega t)^2 + \frac{1}{2}k(A \cos \omega t)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}kA^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$



3.1.6. Ejemplos prácticos de MAS

Muelle vertical

En un muelle vertical actúan dos fuerzas: el peso y la fuerza elástica (despreciando rozamiento y otras fuerzas que pueda haber). El peso es igual a $P = mg$ y la fuerza de Hooke es $F = -kX$.



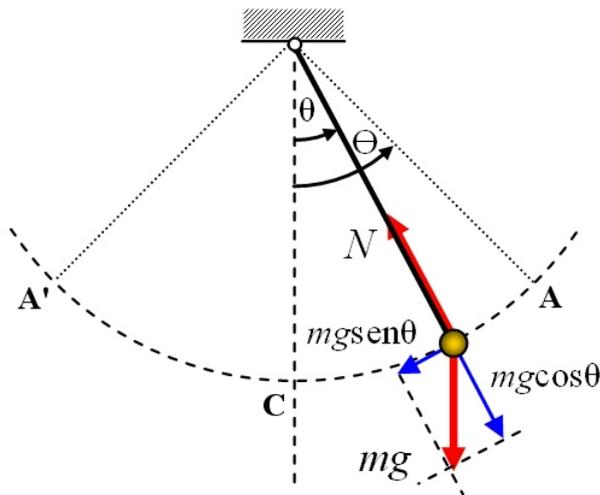
Todas las fuerzas son conservativas, y entonces se conserva la energía mecánica total:

$$E_m = E_c + E_p(\text{grav}) + E_p(\text{el}) = \text{constante} \quad (3.19)$$

o equivalentemente

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p(\text{grav}) + \Delta E_p(\text{el}) = 0 \quad (3.20)$$

Péndulo simple



En el caso de un péndulo simple, las fuerzas actuando sobre los ejes son (nótese que $\varphi = \theta$ del dibujo):

$$F = -P_x = -P \sin \varphi$$

$$F_c = T - P_y \leftrightarrow ma_c = T - P \cos \varphi$$

de donde

$$ma = -mg \sin \varphi \leftrightarrow ma + mg \varphi = 0 \leftrightarrow a + g \sin \varphi = 0 \quad (3.21)$$

Nota: Hay que destacar que el ángulo φ es una función del tiempo. En el límite de pequeñas oscilaciones, se puede escribir que $\sin \varphi \approx \varphi$ y tenemos la ecuación de un MAS como aproximación a dichas oscilaciones pequeñas del péndulo simple:

$$\boxed{a + g\varphi = 0}$$

ya que en esta misma aproximación $x = L\varphi$, con lo que

$$a + \frac{g}{L}x = 0$$

Esta ecuación es la ecuación de un MAS con

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

y período

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Así, la energía mecánica del péndulo se conservará en las condiciones de “pequeñas oscilaciones”, y $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ en general para dicho caso. Por la geometría del péndulo se tiene que

$$L \cos \varphi + h = L$$

$$h = L - L \cos \varphi = L(1 - \cos \varphi)$$

Por lo tanto, como

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

entonces la velocidad del péndulo simple es igual a

$$v = \sqrt{2gh} = \pm \sqrt{2gL(1 - \cos \varphi)}$$

y cuando las oscilaciones son “pequeñas”,

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + O(\varphi^4)$$

con lo que la velocidad en dichas condiciones es

$$v = \pm \sqrt{2gL(\varphi^2/2)} = \pm \varphi \sqrt{gL}$$

3.2. Formulario del MAS

■ Cinemática.

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \pm \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 X$$

- **Dinámica.**

$$F = ma = -kx$$

$$F(el) = -kx$$

$$m\omega^2 = k$$

- **Energía.**

$$E_c(el) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$E_p(el) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{m}\omega^2 A^2 = \text{constante}$$

- **Ejemplos.**

Muelle: $\Delta E_m(\text{total}) = 0$. $E_m(\text{total}) = \text{constante}$

Péndulo: $a + g \sin \varphi = 0$. Péndulo simple: $a + g\varphi = 0$, si $\varphi \approx 0$, $\sin \varphi \approx \varphi$, con $\omega^2 = g/L$.

3.3. ¿Qué hay que saberse?

- La ecuación de un MAS, la ley de fuerza (Hooke) que lo genera. La interpretación del MAS como un MCU proyectado.
- Magnitudes cináticas del MAS: elongación, frecuencia angular, frecuencia, velocidad, fase, período, aceleración, amplitud.
- Cuándo es máxima y mínima la elongación, la velocidad y la aceleración del MAS.
- Magnitudes dinámicas del MAS: fuerza, energía potencial elástica, energía cinética, energía mecánica.
- Calcular la ecuación de un MAS si me dan los datos adecuados necesarios.
- Derivar una función sinusoidal, tipo seno o tipo coseno. Dibujarla de forma esquemática.
- Péndulo y péndulo simple. Aproximación del movimiento de un péndulo físico mediante un péndulo simple en condiciones de “pequeñas oscilaciones” en torno al centro de equilibrio del sistema.

- Resolver problemas con muelles y resortes con/sin gravedad en posición vertical y horizontal.
- Deducción de la energía potencial elástica a partir de la gráfica $F = F(x)$ de una fuerza deformable en régimen lineal.
- Relación $m\omega^2 = k$.
- Teorema de conservación de la energía mecánica para el MAS.

Capítulo 4

Movimiento ondulatorio



4.1. Introducción

El concepto de onda es una noción importante en Física.

Llamamos ONDA, a una perturbación que varía en el tiempo y se propaga en el “vacío” o en un “medio material”.

Las ondas pueden clasificarse de diversas formas según su naturaleza y por cómo se propagan. En general distinguimos:

- Ondas mecánicas. Se propagan en “medios materiales”. Ejemplos: ondas sísmicas, ondas sonoras, ondas en una cuerda, . . . No debemos confundir entre perturbación y partícula/s. Una partícula “montada” en una onda se mueve pero NO viaja por el medio. Es decir, una boya

en el mar se mueve pero no acompaña a las olas que golpean sobre ella.

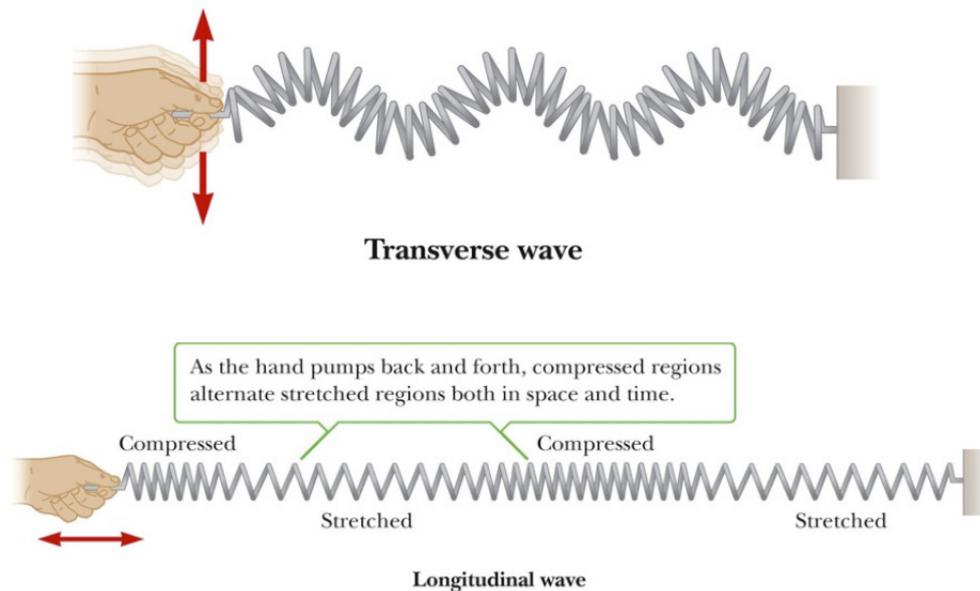
- Ondas electromagnéticas. Son las generadas por el campo electromagnético (superposición de campos eléctricos y magnéticos \vec{E}, \vec{B}). Se pueden propagar incluso en el vacío, incluso cuando aparentemente no hay ningún medio que “vibre”.

Importante: El movimiento ondulatorio se puede considerar también una forma de transmitir energía sin transporte efectivo de materia. Según las dimensiones donde se propagan las ondas, se clasifican en:

- Unidimensionales (1D). Ejemplo: ondas de violín, ondas en una guitarra, . . .
- Bidimensionales (2D). Ejemplo: ondas en la membrana de un tambor, . . .
- Tridimensionales (3D). Ejemplo: ondas sonoras, ondas electromagnéticas, . . .
- N-dimensionales (ND).

Las ondas se pueden clasificar también según cómo se propagan:

- Longitudinales. Las partículas se propagan en la misma dirección en que se mueven las ondas. Ejemplos: ondas sonoras, ondas de presión en líquidos, . . .
- Transversales. Las partículas u objetos ondulatorios vibran u oscilan en una dirección perpendicular a la dirección de propagación. Ejemplo: ondas electromagnéticas.



Una onda se describe matemáticamente como una función de onda, una función matemática que depende de la posición y del tiempo, y que satisface una ecuación llamada ecuación de onda. Las funciones de onda se representan como $f(x, t)$, $f(x, y, t)$, $f(x, y, z, t) = f(\vec{r}, t)$, y cada una de ellas satisface respectivamente las ecuaciones de onda

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

Una onda en N-dimensiones tendrá como ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \right)$$

En todos los casos v es la velocidad de la onda, y si usamos el vector nabla ∇ , la ecuación de ondas se puede expresar de forma sencilla y compacta como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 f$$

en donde hemos definido un operador $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, que se llama operador laplaciano. En ocasiones, además, se define el denominado "operador de

onda" o D'Alambertiano como el operador:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 = \Delta - \frac{1}{v^2} \partial_{tt}$$

con lo que la ecuación de onda es simplemente igual a

$$\square^2 f = 0$$

4.2. Velocidad de propagación

La velocidad de propagación (v) es por definición la velocidad con la que la onda se propaga.

La velocidad de propagación depende del medio en que se propaga la onda "en general".

Sólo consideraremos en este curso medios denominados homogéneos e isotrópos, es decir, medios que son iguales en todos sus puntos y en todas las direcciones. En ese caso la velocidad de propagación es una constante que no depende ni del punto ni de la dirección en que se mueva la onda.

Hay algunos casos particulares importantes de ondas/velocidades de propagación que es interesante conocer:

- **Velocidad de una onda sonora en el aire.** Para una sustancia gaseosa arbitraria formada por un "gas ideal", se tiene que

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

en donde γ es la constante adiabática del medio, T es la temperatura, R es la constante universal de los gases ideales y M es la masa molar del gas. Para el aire seco, considerado un gas diatómico mezcla de gases diatómicos como O_2, N_2, \dots , se tiene que $\gamma_{aire} = 1.4 = 7/5$, la masa molar del aire es $M_{aire} = 29 \cdot 10^{-3} kg/mol$ y $R = 8.31 Jmol^{-1}K^{-1}$, de donde sale que $V_{aire} \approx 340 m/s$.

- **Velocidad de una onda en una cuerda.** Depende sólo del material que forma la cuerda de la tensión T a la que se somete. Si la distribución es homogénea en la cuerda, definimos la densidad lineal

$$\mu = \frac{m}{L} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- **Ondas en medios sólidos deformables.** Suponiendo que, como en los casos anteriores, el material sea suficientemente homogéneo e isotrópico, definimos los llamados módulos de Young en superficie y volumen como las densidades superficiales de masa y volumen

$$\mathcal{Y}_s = \frac{m}{L^2}$$

$$\mathcal{Y} = \frac{m}{L^3}$$

La velocidad en estos casos se define de forma análoga al caso anterior de las ondas en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mathcal{Y}}}$$

- **Ondas electromagnéticas en el vacío.** Las ondas electromagnéticas en el vacío se propagan con velocidad constante e independiente de la fuente que las origina:

$$v_{em} \equiv c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

4.3. Ondas armónicas

Esta sección es MUY importante. Una onda se dice que es una onda armónica si su perturbación, definida por la función de ondas, tiene forma de un MAS (forma sinusoidal). Matemáticamente, una onda armónica es (en 1D, una sola dimensión, por simplicidad):

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

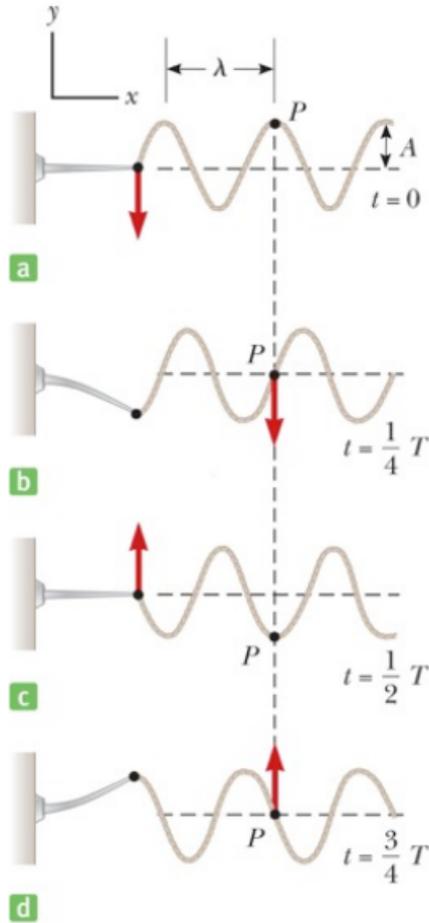
$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$$f(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \varphi_0)$$

$$f(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \varphi_0)$$

Comentario: Las ondas armónicas anteriores describen diferentes tipos de onda. Las dos primeras describen ondas que se propagan en el eje OX hacia la derecha. Las dos últimas, describen ondas que se propagan en el eje OX hacia la izquierda. Un ejemplo sencillo de cómo se generan ondas

armónicas en una cuerda es el siguiente dibujo



4.3.1. Magnitudes de las ondas armónicas

Son casi las mismas que las de un MAS:

- Amplitud A . Es la máxima elongación de la función de onda.
- Período T . $T = 2\pi/\omega = 1/f$.
- Frecuencia. $f = 1/T$.
- Pulsación, velocidad o frecuencia angular $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$.
- Longitud de onda λ . Es la distancia entre dos máximos o dos mínimos consecutivos, o bien entre cualesquiera dos puntos que se hallen "en fase".

- Número de onda k (no confundir con la constante elástica de un muelle). Es el recíproco de la longitud de onda multiplicado por 2π . Sus unidades son m^{-1} en el S.I.

4.3.2. Relaciones entre magnitudes importantes

- Período -longitud de onda-velocidad de propagación están relacionadas a través de la ecuación siguiente:

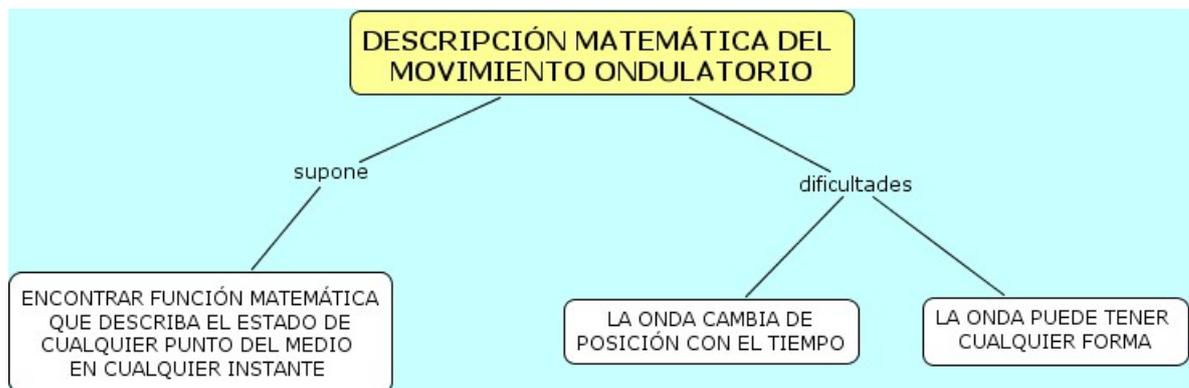
$$\lambda = vT$$

- Número de onda, pulsación angular y velocidad de propagación satisfacen una relación similar

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Nota: Cuando una onda cambia de propagarse de un medio a otro distinto, no cambian ni el período, ni la frecuencia, pero sí cambian la longitud de onda y la velocidad de propagación.

4.3.3. Ondas armónicas: descripción matemática



Usamos la notación más frecuente, la función de onda habitual se escribe indistintamente como

$$y(x, t) \leftrightarrow f(x, t) \leftrightarrow \Psi(x, t)$$

Usaremos en general la notación

$$\Psi = \Psi(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0) \quad (4.1)$$

en donde seleccionaremos el signo positivo o negativo según la onda se mueva hacia la izquierda o la derecha, respectivamente. La función de onda puede expresarse de forma equivalente como sigue:

$$\Psi = \Psi(x, t) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right) \quad (4.2)$$

En general, cualquier onda armónica, si posee igual signo en sus términos ωt y kx , se propaga hacia la izquierda, mientras que si los signos de dichos términos son diferentes, la onda armónica se propaga hacia la derecha. El problema general del estudio de ondas armónicas se reduce en el fondo a un problema esencial de geometría y trigonometría.

4.3.4. Casos particulares de ondas armónicas

Si el foco que genera las ondas está en el origen y la fase inicial es nula, la función de onda adopta la expresión sencilla:

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

o bien

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$$

Si la fase inicial no es cero, se escribe y expresa usando equivalencias (en caso de que sea posible) trigonométricas.

4.3.5. Doble periodicidad

Una onda armónica es doblemente periódica: si desplazamos un punto x_1 a otro punto x_2 , una distancia igual a un múltiplo entero de longitudes de onda, la función de onda no varía:

$$\Psi(x_2, t) = \Psi(x_1, t) \leftrightarrow x_2 - x_1 = n\lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

o equivalentemente

$$\Psi(x + n\lambda, t) = \Psi(x, t) \quad (4.4)$$

Y si desplazamos t a un múltiplo de su período tampoco varía

$$\Psi(x, t_1) = \Psi(x, t_2) \leftrightarrow t_2 - t_1 = nT \quad (4.5)$$

$$\Psi(x, t + nT) = \Psi(x, t) \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.6)$$

Conclusión: el movimiento ondulatorio armónico es doblemente periódico, en el espacio con la longitud de onda λ y en el tiempo con T .

4.3.6. Fase y diferencia de fase

Como en el MAS, se llama fase al argumento de la función de onda armónica. En este caso depende no sólo del tiempo y la fase inicial sino también del punto x considerado.

$$\Psi = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0) \quad (4.7)$$

donde $\varphi = \varphi(x, t)$ es la fase.

Si el punto x está fijo y miramos a dos tiempos o instantes t_1 y t_2 , la diferencia de fase es $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, en donde

$$\varphi(x, t_2) = \omega t_2 \pm kx + \varphi_0$$

$$\varphi(x, t_1) = \omega t_1 \pm kx + \varphi_0$$

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

Si en el mismo tiempo estudiamos la diferencia de fase entre dos puntos diferentes x_2 y x_1 , tenemos que

$$\varphi(x_2, t) = \omega t \pm kx_2 + \varphi_0$$

$$\varphi(x_1, t) = \omega t \pm kx_1 + \varphi_0$$

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

Se dice que dos puntos están en fase si $\Delta\varphi = 2\pi n$, o múltiplo entero de 2π , para $n = 0, \pm 1, \dots$. Se dice que dos puntos están en oposición de fase si $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Además, si están en fase:

$$\Delta x = n\lambda \quad \Delta t = nT$$

y si están en oposición de fase

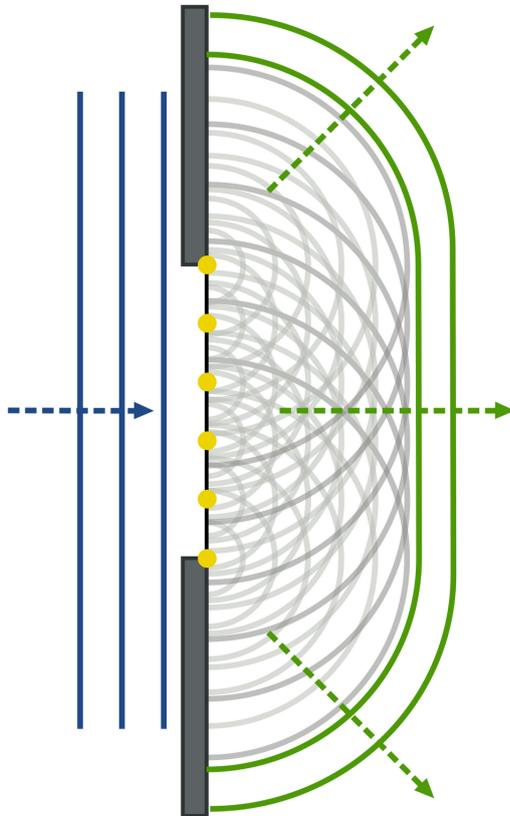
$$\Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Delta t = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$$

para cualquier $n = 0, \pm 1, \dots$

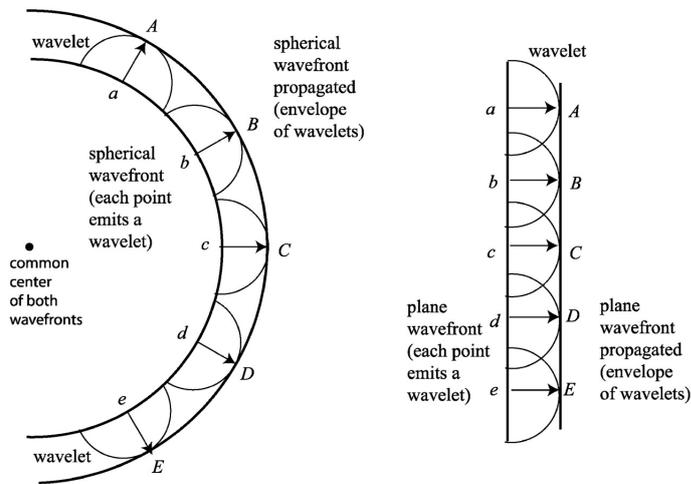
4.4. Propagación de ondas: principios, leyes y medidas

4.4.1. Principio de Huygens

Cada punto de un frente de onda se convierte en un centro emisor de ondas elementales, de forma que el nuevo frente de onda es la superficie envolvente de todas las ondas elementales. Frente de onda es el lugar geométrico de todos los puntos que oscilan en fase simultáneamente, es decir, en el mismo instante del tiempo. Este principio ayuda a entender los fenómenos de interferencia, reflexión y refracción de las ondas. La imagen que uno tiene de él es la de las ondas generadas en un lago o estanque por el efecto de la lluvia o el lanzamiento de una piedra.



4.4. PROPAGACIÓN DE ONDAS: PRINCIPIOS, LEYES Y MEDIDAS 143

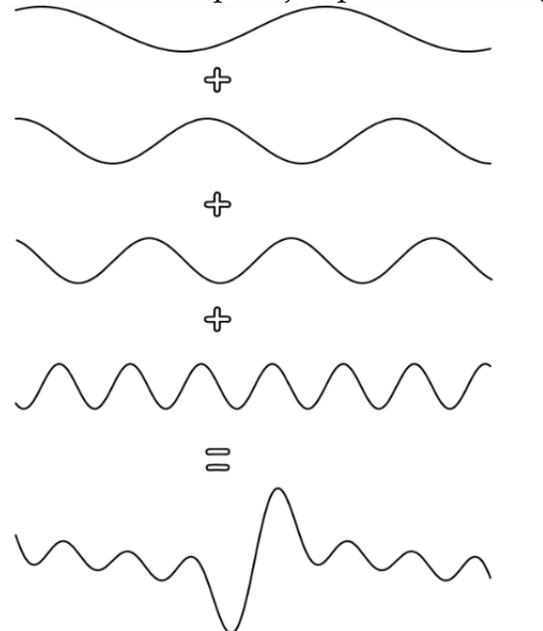


4.4.2. Principio de superposición

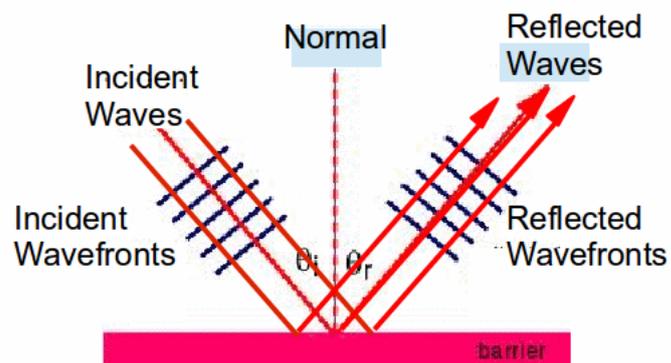
Si varias ondas procedentes de lugares distintos coinciden en un punto, la onda total se obtiene sumando sus funciones de onda:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Psi_i = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_N \quad (4.8)$$

Gráficamente, por ejemplo, se tiene algo como este dibujo



4.4.3. Ley de reflexión

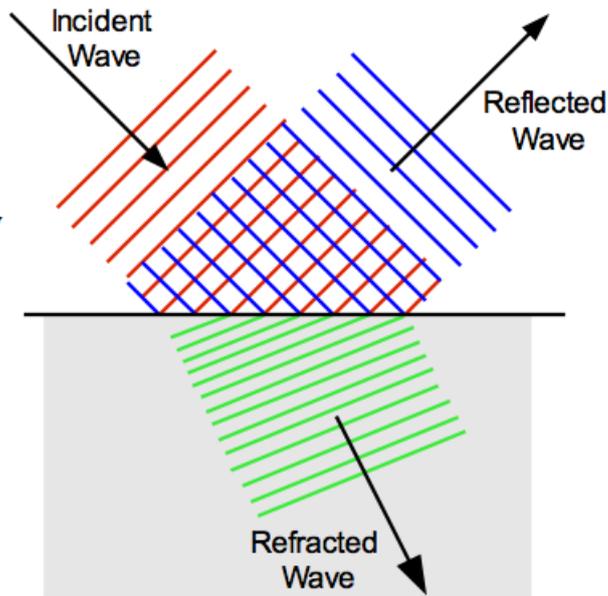


Para la reflexión de una onda por parte de un medio material se cumple que

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \leftrightarrow \theta_i = \theta_r$$

en donde los ángulos θ_i y θ_r son los ángulos formados con la normal al medio por la onda incidente.

4.4.4. Ley de la refracción o ley de Snell(óptica)



Si una onda pasa de un medio a otro distinto, se cumple que

$$\frac{\sin \theta_r}{v_r} = \frac{\sin \theta_i}{v_i} \quad (4.9)$$

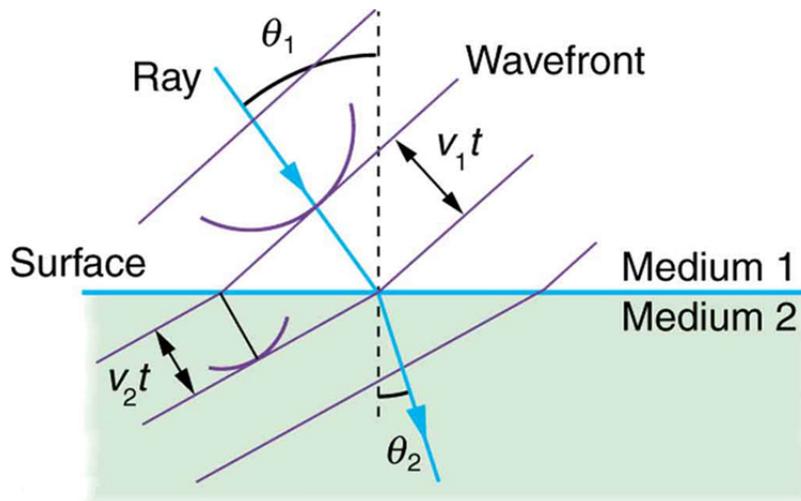
Esta ley se llama ley de la refracción o de Snell, y también puede escribirse como sigue

$$\frac{v_r}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i}$$

La razón por la que esta ley se cumple es la siguiente: el cociente de velocidades entre el medio incidente y el refractado debe ser proporcional al cociente entre los senos del ángulo incidente y refractado como consecuencia del teorema del seno aplicado a la geometría de la refracción de la onda.

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_r t}{v_i t} = \frac{v_r}{v_i}$$

La deducción con dibujo puede hacerse de forma sencilla como indica este dibujo:



O también éste

$$\sin \theta_i = \frac{v_i \Delta t}{d} \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\Delta t}{d}$$

$$\sin \theta_r = \frac{v_r \Delta t}{d} \rightarrow \frac{\sin \theta_r}{v_r} = \frac{\Delta t}{d}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{v_r} \rightarrow \sin \theta_i = \frac{v_i}{v_r} \sin \theta_r$$

REFRACTIVE INDEX $\equiv n$ WHERE $v_i = c$
($c =$ SPEED OF LIGHT IN EMPTY SPACE)

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r \text{ (SNELL'S LAW)}$$

Para el caso de una onda luminosa, la ley de la refracción se llama ley de Snell y en general se llama ley de la refracción a secas. Se define, para las ondas luminosas, el llamado índice de refracción como el cociente entre

4.4. PROPAGACIÓN DE ONDAS: PRINCIPIOS, LEYES Y MEDIDAS 147

la velocidad de la luz con la velocidad de la luz en el medio donde se propaga:

$$n = \frac{c}{v}$$

El índice de refracción es igual a la unidad para el caso del “vacío”, y más generalmente $n_i = c/v_i$. Usando el índice de refracción, la ley de Snell se escribe como sigue

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_r t}{v_i t} = \frac{v_r}{v_i} = \frac{n_i}{n_r} \leftrightarrow \boxed{n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r} \quad (4.10)$$

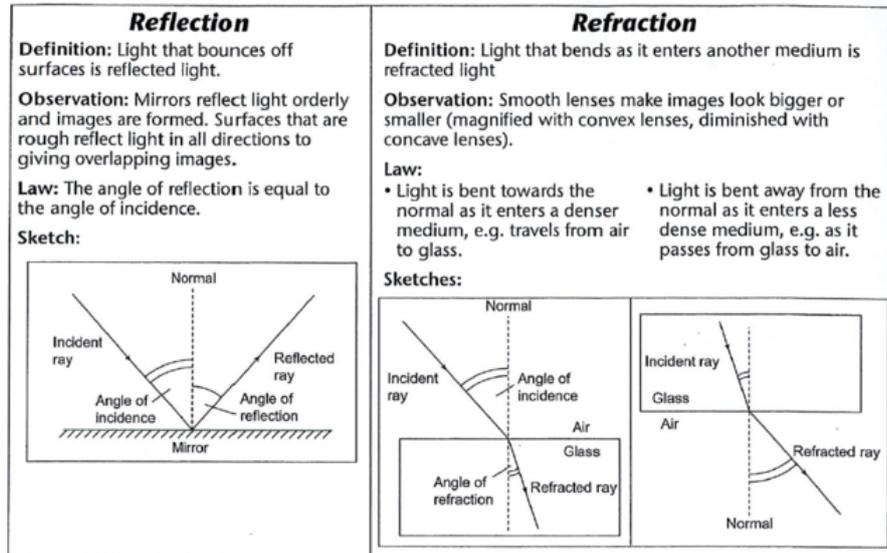
Algunos casos particulares de la ley de la refracción luminosa (Snell) y sus consecuencias:

- Si $v_r > v_i$, entonces $v_r/v_i > 1$ y $\sin \theta_r > \sin \theta_i$, es decir, $\theta_r > \theta_i$. El rayo luminoso u onda (si no es onda luminosa) se aparta más de la normal que el incidente.
- Si $v_r < v_i$, entonces $v_r/v_i < 1$ y $\sin \theta_r < \sin \theta_i$, es decir, $\theta_r < \theta_i$. El rayo luminoso u onda (si no es onda luminosa) se acerca más a la normal que el incidente.
- Ángulo límite. θ_L . Es el ángulo incidente tal que no produce refracción, esto es, aquel para el cual $\theta_r = 90^\circ$, i.e., $\sin \theta_r = 1$. Entonces, $v_r/v_i = 1/\sin \theta_i = 1/\sin \theta_L$, o bien

$$\sin \theta_L = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i}$$

Si $\theta \geq \theta_L$, entonces NO se refractan ondas o rayos, y dicho ángulo existe en general para $v_i \leq v_r$ o $n_i \geq n_r$.

Nota adicional esquemática: En particular para la Óptica, se tiene el siguiente esquema resumen (en inglés por comodidad)



4.4.5. Energía, intensidad, potencia

Para un MAS, la energía mecánica se conserva:

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \text{constante}$$

Si en una superficie S tenemos N partículas en un volumen limitado por dicha superficie $dV = SdR$, entonces dichas partículas poseen una energía

$$dW = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2dV$$

La energía de una onda, con $\rho = m \cdot n$, y n la densidad de partículas $n = \text{números de partículas/volumen}$, para una densidad ρ constante, se escribirá como sigue

$$W = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2V$$

Para la potencia de la onda, escribiremos

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\rho\omega^2vA^2S$$

Pero como

$$\text{constante} = K = \frac{1}{2}\rho v\omega^2$$

4.4. PROPAGACIÓN DE ONDAS: PRINCIPIOS, LEYES Y MEDIDAS 149

entonces

$$P = KA^2S \leftrightarrow \infty A^2S$$

La intensidad de la onda es por definición

$$I = \frac{P}{S} \quad (4.11)$$

o bien

$$I = \frac{KA^2S}{S} = KA^2 \leftrightarrow I \propto A^2 \quad (4.12)$$

Una onda se atenúa en un medio si $P =$ constante entre dos puntos a distancias R_1 y R_2 del foco emisor de ondas. Suponiendo frentes de onda esféricos se llega a ley de atenuación siguiente:

$$\boxed{I_2 R_2^2 = I_1 R_1^2} \leftrightarrow \boxed{A_2^2 R_2^2 = A_1^2 R_1^2} \quad (4.13)$$

4.4.6. Escala sonora (decibelios, dB)

La escala de sonoridad de una onda sonora depende de la intensidad. Se define un valor umbral de audición humana para el valor de la intensidad

$$\boxed{I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2} \leftrightarrow \boxed{\text{Intensidad umbral}} \quad (4.14)$$

El llamado "nivel de intensidad", es la escala logarítmica de la intensidad sonora respecto de la intensidad umbral de referencia. Se mide en "belios" (B). Generalmente, se prefiere el uso de los decibelios (dB), en vez de los belios. Matemáticamente:

$$\boxed{S = \log \frac{I}{I_0}} \text{ belios} \quad (4.15)$$

o bien

$$\boxed{S(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}} \text{ Escala nivel de intensidad en decibelios} \quad (4.16)$$

y donde el logaritmo es logaritmo decimal (cuidado porque NO es logaritmo en base natural, de Neper o neperiano). Esta tabla orientativa

140 dB	Disparo de escopeta / Umbral de dolor
130 dB	Avión despegando / fuegos artificiales
120 dB	Motor de avión / martillo neumático
110 dB	Concierto de rock
100 dB	Taladro
90 dB	Atasco de tráfico en una ciudad
80 dB	Tren / secador de pelo
70 dB	Tráfico tranquilo / aspiradora
60 dB	Conversación normal
50 dB	Sonido ambiental en una oficina
40 dB	Conversación susurrada / lluvia
30 dB	Sonido ambiental en el campo
20 dB	Estudio de grabación vacío
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición normal

nos ayuda a tener una idea orientativa de lo que es el nivel de intensidad del sonido en la vida cotidiana.

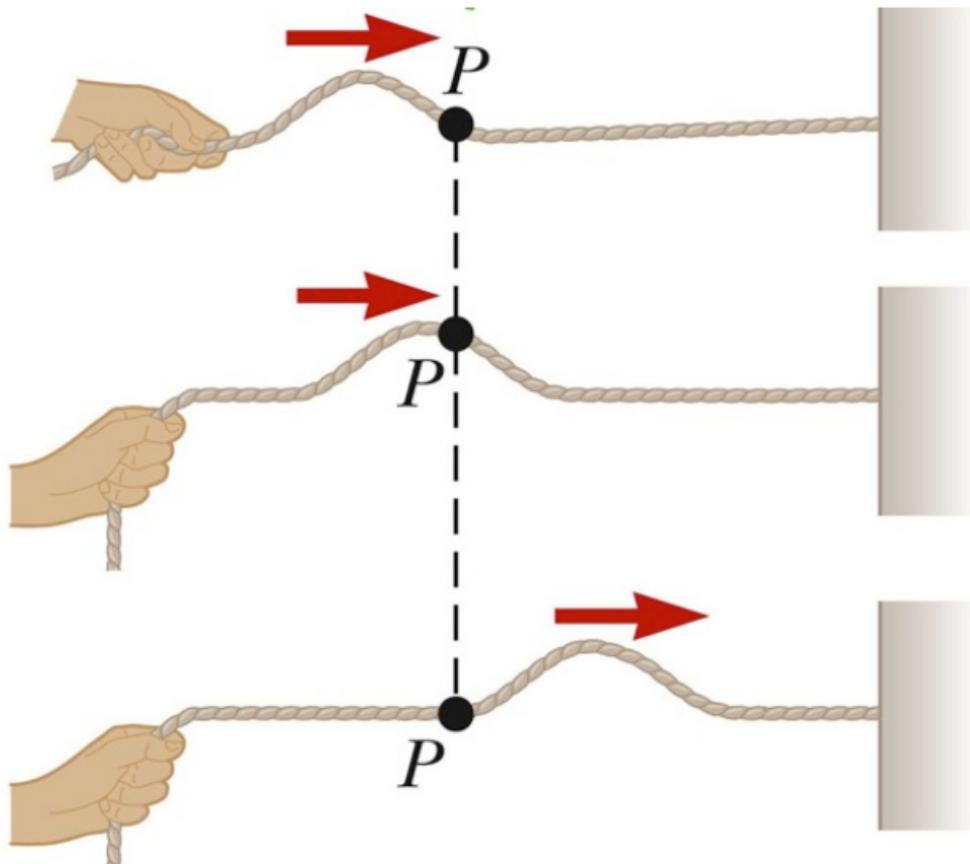
Una onda que sufre “amortiguación” en un medio sigue una ley disipativa tipo exponencial en general, y cuya expresión se llama “Ley de absorción”:

$$I = I_0 e^{-\kappa x}$$

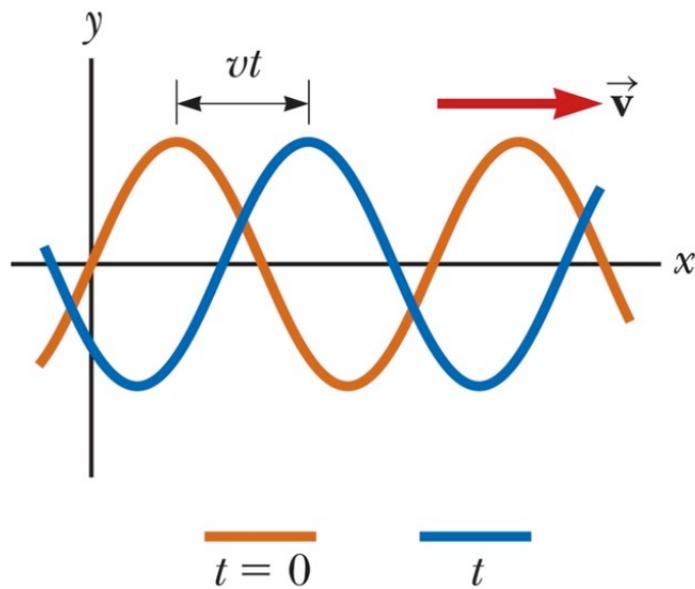
en donde κ es la constante de atenuación o amortiguamiento de la onda correspondiente en el medio disipativo donde la onda penetra.

4.5. Ondas en una cuerda. Interferencia.

En una cuerda, mediante pulsos podemos generar ondas:



Una onda viajera se representa generalmente como

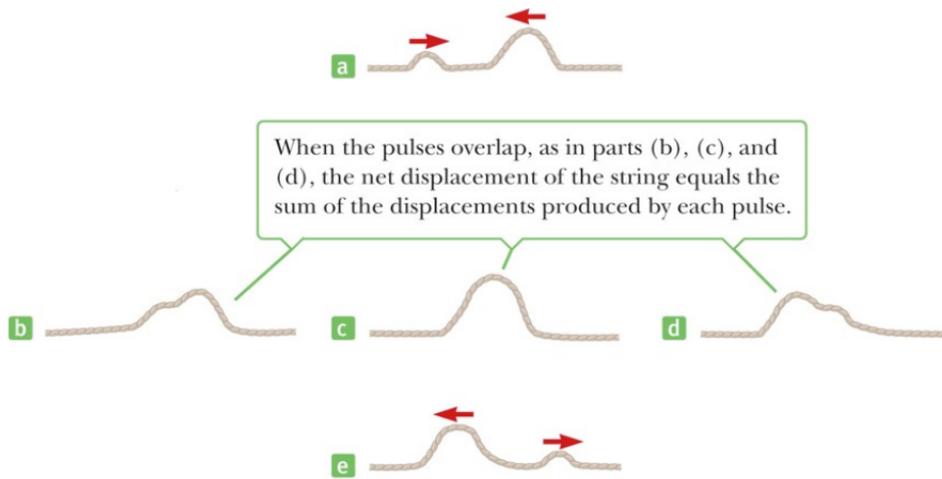


Las ondas en una cuerda pueden producir interferencia. La interferencia constructiva cualitativamente se ve en los siguientes diagramas

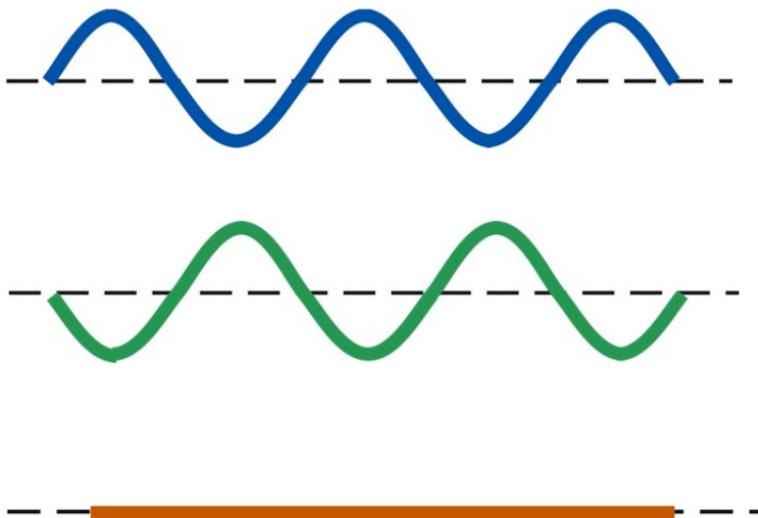


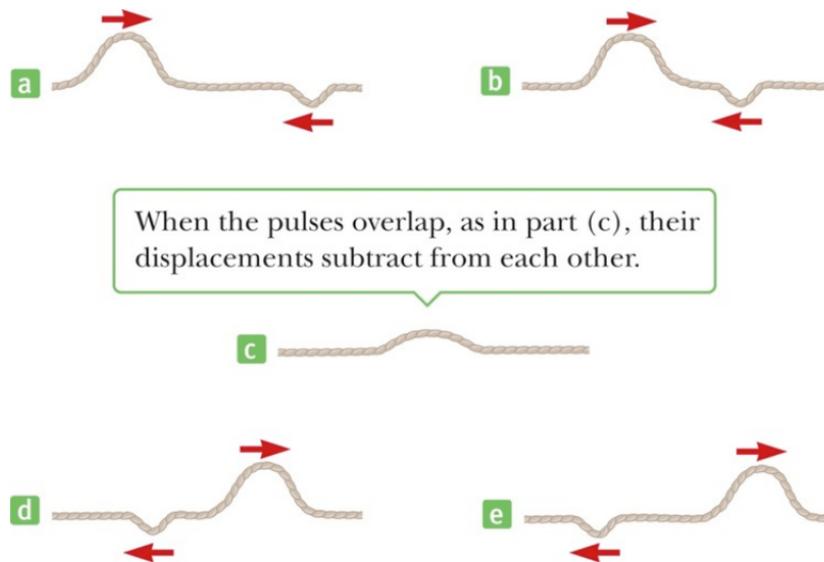
Combining the two waves in parts (a) and (b) results in a wave with twice the amplitude.



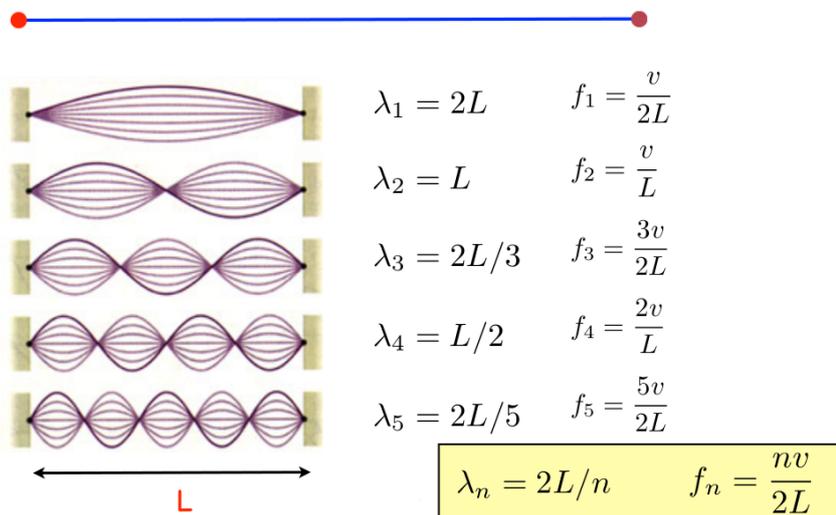


La interferencia destructiva corresponde a diagramas del siguiente tipo





Dos ondas viajeras que se propagan en direcciones opuestas, cuando chocan, producen interferencia y ondas “estacionarias” (resonancias) si ciertas condiciones matemáticas (de contorno o frontera) son satisfechas. Para una cuerda con los dos extremos fijos, las condiciones son que los extremos de la cuerda son efectivamente fijos y no se mueven. Las condiciones de contorno se satisfacen solamente por ciertas longitudes de onda específicas o concretas (con $f = v/\lambda$). Tenemos que



4.6. ¿Qué hay que saberse?

- El concepto de onda, su definición, la clasificación de las ondas, los fenómenos peculiares que experimentan las ondas en un medio general, la descripción matemática de las ondas por medio de funciones de onda.
- La interpretación de los signos dentro de la fase de una onda armónica para determinar su sentido de propagación, y el concepto general de onda armónica.
- Descripción cinemática y dinámica de las funciones de onda, y el uso de variables de un MCU, junto a la longitud de onda y otras nuevas magnitudes, para el cálculo de procesos ondulatorios.
- Definición y expresión matemática de longitud de onda y número de onda, así como la velocidad de propagación y velocidad de vibración de una onda.
- Relacionar diferentes magnitudes ondulatorias con ecuaciones sencillas.
- Sonido: expresión de la velocidad del sonido, leyes de atenuación y de absorción, escala de decibelios para el nivel de intensidad. Concepto de intensidad umbral.
- Principio de Huygens y leyes de la reflexión, refracción e interferencia.
- Determinar las condiciones para las que existe polarización y refracción de una onda, y también difracción.
- Definición y unidades de intensidad, potencia, energía y atenuación de una onda.
- Concepto de índice de refracción. Ley de Snell y su relación con la ley de la refracción general de una onda.
- Ondas estacionarias. Formación y localización de nodos y vientres en las ondas estacionarias de una cuerda.

4.7. Formulario de ondas

Recuerda: una onda puede ser electromagnética o mecánica; unidimensional, bidimensional, tridimensional, . . . ; longitudinal o transversal.

Recuerda: una onda experimenta una serie de fenómenos peculiares, denominados reflexión, refracción, difracción, polarización (ondas transversales), amortiguación (al propagarse en un medio general) e interferencia.

La función de onda es una función matemática $\Psi(x, t) = \Psi$. Para una onda armónica, tenemos la función de onda de tipo sinusoidal:

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

Velocidad de propagación: $\lambda = vT$.

Velocidad de vibración: $V = \frac{d\Psi}{dt}$

Aceleración de vibración: $a = \frac{d^2\Psi}{dt^2}$

Relaciones útiles:

$$T = 2\pi/\omega, \lambda = 2\pi/k, \omega = 2\pi f, f = 1/T, \omega = kT, \omega = vk.$$

$$\text{Velocidad del sonido: } v_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \approx 340 \text{ m/s}$$

Ley de reflexión: $\theta_i = \theta_r$.

Ley de refracción (Snell): $\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{v_r}$ $n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r$ $n_i = c/v_i$.

Ondas estacionarias: Nodos en $x = \frac{n\lambda}{2}$. Vientres en $x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}$ para todo entero $n = 0, \pm 1, \dots$

Intensidad: $I = kA^2$

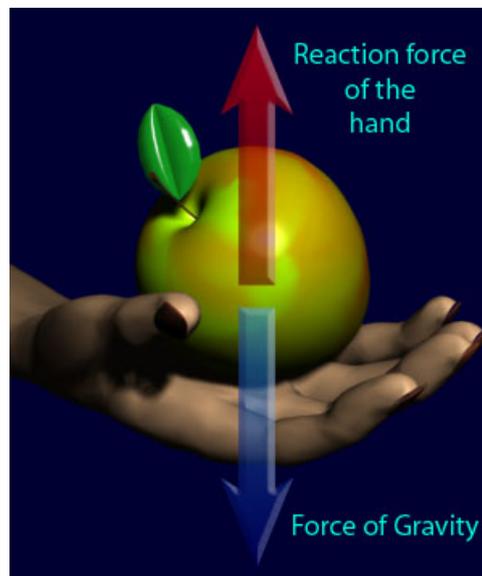
Atenuación: $IR^2 = \text{constante}$

Absorción: $I = I_0 e^{-\kappa x}$

Escala de decibelios y nivel de intensidad sonora: $S(dB) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
para la frecuencia umbral $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Capítulo 5

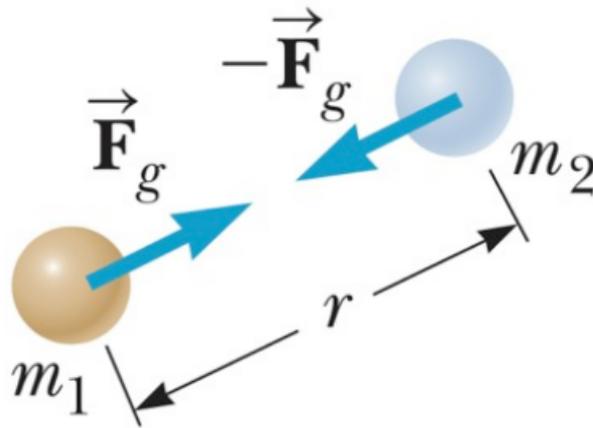
Gravitación



5.1. Ley de Gravitación Universal

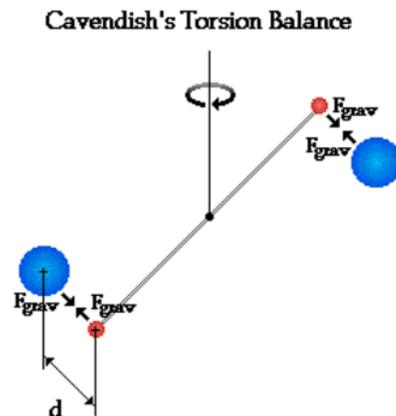
Newton enunció la siguiente **Ley de Gravitación Universal**: “2 cuerpos masivos cualquiera se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas (cargas gravitacionales) e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia”:

$$\vec{F}_N = -G_N \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \quad (5.1)$$



Aquí:

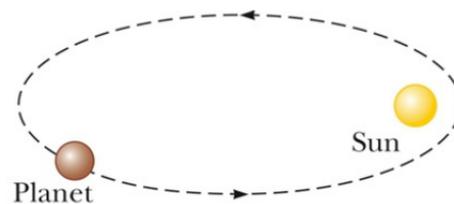
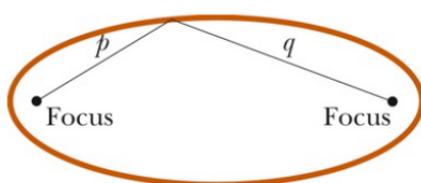
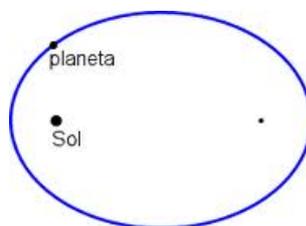
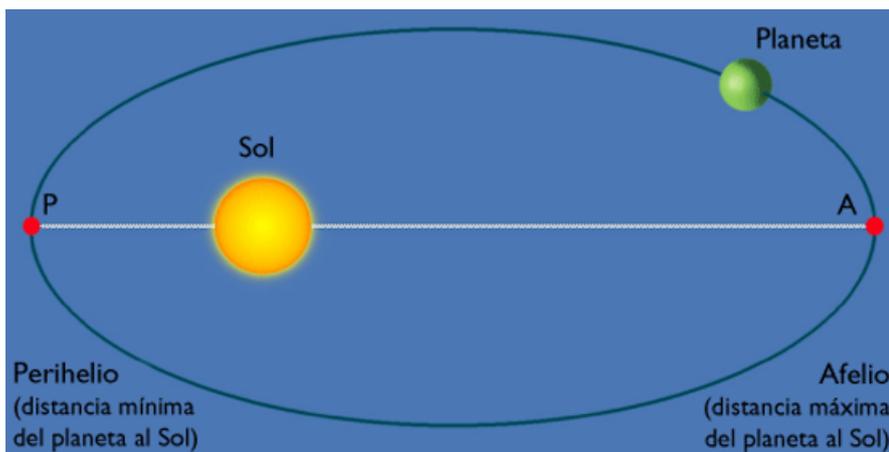
- \vec{u}_r es un vector unitario en la dirección que une ambas masas.
- $G_N = 6.67(4) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Se piensa que esta constante ES *universal*, i.e., la misma en todas partes y en cualquier momento del Universo conocido. La primera determinación de esta constante fue realizada en el experimento de la balanza de torsión de Cavendish. Hoy se ha mejorado, pero sigue siendo la constante universal que se conoce con menor precisión. Un dibujo del experimento de Cavendish a continuación:



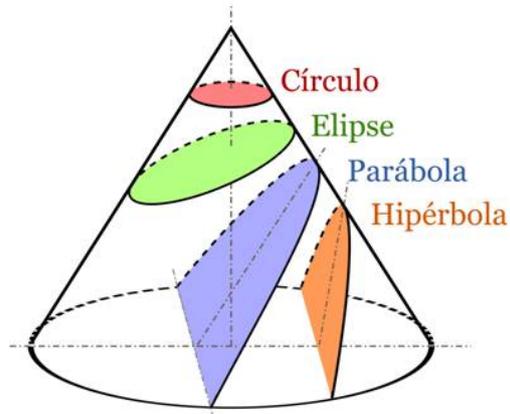
- El signo negativo indica que la gravedad es siempre una fuerza atractiva, dado que las masas son aparentemente siempre números reales y positivos.
- M, m son dos masas cualesquiera.

5.2. Leyes de Kepler

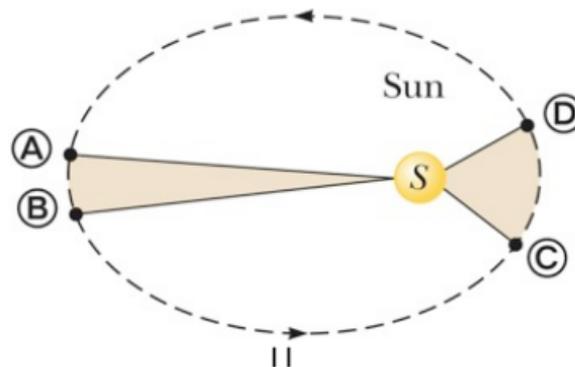
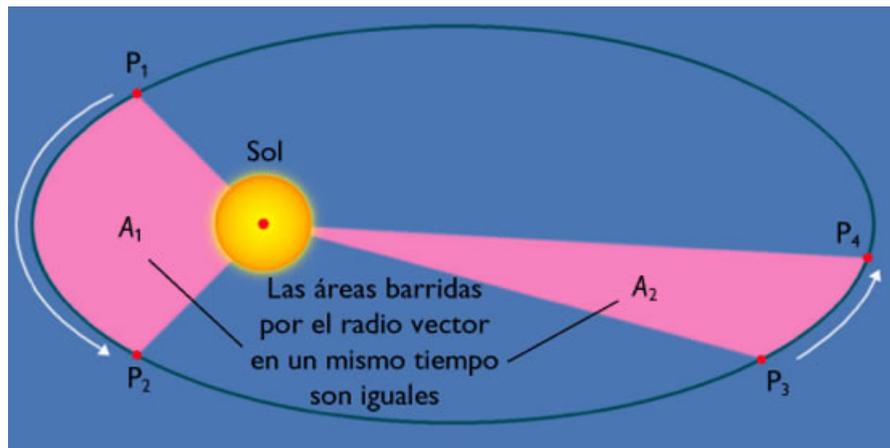
- **Primera Ley de Kepler: Ley de las órbitas.** Los “planetas” describen órbitas elípticas alrededor del “sol”.



Más generalmente, cualquier planeta/luna/cuerpo celeste describe una trayectoria en forma de elipse (o una cónica) alrededor de su/s estrella/s/planeta/objeto cuando forman un sistema bajo la acción de la gravedad.



- Segunda Ley de Kepler: Ley de las áreas.** Los planetas “barren” áreas iguales en tiempos iguales, o equivalentemente, la velocidad areolar de un planeta se mantiene constante en su trayectoria.



Como el momento angular \vec{L} es constante, y la fuerza es central porque $\vec{F}(r) = F(r)\vec{u}_r$, la trayectoria es plana y tenemos que

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}|$$

o bien

$$dA = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt}| \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}|$$

Por tanto, la Ley de las áreas puede expresarse como sigue

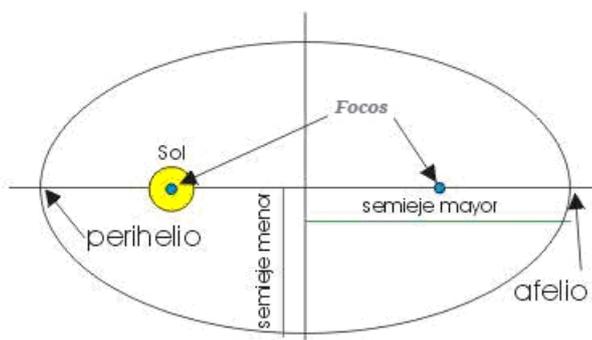
$$\boxed{v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = \text{constante}} \quad (5.2)$$

Una consecuencia sencilla de esta ley es que los planetas se mueven más deprisa en el perihelio y puntos cercanos “al sol”, mientras que se mueven más lentamente en los puntos más alejados. En efecto, usando la segunda Ley de Kepler

$$V_A(\text{perihelio}) = V_A(\text{afelio}) \rightarrow v_p r_p = v_a r_a \rightarrow v_p > v_a \text{ porque } r_p < r_a$$

- Tercera Ley de Kepler: Ley de los períodos.** El cociente del semieje mayor de radio R de la órbita de la elipse elevado al cubo con el cuadrado del período de la órbita es constante. Matemáticamente

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M_\star} = \text{constante}} \quad (5.3)$$



La deducción de esta ley puede hacerse gracias a la ley de Newton de forma muy sencilla para una trayectoria de radio circular (una elipse particular) $r = R$, un planeta de masa m y una estrella de masa M_\star , igualando dicha fuerza a la centrípeta, y operando como sigue a continuación :

$$F = G_N \frac{M_\star m}{R^2} = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

de donde trivialmente

$$G_N M_\star = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3$$

que no es más que la expresión que antes hemos obtenido en una forma equivalente a la misma.

Esta Ley de los Períodos suele expresarse también como sigue

$$\frac{R^3}{T^2} = \kappa M_\star$$

$$\text{con } \kappa = \frac{G_N}{4\pi^2}.$$

De hecho, siendo un poco más precisos, habría que usar la descripción en torno al centro de masas para el llamado “problema de los dos cuerpos” (Kepler), y teniendo en cuenta la descripción del problema, la tercera ley de Kepler, en su forma más general, adopta la forma que indica la siguiente pizarra:

Diagram showing two masses m_1 and m_2 separated by distance a . The center of mass (cm) is located at distances a_1 and a_2 from m_1 and m_2 respectively.

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a$$

$$\text{Total Force} = \frac{G m_1 m_2}{a^2}$$

$$\text{Centrifugal Force} = \frac{m_1 v_1^2}{a_1} = \frac{m_2 v_2^2}{a_2} = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

$$\frac{G m_1 m_2}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 m_1 a_1 = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} a$$

$$\boxed{M + m = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{p^2}}$$

y donde P es el período (T , antes), y a es el radio (R , antes). Es importante notar que en la tercera Ley de Kepler debemos poner pues en general $M_{\star} + M_p$, puesto que será solamente la masa de la estrella cuando podamos despreciar la masa del planeta. Este tipo de planeamientos es también útil en Astronomía y Astrofísica cuando uno considera sistemas binarios. En resumen, la tercera ley de Kepler viene dada por la siguiente ecuación

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E} \right) r^3$$

Algunos datos de nuestro planeta y nuestro “sol” que debemos conocer son:

- Radio medio terrestre: $R_T = 6370km = 6.37 \cdot 10^6m$.
- Masa de la Tierra: $M_T = M_{\oplus} = 5.98 \cdot 10^{24}kg$.
- Radio medio solar: $R_S = R_{\odot} = 6.955 \cdot 10^5km = 6.955 \cdot 10^8m$
- Masa del Sol: $M_S = M_{\odot} = 1.9891 \cdot 10^{30}kg$

5.3. Campo gravitatorio

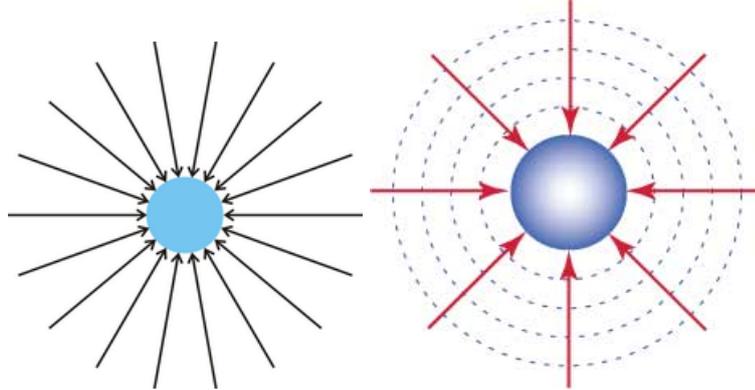
Definimos campo gravitatorio como la fuerza gravitatoria realizada por cada unidad de masa. Matemáticamente:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_N}{m} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad (5.4)$$

en donde $\vec{g}(\vec{r})$ es la denominada intensidad de campo gravitatorio. Su interpretación física sería intuitivamente hablando, la “perturbación” inducida en el espacio debido a la presencia de masa (carga gravitacional). Es importante destacar que, en principio, la masa de la Ley de Gravitación Universal (LGU) es conceptualmente diferente a la que aparece en la Ley de Inercia/Ley Fundamental de la Dinámica. El hecho de que masa inercial y masa gravitatoria sean numéricamente o conceptualmente las mismas es un hecho fenomenológica hasta la fecha y un resultado profundo que se denomina Principio de Equivalencia (PE) y es la idea que llevo a A.Einstein al

desarrollo de la Teoría de la Relatividad General (TGR), más precisamente, teoría relativista de la gravitación.

Las líneas de campo gravitatorio son siempre, en gravedad newtoniana, líneas radiales centradas en la masa y dirigidas hacia ésta.



Además, en el caso de la Tierra, se sabe que en su superficie:

$$\vec{g}_T(\text{sup}) = -G_N \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -g \vec{u}_r$$

y en donde $g = \frac{G_N M_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$.

A una altura dada $r = R_T + h$, el campo gravitacional varía

$$g_T(h) = -G_N \frac{M_T}{r^2} = -G_N \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r$$

Para el campo gravitatorio debido a varias masas “puntuales” aplica el denominado **principio de superposición**:

$$\vec{g}_T = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \dots + \vec{g}_N \quad (5.5)$$

Para calcular cada uno de los campos debido a cada masa, se hace el siguiente proceso:

- Se calculan los vectores unitarios para una masa imaginaria de prueba de 1kg en módulo, dirección y sentido.
- Se escribe $\vec{g}_i = |g_i| \vec{u}_i$, en donde $|g_i| = g_i = G_N M / r_i^2$ es el módulo del campo correspondiente. Hay que notar que el signo menos NO se pone porque se tuvo en cuenta al calcular el campo por la presente “receta” o “método”.

- Se suman vectorialmente los campos obtenidos para obtener el campo gravitatorio total. Se puede usar la fórmula habitual para calcular el módulo de la intensidad de campo gravitatorio total del vector obtenido.

Se llama potencial gravitatorio a la función

$$V_g = -G_N \frac{M}{r} \quad (5.6)$$

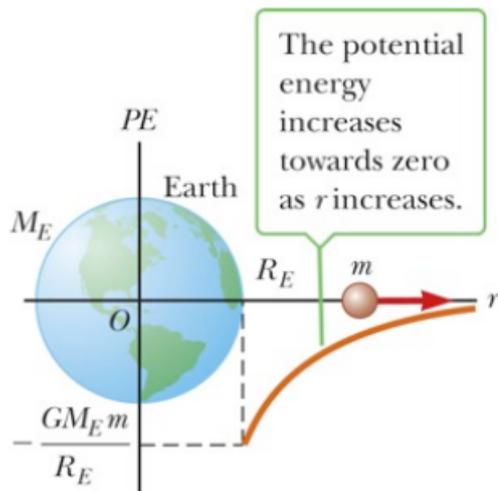
Sus unidades son J/kg . Para el potencial gravitatorio también aplica el principio de superposición:

$$V_g(\text{total}) = \sum_{i=1}^N V_i = V_1 + \dots + V_N \quad (5.7)$$

La energía potencial gravitatoria se define también como sigue:

$$E_p(\text{grav}) = -G_N \frac{Mm}{r} \quad (5.8)$$

Sus unidades son los julios. Su variación con la distancia en la Tierra (o cualquier objeto masivo) viene dada por una gráfica del siguiente tipo



La relación entre potencial gravitatorio y energía potencial gravitatoria es muy sencilla:

$$E_p(\text{grav}) = mV_g \quad (5.9)$$

La relación entre campo y potencial gravitatorio es como sigue

$$\vec{g} = -\nabla V$$

Para la dirección radial, se tiene que

$$\vec{g} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

La relación entre fuerza y energía potencial gravitatoria/potencial gravitatorio es

$$\vec{F}_N = -\nabla E_p(\text{grav}) = -m\nabla V_g$$

Un concepto importante es el de línea/superficie equipotencial: conjunto de puntos que se encuentran a igual potencial. No se realiza trabajo para desplazar una partícula o cuerpo a lo largo de cualquier línea o superficie equipotencial.

Para el campo gravitatorio, que es un campo conservativo, se tiene que bajo la acción del campo

$$W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B) = -G_N M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (5.10)$$

Para vencer la acción del campo, el trabajo necesario por un agente externo para mover la partícula entre esos dos puntos es precisamente el opuesto:

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{ext}} = -W_{A \rightarrow B} = W_{B \rightarrow A} = E_p(B) - E_p(A)$$

5.4. Órbitas

En una órbita se tiene que la energía mecánica es constante:

$$E_m(\text{orb}) = E_c + E_p(\text{grav}) = \text{constante}$$

y en donde

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G_N \frac{Mm}{r}$$

La velocidad en una órbita se halla igualando la fuerza gravitacional a la normal

$$F_c = F_n \leftrightarrow G_N \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{G_N \frac{M}{r}} \quad (5.11)$$

El período orbital se halla muy fácilmente también:

$$T = \frac{2\pi}{v} = 2\pi r \frac{1}{\sqrt{G_N \frac{M}{r}}}$$

o equivalentemente

$$T_{orb} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G_N M}} \quad (5.12)$$

Dado un período, de la relación anterior podemos determinar el radio orbital correspondiente

$$r_{orb} = \sqrt[3]{\frac{G_N M T^2}{4\pi^2}} \quad (5.13)$$

La energía orbital total, suponiendo que la trayectoria es completamente circular, sería

$$E_m(total) = -G_N \frac{Mm}{2r}$$

La velocidad de escape de un cuerpo es la velocidad que tiene que tener para “escapar hasta el infinito” y no “caer” por la gravedad de éste de nuevo. Se calcula igualando a cero la energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = 0 \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{r}} \quad (5.14)$$

El concepto de velocidad de escape es interesante, ya que siglos atrás sirvió para crear lo que hoy conocemos como “agujeros negros” en Relatividad General. El llamado radio de Schwarzschild es el radio correspondiente a la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz en la expresión arriba indicada:

$$R_S = \frac{2G_N M}{c^2} \approx 2.97 \text{ km} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

Las órbitas se clasifican en tres tipos principales en gravedad newtoniana:

- Elipse o circunferencia. Corresponde al caso $E_m < 0$ y velocidad $v < v_e$.

- Parábola. Corresponde al caso $E_m = 0$ y $v = v_e$.
- Hipérbola. Corresponde al caso $E_m > 0$ y $v > v_e$.

Para la Tierra la velocidad de escape es de unos 11.2 km/s . Se llama satélite geoestacionario a aquel satélite que se encuentra fijo sobre un punto concreto de la Tierra. Su período debe coincidir con el de rotación de la Tierra (24h). Un satélite en órbita ecuatorial se encuentra sobre el Ecuador y es ahí, o en una franja en torno al mismo debido a la no esfericidad de la Tierra, donde se sitúan los satélites geoestacionarios.

Un importante recurso en algunos problemas consiste en usar el vector unitario:

$$u_\varphi = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

o bien simplemente, calculamos el vector unitario a una \vec{A} dado como sigue

$$u_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Es muy importante recordar que en una línea equipotencial, o superficie, el potencial gravitacional no cambia, el trabajo para mover el cuerpo entre dos puntos en ese lugar geométrico (línea o superficie equipotencial) es igual a cero, y que la fuerza gravitatoria es una fuerza central conservativa que deriva de una función potencial sencilla.

5.5. Rotación y momento angular en fuerzas centrales

Cuando un cuerpo se halla en rotación, hay varias magnitudes que hemos introducido en el capítulo uno que debemos saber calcular. La primera es el momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

La segunda es el momento de una fuerza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m \vec{r} \times \vec{a}$$

Momento angular y momento de una fuerza están relacionados. Derivando con respecto del tiempo el momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r} \times \vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

5.6. ¿Qué debo saber?

- La Ley de Gravitación Universal y sus consecuencias, las Leyes de Kepler. Deducir la Tercera ley de Kepler usando la LGU. Deducir la LGU a partir de las leyes de Kepler. Deducir la segunda ley de Kepler. Comprender (y deducir si se desea) la primera ley de Kepler.
- Aplicar las leyes de Kepler al movimiento planetario y de cuerpos celestes, como satélites, planetas, estrellas, cometas, . . . Explicar y enunciar las leyes de Kepler.
- Noción de velocidad orbital y velocidad de escape. Calcular velocidades orbitales y velocidades de escape.
- Calcular la energía mecánica, cinética y potencial de un objeto en órbita circular.
- Concepto de campo gravitatorio. Calcular campos gravitatorios de masas puntuales. Principio de superposición y aplicaciones al cálculo de problemas sencillos en el plano y el espacio.
- Variación del campo gravitatorio con la altura.
- Que para calcular la velocidad orbital se igualan fuerza gravitacional con fuerza normal.
- Que para calcular la velocidad de escape se iguala a cero la energía mecánica.
- Concepto de energía potencial y potencial gravitatorios. Cálculo de potencial gravitatorio por el principio de superposición de masas puntuales.
- Calcular períodos de satélites y el cálculo particular importante del satélite geostacionario.
- Saber el tipo de órbitas que puede haber en cuanto a trayectoria en un movimiento bajo el campo gravitacional y cómo son la energía mecánica y la velocidad de escape para los 3 casos posibles.

- El valor de la energía mecánica total para una órbita cerrada circular.
- Recordar que: $L_c = 2\pi R$, $A_C = 4\pi R^2$ y $V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5.7. Formulario de Gravitación Universal (GU)

Leyes de Kepler (LK):

Primera Ley de Kepler (PLK). Ley de las órbitas.

$$R(\varphi) = \frac{\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Segunda Ley de Kepler (SLK). Ley de las áreas.

$$v_A = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{dA}{dt} = \text{constante}$$

Tercera Ley de Kepler (TLK). Ley de los períodos.

$$T^2 = kR^3$$

donde

$$k = \frac{4\pi^2}{G_N M_\odot}$$

es una constante universal.

Ley de gravitación universal (LGU) en formato general vectorial:

$$\vec{F}_N = -G_N \frac{Mm}{R^2} \vec{u}_R$$

Velocidad orbital ($F_c = F_N$):

$$v = \sqrt{\frac{G_N M}{R}}$$

Velocidad de escape ($E_m = E_c + E_p = 0$):

$$v_e = \sqrt{\frac{2G_N M}{R}}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$E_p(\text{grav}) = -G_N \frac{Mm}{R}$$

Energía orbital:

$$E_{orb} = E_c + E_p = -\frac{G_N M m}{2R}$$

Período orbital:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{G_N M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G_N M}}$$

Radio orbital:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G_N M T^2}{4\pi^2}}$$

Momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Momento de una fuerza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Momento de inercia de una partícula:

$$I = mR^2$$

Momento de inercia de un conjunto o sistema de partículas:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

Momento angular intrínseco y su relación con el momento de inercia:

$$L = I\omega$$

Momento de inercia de una esfera:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

$$\Sigma \vec{M} = \vec{M}_{total} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Conservación del momento angular si el momento total de las fuerzas es cero:

$$\Sigma \vec{M} = \vec{0} = \vec{M}_{total} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Relación de las velocidades en el perihelio y afelio con las distancias al sol (a partir de la segunda ley de Kepler):

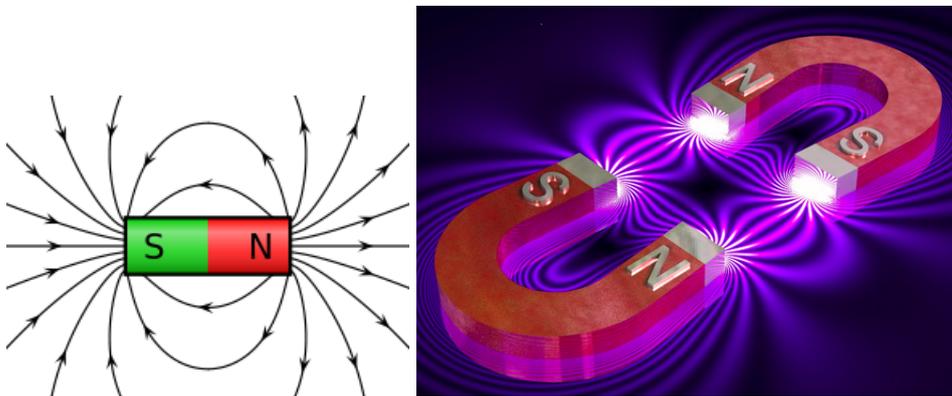
$$v_p R_p = v_a R_a$$

Relación de las velocidades angulares de rotación con las distancias al eje de giro en un "patinador":

$$\omega_1 R_1^2 = \omega_2 R_2^2$$

Capítulo 6

Campo magnético



6.1. Introducción

Las primeras reflexiones sobre la naturaleza del magnetismo y los fenómenos naturales magnéticos proceden de Tales de Mileto (s.VII-VI a.C.).

La palabra magnetismo tiene su origen en Magnesia (Turquía), donde se encontraba de forma abundante la magnetita, mineral de propiedades magnéticas conocidas desde tiempo antiguos.

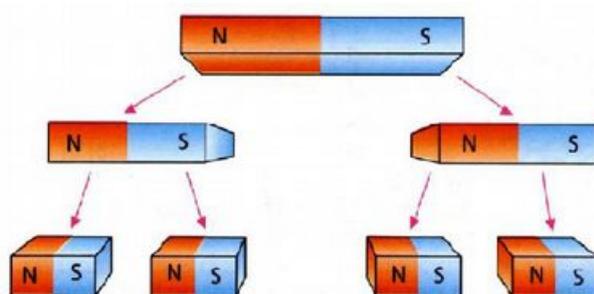
En China, el magnetismo era un fenómeno bien conocido y llevó al desarrollo de la brújula hace más de 2000 años.

Las fuentes naturales de magnetismo son ciertos materiales y minerales naturales, así como las corrientes eléctricas.

Imanes: son cuerpos o sustancias capaces de atraer otros cuerpos hacia sí mismos (como hierro, cobalto, níquel, . . .).

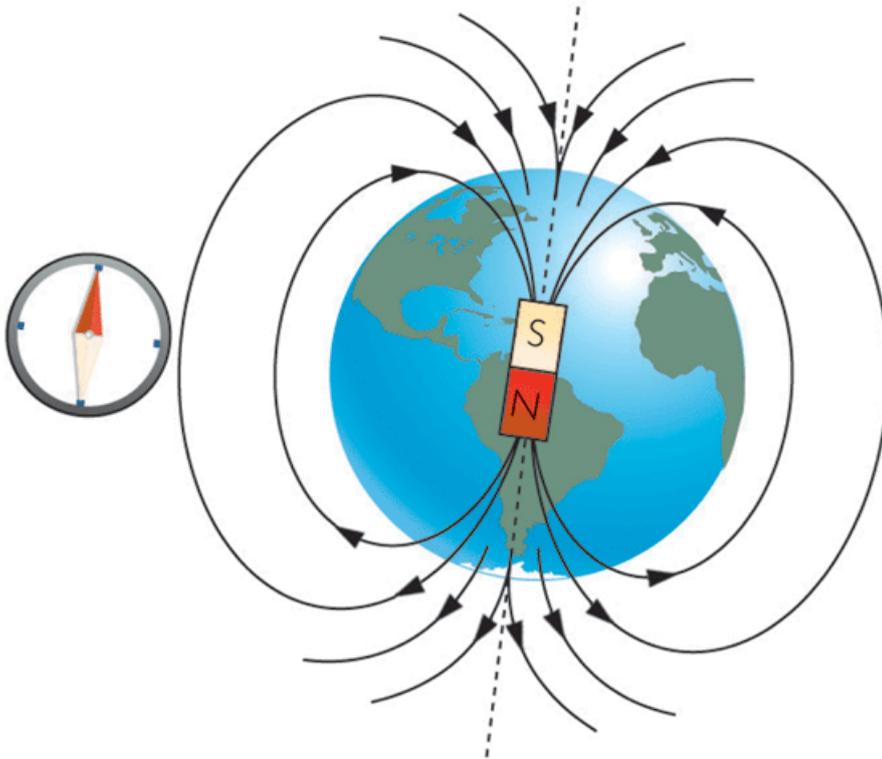
Los imanes se clasifican en: naturales (magnetismo espontáneo) y artificiales (magnetismo inducido por corrientes eléctricas, como los electroimanes).

Polos magnéticos: un imán posee siempre dos polos magnéticos, llamados Norte (N) y Sur (S). Si partimos un imán en dos, no obtenemos dos polos aislados sino dos imanes con sus respectivos polos Norte y Sur, algo bastante sorprendente. Todos los imanes conocidos son por tanto dipolos magnéticos.



Experimentalmente (y teóricamente por P.A.M.Dirac) se han buscado indicios de existencia de “monopolos magnéticos” con resultado negativo hasta la fecha. Sin embargo, el teórico Dirac señaló que la existencia de un solo monopolo magnético aislado en el Universe permitiría explicar la cuantización de la carga eléctrica, algo que no pueden explicar las teorías actuales cuánticas por sí solas. Además, la existencia de “monopolos magnéticos” o “generalizaciones” es algo inevitable en el contexto de las teorías con ruptura espontánea de simetría como el Modelo Estándar de las partículas elementales y sus interacciones fundamentales.

La Tierra se comporta como un enorme imán natural. Se sabe que los polos magnéticos se “invierten” cada cierto tiempo, pero no se comprende muy bien este fenómeno geofísico.



Hasta el siglo XIX, electricidad y magnetismo eran dos fenómenos independientes entre sí.

En 1819, Oersted, físico danés, observó que la corriente eléctrica de un conductor desviaba la aguja de una brújula en sus proximidades. Este descubrimiento, es uno de los descubrimientos accidentales (serendipia) más conocido de todos los tiempos. Específicamente: si no hay corriente eléctrica, la brújula apuntaba en dirección N-S magnética, mientras que si hay corriente, la brújula se orientaba perpendicularmente al hilo conductor. La conclusión del experimento de Oersted es que hay una relación entre la electricidad y el magnetismo, porque la corriente causa la aparición de una fuerza de tipo magnético que desvía la aguja de la brújula, siendo similar a un “imán” inducido por la corriente.

Tras la publicación del trabajo de Oersted, A.M.Ampère propone que el magnetismo de los imanes tiene el mismo origen que el debido a las corrientes eléctricas (cargas móviles) y, por tanto, la existencia de corrientes eléctricas tiene el mismo origen que las fuerzas magnéticas. Hoy conocemos el origen de ambas: los electrones móviles en los átomos que integran el imán son la causa de su magnetismo, y las corrientes eléctricas usuales

(o corrientes amperianas o “de Ampère”) son generadas por el flujo de esos mismos electrones en un conductor.

En resumen: electricidad y magnetismo, aunque se estudian al principio como fenómenos separados e independientes, se debe en última instancia a la existencia en la Naturaleza de cargas eléctricas estáticas (en electricidad estática, o electrostática), y cargas eléctricas en movimiento (móviles, en Magnetismo y más generalmente en electrodinámica). La interacción eléctrica se debe a cargas en movimiento, la interacción magnética se debe a las cargas en movimiento y a las corrientes eléctricas. El estudio conjunto de los fenómenos eléctricos y magnéticos se llama electromagnetismo o electrodinámica.

6.2. Campo magnético

De forma similar la gravitación clásica newtoniana o la electrostática, interpretamos que la existencia de magnetismo se debe a una perturbación que crean las cargas en movimiento en el espacio que las rodea.

Se llama campo magnético o inducción magnética $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ a la función que determina el campo magnético. Su unidad en el S.I. es el Tesla (T).

6.2.1. Fuerza magnética para cargas puntuales

Una carga (q) que se mueve dentro de un campo magnético \vec{B} a una velocidad \vec{v} se ve sometida a una fuerza magnética que viene dada por la siguiente expresión matemática

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

y donde hemos usado la expresión cartesiana del producto vectorial. Usando sus propiedades, vemos que la fuerza magnética es tan complicada que ya en su definición debemos usar algo tan complicado como puede ser (para algunas personas) el producto vectorial de dos vectores. Además:

- La fuerza magnética es perpendicular al plano que forman la velocidad y el campo magnético /la inducción magnética.

- El sentido de la fuerza magnética lo da el determinante o bien la denominada regla del “sacacorchos”: el de la entrada o subida que lleva la velocidad sobre el campo por el camino más corto. También se usa la regla de la mano izquierda: situamos el dedo corazón con la dirección y sentido de la velocidad, mientras que el dedo índice tendrá la dirección y sentido del campo magnético, de forma que el dedo pulgar nos marcará entonces la dirección y sentido de la fuerza magnética. La regla de la mano izquierda puede resultar complicada de visualizar o aplicar en casos concretos, sobre todo si somos torpes o no tenemos una adecuada percepción tridimensional, por lo que en general suele ser más cómodo computar la fuerza con el determinante, aunque algunos estudiantes intuitivos y menos formales de las matemáticas quizás preferirán este enfoque más mecánico y visual que el analítico, es importante conocer todas estas “reglas”.
- El módulo de la fuerza magnética vale

$$|\vec{F}_m| = |q||\vec{v}||\vec{B}| \sin \varphi$$

- Si $|\vec{v}| = 0$, entonces $\vec{F}_m = 0$. Si $\vec{v} \parallel \vec{B}$, entonces $\vec{F}_m = 0$.
- La fuerza magnética es máxima cuando la velocidad de la partícula es perpendicular u ortogonal al campo magnético $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\sin \varphi = 1$).

El tesla (T) es una unidad bastante grande, así que en ocasiones se usa una unidad más pequeña, llamada gauss (G). La equivalencia entre estas dos unidades es como sigue

$$1T = 10^4G \leftrightarrow 1G = 10^{-4}T$$

6.2.2. Fuerza de Lorentz: combinando fuerzas eléctricas y magnéticas

Para cargas puntuales, si hay campos eléctricos y magnéticos actuando sobre las mismas, la fuerza total será la suma de las fuerzas eléctricas y magnéticas respectivas. Para una sola carga puntual q tenemos que

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Esta expresión se conoce como fuerza de Lorentz.

6.2.3. Líneas de fuerza del campo magnético

Como no hay monopolos magnéticos (o si los hay, son muy raros y tienen mucha masa), las líneas de campo magnético son siempre líneas cerradas, salen del polo Norte magnético (N) y entran en el polo Sur magnético (S). En cada punto de la línea de fuerza, la tangente representa el campo magnético \vec{B} .

6.2.4. Movimientos de cargas en presencia de campos magnéticos

El movimiento de una partícula cargada (q) en una zona del espacio donde existe un campo magnético tiene una energía asociada:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_C \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int_C q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, entonces $d\vec{r} = \vec{v}dt$, luego

$$W_{A \rightarrow B} = q \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}dt = 0$$

Por tanto, en un campo magnético, la energía cinética de una partícula se mantiene constante (suponiendo que no hay ningún otro campo adicional actuando sobre la misma que la altere).

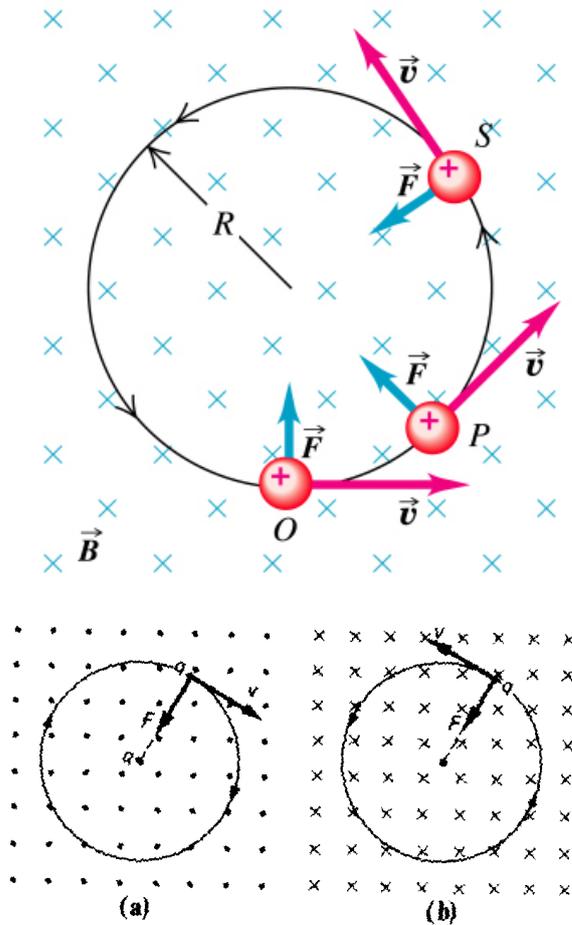
$$\Delta E_c(\text{mag}) = 0 \rightarrow E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$$

Conclusión (importante): Como una fuerza magnética no puede alterar la velocidad de las partículas, sólo puede producir desviar su dirección, esto es, sólo puede producir aceleración normal o centrípeta. Es evidente que si hay fuerza hay aceleración por la segunda ley de Newton, y este planteamiento nos ha hecho identificar el tipo de aceleración que crea una fuerza de tipo magnético.

$$\vec{F}_m \leftrightarrow \begin{cases} E_c = \text{constante} \\ a = a_c = a_n \end{cases} \leftrightarrow \vec{F}_m \text{ crea un MCU!}$$

6.2.5. Movimiento en un campo magnético uniforme

Un campo magnético uniforme es aquel que es constante en todos los puntos del espacio (no tiene variación espacial o temporal). Se suele usar la notación "punto-cruz" para campos salientes o entrantes:



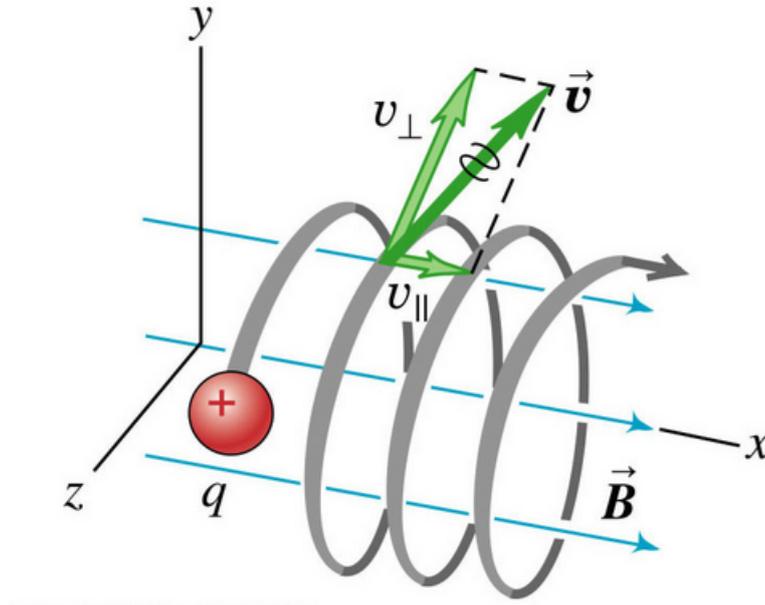
y por tanto se puede escribir un campo en la dirección de cualquier línea o eje. Supongamos el caso particular importante de una carga con velocidad \vec{v} perpendicular a un campo \vec{B} visto "de frente" en el papel o documento que aquí escribimos:

Al entrar en la región donde hay un campo uniforme, se genera un MCU debido a la fuerza magnética inducida por el campo, y tendríamos que componer dicho movimiento con la traslación que provoca tener la velocidad \vec{v} . El resultado de la composición de un MRU con un MCU de estas características es un movimiento denominado movimiento HELICOIDAL

(piensa en la hélice del ADN para tener una imagen de la trayectoria). Es decir,

$$\text{MCU}(\vec{F}_m) + \text{MRU/traslación}(\vec{v}) = \text{Movimiento helicoidal}$$

Vemos que hemos descompuesto la velocidad como $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$. El movimiento helicoidal se produce cuando la velocidad y el campo magnético no son totalmente perpendiculares.



Si $\varphi = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$, tenemos para el MCU correspondiente el radio siguiente

$$F = qvB \sin 90 = qvB$$

$$F = F_n = m \frac{v^2}{R}$$

de donde

$$F_m = F_c \leftrightarrow qvB = m \frac{v^2}{R} \leftrightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

Si $\varphi \neq 90^\circ$, entonces el mismo cálculo permite hallar que

$$\boxed{R = \frac{mv \sin \varphi}{|q|B}} \quad (6.2)$$

y en donde $v = v_\perp$ es la componente perpendicular de la velocidad a B, es decir $v_\perp = v \sin \varphi$. La explicación es la siguiente. Como

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

entonces

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q((\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B}) = q\vec{v}_\perp \times \vec{B} + q\underbrace{\vec{v}_\parallel \times \vec{B}}_0 = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}$$

Además de

$$F_m = |q|v_\perp B = |q|v \sin \varphi B$$

y

$$F_n = ma_n = m \frac{v_\perp^2}{R}$$

con $v_\perp = v \sin \varphi$ y $v_\parallel = v \cos \varphi$, y $F_m = F_c$, se deduce trivialmente que

$$R = \frac{mv_\perp^2}{|q|v_\perp B} = \frac{mv_\perp}{|q|B} \rightarrow R = \frac{mv \sin \varphi}{qB}$$

Q.E.D.

6.2.6. Fuerza sobre una corriente eléctrica I

Definimos corriente eléctrica como la variación de la carga eléctrica por unidad de tiempo. Incrementalmente

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

A nivel diferencial

$$I = \frac{dq}{dt}$$

La intensidad de corriente eléctrica es una magnitud fundamental en el S.I. Además, también tenemos que su unidad es el amperio (A).

$$1A = 1C/1s$$

Toda carga que cambia o “se mueve”, genera una intensidad de corriente o simplemente una corriente eléctrica (por abuso de lenguaje). Como la velocidad es la derivada del vector de posición respecto del tiempo, para un hilo conductor se tiene $d\vec{r} = d\vec{l}$ a nivel infinitesimal, y también $dq = Idt$ con $d\vec{l} = \vec{v}dt$. Usando la fuerza magnética en versión infinitesimal

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B} = Idt\vec{v} \times \vec{B} = I\vec{v}dt \times \vec{B}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}} \quad (6.3)$$

La fuerza total magnética se calcula integrando la expresión anterior sobre todo el elemento de corriente o circuito conductor (hilo). Es una integral algo “extraña” para lo que sabe un alumno corriente en este curso, pero fácil de entender

$$\vec{F}_m(\text{tot}) = \int_C d\vec{F}_m = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_C \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dl_x & dl_y & dl_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

Si es un hilo conductor finito, de longitud L , y el campo es uniforme, la fuerza anterior se reduce a la siguiente forma

$$\boxed{\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}} \leftrightarrow \text{Fuerza magnética para hilo infinito y campo } B \text{ uniforme} \quad (6.5)$$

Nota: Fuerza magnética tiene unidades de newtons, como no podría ser de otro modo al ser una fuerza.

6.2.7. Campo magnético de una carga puntual móvil

Para una carga que se mueve con velocidad \vec{v} , el campo magnético viene dado, en un medio magnético, por la ecuación siguiente

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}} \quad (6.6)$$

Si el medio es el vacío, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$. La permitividad relativa de un medio (diferente del vacío) se define como $\mu_r = \mu/\mu_0$, siendo igual a la unidad si es el vacío. En la expresión anterior, r es la distancia desde la carga (q) al punto donde hallamos el campo magnético \vec{B} y \vec{u}_r es un vector unitario en la dirección que une la carga con dicho punto.

Comentario: Según la teoría de Maxwell, la permitividad eléctrica y la permitividad magnética del vacío, ϵ_0 y μ_0 respectivamente, están relacionadas con la velocidad de la luz en el vacío de una manera particular

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

De hecho, él hizo la atrevida conjetura (probada cierta después por sus contemporáneos) de que las ecuaciones combinadas de la electricidad y el

magnetismo daban un buen valor para la velocidad de la luz (mejor que le conocido hasta la fecha), de forma que la luz misma debía ser una onda electromagnética. Además, puede escribirse que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \right)$$

de donde se observa la relación sutil entre el campo magnético con el campo eléctrico de la carga puntual

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

6.2.8. Ley de Biot-Savart

Para un conductor arbitrario, con elemento de longitud $d\vec{l}$, en un punto a una distancia r del mismo (medido sobre la perpendicular al conductor), se tiene que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

y el campo total, integrando, adopta la conocida forma de la Ley Biot-Savart en la siguiente forma

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (6.7)$$

The Biot-Savart Law

The Magnetic Field produced by the current in the wire

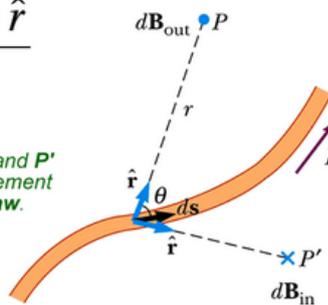
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

The magnetic field $d\vec{B}$ at a point P and P' due to the current I thru a length element $d\vec{s}$ is given by the Biot-Savart law.

This Law is based upon experimental observation

The vector $d\vec{B}$ is perpendicular to both $d\vec{s}$ and to the unit vector \hat{r} directed toward the point P .

The magnitude of $d\vec{B}$ is proportional to the current I , to the length element $d\vec{s}$ and to the sine of the angle between $d\vec{s}$ and \hat{r} . It is also inversely proportional to r^2 .



Obviously we will integrate over the entire current distribution.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Si hay varios conductores distintos, para el campo magnético aplica también el principio de superposición (análogo al del campo eléctrico), por lo que el campo total será la suma de los diferentes campos magnéticos

$$\vec{B}(\text{total}) = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i = \vec{B}_1 + \dots + \vec{B}_N \quad (6.8)$$

Nota: La interacción magnética de cargas móviles es en general más débil que la interacción eléctrica sobre las cargas estáticas. Sin embargo, en un hilo con corriente I , es más importante la interacción magnética que la eléctrica (en general).

6.2.9. Circulación de un vector. Ley de Ampère

Sea un vector \vec{v} , la circulación de ese vector a lo largo de una curva C es la magnitud definida por la integral

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (6.9)$$

y donde $d\vec{l}$ representa el desplazamiento infinitesimal del vector de posición $d\vec{r}$ por la velocidad $\vec{v}(x, y, z)$. Para una curva cerrada, suele escribirse

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (6.10)$$

Lo bonito de este concepto es que no es “nuevo”. Ya le hemos usado antes. La energía o trabajo para llevar desde A hasta B un objeto o partícula en un campo de fuerzas $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ es un ejemplo de circulación de un campo de vectores

$$\Gamma = W_{A \rightarrow B} = W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{Energía}$$

Si el campo \vec{F} es conservativo, sabemos que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $W_{A \rightarrow B} = f(A, B)$, i.e., sólo depende de los puntos inicial A y final B .
- $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$
- $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

- $\vec{F} = -\nabla E_p = -\overrightarrow{\text{grad}E_p}$
- $\vec{E} = -\nabla V = -\overrightarrow{\text{grad}V}$

En magnetismo, la utilidad del concepto de circulación del campo magnético es la siguiente. Calculemos la circulación del campo magnético a lo largo de un circuito cerrado

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Al calcular la integral, se observa que esta cantidad depende de la corriente encerrada por el circuito C. La expresión concreta es la llamada Ley de Ampère del campo magnético

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{in} \quad (6.11)$$

Comentarios:

- $\Gamma(\vec{B})$ no es una energía, sino una magnitud diferente.
- I_{in} es la corriente encerrada por C y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.
- Para aplicar la ley de Ampère, ha de escogerse siempre un camino cerrado o circuito "amperiano" que atrape o encierre la corriente o corrientes del problema (es similar a la elección de superficie gaussiana que debemos hacer para calcular el flujo)

6.2.10. Aplicación de la ley de Ampère

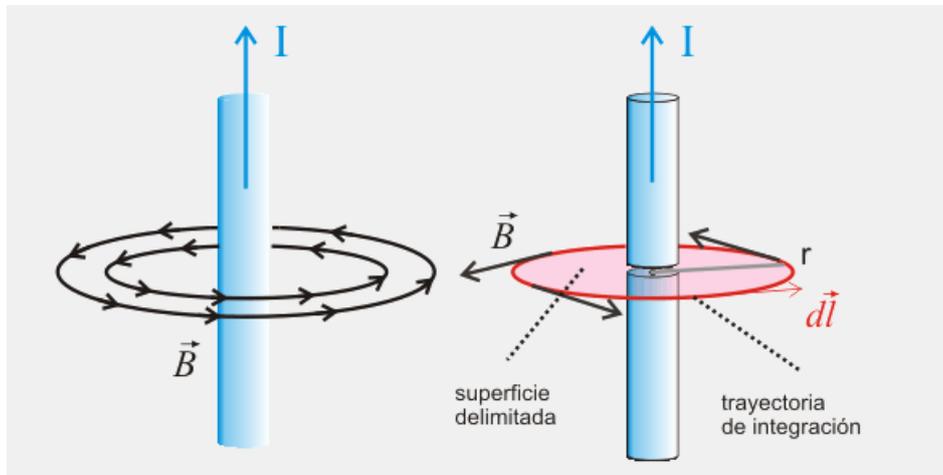
Hilo infinito de corriente

Si tomamos como camino cerrado una circunferencia de radio r alrededor del hilo, en este caso, sabiendo que la simetría del problema indica que el campo será "azimutal" o "tangencial" a dicha circunferencia, de la ley de Ampère se deduce que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C B_\varphi dr \cos 0 = \oint_C B_\varphi dr = B_\varphi \oint_C dr = B_\varphi 2\pi r$$

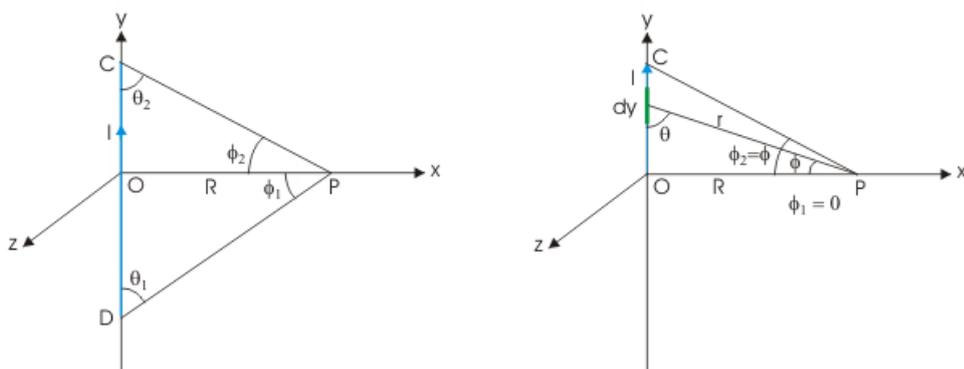
de donde

$$B_\varphi(\text{hilo}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad (6.12)$$

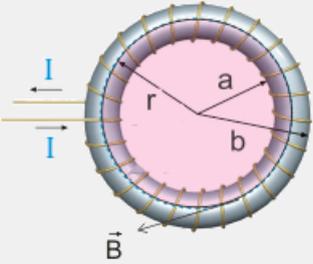
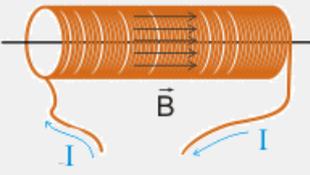


Nota: para el caso de un hilo FINITO recto, la expresión general es la siguiente

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos \theta_1 + \cos \theta_2] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2]$$



También se puede aplicar al toroide y al solenoide ideal a partir de este resultado:

Toroide circular	Solenoide ideal*
	
$r < a \text{ y } r > b \Rightarrow B = 0$ $a < r < b \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$	$B = \mu_0 n I$

(*) Un solenoide ideal es una bobina de longitud grande cuyas espiras están muy juntas. En la expresión del campo magnético que crea, n es el número de espiras por unidad de longitud.

Espira (wire loop)

Usando la ley de Biot-Savart, en vez de la ley de Ampère, podemos calcular el campo magnético de una espira de radio $r = R$ (hilo conductor con forma circular) en algunos casos específicos simples. En el centro de la espira se tiene que de:

$$\vec{B} = \oint_C \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

tenemos

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dL = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R$$

es decir

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

y donde tendrá la dirección y sentido del eje correspondiente. Si en vez de en el centro, queremos calcular el campo en un punto alejado z unidades del eje de la espira, el cálculo es más arduo, pero puede hacerse con una

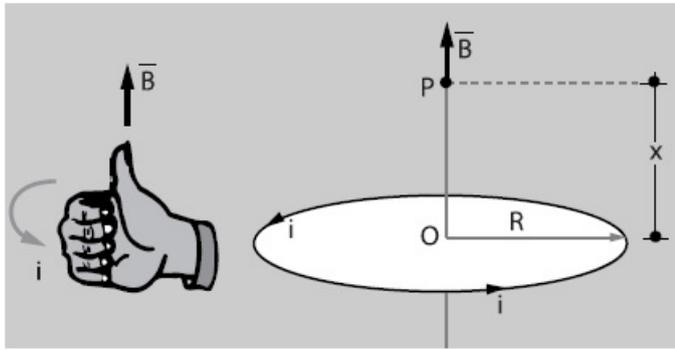
integral relativamente simple para el nivel de este curso

$$d\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I dL R}{4\pi(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_z = \oint_C \frac{\mu_0 I R dL}{4\pi(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Para el centro ($z = 0$), vemos que recuperamos la expresión anterior de forma simple. En resumen



En el punto "P":

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

En el punto "O"

(centro de la espira) $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Solenoides

Un solenoide se puede considerar como un conjunto de N espiras arrolladas sobre un material (o el vacío), por el que circula una corriente I , o hilo arrollado N -veces. Un solenoide "muy largo" con N -espiras por unidad de longitud (l), y, por tanto, densidad de espiras $n = N/l$ es un sistema sencillo para aplicar la ley de Ampère. Vamos a calcular con dicha ley el campo dentro del solenoide en un punto cercano al eje del mismo (y "lejos" de los "extremos" de un solenoide recto finito también es válido este resultado, por lo que es doblemente interesante conocerle bien):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_M^N \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_N^Q \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_Q^P \vec{P} \cdot d\vec{r} + \int_P^M \vec{M} \cdot d\vec{r}$$

Calculamos las integrales por separado, resultando

$$\int_N^Q \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ porque } \vec{B} \perp d\vec{r}$$

$$\int_Q^P \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ porque } \vec{B} = 0$$

$$\int_P^M \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ porque } \vec{B} \perp d\vec{r}$$

Y la única integral no nula es la que queda

$$\int_M^N \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \int dr = Bl$$

La corriente encerrada por el solenoide es

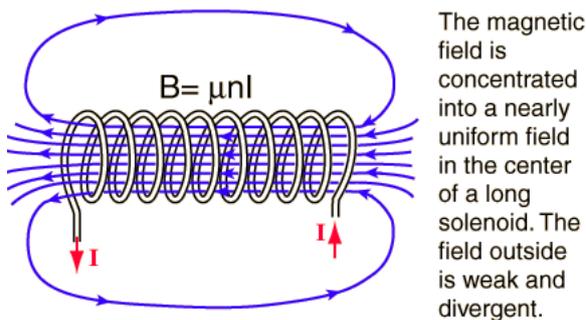
$$I_{in} = NI = nIl$$

Usando la ley de Ampère, e igualando circulación al producto de la permitividad del vacío por la corriente encerrada, nos queda

$$B(sol, int)_{eje} l = nIl\mu_0 \quad (6.13)$$

es decir

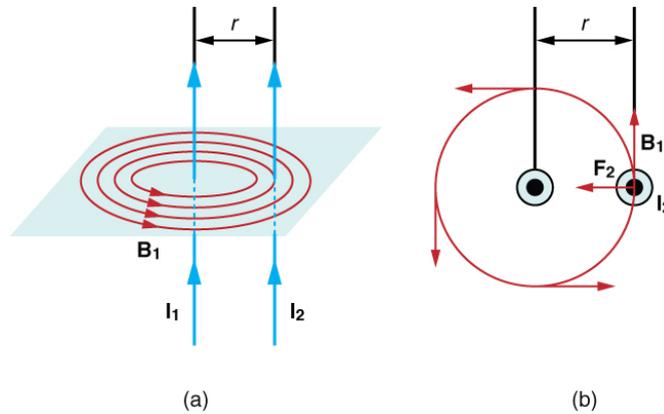
$$B(sol, int)_{eje} = n\mu_0 I = \frac{N\mu_0 I}{l} \quad (6.14)$$



Curiosidad: Para un solenoide recto FINITO, en puntos del eje de los extremos, el campo vale precisamente la mitad de este resultado. La demostración requiere un mayor esfuerzo y no la demostraremos aquí, pero puede encontrarse en cualquier tratado de electromagnetismo decente que

$$B(ext, solenoide, ext - fin) = \frac{1}{2} B(sol, int)_{eje} = \frac{N\mu_0 I}{l}$$

6.2.11. Fuerzas magnéticas entre corrientes paralelas. Definición de amperio.



Según el dibujo, los conductores 1 y 2, separados una distancia d y con corrientes como se indica, crean los campos

$$B_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$B_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$$

Como \vec{L} y \vec{B} son perpendiculares, las fuerzas magnéticas son

$$|\vec{F}_{1 \rightarrow 2}| = B_{1 \rightarrow 2} L I_2 \leftrightarrow F_{1 \rightarrow 2} = I_2 L B_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L$$

$$|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}| = B_{2 \rightarrow 1} L I_1 \leftrightarrow F_{2 \rightarrow 1} = I_1 L B_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} L$$

También vemos que para hilos infinitos (muy largos) la fuerza magnética cumple la tercera ley de Newton $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Este resultado se usa para la definición de amperio: 1 amperio (A) es la corriente obtenida manteniendo dos conductores paralelos, rectilíneos, infinitos (muy largos), de sección despreciable, en el vacío separados 1 m de distancia de forma que la fuerza experimentada por los conductores es igual a $2 \cdot 10^{-7} N$, de forma que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} TmA^{-1}$, o bien

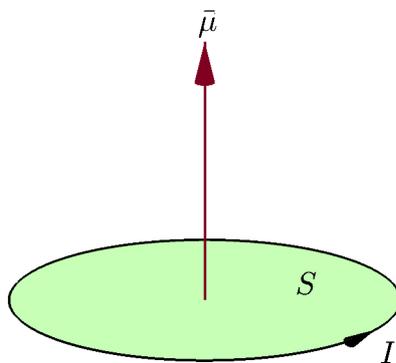
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} TmA^{-1}$$

Nótese que $1C = 1A \cdot 1s$, y por lo tanto la carga eléctrica NO es fundamental en el sistema internacional (S.I.) de unidades.

6.2.12. Momento magnético de una espira

La fuerza magnética sobre una espira arbitraria (no necesariamente circular) es igual a la cantidad

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} \quad (6.15)$$



Se llama momento dipolar magnético a expresión siguiente

$$\vec{m} = \vec{\mu} = I\vec{S}$$

en donde I es la intensidad de corriente que pasa por la espira (conductor circular) y \vec{S} es el vector de superficie que representa el área virtual de la espira en la dirección exterior a ella. Por otra parte, el campo magnético \vec{B} aplica un torque o momento de un par a una espira con un valor igual a

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}$$

Usando la definición de momento dipolar magnético, se tiene

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Para N espiras paralelas (llamada en ocasiones bobina) se tiene que

$$\vec{M}_{bob} = NI\vec{S} \times \vec{B} = N\vec{m} \times \vec{B}$$

6.2.13. Aplicaciones electromagnéticas del magnetismo

Experimento de Thomson. Selector de velocidades.

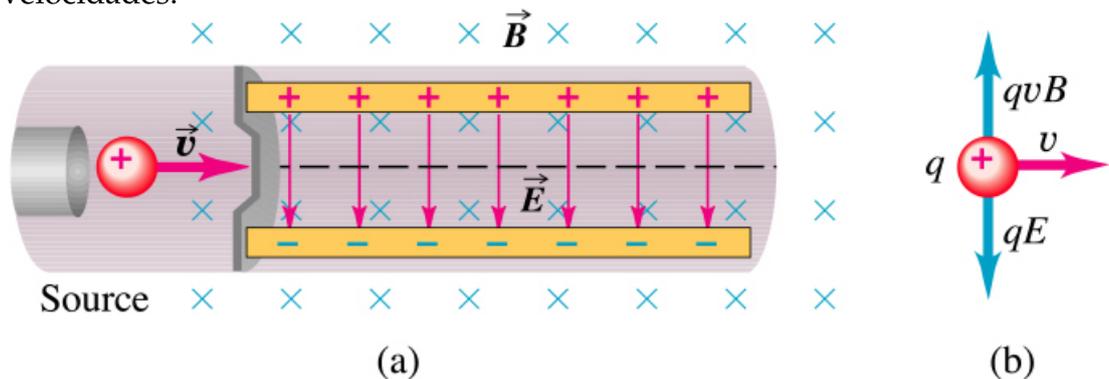
En el experimento de Thomson, históricamente, permitió el desarrollo del llamado selector de velocidades. Una partícula que entra en esta región transforma su $E_p(\text{elec})$ en E_c . Por tanto, igualando

$$E_p(\text{elec}) = E_c \leftrightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2 \leftrightarrow \frac{q}{m} = \frac{v^2}{2V}$$

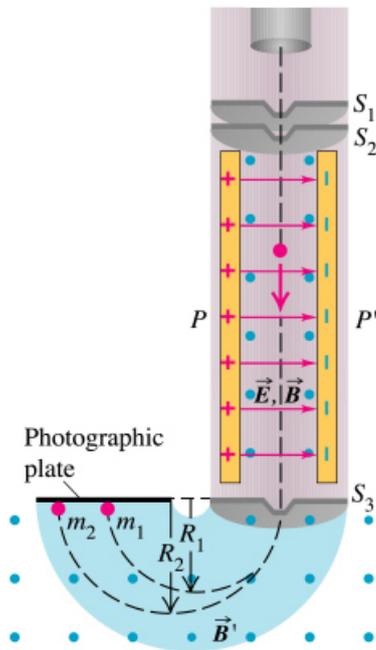
Conociendo la velocidad v y el potencial V podemos hallar la razón carga-masa de la partícula. Como $\vec{E} \perp \vec{B}$, las partículas cargadas atraviesan el selector de velocidades sin desviarse si la fuerza magnética es igual a la fuerza eléctrica, esto es, si

$$qE = qvB \leftrightarrow v = \frac{E}{B}$$

Por lo tanto, podemos usar el dispositivo de Thomson como selector de velocidades.

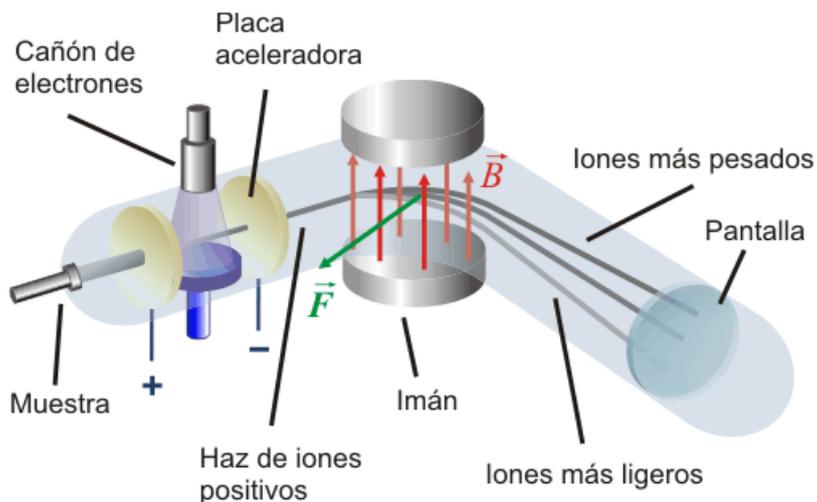


Si introducimos las partículas en una cámara fotográfica, podemos determinar la masa. El esquema experimental para hacerlo es como sigue



La razón es sencilla: un haz de partículas con velocidades arbitrarias que atraviese el “set-up” anterior tendrá una propiedad característica: todas las partículas que no sean desviadas poseerán la misma velocidad.

Espectrógrafo de masas



Este aparato permite estudiar isótopos, iones, ... Igualando la fuerza

magnética a la fuerza centrípeta, tenemos el resultado ya antes visto

$$R_{ion} = \frac{m_{ion}v}{q_{ion}B} \quad (6.16)$$

6.3. ¿Qué debo saber?

- Las fuentes del magnetismo: identificarlas y decir sus propiedades fundamentales.
- Definir campo magnético, fuerza magnética, fuerza de Lorentz sobre una carga puntual. Unidades del campo magnético.
- Fuerzas sobre corrientes eléctricas: definición de amperio, cálculo, ley de Biot-Savart.
- Ley de Ampère, noción de circulación, campo magnético creado por un hilo infinito, por una espira circular en puntos del eje de la misma, por una bobina y por solenoide infinito.
- Fuerzas entre corrientes paralelas, momento dipolar magnético de una espira, momento o torque de un campo magnético.
- Aplicaciones electromagnéticas del magnetismo: experimento de Thomson y selector de velocidades, espectrógrafo de masas.

6.4. Formulario

- Fuentes del magnetismo: imanes, cargas móviles, corrientes eléctricas.
- Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
- Fuerza sobre corriente eléctrica elemental: $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$.
- Fuerza sobre corriente finita y campo uniforme: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$.
- Fuerza entre corrientes paralelas: $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}$ (Repulsión si las corrientes tienen sentidos opuestos, atracción si las corrientes tienen mismo sentido).
- Momento dipolar magnético: $\vec{m} = I\vec{S}$.

- Momento o torque generado por campo magnético: $\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$
- Circulación y ley de Ampère: $\Gamma(B) = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{in}$
- Ley de Biot-Savart para cargas puntuales móviles:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \vec{l} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

o en versión diferencial

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} \rightarrow \vec{B} = \int_C \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}$$

- Campo \vec{B} de un hilo infinito:

$$\vec{B}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

- Campo \vec{B} de un solenoide infinitamente largo en puntos del eje en su interior: $\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 NI}{L} \vec{u}_{eje} = nI\mu_0 \vec{u}_{eje}$. En el exterior, $\vec{B}_{ext} = 0$.

Capítulo 7

Inducción electromagnética

7.1. Fundamentos experimentales e historia

A principios del siglo XIX se descubrió que las corrientes eléctricas podían generar campos magnéticos.

Una cuestión en retrospectiva es: ¿Sería posible generar campos eléctricos con imanes? La respuesta es afirmativa. Este fenómeno lo estudiaron Faraday, Henry y Lenz, entre otros físicos destacados.

A mediados del siglo XIX ya se sabía que por medio de un reposo, con un imán estacionario no se crea corriente, mientras que si el imán se mueve transversalmente al campo magnético genera una corriente, o bien moviendo el campo (de un imán) se crea también una corriente eléctrica.

Para una carga móvil constituida por electrones (si tenemos en cuenta que la carga Q circula por una barra móvil sobre barras conductoras con una velocidad dada) libres del conductor en un circuito, la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida por la fuerza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

mientras que para N electrones libres

$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = -Ne\vec{v} \times \vec{B}$$

Por definición, la f.e.m. es la diferencia de potencial debida a la inducción del campo magnético variable \vec{B} en un circuito eléctrico. En el ejemplo anterior, en versión simple, sería

$$\varepsilon = V = vBL$$

y en versión vectorial

$$\varepsilon = V = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$$

y en donde la velocidad \vec{v} es la velocidad constante de los electrones de la corriente, \vec{L} la longitud vectorial de la barra móvil y \vec{B} es el campo magnético.

La ley de Ohm, $V = IR$, para la corriente inducida es igual a $\varepsilon = IR$. La fuerza resistiva de la barra al movimiento es igual a

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Este ejemplo nos permite generalizar la ley de Ohm al caso más general de los fenómenos electromagnéticos:

$$P_{gen} = IV = I\varepsilon$$

$$P_{ind} = \varepsilon_{ind}I$$

La potencia total, o ley de Joule, para el circuito es

$$P_{Joule} = P_{total} = I^2R$$

Por lo tanto,

$$P_{gen} + P_{ind} = I^2R$$

$$I\varepsilon_{gen} + I\varepsilon_{in} = I^2R$$

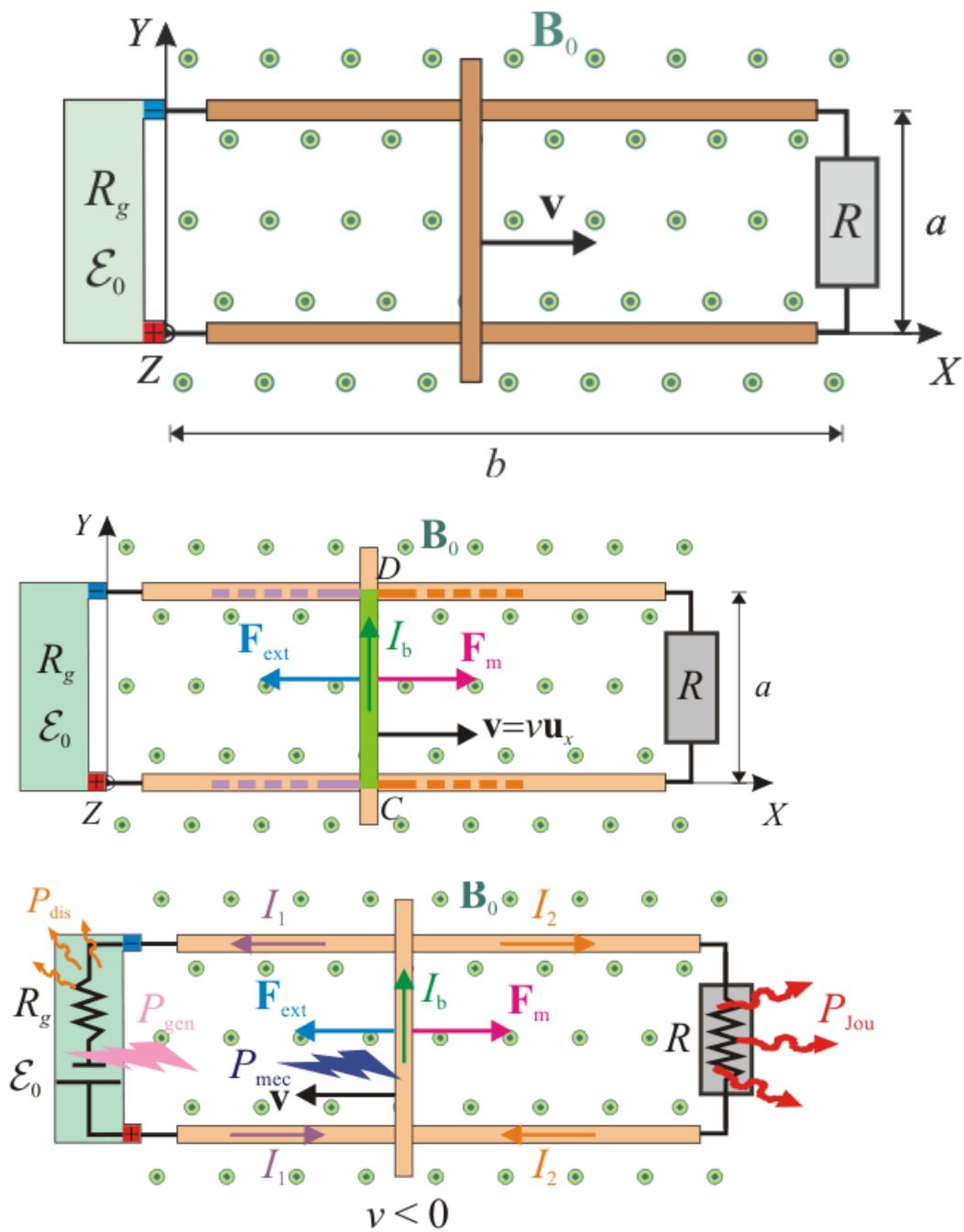
$$\varepsilon_{gen} + \varepsilon_{in} = IR$$

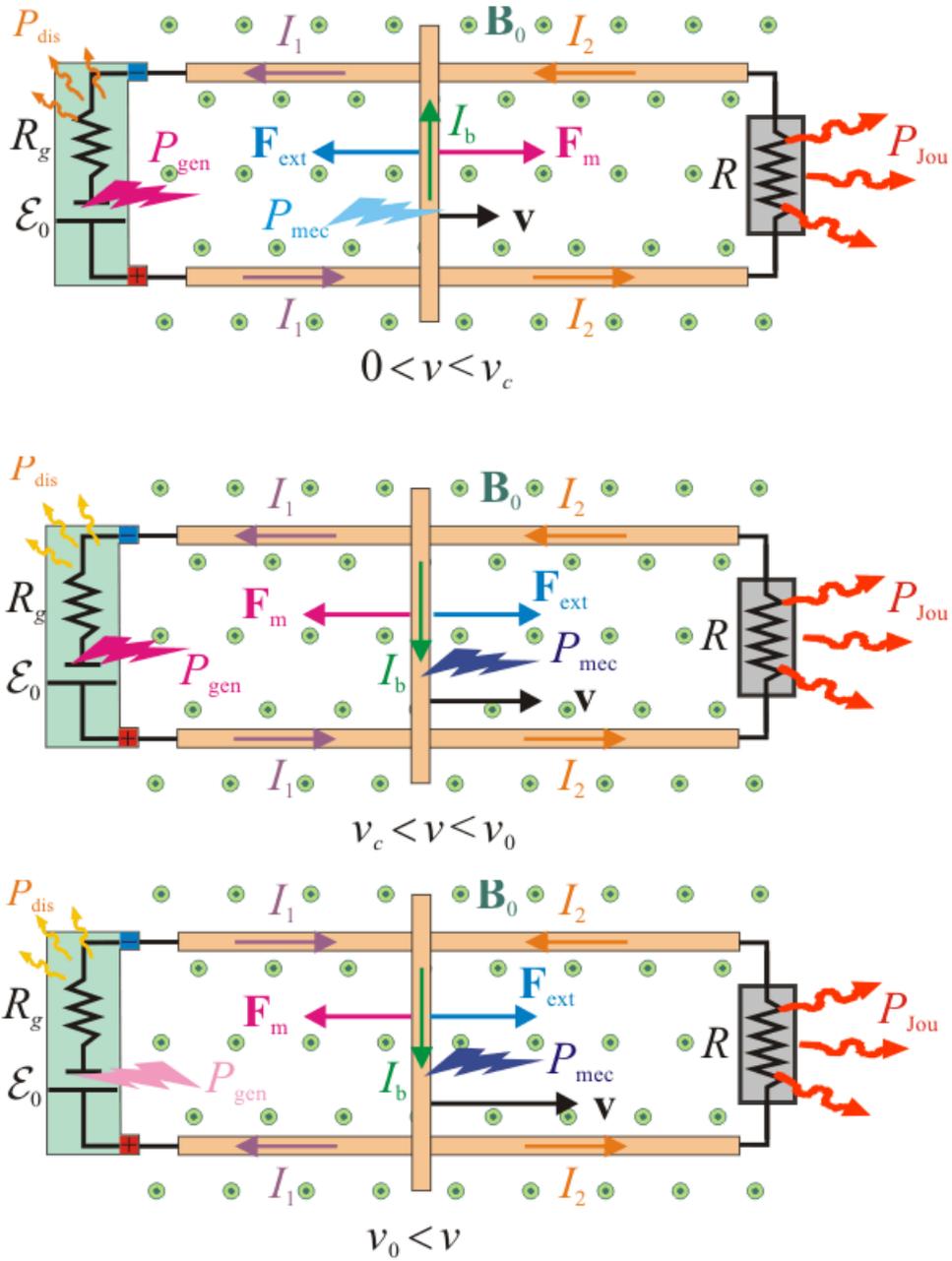
$$I = \frac{\varepsilon_{gen} + \varepsilon_{ind}}{R}$$

o bien

$$I = \frac{\varepsilon_{gen} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}}{R}$$

para una barra móvil en un circuito conductor paralelo. En general, la fenomenología de este problema es un tanto “más complicada” que lo aquí expuesto, y que se extrae de los siguientes diagramas de fuerzas y f.e.m. inducidas:





7.2. Flujo magnético

Por definición de flujo, el flujo del campo magnético será igual a la siguiente integral

$$\phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos \varphi dS \quad (7.1)$$

Si B es uniforme en todos los puntos (constante), y la superficie total es S , tendremos que podremos escribir la expresión anterior sin ninguna sola integral

$$\phi(B) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \varphi \quad (7.2)$$

Las unidades del flujo magnético son los weber, $1 \text{ weber} = 1T \cdot m^2 = 1Wb$. Para nuestro ejemplo de la barra móvil, en la sección anterior, sobre unos conductores paralelos o carriles conductores, se tiene que $|\vec{v}| = v$ y

$$dx = v dt$$

$$dS = l dx$$

$$d\phi(B) = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS \cos 180 = -Bl dx$$

Entonces la variación con respecto al tiempo del campo flujo del campo magnético es igual a

$$\frac{d\phi(B)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv = -BLv$$

¡Es la f.e.m. cambiada de signo! Por lo tanto, se tiene la definición de f.e.m. como menos la variación con respecto del tiempo del flujo magnético, tanto en versión incremental como diferencial

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\phi(B)}{\Delta t}} \quad (7.3)$$

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi(B)}{dt}} \quad (7.4)$$

Estas dos últimas expresiones son formulaciones diferentes de la llamada Ley de Faraday-Lenz de inducción electromagnética y son muy importantes en los problemas de prácticos de electromagnetismo.

7.3. Leyes de la inducción electromagnética

Aunque la formulación matemática de las leyes de Faraday-Lenz es una sola ecuación matemática, históricamente se enunciaron independientemente hasta que Maxwell propuso las ecuaciones generales del electromagnetismo. Las dos leyes se formulan de la siguiente forma:

- Ley de Faraday:** “Si hay un campo magnético variable en el tiempo $\vec{B}(t)$, se induce un la región donde se encuentre un campo eléctrico inducido \vec{E}_{ind} . La circulación del campo eléctrico inducido a lo largo de una línea cerrada es igual a menos la variación instantánea del flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito o línea cerrada”. Matemáticamente hablando, tenemos que

$$\oint_C \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

$$\Gamma(E_{ind}) = -\frac{d\phi(B)}{dt} \leftrightarrow \oint_C \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$$

Por definición, la f.e.m. los da

$$\varepsilon_{ind} = \Gamma(E_{ind}) = -\frac{d\phi(B)}{dt}$$

y en donde el signo tiene un significado físico indicado por la Ley de Lenz.

- Ley de Lenz:** “El sentido de la corriente inducida o del campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en el tiempo es el del sentido que se opone a la variación de flujo”.

Nota: En el caso de una bobina, donde el hilo se arrolla N veces, la f.e.m. será igual a

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\phi(B)}{dt}$$

Algunos ejemplos conocidos y cotidianos prácticos de la inducción electromagnética son: los electroimanes, las dinamos, algunos circuitos eléctricos o electrónicos ingeniosos de los actuales ordenadores y un largo etcétera.

7.4. Autoinducción

Un circuito simple con resistencia R , posee una corriente I y un campo magnético proporcional a dicha corriente. El factor de proporcionalidad se llama L y es llamado coeficiente de autoinducción.

Cuidado: No confundir L con longitud, son cosas totalmente distintas pese a las letras, y hay que tener sumo cuidado con las notaciones y convenios que estemos usando en nuestras ecuaciones y fórmulas.

Las unidades de L son dimensionalmente unidades de flujo magnético entre unidades de intensidad de corriente eléctrica, es decir,

$$[L] = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{H} = \text{henrio} = \text{V} \cdot \text{s}/\text{A} = \Omega \cdot \text{s}$$

Usando L , podemos reescribir la ley de Faraday-Lenz como sigue

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (7.5)$$

en el caso de que el coeficiente de autoinducción sea constante, que suele ser cierto en general. Para una bobina con N vueltas y longitud l , se obtiene que

$$\phi(B) = BS = \mu_0 \frac{N}{l} IS = \mu_0 n IS$$

y

$$\phi(\text{total}) = N\phi(B) = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS = \mu_0 n N IS$$

Como $L = \phi(B)/I$ se tiene para la bobina el coeficiente de autoinducción siguiente

$$L_{bobina} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 V \frac{N^2}{l^2} = \mu_0 n^2 V$$

en donde V es el volumen de la bobina (cuidado, no es el potencial esta vez) e igual a $V = Sl$.

7.5. Transformadores

Los transformadores son dispositivos que sirven para aumentar o disminuir la tensión eléctrica o potencial, así como la intensidad de una corriente alterna (AC).

Un transformador está formado generalmente por dos circuitos: uno primario y otro secundario. En el circuito primario el conductor está arrollado N_1 veces, y:

$$V_1 = -\frac{d(N_1\phi)}{dt} = -N_1 \frac{d\phi}{dt} = \varepsilon_1$$

En el circuito secundario el conductor está arrollado N_2 veces, y

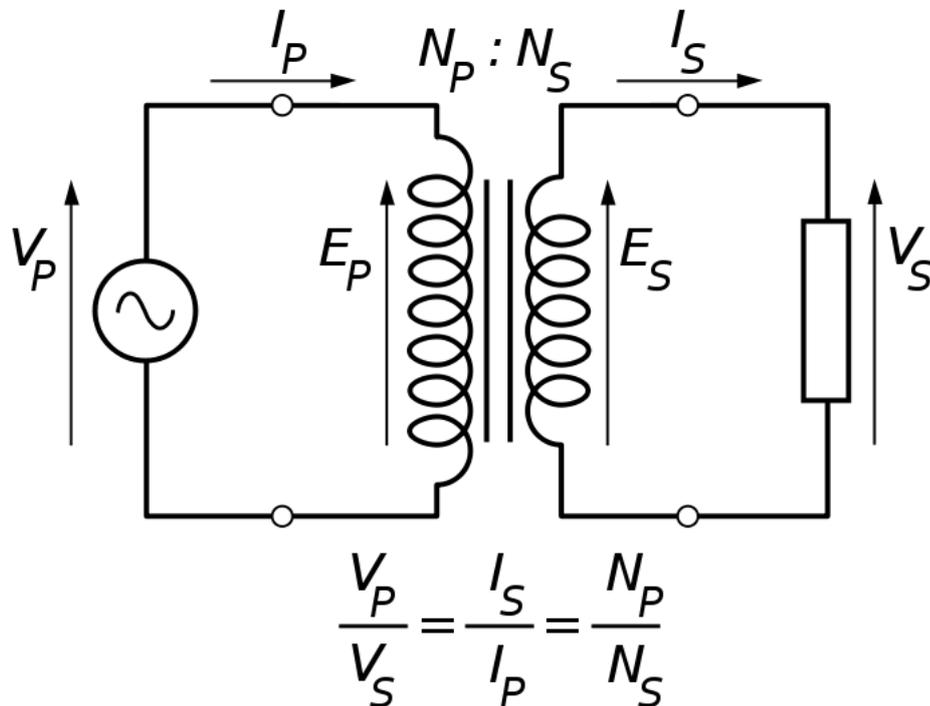
$$V_2 = -\frac{d(N_2\phi)}{dt} = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = \varepsilon_2$$

Despejando de ambos circuitos, se obtienen las siguientes ecuaciones y relaciones

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (7.6)$$

Además, si no hay pérdidas de potencia, $P_1 = P_2$, con lo que $V_1 I_1 = V_2 I_2$, y se tiene

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2} \quad (7.7)$$



7.6. Generadores de corriente alterna (AC)

Si el flujo magnético $\phi(B)$, escribimos que el ángulo formado por el campo y el correspondiente vector superficie es variable, con $\varphi(t) = \omega t$, entonces se tiene que

$$\phi(B) = \phi(B)(t) = BS \cos(\omega t)$$

En ese caso, tendremos la f.e.m. inducida

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\phi(B)}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$$

con $\varepsilon_{ind} = I_{ind}R$, de forma que

$$I_{ind} = \frac{NBS\omega \sin(\omega t)}{R} = I_{ind}(max) \sin(\omega t) \quad (7.8)$$

y que es una muestra explícita de que la corriente es “alterna” debido a las variaciones de signo de la función seno.

7.7. ¿Qué debo saber?

La noción de inducción electromagnética, su origen histórico y algunas de sus aplicaciones elementales.

El concepto de f.e.m. inducida sobre un circuito. Caso particular: barra sobre railes conductores paralelos, con una barra móvil con velocidad constante y $\varepsilon_{ind} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$.

Ley de Ohm generalizada: $I = \frac{\varepsilon_{gen} + \varepsilon_{ind}}{R}$. Para la barra anterior tenemos que $I = \frac{\varepsilon_{gen} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}}{R}$

Noción de flujo magnético: $\phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Unidades del flujo magnético: weber (Wb).

Curiosidad: el flujo a lo largo de una superficie cerrada es siempre cero porque no existen monopolos magnéticos, a diferencia del caso eléctrico, en el que sí que existen cargas positivas o negativas aisladas.

La ley de Faraday-Lenz: forma integral e incremental. Significado físico del signo negativo, así como su interpretación para corrientes y campos eléctricos inducidos.

Noción de autoinducción de un circuito y su cálculo para una bobina.

Aplicaciones sencillas de la inducción electromagnética: generadores AC, transformadores,...

7.8. Formulario

- Flujo magnético: $\phi(B) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ $\phi(B) = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. También $\phi(B) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \varphi$

- f.e.m. para una barra sobre conductores paralelos: $\varepsilon_{ind} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}$

- Ley de Ohm generalizada: $I = \frac{\varepsilon_{gen} + \varepsilon_{ind}}{R}$. Para la barra anterior tenemos que $I = \frac{\varepsilon_{gen} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{L}}{R}$

- Ley de Faraday-Lenz. Forma integral: $\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Forma diferencial: $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi(B)}{dt}$. Si hay más de una corriente o circuito arrollado, será

$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\phi(B)}{dt}$$

- Coeficiente de autoinducción: $\phi(B) = LI$

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

Para la bobina con N espiras $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$

- Generador de corriente alterna AC:

$$\varepsilon_{ind} = \varepsilon(max) \sin(\omega t)$$

$$I_{ind} = I(max) \sin(\omega t)$$

- Transformadores:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

y donde la última igualdad es válida sólo para circuitos que no pierden potencia.

Capítulo 8

Óptica (I): Naturaleza de la luz

8.1. Introducción

Ya en la Grecia clásica se distinguía y discutía sobre la naturaleza de la luz:

- **Escuela atomista.** Los cuerpos emiten partículas que llegan a nuestro “alma” y nos comunican sus “propiedades”.
- **Escuela pitagórica.** La “visión” era un flujo que emitían los ojos para explorar los objetos.

Se puede establecer la siguiente correspondencia histórica entre dichas formas de pensamiento y las actuales teorías sobre la naturaleza de la luz: la escuela atomista corresponde al modelo corpuscular, mientras que la escuela pitagórica sería el análogo del modelo ondulatorio de la luz.

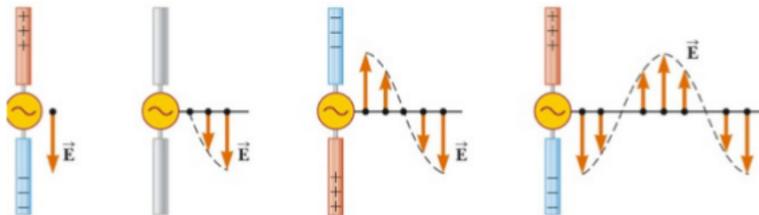
- **Modelo corpuscular de la luz.** La luz es un conjunto de partículas. Explica la propagación generalmente rectilínea de la luz, el efecto fotoeléctrico y los fenómenos cuánticos requieren este modelo como “dual” de su complementario.
- **Modelo ondulatorio de la luz.** Complementario del anterior. La luz es una onda o perturbación en un medio o “en el vacío”. Hasta el siglo XX se pensaba que la luz viajaba en un medio llamado éter luminífero, del cual era una vibración. En ese mismo siglo XX se rechazó como interpretación completa de la naturaleza de la luz, así como también se ha descartado hasta la fecha la existencia de un medio como el éter. En su lugar, tenemos el concepto de vacío. El modelo ondulatorio explica los fenómenos de interferencia, difracción, reflexión y refracción de forma muy simple.

Es de destacar que los problemas del modelo ondulatorio que llevaron a su revisión y modificación fueron esencialmente dos: la detección del éter (no realizada) y la explicación ondulatoria del efecto fotoeléctrico (que resultó ser imposible).

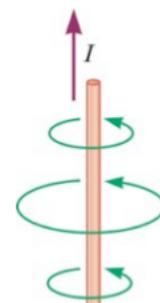
Las cargas aceleradas producen un campo eléctrico variable en el tiempo de acuerdo al electromagnetismo clásico, así como las corrientes variables producen un campo magnético variable en el tiempo. Este dibujo lo resume muy bien:

Electromagnetic Waves

An accelerating charge produces
a time dependent electric field



A changing current produces a
time dependent magnetic field



El electromagnetismo clásico está descrito completamente con las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones determinan y describen todos los fenómenos electromagnéticos clásicos. Para ir más allá, hay que ir a la teoría cuántica, bien por medio de QED, o por medio de la teoría electrodébil del denominado Modelo Estándar de las interacciones fundamentales. Clásicamente, pues, se tiene que:

Maxwell's Equations

There is a set of four differential equations that completely describe the behavior of classical electric and magnetic fields.

According to these equations, a changing electric field produces a changing magnetic field and a changing magnetic field produces a changing electric field

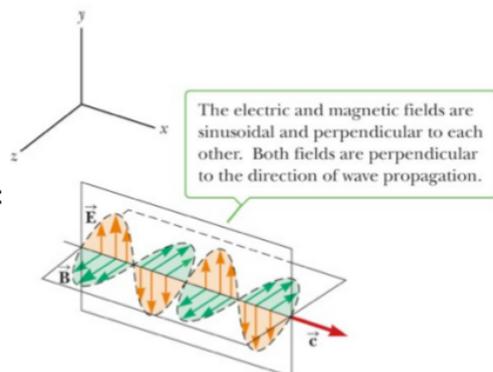
The result is an electromagnetic wave of oscillating electric and magnetic fields that propagates away from the source (antenna)

De hecho, las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de las ondas electromagnéticas y, al mismo tiempo, proporcionan una forma de medir “teóricamente” (o más bien predecir) la velocidad de la luz en función de constantes eléctricas y magnéticas. Fue la intuición de Maxwell la que arrojó pistas sobre el hecho de que la luz es una onda electromagnética gracias a sus ecuaciones. Las ondas electromagnéticas tienen propiedades interesantes:

Properties of Electromagnetic Waves

- The electric (E) and magnetic (B) fields are perpendicular to the direction of propagation of the wave
- The electric and magnetic fields are perpendicular to each other
- The speed of the wave is the speed of light $c = 3 \times 10^8$ m/s
- The magnitudes of the electric and magnetic fields are related by:

$$B = E/c$$



8.2. Dualidad onda-corpúsculo

La luz tiene un carácter dual: puede ser a la vez onda o partícula, dependiendo de las circunstancias y la fenomenología asociada. La luz se propaga en el vacío con una velocidad aproximada de $3 \cdot 10^5 km/s$, o bien $3 \cdot 10^8 m/s$.

Particle-Wave Duality

Light has both a particle and a wave-like nature.

In some ways, it behaves like a wave

interference

reflection

wavelength and frequency

In other ways, it behaves like a particle

the energy it carries is quantized

the energy quanta is proportional
to the frequency of the light

Generalmente se simboliza con letra c dicha velocidad, y está relacionada con la frecuencia de la manera usual en una onda:

$$c = \lambda f$$

La teoría electromagnética ondulatoria (clásica) es válida para explicar los siguientes fenómenos:

- Propagación de la luz en un medio o el vacío.
- Reflexión y refracción de la luz.
- Difracción, interferencia y polarización.

Sin embargo, el modelo ondulatorio no es válido para explicar otra serie de fenómenos:

- Efecto fotoeléctrico.

- Efecto Compton.
- Interacción radiación-materia a altas energías.

La hipótesis corpuscular de Planck señala que un cuanto (quantum) de luz tiene energía mínima dada por

$$E = hf$$

en donde $h = 6.63 \cdot 10^{-34} Js$. Experimentalmente, ningún proceso empírico puede revelar que la luz es una onda y una partícula a la vez, en cada experimento, dependiendo de su carácter, la luz se manifiesta en uno de sus dos aspectos duales: onda o partícula, pero no los dos a la vez.

8.3. Espectro electromagnético

James Clerk Maxwell ya había descubierto que la luz era una onda electromagnética con su trabajo teórico y sintético de las leyes de la electricidad, el magnetismo y la inducción electromagnética hacia la segunda mitad del siglo XIX. Además, el también formuló las ecuaciones que ahora llevan su nombre y que constituyen las ecuaciones clásicas que describen los fenómenos electromagnéticos.

Las ondas electromagnéticas se clasifican según su longitud de onda o equivalentemente, según su frecuencia (o energía), igual que otras ondas.

Se llama espectro electromagnético a la clasificación de las ondas electromagnéticas según su longitud de onda (frecuencia o energía). Un diagrama explicativo es el siguiente:

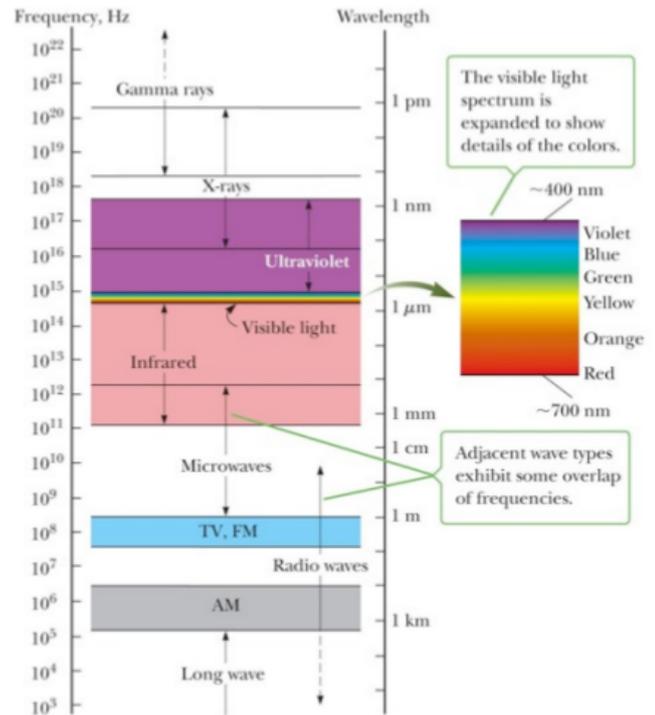
Electromagnetic Spectrum

Electromagnetic radiation spans a wide range of frequencies

The frequency and wavelength are related by the usual expression for waves $\lambda f = v$

In the case of electromagnetic waves

$$\lambda f = c$$



Se observa que lo que conocemos como “espectro visible”, para el ser humano, es una estrecha región del espectro, comprendida entre unos $3.94 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ y $7.69 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Una pregunta interesante que uno podría hacerse es acerca de los límites del espectro electromagnético: ¿Es posible una onda con una frecuencia arbitrariamente grande o una frecuencia arbitrariamente pequeña?

La velocidad de la luz en el vacío es c pero cambia al pasar del vacío a otro medio material. Una onda electromagnética puede entenderse como una oscilación temporal de los campos eléctrico y magnético, que oscilan de forma transversal y perpendicular entre sí. Un diagrama de esta imagen es el siguiente:

Hay algunos tipos especiales de onda electromagnética, según la forma del frente de onda. Principalmente se distingue entre ondas planas, ondas esféricas, ondas cilíndricas,...

8.4. Leyes de la reflexión y refracción de la luz

El llamado principio de Fermat, explica muchas propiedades de esta rama de la Física, la Óptica (tanto electromagnética o la geométrica):

Fermat's Principle of Least Time

In going from one point to another, light follows the path of least time

The basis for this is at the heart of quantum mechanics. Unfortunately, we don't have time to go into this. You'll just have to take the Principle of Least Time as a given

With this principle we can readily derive the laws of reflection and refraction

Las leyes de la reflexión o refracción de la luz son similares a las leyes vistas de la reflexión y refracción. Para la ley de reflexión tenemos:

$$\theta_i = \theta_r \quad (8.1)$$

mientras que para la ley de la refracción de la luz, generalmente llamada ley de Snell (como ya vimos anteriormente), definiendo $c = nv$, se tiene que

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{v_r} \quad (8.2)$$

o también

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (8.3)$$

El ángulo límite es aquel ángulo para el cual no hay refracción alguna, sino que $\sin \theta_r = 1 \leftrightarrow \theta_r = 90^\circ$. Por lo tanto,

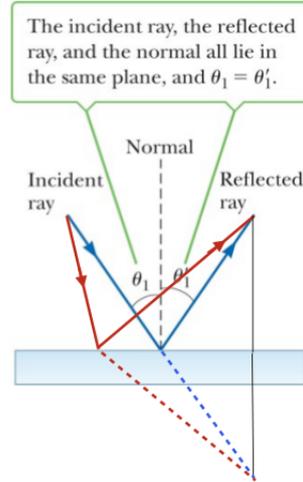
$$\sin \theta_{lim} = \frac{n_r}{n_i}$$

Los siguiente diagramas ayudan a comprender la reflexión y la refracción de la luz:

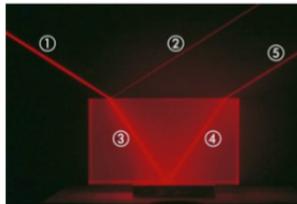
Reflection

The time for the light to get from the source to the detector by reflecting off of the mirror is shortest when

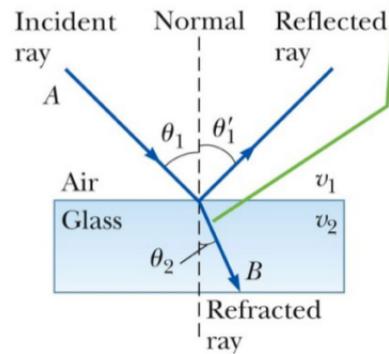
$$\theta_{\text{reflected}} = \theta_{\text{incident}}$$



Refraction



All rays and the normal lie in the same plane, and the refracted ray is bent toward the normal because $v_2 < v_1$.



El índice de refracción para algunas sustancias se indica en la siguiente figura:

Index of Refraction

The speed of light in vacuum is $c = 3 \times 10^8$ m/s

In materials: glass, plastic, water, etc.
the speed of light is less than c .

For a given material, its index of refraction n is

$$n = c/v$$

Substance	Index of Refraction	Substance	Index of Refraction
Solids at 20°C		Liquids at 20°C	
Diamond (C)	2.419	Benzene	1.501
Fluorite (CaF ₂)	1.434	Carbon disulfide	1.628
Fused quartz (SiO ₂)	1.458	Carbon tetrachloride	1.461
Glass, crown	1.52	Ethyl alcohol	1.361
Glass, flint	1.66	Glycerine	1.473
Ice (H ₂ O) (at 0°C)	1.309	Water	1.333
Polystyrene	1.49		
Sodium chloride (NaCl)	1.544	Gases at 0°C, 1 atm	
Zircon	1.923	Air	1.000 293
		Carbon dioxide	1.000 45

8.5. ¿Qué debo saberme?

Los modelos corpuscular y ondulatorio. Su origen histórico, fenómenos que explican cada uno y las dificultades que tienen como modelos independientes, así como los problemas que cada uno de ellos no puede explicar sin el otro.

Carácter dual de la luz. Dualidad onda-partícula.

La luz como onda electromagnética: propiedades (velocidad de propagación, interferencia, difracción, reflexión, refracción, espectro, clasificación, polarización).

La luz como partícula (fotones): ley de Planck $E = hf$. Valor aproximado de la velocidad de la luz y la constante de Planck.

Resolver problemas de reflexión y refracción de la luz. Noción de ángulo límite e índice de refracción. En los medios materiales, saber que la velocidad de la luz depende de la longitud de onda, i.e., saber que en general, en medios diferentes del vacío, $c = c(\lambda)$ y que $n = n(\lambda)$.

Ningún experimental puede demostrar simultáneamente el carácter ondulatorio y corpuscular de la luz, sino sólo uno de ellos.

Conocer y ser capaz de extimar la región del espectro electromagnético de una onda con una frecuencia o longitud de onda dada.

8.6. Formulario

Índice de refracción: $c = c(\lambda)$ para un medio. En general, $c = nv$ o bien $n = c/v$.

Ley de Planck: $E = hf$

Ley de la reflexión: $\theta_i = \theta_r$. Los ángulos se miden respecto a la normal al medio.

Ley de Snell (refracción de la luz): $n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r$

Ángulo límite: $\sin \theta_L = \frac{n_r}{n_i}$

Si $\theta_i \leq \theta_L$ hay refracción. Si $\theta_i \geq \theta_L$ No hay refracción de la luz.

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ y $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. En un medio, la velocidad de la luz no es igual a la velocidad en el vacío.

Capítulo 9

Óptica (II): Óptica geométrica

9.1. Sistemas ópticos

La Óptica geométrica estudia la trayectoria de los rayos de luz y los frentes de onda luminosos, cuando se propagan en un medio o en sistemas ópticos compuestos por espejos, lentes, prismas y otros dispositivos, considerando que la luz es “un rayo”.

Un sistema óptico es el siguiente sistema abstracto:

En Óptica geométrica es común usar la llamada aproximación paraxial: sólo se consideran los rayos cercanos al eje óptico en el proceso de emisión y formación de imágenes por el sistema óptico. Si θ_i y θ_r son los ángulos incidente y refractado de la ley de Snell, dichos ángulos serán pequeños y podremos escribir

$$\sin \theta_i \approx \theta_i$$

$$\sin \theta_r \approx \theta_r$$

$$n_i \theta_i \approx n_i \theta_i$$

$$n_r \theta_r \approx n_r \theta_r$$

de donde

$$n_i \theta_i = n_r \theta_r$$

para la aproximación paraxial en la ley de Snell. Usando rayos, se tiene la llamada Óptica Geométrica:

Geometrical Optics

we are
going to make the ray approximation

This ignores any interference phenomena.

We use the approximation that light travels in a straight line

This is the regime where:

- 1) the wavelength is small compared to the sizes of the objects we are studying
- 2) the energy of the light quanta are small compared to the sensitivity of our detecting equipment

Para ángulos pequeños también se tiene que $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ y $\tan \theta \approx \theta$.

Si existe un punto emisor de la luz O , en frente de un sistema óptico, de forma que puede pasar y los converjan a un punto O' , el punto O se llama objeto y el punto O' se llama imagen. Se diferencian aquí dos casos:

- Los rayos tras pasar por el sistema óptico convergen hacia la imagen en O' . En este supuesto, O' se llama IMAGEN REAL y puede proyectarse en una pantalla adecuada.
- Los rayos tras pasar por el sistema óptico divergen pero no se cortan al salir del sistema. En este caso, tenemos una IMAGEN VIRTUAL porque prolongando los rayos divergentes se observa que convergen pero "al otro lado" del sistema óptico, y, por tanto, la imagen formada se produce "virtualmente" ¡delante del sistema! Esta clase de imagen NO puede proyectarse en una pantalla, sólo observarse con el ojo y el propio sistema.

Se llama foco imagen F' al punto donde se juntan al atravesar el sistema los rayos procedentes del "infinito". Se llama foco objeto F al punto donde está situado el objeto de forma que los rayos salen paralelos y se marchan hasta el "infinito" (paralelos al eje óptico siempre).

9.2. Espejos

9.2.1. Espejo plano

Resultado: La imagen producida por un espejo plano es virtual, simétrica (o “derecha”) y del mismo tamaño que la del objeto. Si llamamos s a la distancia a la imagen (distancia a su foco) se cumple que:

$$s' = -s$$

9.2.2. Espejos esféricos

Hay dos tipos de espejos esféricos: cóncavos y convexos. En el caso de los espejos cóncavos, la superficie reflectante en el interior hace que las imágenes que produce puedan ser tanto VIRTUALES como REALES y $R < 0$. Para los espejos convexos, la superficie reflectante en el exterior hace que las imágenes sean siempre VIRTUALES y $R > 0$.

Truco: para recordar el signo de R en espejos esféricos, se pone un origen en su medio y se lanza un rayo hacia el centro de curvatura, dando el signo el sentido coordenado de dicho rayo.

La ecuación de los espejos esféricos es la siguiente:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \quad (9.1)$$

y donde para el espejo cóncavo $f = R/2$, y para el convexo $f = +R/2$.

9.2.3. Criterio de signos para distancias e imágenes

- Los rayos incidentes se propagan de izquierda a derecha.
- El origen de distancias está siempre en el punto que corta al eje óptico en el sistema. Será el vértice “centro del sistema de referencia óptico”.
- Distancias a la derecha del vértice son positivas, a la izquierda son negativas.
- El radio de curvatura es positivo si está a la derecha del vértice, y negativo si está a la izquierda del mismo.

- Las distancias transversales son positivas (hay que tener vista para esto) por encima del eje óptico, y negativas por debajo.
- En caso de mediciones de ángulos, los levógiros (antihorarios) son positivos, mientras que los dextrógiros (u horarios) son negativos.

Se llama aumento lateral al cociente entre el tamaño de la imagen y la del objeto que la produce. Matemáticamente se escribe

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

Para los espejos esféricos el aumento lateral vale

$$\beta_{e.e.} = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

9.3. Dioptrios

Un dioptrio esférico es una superficie curvada que separa dos medios con DIFERENTE índice de refracción (n y n').

Aplicando la ley de Snell en aproximación paraxial, se obtiene el denominado invariante de Abbe:

$$n \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s} \right) = n' \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s'} \right)$$

Eliminando h , nos queda

$$n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right)$$

o bien, operando

$$\begin{aligned} \frac{n}{R} - \frac{n}{s} &= \frac{n'}{R} - \frac{n'}{s'} \\ \frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} &= \frac{n}{R} - \frac{n'}{R} \end{aligned}$$

y equivalentemente

$$\boxed{\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}} \quad (9.2)$$

9.4. LÁMINA PLANO-PARALELA (TEMA AVANZADO OPCIONAL) 223

Un caso particular importante del dioptrio esférico es cuando es plano, cuando $R \rightarrow \infty$. En ese caso, se tiene que

$$\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'} \quad (9.3)$$

El dioptrio plano se representa generalmente con el siguiente símbolo gráfico esquemático:

Algunas fórmulas adicionales para los focos de los dioptrios esféricos son las siguientes:

Foco imagen (f'): se pone $s = -\infty$ y nos queda $f' = \frac{n'R}{n' - n}$.

Foco objeto (f): se pone $s = +\infty$ y nos queda $f = -\frac{nR}{n' - n}$.

Usando el invariante de Abbe y estos resultados, se puede reescribir la ecuación del dioptrio esférico de la siguiente forma:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (9.4)$$

Aumento lateral para el dioptrio esférico:

$$\beta_{d.e.} = \frac{y'}{y} = \frac{s'n}{sn'} \quad (9.5)$$

9.4. Lámina plano-paralela (tema avanzado opcional)

Para una lámina de caras plano-paralelas se tiene que

$$t = d \sin \varepsilon \left(1 - \frac{n \cos \varepsilon}{n' \cos \varepsilon'} \right)$$

y donde n, n' son los índices de refracción fuera y dentro de la lámina, respectivamente, $\varepsilon, \varepsilon'$ son ángulos, d es el espesor de la lámina y t es la traslación del rayo en su interior.

9.5. Prisma óptico

A continuación tenemos el dibujo del llamado prisma óptico y un diagrama auxiliar para la desviación mínima del prisma:

Aquí, α es el ángulo del prisma, δ_{min} es la desviación mínima del prisma. Para este sistema, se tienen los siguientes resultados:

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha \quad (9.6)$$

$$\delta_{min} = 2\varepsilon_1 - \alpha \quad (9.7)$$

$$n' = n \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (9.8)$$

9.6. Lentes delgadas

Hay dos tipos principales de lentes delgadas: convergentes y divergentes. Las lentes delgadas convergentes concentran rayos, mientras que las lentes delgadas divergentes separan rayos.

Los siguientes dibujos suelen ser símbolos convencionales de las lentes delgadas:

Hay por tanto diferentes combinaciones con estas dos lentes y una plana. A saber: biconvexa, plano-convexa, menisco convergente. También tenemos bicóncava, plano-cóncava y menisco divergente. Sus símbolos se muestran a continuación:

La ecuación fundamental de las lentes delgadas es:

$$\boxed{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}} \quad (9.9)$$

El aumento lateral para lentes delgadas es igual a

$$\boxed{\beta_{l.d.} = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}} \quad (9.10)$$

Se llama potencia de una lente $\varphi = P$ a la cantidad

$$P = \varphi = \frac{1}{f'} \quad (9.11)$$

Se mide en dioptrías o m^{-1} .

9.7. El ojo humano

El ojo humano es un sistema óptico con las siguientes características: Las anomalías de la visión y sus correcciones se dan a continuación:

- Miopía. Se soluciona con lentes divergentes.
- Hipermetropía. Se soluciona con lentes convergentes.
- Astigmatismo. Se soluciona con lentes cilíndricas “curvadas”.
- Presbicia o vista cansada. Se soluciona con lentes convergentes (ver de cerca).

9.8. Instrumentos ópticos

9.8.1. La lupa

Se define el aumento angular como

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Para acomodar la visión al ojo con la lupa, se usa una fórmula que vale para el objeto situado en el foco:

$$\gamma = \frac{0.25}{f}$$

Es decir, 0.25 define el punto próximo de un ojo “normal” sano. Si el objeto está entre el foco y la lente, tendremos

$$\gamma = 1 + \frac{0.25}{f}$$

9.8.2. El microscopio/telescopio

Es un conjunto, en general, de al menos dos lentes: objetivo y ocular. El aumento total del microscopio o telescopio es igual a

$$M = \beta\gamma = \frac{s'}{s} \frac{0.25}{f_2} = \frac{L}{f_1} \frac{0.25}{f_2} = \frac{0.25L}{f_1 f_2}$$

En el caso de un antejo, tendremos también

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2}$$

9.9. ¿Qué hay que saber?

Los elementos de un sistema óptico y su caracterización, noción de eje óptico, foco, focal, imagen real y virtual, tipología de los principales sistemas ópticos.

Usar el criterio de signos para las distancias y cálculos de posiciones de imágenes y de objetos, junto con otros elementos como ángulos o aumentos.

Saber las ecuaciones de los principales sistemas ópticos. Conocer las ecuaciones de los instrumentos ópticos más comunes. Conocer y estudiar el ojo humano como un sistema óptico.

Conocer qué son y cómo se solucionan las anomalías visuales del ojo humano.

9.10. Formulario

- Espejos esféricos.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

- Dioptrio esférico.

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}$$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

$$f' = \frac{n'R}{n' - n}$$

$$f = -\frac{nR}{n' - n}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'n}{n's}$$

- Dioptrio plano.

$$\frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}$$

- Lente delgada.

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}$$
$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

- Lupa.

$$\gamma = \frac{0.25}{f}$$
$$\gamma = 1 + \frac{0.25}{f}$$

- Microscopio.

$$M = \beta\gamma = \frac{s'}{s} \frac{0.25}{f_2} = \frac{L}{f_1} \frac{0.25}{f_2} = \frac{0.25L}{f_1 f_2}$$

- Anteojo.

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2}$$

- Potencia(en dioptrías D). (f' en metros)

$$P = \varphi = \frac{1}{f'}$$

Capítulo 10

Física moderna (I): Física Cuántica

10.1. Física del siglo XIX

A finales del siglo XIX se pensó que la Física llegaba a “su fin”. Sin embargo, algunos problemas no se comprendían con la Física conocida hasta ese momento. A saber:

- La radiación del “cuerpo negro”. Un cuerpo que se calentaba emitía ondas electromagnéticas. La teoría clásica no daba el espectro de la radiación emitida por un cuerpo caliente en una “cavidad”. Planck tuvo que tomar una solución radical (que él mismo no se creía) usando la llamada hipótesis cuántica.
- Interpretación de los espectros atómicos. Durante el siglo XIX, para sorpresa de muchos, la espectroscopía de la radiación emitida por los átomos, tanto en emisión como en absorción, mostraba que los espectros exhibían una estructura discreta y no un continuo como un arco iris.
- Rayos X. Descubiertos accidentalmente, su origen no podía ser explicado con la Física de la época.
- Radiactividad/Radioactividad de algunas sustancias. No se comprendía cómo eran capaces de emitir y radiar energía algunas sustancias naturales.
- Existencia del electrón en la Naturaleza y su papel en los modelos atómicos. Aun cuando se pensaba que los llamados “átomos” eran indivisibles, se probó fácilmente que los átomos tenían también

estructura interna, como puso de manifiesto el experimento de Rutherford. Sin embargo, su estructura y estabilidad no era consistente con las teorías electromagnéticas clásicas.

10.2. Radiación del cuerpo negro

Todo cuerpo material emite un espectro continuo de ondas electromagnéticas a causa de la temperatura. Dicha radiación se denomina radiación térmica.

Las propiedades de la radiación térmica son las siguientes:

- La intensidad (energía por unidad de tiempo a través de una superficie S dada) está relacionada con la temperatura. Matemáticamente

$$I = \frac{E}{tS} = \frac{P}{S} = f(T)$$

en donde $f(T)$ es una función de la temperatura.

- Si la temperatura del emisor aumenta, la radiación se desplaza hacia longitudes de onda más cortas, con más energía. Es decir, $T \uparrow \rightarrow \lambda \downarrow$.
- Los cuerpos materiales absorben radiación del entorno, produciéndose intercambios de radiación electromagnética. Si $I_{em} = E_{abs}$, entonces se alcanza en algún punto el equilibrio térmico con $T_{em} = T_{abs}$.
- Un buen absorbente de radiación es equivalente a un buen emisor de radiación.
- Noción de "cuerpo negro": es un cuerpo que absorbe por igual radiación de todas las longitudes de onda (por eso se llama "negro"), desde el infrarrojo al ultravioleta. Un cuerpo negro tiene dos propiedades básicas. La primera es que a $T \neq 0K$ absorbe o emite más que cualquier otro cuerpo. La segunda es que su radiación es independiente de la clase de cuerpo y de su naturaleza o composición particular. Generalmente, un cuerpo negro se visualiza de forma abstracta como una "caja negra" a la que se hace un orificio hueco fino, por donde escapa la radiación térmica y electromagnética.

10.2.1. Ley de Stefan-Boltzmann

Esta ley es válida para cualquier cuerpo negro y señala que la potencia total del cuerpo negro (radiada o absorbida) es igual a

$$P = \sigma S T^4 \leftrightarrow I = \frac{P}{S} = \sigma T^4 \quad (10.1)$$

en donde $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ es la llamada constante de Stefan-Boltzmann.

10.2.2. Ley de Wien

La longitud de onda a la que el cuerpo negro radia con energía máxima es inversamente proporcional a la temperatura:

$$\lambda(\text{max}) = \frac{C}{T} \quad (10.2)$$

y donde $C = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{K} \cdot \text{m}$.

10.2.3. Ley de Planck

La hipótesis cuántica señala que la radiación emitida por un cuerpo negro no toma cualquier valor en energía sino que sólo valores fijos y discretos de forma que

$$E = nhf \quad (10.3)$$

y donde $n = 1, 2, \dots, \infty$, $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ es la constante de Planck y f es la frecuencia de la radiación emitida. Con esta idea, Planck fue capaz de deducir la expresión (complicada para el nivel de este curso) de la curva experimental de la radiación del cuerpo negro.

10.3. Efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico, hoy común en muchas aplicaciones prácticas como paneles solares y otros dispositivos, fue un quebradero de cabeza para los físicos clásicos. Las propiedades experimentales del fenómeno eran bastante chocantes:

- La frecuencia de la radiación que producía el efecto fotoeléctrico era siempre mayor o igual que una frecuencia mínima que dependía del material. Es decir $f_{\text{luz}} \geq f_{\text{min}}$ para observar dicho efecto.

- La velocidad de los electrones v_e aumenta si la intensidad aumenta, pero no varía el potencial “de frenado” de dichos electrones.
- Si la intensidad aumenta, sorprendentemente, aumenta el número de electrones emitidos, siempre que la frecuencia supere el umbral mencionado anteriormente.
- El potencial de frenado mantiene una relación lineal con la frecuencia de la radiación incidente, y es igual en todas las sustancias fotoemisoras.

Introducimos la notación siguiente: f es la frecuencia de la radiación incidente, W_{ext} es el trabajo de extracción de la sustancia correspondiente y E_c es la energía cinética de los fotoelectrones. Einstein, en 1905, dió con una explicación del efecto fotoeléctrico que le valió el Nobel en 1921. Para ello usó la teoría o hipótesis cuántica de Planck y el principio de conservación de la energía. Si usamos este último principio:

$$E(\text{inicial}) = E(\text{final})$$

$$hf = W_{ext} + E_c(\text{elec})$$

$$\boxed{hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2} \quad (10.4)$$

Esta última ecuación se llama Ley de Einstein del efecto fotoeléctrico, y dicha ecuación se verificó experimentalmente. En dicha ecuación, el potencial de frenado se mide conectando un circuito con una batería que suministre cierto potencial, de forma que frenamos a los electrones salientes (fotoelectrones) hasta no detectar corriente. El potencial para detener a los electrones es precisamente el potencial de frenado V_f y se puede calcular de dos formas equivalentes

$$E_c(\text{elec}) = \frac{1}{2}mv^2 = eV_f$$

o bien

$$V_f = \frac{E_c(\text{elec})}{e} = \frac{h(f - f_0)}{e}$$

y donde $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ es la carga elemental del electrón.

10.4. Rayos X

Experimentalmente, esta radiación tenía las siguientes características:

- Son ondas electromagnéticas o fotones con una energía grande y cierto poder de penetración en la materia.
- Penetran en la materia de forma bastante espectacular. Hoy día se usan para las radiografías.
- Ionizan átomos con facilidad.
- Provocan fluorescencia.
- Impresionan placas fotográficas.
- Se producen rayos X, RX, en un tubo de vacío al que se le aplica una gran diferencia de potencial para acelerar electrones de un filamento que al frenarse violentamente, emiten fotones en el espectro en la zona de los RX. También hay sustancias naturales que emiten ese tipo de radiación.

10.5. Efecto Compton

Es un efecto que corresponde a una interacción electrón-fotón. También por conservación de la energía se tiene que

$$hf = hf' + \frac{1}{2}mv^2$$

La ecuación experimental (y que puede deducirse en física relativista de forma relativamente sencilla) para el efecto Compton es la siguiente:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)} \quad (10.5)$$

y donde $\lambda_C = \frac{h}{mv_{luz}} = \frac{h}{mc}$, con $m = m_e$ la masa del electrón, y donde el momento lineal de un fotón es $p = hf/c$.

10.6. Espectros y modelo de Bohr

Los elementos presentan un espectro discreto y no continuo de absorción y de emisión.

Balmer (s.XIX) descubrió que para el átomo de hidrógeno la fórmula siguiente daba la separación de las líneas espectrales observadas:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)} \quad (10.6)$$

y donde $R_H = \text{constante} = 109677.581 \text{cm}^{-1} = 13.6 \text{eV}$ es la llamada constante de Rydberg o simplemente Rydberg. n_f, n_i son números enteros estrictamente positivos y determinan las llamadas series espectrales, de forma que n_f da la serie, y n_i da la línea dentro de la serie.

El modelo de Bohr fue capaz de explicar esta fórmula, y también usó la hipótesis de Planck, como Einstein la usó para el efecto fotoeléctrico. Este modelo está basado en las siguientes hipótesis:

- Los electrones giran en órbitas circulares en trayectorias definidas y estacionarias.
- Las órbitas están cuantizadas de forma que el momento angular L es múltiplo entero de la constante de Planck dividida por 2π , que se simboliza como $h/2\pi = \hbar$. Es decir,

$$L = mvR = n\hbar = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

- En las trayectorias estacionarias u órbitas circulares no se emite o radia energía electromagnética.
- Para emitir o absorber energía, en forma de radiación electromagnética, se cumple la ley de Planck: $\Delta E = h(f - f_0)$.

Las consecuencias de este modelo, sin entrar en detalles, son las siguientes:

- Las órbitas están cuantizadas según la ley

$$R_n = \frac{1}{K_C m e^2} \hbar^2 n^2 = a_0 n^2 \quad (10.7)$$

en donde K_C es la constante de Coulomb, $n \in Z^+ = 1, 2, \dots, \infty$ y donde

$$a_0 = a_B = \frac{\hbar^2}{K_C m e^2} = \frac{h^2}{4\pi^2 K_C m e^2}$$

es el radio de Bohr, unos 0.53\AA , y m es la masa del electrón. También se puede escribir usando la llamado constante de estructura fina electromagnética

$$\alpha = \frac{K_C e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

en la forma siguiente

$$R_n = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} n^2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h}{2\pi m c} \right) n^2$$

- Las velocidades también están cuantizadas

$$v_n = \frac{n\hbar}{m R_n} = \frac{K_C e^2}{\hbar n} = \frac{\alpha c}{n} \quad (10.8)$$

- La energía en una órbita está cuantizada de la forma siguiente

$$E_n = -\frac{2\pi^2 K_C^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{K_C^2 m e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (10.9)$$

De esta expresión se deduce la fórmula de Balmer y la representación de la constante de Rydberg en términos de constantes fundamentales como sigue:

$$R_H = \frac{2\pi^2 K_C^2 m e^4}{h^2} = \frac{K_C^2 m e^4}{2\hbar^2}$$

La deducción de las fórmulas es muy sencilla. Primero, usando la segunda ley de Newton, equilibramos la fuerza centrípeta con la fuerza eléctrica en valor absoluto

$$F_C = F_{el}$$

$$m \frac{v^2}{R} = K_C \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

Para el átomo de hidrógeno, tenemos que $Q_1 = Q_2 = e$, donde e es la carga eléctrica del electrón, tenemos

$$m \frac{v^2}{R} = K_C \frac{e^2}{R^2}$$

Ahora, usando la hipótesis de Bohr para la cuantización del momento angular, se tiene que

$$mvR = n\hbar$$

de donde

$$v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2}$$

Sustituyendo esto en la expresión de la fuerza centrípeta, se tiene

$$m\frac{v^2}{R} = m\left(\frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2}\right)\frac{1}{R} \quad (10.10)$$

Igualando a la fuerza eléctrica, como habíamos hecho arriba, tenemos que

$$m\left(\frac{n^2\hbar^2}{m^2R^2}\right)\frac{1}{R} = \left(\frac{n^2\hbar^2}{mR^2}\right)\frac{1}{R} = K_C\frac{e^2}{R^2} \quad (10.11)$$

esto es

$$\left(\frac{n^2\hbar^2}{m}\right)\frac{1}{K_Ce^2} = R \quad (10.12)$$

Es decir, la expresión antes mencionada de la cuantización de los radios en el modelo de Bohr

$$R(n) = r_n = \left(\frac{n^2\hbar^2}{m}\right)\frac{1}{K_Ce^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{mc}n^2 \quad (10.13)$$

Para las velocidades, simplemente por sustitución de estos radios en la fórmula de la fuerza, nos permite deducir que

$$v^2 = \frac{K_Ce^2}{mr_n} = \frac{K_Ce^2}{m}\frac{(mK_Ce^2)}{(n^2\hbar^2)} = \frac{n^2\hbar^2(K_Ce^2)^2}{n^2\hbar^2}$$

luego

$$v = \frac{K_Ce^2}{n\hbar} = \alpha\frac{c}{n}$$

Para las energías, simplemente usamos que la energía total del electrón en el átomo es la suma de la energía cinética y potencial del electrón (despreciamos los efectos del protón, su tamaño finito y dinámica):

$$E_T = E_c + E_p \quad (10.14)$$

La energía potencial eléctrica vale

$$E_p(el) = K_C\frac{Q_1Q_2}{R}$$

Para el átomo de hidrógeno, tenemos que $Q_1 = q_{\text{protón}} = +e$ y $Q_2 = q_{\text{electrón}} = -e$, por lo que

$$E_p(el) = -K_C \frac{e^2}{R}$$

Sustituyendo esto en la energía total

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - K_C \frac{e^2}{R} \quad (10.15)$$

Pero, de la ecuación del equilibrio de fuerzas (segunda ley de Newton) deducimos antes que

$$m \frac{v^2}{R} = K_C \frac{e^2}{R^2}$$

o bien, operando,

$$m \frac{v^2}{2} = \frac{K_C e^2}{2R}$$

Por lo tanto,

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - K_C \frac{e^2}{R} = \frac{K_C e^2}{2R} - K_C \frac{e^2}{R} = -\frac{K_C e^2}{2R} \quad (10.16)$$

Insertando los valores de la cuantización de las órbitas deducidas anteriormente por Bohr, se tiene el espectro cuantizado del átomo de hidrógeno

$$E(n) = E_n = -\frac{m(K_C e^2)^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2} \frac{mc^2 \alpha^2}{n^2} = -\frac{2\pi^2 m K_C^2 e^4}{h^2 n^2} = -\frac{Ry}{n^2} \quad (10.17)$$

Una relación poco comentada en los libros y artículos es la cuantización de la aceleración en el modelo de Bohr. Se deduce trivialmente de las ecuaciones de la cuantización para las velocidades y los radios. Considerando una órbita circular con MCU, la aceleración centrípeta de los electrones en el modelo de Bohr es:

$$a_n = \frac{v_n^2}{R_n} \quad (10.18)$$

Insertando los valores de las velocidades y radios antes obtenidos, tenemos que:

$$a_n = \frac{\frac{\alpha^2 c^2}{n^2}}{\frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc} n^2} = \frac{\alpha^3 mc^3}{\hbar n^4} \quad (10.19)$$

es decir, que

$$a_n = \frac{K_C^3 e^6 m c^3}{\hbar^4 c^3 n^4} = \frac{K_C^3 e^6 m}{\hbar^4 n^4} = \frac{\alpha^3 m c^3}{\hbar n^4} \quad (10.20)$$

Lo absolutamente maravilloso del modelo de Bohr es que también es válido para los llamados átomos hidrogenoides (un átomo hidrogenoide es un átomo con un solo electrón y un núcleo con Z protones, e.g., He^+ , Li^{2+} , ...) y para átomos exóticos (átomos muónicos, átomos tauónicos, muonio, tauonio, ...) con el debido cuidado (en los átomos exóticos hay que sustituir la masa del electrón por la masa reducida del sistema). En tal caso basta hacer una sustitución $e \rightarrow Ze$, $e^2 \rightarrow Ze^2$, y obtenemos las expresiones para las energías, radios, velocidades y aceleraciones para las fórmulas de los átomos hidrogenoides:

$$E(n) = E_n = -\frac{m(K_C Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2} \frac{m c^2 Z^2 \alpha^2}{n^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 K_C^2 e^4}{h^2 n^2} = -\frac{Z^2 R_y}{n^2} \quad (10.21)$$

$$R_n = \frac{1}{K_C m Z e^2} \hbar^2 n^2 = \frac{a_0 n^2}{Z} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{Z m c} n^2 \quad (10.22)$$

$$v_n = \frac{Z K_C e^2}{n \hbar} = \frac{Z \alpha c}{n} \quad (10.23)$$

$$a_n = \frac{Z^3 \alpha^3 m c^3}{\hbar n^4} = \frac{Z^3 K_C^3 e^6 m c^3}{\hbar^4 c^3 n^4} = \frac{Z^3 K_C^3 e^6 m}{\hbar^4 n^4} \quad (10.24)$$

Debemos recordar que el modelo de Bohr, si bien coincide para las líneas y separaciones espectrales, de estos átomos, no aporta información de la llamada estructura fina del átomo: no es un modelo relativista, no incluye los efectos de los desdoblamientos espectrales ante campos eléctricos o magnéticos ni incluye el efecto del espín del electrón (efecto relativista deducible de la ecuación de Dirac del electrón). No obstante, es un modelo útil para muchas aplicaciones prácticas porque la Mecánica Cuántica no relativista reproduce sus resultados.

10.7. Ondas de materia

Para un fotón, se tiene que su momento lineal es igual a

$$p_\gamma = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

ya que $c = \lambda f$.

La hipótesis de las ondas de materia de L. de Broglie señala que toda partícula con momento lineal p debe tener una longitud de onda asociada dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (10.25)$$

Para una partícula no relativista, tenemos que $p = mv$, luego

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (10.26)$$

Sin embargo, la dualidad de L. de Broglie vale incluso para el caso relativista, en el que la energía y el momento están ligados por las relaciones siguientes:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

y el momento relativista para una partícula con masa se define como

$$p = Mv = m\gamma v = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Esta idea de la dualidad onda-corpúsculo se vió confirmada por la difracción electrones en un cristal experimentalmente, en el experimento de Davidson y Germer. Además, la dualidad permite comprender el origen de la cuantización de Bohr para el átomo de hidrógeno. Para una onda en una órbita circular, la condición de estacionaridad de la onda se traduce en el principio de interferencia constructiva de las ondas de materia que postulaba de Broglie. Una interferencia es constructiva si la longitud de las ondas se encaja en múltiplos enteros de longitud de onda, es decir,

$$x_c = 2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Dividiendo

$$r = \frac{n\lambda}{2\pi}$$

Aplicando la condición de Louis de Broglie a dicha ecuación, tenemos que si $\lambda = h/p$, entonces

$$r = \frac{nh}{2\pi p}$$

de donde

$$p = \frac{nh}{2\pi r}$$

o bien

$$p = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{n\hbar}{r}$$

Es decir, se tiene que

$$pr = L = \text{momento angular} = n\hbar \longleftrightarrow mv(2\pi r) = nh$$

que es la hipótesis de cuantización del momento angular de Bohr.

10.8. Ondas y Mecánica Cuántica

10.8.1. Ondas

Hay unos parámetros característicos de las ondas:

- Velocidad de propagación de la onda. Es la velocidad con la que la onda, o perturbación en el medio, se mueve y propaga. Matemáticamente

$$v = \lambda f$$

Para la luz $v_{\text{luz}} = c = \lambda f$.

- Longitud de onda (λ). Es la distancia entre dos máximos o dos mínimos sucesivos de una onda. Se suele expresar en metros, centímetros, nanómetros o incluso Å, angstroms ($1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$).
- Una oscilación o revolución es una vibración que da lugar a exactamente una longitud de onda (“una vuelta”).
- El número de ondas ($k = \bar{v}$) es el número de oscilaciones en cada unidad de longitud, también llamado número de ondas espectroscópico.

$$k = \bar{v} = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c}$$

En ocasiones, también se usa el número de oscilaciones en cada unidad de longitud dividido por 2π , matemáticamente $k = k_c$ (vueltas en una circunferencia), es decir, número de oscilaciones en cada unidad

de distancia medidas en una circunferencia, por lo que se denomina también número de onda angular o circular. En este caso, se tiene que

$$k = k_c = \frac{2\pi}{\lambda}$$

En Química, y en este curso, solamente usaremos el número de onda espectroscópico.

- Frecuencia (f o también ν). Es el número de oscilaciones que pasan por cada punto de oscilación de la onda en cada unidad de tiempo. Matemáticamente

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- El período T es el tiempo que tarda la onda en recorrer toda su longitud de onda. Matemáticamente, se tiene que

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Es notable que el número de onda espectroscópico guarda la misma relación con la longitud de onda que la frecuencia y el período, mientras que el número de ondas angular guarda la misma relación la longitud de onda que el período y la pulsación angular ω .

El espectro electromagnético es un continuo formado por el conjunto de las radiaciones electromagnéticas. No sólo lo forman las ondas percibidas por nuestros sentidos, sino otras muchas radiaciones: ondas de radio, microondas, infrarrojas, ultravioletas, rayos X , rayos gamma, rayos cósmicos, . . . Se piensa que el límite para la longitud de onda más pequeña es la llamada longitud de Planck

$$L_p = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35} m$$

Las radiaciones se suelen clasificar también según su poder ionizante en ionizantes y no ionizantes, además de la radiación visible antes mencionada y que percibimos con nuestros sentidos. La radiación ionizante comprende desde el ultravioleta hasta los rayos cósmicos y puede inducir cambios moleculares en los organismos (en Biología, esto desencadena mutaciones) debido a la cantidad de energía que almacena la radiación de "alta" frecuencia.

10.8.2. Mecánica Cuántica

El modelo de Bohr no pudo extenderse a modelos de átomos más complicados. Incluso peor, el avance y perfeccionamiento de la espectroscopía demostró que la fórmula de Balmer era incompleta y no explicaba los detalles de la estructura fina del átomo de hidrógeno. Incluso pese al hecho de que Sommerfeld extendió el modelo de Bohr para incluir los efectos de la relatividad especial y del tamaño finito del núcleo, era evidente para los físicos y químicos de la época que se requería una nueva Mecánica para explicar los detalles de la estructura de átomos y moléculas.

Inicialmente, para incluir los efectos de las órbitas elípticas, se introdujo un nuevo número cuántico, que además permitía entender ciertos detalles del átomo de hidrógeno. Este número cuántico secundario se denomina también azimutal, e indica los subniveles en cada "línea". Puede tomar valores desde 0 hasta $n-1$, donde n es el número cuántico principal, que indica la energía, mientras que el secundario da, de algún modo, la forma de la órbita (del "orbital" en Física Cuántica).

El número cuántico de subniveles es igual al número de niveles. Los niveles de energía se indican con letras mayúsculas por los químicos (K,L,M,N corresponden a $n=1, n=2, n=3, n=4$). Los subniveles, denotados desde $l=0$ hasta $n-1$, se denotan por letras minúsculas (s,p,d,f para los valores $l=0, l=1, l=2, l=3$). s viene del inglés "sharp", p de "principal", d es por "diffuse" y f por "fundamental".

Por otra parte, el desdoblamiento de los niveles de energía en el espectro de átomos sometidos a campos magnéticos (efecto Zeeman) llevó a introducir una subestructura en los subniveles de energía y un nuevo número cuántico, el terciario o magnético (m), y que suponía que diferentes energías eran posibles según la orientación de la órbita (u orbital) en un campo magnético. Algo similar ocurría en presencia de campos eléctricos. El número cuántico magnético m puede variar desde $-l$ a $+l$, pasando por el 0. Finalmente, el experimento de Stern y Gerlach, llevó a la introducción de un número cuántico adicional asociado al momento angular intrínseco del electrón. Se denominó número cuántico de espín s y puede tomar valores de $-1/2$ ó $+1/2$ en unidades de \hbar , así como producir dos nuevos subestados energéticos asociados a los mismos.

Debido a la hipótesis de L.de Broglie, y a la teoría cuántica de Planck, exitosamente aplicada por Einstein y Bohr, Schrödinger se vio forzado

a introducir una ecuación de ondas (no relativista) para la materia. Esta ecuación, hoy día llamada ecuación de Schrödinger, captura la dinámica ondulatoria de las partículas, y para los estados estacionarios independientes del tiempo puede escribirse como sigue

$$\boxed{H\Psi = E\Psi} \quad (10.27)$$

y donde H es un operador cuántico que codifica la dinámica, llamado operador hamiltoniano, E la energía (que puede ser que sea tanto discreta como continua) y $\Psi = \Psi(x, t)$ es una función de onda que está asociada a las ondas de materia de la partícula. La solución de esta ecuación y de la versión relativista, llamada ecuación de Dirac, demuestra que sólo ciertos valores de la energía son posibles para los electrones en un átomo. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es una ecuación en derivadas parciales:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x, y, z) + V(x, y, z)\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z)} \quad (10.28)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi(x, y, z) + V(x, y, z)\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z)} \quad (10.29)$$

La versión de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es la siguiente ($i = \sqrt{-1}$)

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x, y, z, t) + V(x, y, z, t)\Psi(x, y, z, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, y, z, t)} \quad (10.30)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi(x, y, z, t) + V(x, y, z, t)\Psi(x, y, z, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, y, z, t)} \quad (10.31)$$

La ecuación de Schrödinger, y la ecuación de Dirac, sólo pueden resolverse para ciertos valores de los números cuánticos. La ecuación de Dirac se escribe para un electrón libre como sigue

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0$$

mientras que para un potencial en un átomo o sistema adquiere la forma

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi - e\gamma^\mu A_\mu\Psi = 0$$

y donde $i = \sqrt{-1}$. El hecho matemático de que aparezcan números imaginarios y más generalmente números complejos en las ecuaciones anteriores supuso un problema para la interpretación del significado de la función de onda $\Psi(x, t)$, que es generalmente ¡Un número complejo! Finalmente, a finales de los años 20 del siglo XX, la interpretación de Copenhague (Copenhague), introducida por Max Born, descarta interpretar Ψ cuánticamente pero sí introduce la regla siguiente (que fue denostada por Einstein o el propio Erwin Schrödinger): $\Psi(x, t)$ es una amplitud de probabilidad que no tiene significado físico, pero el módulo al cuadrado de dicha cantidad sí posee significado. La regla de Born postula que $\rho = \Psi^* \Psi = |\Psi(x, t)|^2$ es una densidad de probabilidad que indica la probabilidad de encontrar a la partícula en una posición y tiempo en el espacio.

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial lineal, por lo que en general si tenemos dos soluciones de la ecuación, la suma es también una solución. Esto conduce a determinadas paradojas cuando se considera que la función de onda es algo “real” para objetos macroscópicos, siendo la más conocida la elaborada por el propio Schrödinger y hoy llamada la “paradoja del gato de Schrödinger”. Si Ψ_1 y Ψ_2 son soluciones posibles de la ecuación de Schrödinger, entonces

$$\Psi(x, t) = c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)$$

es también una solución. Para el problema de la paradoja del gato, se supone que las funciones Ψ_1 y Ψ_2 corresponden a los estados del gato vivo o muerto cuando se acciona un dispositivo mortal accionado por una desintegración aleatoria en una caja cerrada que impide que observemos el estado del gato sin abrirla. Existen distintas interpretaciones sobre el significado real de este experimento mental (nunca se ha realizado).

Debido a que una partícula microscópica no está tiene propiedades ondulatorias, esto llevo a enunciarse el llamado principio de indeterminación o incertidumbre (Werner Heisenberg, 1927).

10.8.3. Principio de incertidumbre

Heisenberg postuló la idea siguiente: no se puede conocer simultáneamente (a la vez) posición y momento lineal de una partícula (o posición y velocidad de la misma), de forma que sus incertidumbres están ligadas por la siguiente relación

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (10.32)$$

Existen otras relaciones de indeterminación o incertidumbre, de hecho, cualquier par de magnitudes conjugadas, con dimensión de “acción” o las mismas que la constante de Planck, deben satisfacer unas relaciones análogas. Por ejemplo, para la energía y el tiempo se tiene que

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (10.33)$$

10.8.4. Orbitales y números cuánticos

La dualidad onda-partícula, el principio de incertidumbre de Heisenberg y sus soluciones conllevan abandonar la descripción denominada clásica de órbita y sustituirla por la noción de orbital. Un orbital es la región del espacio donde es más probable encontrar una partícula (como un electrón en un átomo o una molécula con cierta interacción). El electrón en un átomo debe visualizarse no como una “bolita” o una onda, sino como una especie de “nube difusa” de carga distribuida alrededor del núcleo atómico. Los orbitales vienen caracterizados por los números cuánticos antes mencionados:

- Número cuántico principal. Da la energía del orbital. Valores posibles $n = 1, 2, \dots, \infty$.
- Número cuántico secundario o azimutal. Da la forma del orbital. Valores posibles $l = 0, 1, \dots, n - 1$.
- Número cuántico terciario o magnético. Da la orientación del orbital en el espacio (en presencia de un campo eléctrico o magnético). Toma valores en el intervalo $[-l, +l]$, incluyendo el 0.
- Número cuántico de espín. Toma valores de $+1/2$ o $-1/2$ en unidades de \hbar . Mide el momento angular intrínseco del electrón.

Los orbitales de tipo s son “esféricos”, mientras que los orbitales de tipo “p” tienen 3 orientaciones espaciales y forma alabeada. Los orbitales de tipo d tienen formas más complicadas, que incluyen “múltiples pétalos” y anillos.

Además, para los electrones (y generalmente para fermiones o partículas con espín semientero) se cumple el denominado principio de exclusión de Pauli: no pueden existir en un “átomo” o “molécula” dos entidades como electrones (o fermiones) con los 4 (o todos) los números cuánticos

iguales. En los electrones en orbitales de átomos, sólo dos electrones puede haber en cada orbital, con espines opuestos. Además, en los orbitales por nivel, pues, habrá como máximo $2n^2$ electrones, y por cada subnivel l , $2(2l + 1)$ electrones. Así, para uno de tipo s hay 2 electrones, para los p hay 6 electrones (distribuidos en 3 orbitales), para los d hay 10 electrones (en 5 orbitales), para los f hay 14 (en 7 orbitales) y para los g habría 18 (en 7 orbitales) o los h hay 22 electrones (en 9 orbitales). El límite de orbitales para un átomo y un número atómico determinado está claro, pero se desconoce si existe un número máximo de electrones (equivalentemente un número máximo de protones Z) que produzca estados o átomos estables "superpesados". Es el problema del límite de la Tabla Periódica moderna que está aún por resolverse en Química teórica. A día de hoy, se han producido en mayor o menor cantidad todos los elementos del período 7 del sistema periódico, y se ha intentado (sin éxito aún) producir elementos del período 8. Este problema es interesante, porque para dicho período o los siguientes (hipotéticos), se sabe que las correcciones relativistas cobran especial importancia. La llamada hipótesis de la isla de estabilidad de Seaborg señala que, a priori, uno esperaría elementos superpesados en el período 8 ó 9 que fueran suficientemente estables para ser sintetizados. El sistema periódico extendido al período 8 ó 9 es uno de los problemas más fascinantes también desde el punto de vista experimental y computacional.

10.9. Tabla Periódica y propiedades periódicas

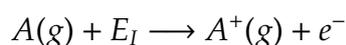
Desde que Mendeleiev y Meyer formularan las primeras tablas periódicas modernas predictivas, se sabía (desde el s.XIX) que las propiedades de los elementos químicos (y sus correspondientes átomos) no eran arbitrarias, sino que variaban de forma periódica con la masa atómica (y entonces según el número atómico). La tabla periódica moderna se debe a Moseley y está organizada en 18 grupos o columnas y 7 períodos o filas (posiblemente existen más períodos pero aún no se ha demostrado la existencia de átomos estables en dicha zona mediante su producción directa). En cada grupo, los elementos poseen propiedades similares químicas. En cada período, cada elemento posterior se construye del anterior agregando un electrón, equivalentemente un protón por la neutralidad eléctrica de los átomos, para formar el siguiente elemento. Además, hay dos series denominadas de transición y otra de transición interna entre los elementos de los grupos 2 y 13. Los grupos 1,2,13,14,15,16,17,y 18 se llaman elementos representativos. Los elementos de transición ocupan el espacio entre el grupo 2 y

el 13, y aparecen a partir del cuarto período (no antes). Los elementos de transición interna aparecen en los períodos 6 y 7. Los elementos de transición interna se organizan en dos subseries llamadas lantánidos y actínidos.

Las configuraciones electrónicas de los elementos representativos son muy estables y siguen los principios generales de la regla de Aufbau (diagrama de Möller). Los elementos de transición presentan en ocasiones irregularidades en sus configuraciones electrónicas, y también los de transición interna.

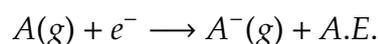
Las propiedades periódicas más importantes son las siguientes:

- Energía de ionización (E_I). También llamado potencial de ionización, es la energía mínima para arrancar un electrón de un átomo gaseoso en su estado fundamental y gaseoso, transformándolo en un ión positivo o catión. Se expresa siempre generalmente referida a un mol de átomos:



En un grupo, la energía de ionización disminuye hacia abajo, mientras que en un período, aumentan si nos desplazamos hacia la derecha en la Tabla Periódica.

- Afinidad electrónica o electroafinidad (A.E.). Es la energía liberada cuando un átomo en su estado fundamental y en estado gaseoso absorbe un electrón para formar un anión o ión negativo. Se refiere también siempre a un mol de átomos:



La afinidad electrónica disminuye al bajar en un grupo, mientras que aumenta al ir avanzando en un grupo.

- Electronegatividad. Es la tendencia de un átomo o elemento para atraer hacia sí un par de electrones compartido con otro elemento o átomo. Es una propiedad relativa al par de elementos que consideremos, esto es, de los átomos enlazados químicamente entre sí. Sin embargo, de forma cualitativa, también varía en la Tabla Periódica según una regla bien definida: la electronegatividad aumenta de izquierda a derecha en un período, mientras que disminuye al bajar en un grupo. Existen varias escalas de electronegatividad, siendo una de las más comunes y usadas la llamada escala de Pauling, que relaciona

la electronegatividad con la energía de enlace. En esta escala, el elemento más electronegativo es el flúor (con valor 4.0), mientras que el cesio es el menos electronegativo (0.7). Los elementos restantes tienen valores intermedios de éstos. En esta escala, se consideran elementos metálicos a todos los que tienen electronegatividades entre 0.7 y 2. El hidrógeno tiene electronegatividad 2.1, por lo que de forma muy aproximada, aquellos elementos con electronegatividades inferiores son metales, y los que la superan son no metales. Serían semimetales aquellos que tienen una electronegatividad similar a la del hidrógeno (se sitúan en la escalera del sistema periódico, a la derecha). Hoy día se prefiere y usa el término metaloide para los elementos que tienen propiedades intermedias entre metal y no metal: boro, silicio, germanio, arsénico, antimonio y telurio. En algunos casos, también se consideran metaloides al carbono, aluminio, selenio, polonio, y astato.

- Radio atómico. Es la mitad de la distancia entre dos átomos del mismo elemento químicos enlazados. En un período, aumenta hacia la izquierda. En un grupo, aumenta hacia abajo.

10.10. ¿Qué hay que saberse?

- Concepto de cuerpo negro, ley de Stefan-Boltzmann y ley de Wien. Explicación de Planck de la curva del cuerpo negro con la hipótesis cuántica.
- Efecto fotoeléctrico: explicación de Einstein, ecuación de Einstein, potencial de frenado.
- Modelo de Bohr: postulados y consecuencias para el átomo de hidrógeno. Fórmula de Balmer.
- Propiedades del fotón, dualidad onda-partícula, longitud de De Broglie para ondas de materia, principio de incertidumbre de Heisenberg.
- Ecuación de Schrödinger. Principio de superposición. Números cuánticos: origen y significado en términos cuánticos.
- Plantear y resolver problemas sencillos con las ideas básicas de la hipótesis cuántica y la relatividad especial. Entender la evolución científica que supuso comprender los principios cuánticos.

- Conocer y contrastar la “Física Clásica” frente a la teoría cuántica.
- Tabla Periódica: construcción de configuraciones y orbitales. Principio de Aufbau. Principio de exclusión de Pauli. Escala de Pauling de electronegatividad. Principales propiedades periódicas y su variación cualitativa en el sistema periódico. Noción de orbital atómico y grupo representativo. Significado de las series de transición y la serie de transición interna.

10.11. Formulario

- Ley de Planck $E = hf = \hbar\omega$
- Ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

- Trabajo de extracción:

$$W_{ext} = hf_0$$

- Potencial de frenado:

$$V_f = \frac{E_c(max)}{e} = \frac{h(f - f_0)}{e}$$

- Momento lineal y energía del fotón: $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$

- Dualidad onda-partícula:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

- Principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Principio de incertidumbre de Heisenberg(II):

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Principio de incertidumbre de Heisenberg general:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Para el modelo de Bohr, es importante recordar las siguientes ecuaciones básicas

- Cuantización del momento angular:

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

- Hipótesis de Planck para las transiciones de un electrón de una órbita a otra:

$$\Delta E = hf$$

- Cuantización de las órbitas:

$$r_n = a_0 n^2$$

- Cuantización de las velocidades:

$$v_n = \frac{\alpha c}{n}$$

- Cuantización de la energía:

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2}$$

- Cuantización de la aceleración:

$$a_n = \frac{\alpha^3 mc^3}{\hbar n^4}$$

- Fórmula de Balmer para el modelo de Bohr:

$$\Delta E_{n_i, n_f} = E_f - E_i = -Ry \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = +Ry \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

y donde $Ry = 13.6eV = 2.18 \cdot 10^{-18}J$

- Fórmula de Balmer para el modelo de Bohr en términos del número de onda espectroscópico $k = 1/\lambda$:

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{n_i, n_f} = \Delta(k)_{n_i, n_f} = -\frac{Ry}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = +\frac{Ry}{hc} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Hemos usado que para fotones $E = hf = h\frac{c}{\lambda} = hck$, donde k es el número de onda, con lo que $k = \frac{E}{hc}$ y nos quedará

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{n_i, n_f} = \Delta(k)_{n_i, n_f} = -\overline{Ry} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = +\overline{Ry} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

de forma que

$$\overline{Ry} = \frac{Ry}{hc} = \frac{m(K_C e^2)^2}{2\hbar^2} = 2\pi^2 \frac{(K_C e^2)^2}{h^3 c} = \frac{(K_C e^2)^2}{4\pi\hbar^3 c}$$

y donde numéricamente se tiene que

$$\overline{Ry} = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1} = 1.097 \cdot 10^5 cm^{-1}$$

- Ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi = E\Psi$$

Capítulo 11

Física moderna (II): Física relativista

11.1. Relatividad especial o restringida

Hasta el siglo XX, las leyes físicas eran invariantes bajo transformaciones de Galileo entre observadores inerciales. Dichas transformaciones son las siguientes

$$\text{T.de Galileo} = \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (11.1)$$

El problema de este conjunto de transformaciones y sus generalizaciones en el espacio tridimensional era que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo NO eran invariantes bajo estas transformaciones. Además, el supuesto éter luminífero electromagnético donde se pensaba que la luz se propagaba no pudo ser detectado. Este resultado negativo del experimento Michelson-Morley supuso un gran problema teórico, porque la velocidad de arrastre en el éter, medida por $v'_x = v_x - V_a$ no lograba ser medida. Einstein, de nuevo en 1905, logró una explicación audaz de esto a partir de primeros principios. Supuso que la velocidad de la luz era realmente invariante en el vacío para todo observador y que todas las leyes físicas, mecánicas y electromagnéticas, cumplían el principio de relatividad especial con unas transformaciones diferentes a las transformaciones de Galileo, que él pudo deducir de sus postulados, pero que también eran ya conocidas en la época. Esas transformaciones son las denominadas

transformaciones de Lorentz:

$$\text{T.de Lorentz} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \end{cases} \quad (11.2)$$

en donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Estas transformaciones fueron correctamente interpretadas por Einstein de la siguiente forma:

- Los observadores en reposo miden longitudes más cortas para observadores en movimiento con respecto a ellos. Esto se llama contracción de longitudes:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \frac{1}{\gamma}$$

- Observadores en reposo miden tiempos (o "tics" de los relojes) más cortos (o rápidos) que los relojes que se mueven y que sufren una "dilatación del tiempo", es decir, tienen "tics" más largos o lentos. Si S' es el sistema de referencia móvil y S es el sistema de referencia estacionario, se tiene que

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- El tiempo es relativo y no es universal para los observadores, a diferencia del tiempo en relatividad galileana.
- La simultaneidad es relativa al observador, no hay una noción universal de simultaneidad entre sucesos.
- El momento lineal relativista no coincide con el momento clásico, sino que adopta la expresión siguiente

$$\vec{p}_{rel} = M\vec{v} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.3)$$

Generalmente se suele definir el parámetro $\beta = v/c$ para simplificar la escritura de las fórmulas relativistas.

- En ocasiones, se llama masa relativista a la siguiente cantidad, aunque es un concepto ya obsoleto en la enseñanza de la relatividad

$$M = m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- La fuerza relativista es igual a la siguiente expresión (en general)

$$\vec{F}_{rel} = \frac{d}{dt} (m\gamma\vec{v}) \quad (11.4)$$

- La energía cinética relativista es igual a:

$$E_c(rel) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = E_{rel}(total) - E_{rel}(reposo) \quad (11.5)$$

- Equivalencia masa energía. Quizás la ecuación más famosa de la Física, aunque tiene diferentes versiones y en ocasiones se malinterpreta su significado, por lo que hay que tener cuidado:

$$E_0 = mc^2 \quad (11.6)$$

$$E(total) = Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.7)$$

$$\Delta E = \Delta Mc^2 \quad (11.8)$$

- Invariantes relativistas. En relatividad especial hay invariantes análogos a los existentes en relatividad galileana. Algunos son:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (11.9)$$

$$p^2c^2 - E^2 = -m^2c^4 \quad (11.10)$$

De hecho, el primero de estos invariantes suele definirse como $s^2 = -c^2\tau^2$, donde τ es el tiempo propio medido por un observador en reposo. El tiempo propio es un invariante (en unidades adecuadas) pero el tiempo usual no es un invariante relativista en relatividad especial. El tiempo propio se calcula con la siguiente expresión:

$$\tau = \Delta T \frac{1}{\gamma} = \Delta T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.11)$$

11.2. ¿Qué hay que saberse?

- Transformaciones de Lorentz, postulados de relatividad especial y consecuencias.
- Plantear y resolver problemas sencillos con las ideas básicas de las hipótesis cuántica y la relatividad especial. Entender la evolución científica que supuso comprender los principios o reglas cuánticos y relativistas.
- Comprender correctamente algunos efectos y fórmulas de la relatividad especial.
- Conocer y contrastar la “Física Clásica” frente a la “Física Moderna” formada por la teoría cuántica y la relatividad especial.

11.3. Formulario

- T. de Lorentz para la relatividad especial:

$$\text{T.de Lorentz, S a S'} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{T.de Lorentz inversas, S' a S} \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right) \end{cases}$$

- Contracción de longitudes:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \frac{1}{\gamma}$$

- Dilatación del tiempo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Momento relativista:

$$\vec{p}_{rel} = M\vec{v} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Energía cinética relativista:

$$E_c(rel) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = E_{rel}(total) - E_{rel}(reposo)$$

- Ecuaciones de Einstein para la equivalencia masa-energía:

$$E_0 = mc^2$$

$$E(total) = Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta E = \Delta Mc^2 = E_c(rel) + E_{rel}(reposo)$$

- Fuerza relativista:

$$\vec{F}_{rel} = \frac{d}{dt} (m\gamma\vec{v})$$

- Tiempo propio:

$$\tau = \Delta T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Capítulo 12

Física moderna (III): Física nuclear (y de partículas)

12.1. Núcleo atómico

12.1.1. Componentes del núcleo

El núcleo atómico está formado esencialmente por protones y neutrones, a los que se llama conjuntamente como nucleones.

Un protón tiene carga eléctrica positiva igual a

$$q_p = +e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

y una masa igual a

$$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

El número atómico es igual al número de protones de un átomo. Un neutrón tiene carga eléctrica nula (cero) y una masa igual a

$$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \text{kg} \approx m_p$$

El número másico es igual al número de protones más el número de neutrones de un átomo. $A = Z + N$. El electrón tiene una masa 1837 veces inferior a la del protón, e igual a

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg} \ll m_n, m_p$$

12.1.2. Elementos e isótopos

Elemento: átomo caracterizado por un determinado Z .

Isótopo: átomo caracterizado por un Z y un número de neutrones N . Los

isótopos de un mismo elemento tienen igual Z pero distinto N .
 Jerga: se llama núclido o nucleido a un átomo con A y Z fijos, ${}^A_Z X$.

12.1.3. Propiedades del núcleo atómico

- Las fuerzas nucleares son de dos tipos: débiles y fuertes.
- La fuerza nuclear fuerte sigue una ley potencial de tipo Yukawa $V(r) = g \exp(-kr)/r$ y explica el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones, así como la estabilidad del núcleo atómico.
- La fuerza nuclear débil explica los fenómenos de radiactividad como la desintegración beta, como por ejemplo $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$.
- El núcleo se explica con un modelo cuántico de capas similar al atómico pero diferente en algunos detalles técnicos, en especial relativos al carácter de los “números mágicos” nucleares, en contraposición a los atómicos.

12.1.4. Modelo Estándar y Física de Altas Energías

Es una teoría que abarca hasta tamaños del orden de 10^{-15} m, una unidad que se suele denominar fermi $1 fm = 10^{-15} m$.

La materia se supone formada por dos clases de partículas: leptones y quarks. Se agrupan en 3 generaciones. Para los leptones tenemos el electrón, el muón y el tauón, y sus neutrinos asociados, mientras que para los quarks tenemos 6 “sabores” o tipos llamados up(arriba), down(abajo), charm(encanto), strange (extraño), bottom(fondo), top (cima). Así se agrupan en:

$$(e, \nu_e)(\mu, \nu_\mu)(\tau, \nu_\tau)$$

y

$$(u, d)(c, s)(t, b)$$

A los que hay que sumar sus antipartículas asociadas, que son iguales a ellas salvo que tiene cambiada la carga eléctrica.

Los quarks están confinados y no pueden observarse “libres” (algo similar a lo que ocurre, por ejemplo, con los polos magnéticos, que no se observan aislados aparentemente). Por ejemplo, las cargas del quark up y del down son $2/3$ y $-1/3$ de la carga elemental del electrón. Un protón es una combinación (uud), mientras que un neutrón es una combinación

(udd). Los quarks poseen un número cuántico llamado "color" (que viene en tres tipos R(red), G (green), B(blue)) que el análogo de la fuerza eléctrica para la fuerza de color y cuya teoría es una generalización del campo de Maxwell llamada teoría de Yang-Mills.

Las partículas que median las fuerzas elementales en el Modelo Estándar son los bosones (partículas de espín entero a diferencia de los campos de materia, fermiones, con espín semientero). Estos bosones son el fotón γ (electromagnetismo) y los bosones intermediarios masivos W^+ , W^- , Z para la interacción débil (que cambia el "flavor" o sabor de las partículas), mientras que la interacción fuerte tiene gluones (g) sin masa (similares al fotón pero intercambiando carga de color en vez de carga eléctrica). Todos los bosones del Modelo Estándar tienen espín uno. Adicionalmente, el Modelo Estándar, por consistencia interna, requiere un tipo adicional de bosones masivos, con espín cero, llamados bosones de Higgs. Estos bosones dan masa a los bosones intermediarios anteriores (W 's y Z 's), así como proporcionan la masa de los leptones y quarks fundamentales cuando interactúan con ellos. Así, el campo de Higgs es el responsable de masa a nivel cuántico.

El Modelo Estándar no incluye a la gravedad, que se supone clásica y descrita por la Relatividad General de Einstein como teoría independiente y a parte. Se piensa que la Gravedad Cuántica está mediada por bosones de espín dos llamados gravitones (G).

El radio típico de un núcleo se puede obtener con una fórmula semicuantitativa a partir del llamado modelo de la gota líquida usando la expresión siguiente

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}$$

12.2. Energía de enlace nuclear

Se llama defecto de masa nuclear a la expresión

$$\Delta M = [Zm_p + (A - Z)m_n] - M$$

y donde M es la masa del núcleo y m_p, m_n son la masa del protón y del neutrón, respectivamente.

La energía de ligadura nuclear se calcula con la fórmula siguiente:

$$E_L = BE = \Delta Mc^2$$

La energía de ligadura por nucleón es igual a $E_N = E_L/A = BE/A$.

12.3. Radioactividad

Hay 3 tipos principales de fenómenos radioactivos:

- Desintegración alfa ($\alpha - decay$). Son partículas formadas por núcleos de helio ionizado, con velocidad típica del orden de $v \sim 2 \cdot 10^7 m/s$, con carga positiva (${}^4_2He^{2+}$) y tienen poco poder penetrante, ya que pueden pararse esencialmente con una hoja de papel.
- Desintegración beta ($\beta - decay$). Son partículas formadas esencialmente por electrones procedentes de la desintegración débil de algún núcleo, en general. Si velocidad es variable pero superior a la de las partículas alfa. Su carga es negativa (o positiva en la desintegración beta inversa). Tienen poder de penetración moderado, ya que pueden detenerse con una capa de metal.
- Desintegración gamma ($\gamma - decay$). Son partículas energéticas formadas por fotones de alta energía u ondas electromagnéticas de elevada frecuencia, que se emiten por núcleos en ciertas reacciones y procesos físicos. Al estar formada por fotones, sus partículas se mueven a la velocidad de la luz. Es una radiación eléctricamente neutra y muy penetrante. Es necesario una capa gruesa de plomo o cemento para detenerlas.

12.4. Ley de desintegración radioactiva

Se llama **actividad** al número de partículas que se desintegran en cierto tiempo (en particular núcleos, elementos, átomos, o incluso también cualquier tipo de corpúsculo). La unidad natural de actividad es el Becquerel (Bq). Otras unidades comunes de actividad son $1curio = 1Ci = 3.7 \cdot 10^{10} Bq$.

Ley de desintegración radioactiva señala que

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N \quad (12.1)$$

de donde

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\lambda t} \quad (12.2)$$

o también

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad (12.3)$$

y donde λ es la constante radiactiva. Se llama **semivida** ($T_{1/2}$) al tiempo tal que $N(T_{1/2}) = N_0/2$, es decir, al tiempo que tarda una sustancia con N_0 átomos iniciales en reducirse a la mitad tal número de átomos (o partículas en general). Está relacionada con la constante radiactiva en la siguiente forma

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.693}{\lambda} \quad (12.4)$$

En las denominadas reacciones nucleares o de Altas Energías se produce la ruptura de los núcleos y átomos o de las propias partículas elementales.

Otro concepto importante es el de vida media (τ). La vida media τ es el promedio de vida de un núcleo o de una partícula subatómica libre, antes de desintegrarse. La desintegración de partículas es un proceso probabilístico (en concreto sigue una ley llamada ley de Poisson) por lo que esto no significa que un determinado núcleo vaya a tardar exactamente ese tiempo en desintegrarse. La vida media no debe confundirse con el semiperiodo, vida mitad, semivida o período de semidesintegración: son conceptos relacionados, pero diferentes. En particular, este último es de aplicación solamente para sustancias radiactivas y no a partículas libres.

Para calcular el tiempo de vida media τ hacemos lo siguiente. Durante un intervalo de tiempo dt , el número de átomos que desaparece de la muestra dN es igual a la variación de población de la muestra (nótese el signo negativo que significa incremento negativo o decrecimiento):

$$-dN = N(t) \cdot \lambda \cdot dt$$

La solución de esta ecuación diferencial nos da la variación exponencial de la población de átomos radiactivos con el tiempo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

La vida media τ , es decir, la duración promedio de un átomo radiactivo en la muestra resulta de la evaluación siguiente:

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tN(t)dt}{\int_0^{\infty} N(t)dt} = \frac{\int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt}$$

que integrada por partes da como resultado:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

De esto se deduce trivialmente que

$$T_{1/2} = \tau \ln 2$$

12.5. ¿Qué hay que saber?

- Propiedades de los núcleos y átomos fundamentales: número atómico, número másico, concepto de isótopo y nucleido, los nombres de algunas partículas elementales y su composición. Nociones elementales del Modelo Estándar.
- Conocer la existencia de las fuerzas nucleares y su tipología esencial, así como su alcance en términos de distancias y escalas de energía.
- Energía de ligadura y defecto de masa.
- Tipos de radiactividad básicos.
- Conceptos de actividad, semivida, vida media, constante radiactiva y la ley de desintegración, así como las definiciones matemáticas correspondientes y sus unidades.
- Noción de fusión y fisión nuclear.
- Orden de magnitud de las masas del protón, neutrón y electrón.

12.6. Formulario

- Actividad: $A = \lambda N$, $N = N(t)$.
- Semivida: $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$.
- Vida media: $\tau = \frac{1}{\lambda}$.
- Relación entre vida media y semivida: $T_{1/2} = \tau \ln 2$.
- Ley de desintegración: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, $A = A_0 e^{-\lambda t}$.
- Modelo de la gota líquida y radio nuclear: $R = R_0 \sqrt[3]{A}$

- Defecto de masa: $\Delta M = Zm_p + (A - Z)m_n - M$

- Energía de ligadura: $E_L = \Delta Mc^2$

- Energía de ligadura por nucleón: $E_L/A = E_N$

Apéndice A

Problemas complementarios

Vectores

1) Dado el vector $(3, 4, -2)$, calcular su módulo y los ángulos que forma su dirección con los ejes X, Y, Z.

2) Calcular el módulo y los ángulos que su dirección forma con los ejes de coordenadas X, Y, Z, para los vectores $A = (-1, 0, 3)$, $B = (5, 4, 3)$, y $C = (1, 1, 0)$.

3) Dados los vectores $v_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $v_2 = \vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $v_3 = 2\vec{i} - 7\vec{j}$. Calcular los módulos de los vectores $A = v_1 + v_2 + v_3$, $B = v_1 - v_2 - v_3$ y $C = v_1 + 2v_2 - 2v_3$.

4) Hallar los valores de los siguientes productos escalares: a) $\vec{i} \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, b) $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{k})$, c) $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j})$.

5) Hallar el ángulo que forman los vectores $v_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ and $v_2 = 6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

6) Hallar el valor que debe tener x para que los vectores siguientes sean perpendiculares: $v_1 = \vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ y $v_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

7) Calcular $2\vec{j} \times 7\vec{k}$, $3\vec{i} \times (-5\vec{k})$, $(-\vec{i}) \times (-5\vec{k})$, y $(3\vec{j} \times \vec{i}) \times (-3\vec{k})$.

8) Si $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 \times v_1$ y $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$.

9) Si $v_1 = -2\vec{i}$, $v_2 = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $v_3 = 2\vec{j} + 4\vec{k}$, hallar $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$ y $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$.

10) Hallar un vector unitario perpendicular al plano definido por los vectores $(1, -2, 3)$ y $(2, -1, 5)$.

11) Hallar el producto escalar $(2\vec{i} - 3\vec{k}) \cdot (5\vec{j} \times (6\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}))$.

12) Demostrar que la dirección del vector derivada de un vector $\vec{A}(x)$ de módulo constante y dirección variable es perpendicular a dicho vector \vec{A} .

13) Dado el vector $\vec{v} = 3 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$, hallar el módulo de su derivada con respecto a t y el de su derivada segunda con respecto a dicha variable.

14) Dado el vector $\vec{r} = \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}$, con $\omega = \text{constant}$, hallar $d\vec{r}/dt$, comprobar que $r = \text{constante}$ y que $d\vec{r}/dt$ es perpendicular a \vec{r} . Dibujar \vec{r} y $d\vec{r}/dt$ para $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$. Hallar también $d^2\vec{r}/dt^2$ y explicar el resultado obtenido.

15) Dado el vector (2,-3,1) aplicado en el punto (3,-7,0), hallar: a) El momento del vector respecto del origen de coordenadas, b) El momento con respecto al punto (1,1,-2).

16) Dado el vector $\vec{A} = (u^2 - 1)\vec{i} + u\vec{j} - u^3\vec{k}$. Hallar u para que \vec{A} y su derivada primera sean perpendiculares.

17) Hallar un vector unitario tangente a un punto de la curva $x = 2t - 1$, $y = t^2 + 1$, para $t=2$, $t=0$ y $t=10$.

18) Dados los vectores $\vec{A} = -2\vec{j}$ y $\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j}$, calcular a y b para que los vectores \vec{B} y $\vec{A} \times \vec{B}$ sean ambos unitarios.

19) Dados los vectores $u_1 = (2, -1, 1)$, $u_2 = (1, 3, -2)$, $u_3 = (-2, 1, 3)$, y $u_4 = (3, 2, 5)$, hallar los valores de los números a , b y c de forma que $u_4 = au_1 + bu_2 + cu_3$.

20) Dados los vectores $a = (2, 3, 1)$ y $b = (-1, 3, -5)$, calcular i) el momento del vector \vec{a} aplicado en el origen respecto del punto $P = (-2, 1, 0)$. ii) el momento del vector \vec{b} aplicado en el punto $A = (1, 2, 3)$ respecto del eje definido por la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$$

21) Dados los vectores $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{B} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + a\vec{k}$, hallar el valor de "a" para que los vectores A y B sean perpendiculares.

22) Dados los vectores $\vec{A} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - a\vec{k}$. Determinar "a" para que los vectores $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{S} = \vec{A} - 2\vec{B}$ sean perpendiculares.

23) ¿Cuánto debe ser el valor de m para que el vector $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ forme un ángulo de 60° con el eje OZ?

24) Los vectores $\vec{A} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{C} = 4\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$ tienen su origen común en el punto (3,1,2). Calcular: a) El momento de cada vector con respecto al origen de coordenadas, b) El momento de la resultante con respecto al mismo punto (el origen), c) Comprobar que se cumple el Teorema de Varignon.

25) Hallar las componentes del vector $A = (2, 2, 0)$ en las direcciones de las rectas $y = 2x$ e $y = x/2$.

26) Hallar el momento del vector $v = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (3, 2, 1)$ aplicado en el punto $P(0,-1,1)$ con respecto al punto $(0,0,0)$.

27) Hallar la proyección del vector $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ sobre el vector $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

28) Sean los vectores $a = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ y $b = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar a) Un vector unitario perpendicular a ambos, b) Un vector unitario paralelo a \vec{b} y c) un vector unitario paralelo a $\vec{b} - \vec{a}$.

29) Dado el vector $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ aplicado en $A(1,-1,2)$, calcular el momento de \vec{a} con respecto al eje definido por la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

30) Demostrar que los vectores siguientes pueden formar un triángulo: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.

31) Dos sistemas de ejes rectangulares en el plano XY y otro plano X'Y' están relacionados por un giro de ángulo α . a) Probar que las componentes de un vector se de un sistema de referencia rotado con ese ángulo se transforman según las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} A'_x = A_x \cos \alpha + A_y \sin \alpha \\ A'_y = -A_x \sin \alpha + A_y \cos \alpha \end{cases}$$

b) Comprobar que el módulo del vector A es invariante bajo el giro.

c) Si B es otro vector en el mismo plano, comprobar que el producto escalar también es invariante.

32) Deseamos volar en un avión a 500km/h hacia el este. La velocidad del viento es de 80km/h. ¿Cuál debe ser la velocidad y rumbo del avión en los siguientes casos?: a) El viento sopla hacia el sur. b) El viento sopla hacia el SE, sureste. c) Si el viento sopla hacia el SO, suroeste.

33) La suma de los vectores \vec{a} y \vec{b} es un vector \vec{c} de módulo 24 cuyos cosenos directores son $1/3$, $-2/3$, y $2/3$ respectivamente. Además, el vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ tiene por componentes $(7,9,3)$. Calcular las componentes de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

34) Un vector de módulo 3 tiene su punto de aplicación en $(2,3,0)$ y está contenido en el plano XY, de forma que forma un ángulo de 30° con OX y de 60° con OY. Halla su momento con respecto al punto $P(5,3-7)$.

35) Calcular las componentes de un vector de módulo 8, contenido en el plano YZ, y que forma un ángulo de 30° con OZ.

36) Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a su mitad.

37) Dados los vectores $A=(2,1,-1)$, $B=(4,-2,-1)$ y $C=(1,-1,3)$, calcular:

a) $(A + B) \cdot C$ y b) $(A - B) \times C$. Hallar el ángulo que forman A y B, B y C, A y C.

38) Calcular el momento respecto al origen de coordenadas del vector $A = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, cuyo origen está en el punto definido por el vector de posición $\vec{r} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

39) Comprobar que el momento de un vector \vec{F} respecto de un eje de coordenadas coincide con la componente de \vec{M}_0 según dicho eje.

40) Un cuerpo se desplaza hacia el este con velocidad de 10km/h. Calcular la velocidad a la que debe desplazarse hacia el noreste 30° (medidos desde el Norte) otro cuerpo móvil, sabiendo que continuamente se dirige al Norte respecto del primero.

41) Demostrar que si tres vectores A, B y C no están contenidos en el mismo plano, ni son paralelos, de la igualdad siguiente $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0$ se deduce que $x=y=z=0$.

42) Calcular la integral $\int_C f d\vec{r}$, donde $f = xy^2$, al pasar del punto A(1,1,0) hasta el B(4,2,0), en los siguientes casos: a) C es la curva definida por $x = y^2$, $z = 0$, b) C es la recta $y = x/3 + 2/3$.

43) Calcular la integral $\int_L \vec{a} \times d\vec{r}$, donde $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^2x\vec{j}$, a lo largo de la parábola $x = y^2$, $z = 0$, desde el origen hasta el punto P(4,2,0).

44) Hallar la circulación del vector $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 + xy)\vec{j}$ cuando partiendo del origen se pasa, por la recta $2y = x$ hasta el punto de intersección con la parábola $y^2 = x$, y desde ahí, hasta el origen de nuevo, a lo largo de la parábola.

45) Calcular la circulación del vector:

$$\vec{v} = 2xy^2z\vec{i} + (x + 2y - z)\vec{j} + 5x^2z\vec{k}$$

entre los puntos A(0,1,0) y B(2,2,1), a lo largo de la curva de ecuaciones paramétricas definidas por $x = 2t$, $y = t^2 + 1$, $z = t^3$.

46) Siendo $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$ una función vectorial de dos variables escalares definida por:

$$\vec{v}(x, y) = (2x^2y - x^4)\vec{i} + (e^{xy} - \sin x)\vec{j} + (x^2 \cos y)\vec{k}$$

Calcular las siguientes cantidades:

a) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$.

b) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$.

c) $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y \partial x}$.

$$d) \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2}.$$

47) Dados la función escalar $f = x^3y + 2y$ y el vector $\vec{a} = yi + (x+z)^2j + (x-z)^2k$, calcular las siguientes integrales de línea cuando se pasa del punto A(1,1,0) al punto B(2,4,0) a lo largo de la curva C $y = x^2, z = 0$:

$$a) \int_C f d\vec{r}$$

$$b) \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$c) \int_C \vec{a} \times d\vec{r}$$

48) Una partícula se desplaza siguiendo la curva de ecuaciones $x = 3 \cos 2t, y = 3 \sin 2t, z = 5$. Calcular las expresiones de su velocidad y aceleración, así como los módulos de ambos vectores.

Funciones de varias variables (avanzado)

1) Se la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudia la continuidad de esa función en \mathbb{R}^2

2) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en \mathbb{R}^2 :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3) Calcula las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = x^2y^2$$

$$b) f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$c) f(x, y) = x^2 + 8x^3$$

$$d) f(x, y) = y^2 + 8y^3$$

$$e) f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

$$f) f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$$

$$g) f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$h) f(x, y) = x^2y + y^2 + 2x$$

$$i) f(x, y) = xy + x^2y^2 + x^3y^3$$

j) $f(x, y) = x - x^2y^2 + x^3y$

l) $f(x, y) = x/y$

m) $f(x, y) = x^2/y$

n) $f(x, y) = x/y^2$

o) $f(x, y) = x^2/y^2$

p) $f(x, y) = \frac{x^2+y}{y^2}$

q) $f(x, y) = \frac{x^2+yx}{x^2}$

r) $f(x, y) = \frac{x^2+1}{xy^2}$

s) $f(x, y) = \frac{x^3+x^2+x}{x^2y^2}$

t) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

u) $f(x, y) = \frac{x^3+x^2+x}{x^2y^4}$

v) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

w) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

x) $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$

y) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

z) $f(x, y, z) = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4) Calcula las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones:

i)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ii)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

iii)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

iv)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

v)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vi)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

vii)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5) Calcula la matriz jacobiana de las siguientes funciones de varias variables:

- a) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2)$
- b) $f(x_1, x_2) = (4x_1 + x_2, 6x_1x_2)$
- c) $f(x_1, x_2) = (4x_1^2 - x_2, 6x_1^3x_2^2)$
- d) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2, 5x_1^3)$
- e) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 5x_1^3, x_1x_2)$
- f) $f(x_1, x_2) = ((x_1 + 1)^2, x_1^4, -x_1x_2^3)$
- g) $f(x_1, x_2) = ((x_1 + 1)^2x_2, 7x_1^4 + x_2, -x_2^3)$
- h) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_2 - x_3^3)$
- i) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2x_2x_3, 2x_2 - x_3^3)$
- j) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2(1 + x_2x_3), 2x_2 - 5)$
- k) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2x_2^2x_3^2, 2x_2 - 5x_1)$
- l) $f(x, y) = (e^x + e^y, e^xe^y)$
- m) $f(x, y) = (y \sin x, x + \sin y)$
- n) $f(x, y) = (x \ln y, \ln x - \ln y)$
- o) $f(x, y) = (e^x \cos y, e^y - \ln x)$
- p) $f(x, y) = (x^2 \sin(2y), e^{2x} - \ln y, \cos x)$
- q) $f(x, y) = (e^{x^2}, \cos x, x \cos y)$
- r) $f(x, y) = (\tan x, 2e^y, \cos x^2)$
- s) $f(x, y, z) = (e^x \sin(y + z), xy^2 \cos z^2)$
- t) $f(x, y, z) = (e^{x-y}, \cos(y + z) + \ln(xy))$
- u) $f(x, y, z) = (\cos(xyz), e^{x^2y})$
- v) $f(x, y, z) = (\ln \frac{xy}{z}, e^{\sin(2x^2y)})$
- w) $f(x, y, z) = (x^{yz}, y^{xz})$
- x) $f(x, y, z) = (e^{e^z}, e^{e^{xy}})$

6) Calcula el vector gradiente de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = 3x^3y^2$
- b) $f(x, y) = xy + x^2$
- c) $f(x, y) = 4x^4y^5 - 3x^2$
- d) $f(x, y) = 2y - 6x$
- e) $f(x, y) = 7y - 4(x + y)^2$

- f) $f(x, y) = 8x^2y - (x^3 + y)^4$
 g) $f(x, y) = (x^3y + 7y)^5$
 h) $f(x, y) = 7xy(x^3 + y)^2$
 i) $f(x, y, z) = 5x^3yz^2$
 j) $f(x, y, z) = 10x^6 + y^5 - xz^3$
 k) $f(x, y, z) = 6x^2y - yz$
 l) $f(x, y, z) = 8x^3y - 6y^4 + z$
 m) $f(x, y, z) = z(x^3 + y)^2$
 n) $f(x, y, z) = x^5 + (7y - z)^3$
 o) $f(x, y, z, t) = 6x^3yzt^8$
 p) $f(x, y, z, t) = x^3 - 7xy - zt$
 q) $f(x, y, z, t) = 7y^2 - xzt$
 r) $f(x, y, z, t) = 9(x^2 + y)^2 - zt$
 s) $f(x, y, z, t, u) = x^2y + z - tu$
 t) $f(x, y, z, t, u) = 3xyztu$
 u) $f(x, y) = e^x + e^y$
 v) $f(x, y) = e^{xy}$
 w) $f(x, y) = ye^x$
 x) $f(x, y) = \sin(x + y)$
 y) $f(x, y) = \cos(xy)$
 z) $f(x, y) = \sin x + \cos y$
 7) Calcula el gradiente de estas funciones:
 a) $f(x, y) = \ln x - \ln y$
 b) $f(x, y) = x \ln y$
 c) $f(x, y) = e^x + \cos y - \ln x$
 d) $f(x, y) = e^{7xy} - \cos(3x^2y)$
 e) $f(x, y) = \ln(7x^2) \cos(3y)$
 f) $f(x, y) = \sin^2 x - y \ln x$
 g) $f(x, y, z) = xe^z \sin y$
 h) $f(x, y, z) = \ln(x/y) \sin z^2$
 i) $f(x, y, z) = 3ze^{x^2y} + \ln y^2$
 j) $f(x, y, z, t) = e^x \cos y - \sin z + \ln t$
 k) $f(x, y, z, t) = \cos(xy) - \ln(zt)$
 l) $f(x, y, z, t) = zt \tan(x^2 + y^2)$
 m) $f(x, y, z, t, u) = x + y - \cos z + e^t - \ln u$
 n) $f(x, y, z, t, u) = \ln(xyz/tu)$
 8) Calcula la matriz hessiana de las siguientes funciones:
 a) $f(x, y) = 5x^2y + y$
 b) $f(x, y) = 5x^2y - 3xy$
 c) $f(x, y) = 5x^4y^2 - 3xy^2$

d) $f(x, y) = 5x^2y^3 - 2x^2y^2$

e) $f(x, y) = x^5y^4$

f) $f(x, y) = x^5y^4 + x^2y^2$

g) $f(x, y) = (x + y)^2$

h) $f(x, y) = (x + y)^3$

i) $f(x, y) = x^5y^3 - x^3y^6$

9) Encuentra los puntos críticos, máximos o mínimos, de la función dada por

$$F(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x - 8y + 5$$

Haz lo mismo para la función

$$V(x, y) = ax^2 + bx^4$$

donde a y b son números reales arbitrarios, es decir, estudia en este caso los puntos críticos según los valores de a y de b.

10) En los siguientes problemas, halla los puntos críticos y determina si corresponden a máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura:

a) $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = xy$

c) $f(x, y) = 1/x + 1/y - 1/(xy)$

d) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

e) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$

f) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

g) $f(x, y) = x^3 - 4xy + y^3$

h) $f(x, y) = e^{-x^2+y^2-6y}$

i) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1}$

j) $f(x, y) = x \ln(y^2/x) + 3x - xy^2$

11) Una lechería produce leche entera y leche desnatada en cantidades x e y galones, respectivamente. Suponer que el precio de la leche entera es $p(x) = 100 - x$ y el de la leche desnatada es $q(y) = 100 - y$. Suponer que $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de coste conjunto de los artículos. ¿Cuáles debe ser los valores de x e y para maximizar las utilidades? Sol.: $x=20$ galones de leche entera, $y=20$ galones de leche desnatada

12) Considerar un experimento en el que un sujeto desarrolla una tarea mientras recibe dos estímulos diferentes (sonido y luz, por ejemplo). Ante niveles bajos del estímulo, el desempeño del sujeto puede mejorar en realidad, pero a medida que los estímulos aumentan, se convierten en una

distracción y la productividad se deteriora. Suponer que en cierto experimento en el que se aplican x unidades de estímulos tipo A e y unidades de estímulos tipo B, la productividad o desempeño del sujeto se mide con la función:

$$f(x, y) = C + xye^{1-y^2-x^2}$$

y donde C es una constante positiva arbitraria. Averiguar las unidades de cada estímulo que generan el máximo desempeño o máxima productividad. Sol.: $x=y=\sqrt{2}/2$

13) Un fabricante planea vender un nuevo producto a 150 euros por unidad y estima que si se invierten x miles de euros en desarrollo y miles de euros en promoción, los consumidores comprarán aproximadamente

$$\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$$

unidades del producto. Si los costos de fabricación de este producto son 50 euros por unidad, ¿cuánto debería invertir el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la mayor "utilidad" posible en la venta del producto? Nota: la utilidad se define como la siguiente cantidad

Utilidad=(Número de unidades)x(Precio de la unidad-Coste por unidad)-(Cantidad total invertida en desarrollo y promoción).

Sol.: En desarrollo, $x=4000$ euros. En promoción $y=6000$ euros.

14) Hallar el máximo de la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la ligadura $x + y = 1$. Sol.: $f(1/2, 1/2)=1/4$.

15) Hallar el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $xy=1$. Sol.: $f(1,1)=f(-1,-1)=2$.

16) Hallar el valor mínimo de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeta a la ligadura $x^2 + y^2 = 4$. Sol.: $f(0,2)=f(0,-2)=-4$.

17) Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$. Hallar los valores máximos y mínimos sujeta a la condición $x^2 + y^2 = 1$. Sol.: $f(\sqrt{3}/2, -1/2) = f(-\sqrt{3}/2, -1/2) = 3/2$ máximo, $f(0, 1) = -3$ mínimo.

18) Sea $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$. Hallar el valor mínimo de la función sometida a la ligadura $x + y = 15$. Sol.: $f(8,7)=-18$.

Ejercicios para practicar (sencillos)

1) Para los siguientes vectores de posición:

a) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} - 5t\vec{j}$ m.

b) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (4t + 1)\vec{j}$ m.

c) $\vec{r}(t) = (1 - 3t^2)\vec{i} + 4t^2\vec{j}$ m.

d) $\vec{r}(t) = -5 \cdot 10^3\vec{i} - 9.5 \cdot 10^3\vec{j}$ m.

- A) Calcula la posición en el tiempo $t=0$ s, $t=1$ s, $t=2$ s.
 B) Calcula la velocidad instantánea y la celeridad en función del tiempo.
 C) La velocidad media entre $t=0$ s y $t=1$ s, y entre $t=0$ y $t=2$ s, indicando en cada caso si son iguales o no a las velocidades instantáneas medidas en el intervalo de tiempo asociado a cada uno de los dos casos.
 D) La aceleración instantánea y su módulo, indicando si hay algún vector que describa un movimiento NO acelerado.
 E) La celeridad en $t=0$, $t=1$, y $t=2$ segundos.

2) Un río tiene una corriente que circula a velocidad de 2m/s y un ancho de 100 metros. Un nadador piensa cruzar a velocidad constante de 1 m/s dicho río. Calcula el tiempo que tarda en cruzar y en qué punto respecto del punto desde el que se lanza termina al llegar a la otra orilla. Calcula la velocidad total del nadador en módulo dirección y sentido.

3) U. Bolt parte del reposo y recorre 100 metros en 9.51 segundos. Halla la velocidad y la aceleración media.

4) Oliver dispara a puerta un balón de fútbol desde 20 m de distancia con velocidad de 72km/h y elevación de 30 grados. Indica si el balón llega a portería sin botar y, teniendo en cuenta que la altura de la portería es de 2.10 m y el portero no llega, si entra el balón a gol entre los 3 palos.

5) Un coche de choque se mueve a 2m/s hacia otro de velocidad contraria de 1.5m/s. Si están separados 16 metros y no hay obstáculos, halla el tiempo que tardan en colisionar.

6) Un paracaidista se lanza desde un avión que se mueve a 120km/h y altura de 200m. Halla: a) El tiempo en llegar al suelo. b) La velocidad en el momento de llegar al suelo.

7) 3 masas están situados formando un cuadrado de 1 m de lado con el origen como punto inferior izquierdo en el que no hay situada ninguna masa. La masa del punto (0,1) es de 5kg, la del punto (1,1) es 2 kg y la del punto (1,0) vale 10 kg. Calcula: a) El campo gravitatorio en el origen. b) La fuerza gravitatoria sobre una masa de 5kg situada en el origen debido a la presencia de las 3 masas anteriores. c) El potencial gravitatorio en el origen.

8) Calcula el campo eléctrico total y la fuerza sobre una carga Q de $100\mu\text{C}$ en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

A) $q_1 = 100\mu\text{C}$, $q_2 = -100\mu\text{C}$, situados en dos vértices de un triángulo equilátero que tiene P como vértice superior y origen de coordenadas.

B) $q_1 = 2\mu\text{C}$, $q_2 = 6\mu\text{C}$, y P es un punto situado en la línea que une ambas cargas.

C) $q_1 = 1\mu\text{C}$, $q_2 = -2\mu\text{C}$, $q_3 = 3\mu\text{C}$, siendo P el origen de coordenadas y las tres cargas anteriores ubicadas, respectivamente, en $(0,1)$, $(1,1)$ y $(1,0)$.

9) Una rueda se mueve con velocidad de 10 rpm, siendo esta velocidad constante. Calcula: a) Si hay aceleración de algún tipo y su valor si la respuesta es positiva. b) El ángulo y espacio recorridos en media hora. El radio de la rueda es de 30 cm.

10) Un disco pasa de 60 rpm a 120 rpm en 10 segundos. Calcula:

A) La velocidad angular en 20s si la aceleración angular es constante. Halla la aceleración angular.

B) La aceleración tangencial, centrípeta y total a los 10 segundos.

Dato: radio de la rueda=50cm.

Campos (repaso)

1) La distancia media entre la Tierra y la el Sol es de $1.496 \cdot 10^{11}\text{m}$. La distancia media entre el Sol y Marte es de $2.239 \cdot 10^{11}\text{m}$. Calcula el número de días que tarda Marte en describir su órbita en torno al Sol.

2) La Luna tarda 28 días en describir una órbita alrededor de la Tierra. Indica el tiempo que tarda un satélite artificial que diste de la Tierra 1/10 de la distancia Tierra-Luna.

3) Una bolita se encuentra suspendida mediante un hilo de 1 metro de longitud y queda a la altura del centro de una esfera de 3m de radio y muy cerca de sus superficie. La esfera tiene una masa de 10^4kg . Halla el ángulo que forma el hilo con la vertical.

4) Tenemos un campo eléctrico uniforme, dirigido verticalmente hacia arriba, de intensidad 10^4 N/C . Calcular: a) La fuerza ejercida por ese campo sobre un electrón, b) Comparar dicha fuerza con el peso del electrón, c) Hallar la velocidad del electrón cuando haya recorrido 1 cm partiendo del reposo, d) Hallar la energía cinética adquirida. Finalmente, determinar el

tiempo que necesita para recorrer la distancia de 1 metro.

5) En los puntos A(3,2) y B(-3,2) se encuentran situadas dos cargas de 1mC y -2mC respectivamente. Hallar la fuerza sobre una carga de 2mC cuando se coloca en el punto C(0,-4). Dar el módulo y los ángulos con los ejes. Las distancias se expresan en metros.

6) En el interior de una habitación hay tres cargas de 3, -8, y 5 microcoulombios respectivamente. Hallar el flujo del vector campo eléctrico a través de las paredes, techo y suelo de la habitación.

7) En una caja cúbica hay tres bolas de 2, 5 y 10 kg respectivamente. Hallar el flujo del campo eléctrico a través de las paredes de la caja. Hallar el flujo en el caso de una caja cilíndrica.

8) Supóngase fijo un objeto de masa $10^{20}kg$. A 2000 km de distancia, hay otro con masa $10^{11}kg$. a) Calcular la fuerza eléctrica sobre la segunda masa. b) Hallar el módulo del campo eléctrico en el sitio ocupado por la segunda masa. c) Hallar el trabajo necesario para transportar la segunda masa 10 m adicionales respecto de la primera masa. d) Si fueran dos esferas que se acercan cada una 10 m, averigua el trabajo necesario para acerlas esa distancia (en total 20 m). Nota: en los apartados c) y d) indicar si el trabajo lo realiza el sistema formado por las dos masas o un agente exterior al sistema.

9) Un objeto de 100kg de masa está en el origen de un sistema de ejes ortogonales. En el punto (2,2,4) hay un objeto de 1000 kg y en el (-3,-2,4) hay un objeto de 500 kg. Hallar la energía potencial del sistema. Las distancias están expresadas en metros.

10) (PAU-selectividad) Un satélite artificial describe una trayectoria circular de radio 7430 km alrededor de la Tierra. Hallar: a) La velocidad orbital. b) Período. c) Número de revoluciones por día. Datos: $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}kg$.

11) (PAU-selectividad) Calcular la altura sobre la superficie de la Tierra que hay que elevar un litro de agua para que su peso se reduzca en un 10 por ciento, de forma que sea el mismo que el de 0.9 litros en la superficie. Indica el valor en el punto calculado del campo gravitatorio. Dato: $R_T = 6370km$.

12) Determinar la velocidad, aceleración y período de un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Luna a una altura de

300km por encima de su superficie. $R_L = 1700\text{km}$, $M_L = 7.4 \cdot 10^{22}\text{kg}$.

13) En un laboratorio sujeto a la gravedad, una partícula cargada de masa $4 \cdot 10^{-9}\text{g}$ permanece en reposo en un campo eléctrico y dirigido hacia arriba. El campo se produce por medio de dos placas cargadas, paralelas, indefinidas y separadas 1cm. La diferencia de potencial entre las placas es de 20000V. Hallar la carga de la partícula. Hallar la aceleración que experimenta al invertirse el sentido del campo. Todo el sistema se encuentra en el vacío.

14) Dos cargas iguales positivas de 10 microculombios se encuentran en (0,0) y (10,0), donde las coordenadas están dadas en centímetros. Determinar el campo y el potencial en el punto (5,5).

15) Dos cargas iguales positivas de 1 picoculombio están situadas en dos puntos A y B, separados 5 cm. Determinar el módulo del campo eléctrico en un punto M tal que MA=3cm y MB=4 cm. Calcular también el potencial electrostático. Si se cambia el signo de una de las cargas. ¿Cómo cambian los resultados anteriores?

16) Hallar el campo creado en un punto interior de la región comprendida entre dos superficies planas, paralelas e indefinidas, uniformemente cargadas con densidad de carga constante, en los siguientes supuestos: a) las dos cargas son negativas, b) las dos cargas son positivas, c) una es positiva y otra es negativa.

17) Una carga positiva de 3 nanoculombios se coloca distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio 15 cm. Hallar el trabajo realizado al trasladar una carga positiva de 0.4 nanoculombios desde 40 cm hasta 100 cm, medidos desde el centro de la esfera.

18) En dos puntos A y B separados una distancia de 1 metro, se fijan dos cargas de 0.1 nC y 0.2nC, respectivamente. a) Si se deja libre una carga de 5 microculombios en el punto C, situado en el segmento AB, a 0.2 metros de A, indica hacia donde se moverá esta nueva carga. b) Calcular el trabajo necesario para llevar la carga anterior desde C hasta D, situado en el segmento AB a 0.8 metros de A.

19) Se tienen dos cargas puntuales de 2 y -5 microculombios, respectivamente, colocadas a una distancia de 10 cm en el vacío. Calcular el campo y potencial a 20 cm en línea recta, del lado exterior de la positiva. Indica

en qué punto de dicha recta se anula el potencial.

20) Tres partículas cargadas, A, B, y C, poseen coordenadas, respectivamente, $A(2/3,0)$, $B(0,0)$ y $C(0,1)$, con las distancias expresadas en cm. C ejerce una fuerza sobre B de 6 micronewtons. a) Calcular la fuerza que A ejerce sobre B. b) Calcular la fuerza neta ejercida por A y C sobre B, así como el ángulo que esta fuerza forma con el eje vertical.

21) En los vértices de un triángulo equilátero de 2m de lado se colocan 3 cargas iguales en valor absoluto (de 2.5 picoculombios). Una es positiva y se coloca en el vértice A, y dos negativas en los restantes vértices B y C. Se pide: a) Calcular la fuerza total en el baricentro del triángulo (punto P) en el que hay que se coloca una carga de 10 femtoculombios. b) Si se sustituye la carga en A por otra negativa del mismo valor absoluto, explica razonadamente como cambia la respuesta de a). c) Calcular el potencial eléctrico en P en los casos a) y b).

22) En el centro de un cuadrado, en cuyos vértices se hallan cargas iguales de 9 microculombios, se coloca una carga negativa. Determinar el valor numérico de la carga si la fuerza neta que actúa sobre cada carga es cero.

23) En tres vértices de un cuadrado de 1m de lado hay cargas positivas de 10 microculombios. Suponiendo que se encuentra en el vacío, calcular: a) La intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice. b) El trabajo necesario para llevar una carga negativa de 5 microculombios desde el cuarto vértice hasta el centro del cuadrado.

24) Hallar el trabajo necesario para trasladar 3 cargas de 1,2, y -4 microculombios, en el vacío, desde el infinito hasta los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

25) Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a 200 km de altura. Hallar la velocidad de giro, el período, la energía potencial y la energía cinética. Masa de la Tierra: $5.98 \cdot 10^{24} \text{kg}$. Masa del satélite: 200kg. Radio de la Tierra: 6370km. $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

26) Hallar la altura sobre la superficie terrestre a la que debe situarse un satélite artificial de masa m, en el plano del Ecuador, para que permanezca estacionario sobre un punto determinado de la Tierra. Tomar el radio terrestre como 6400km.

27) En el vacío, tres cargas positivas de 10 nanoculombios se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Hallar el campo en el vértice de un tetraedro que tiene como base dicho triángulo.

28) Entre dos placas paralelas e infinitas se encuentra el vacío. Supongamos que hay un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo, de valor 1000N/C. Un electrón entra en el espacio entre placas con una velocidad de 7×10^6 m/s, paralela a las placas. Hallar la ecuación de la trayectoria del electrón. Datos: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$, $e = q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$. Despreciar los efectos gravitatorios.

29) Una carga positiva de 6 microculombios se encuentra en el origen de coordenadas. a) Calcular el potencial a una distancia de 4m. b) Hallar el trabajo que se realiza al traer otra carga de 2 microculombios desde el infinito hasta ese punto. c) Calcular la energía potencial de dicha carga en esa posición.

30) Si situamos una carga de 2 microculombios en el origen de coordenadas, encontramos que experimenta una fuerza de 0.8 milinewtons en el sentido positivo del eje OX. a) Hallar el valor y sentido del campo eléctrico en ese punto. b) Hallar la fuerza que se ejercería en dicho punto sobre una carga de -6 microculombios.

31) En 3 vértices de un cuadrado de 1 m de lado hay una carga positiva de 10 microculombios. Suponiendo que el sistema se encuentra en el vacío, calcular: a) La intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice. b) El trabajo necesario para llevar una carga eléctrica de 5 microculombios desde ése cuarto vértice hasta el centro del cuadrado. c) Responder a los apartados a) y b) si en lugar del vacío estamos en un medio dieléctrico cuya permitividad dieléctrica relativa es 4 veces la del espacio vacío.

32) La masa de la Tierra es de $5.98 \cdot 10^{24} \text{kg}$ y su radio es de 6370km. Sabiendo el valor de la constante de gravitación universal, se pide: a) Hallar la energía potencial, al nivel del suelo, de un objeto de 1 kg de masa. b) Calcular la variación de energía potencial cuando el objeto se eleva 10 m. c) Comparar este resultado con el que se obtiene aplicando la expresión usual $\Delta E_p = mg\Delta h$.

33) Un campo eléctrico constante de intensidad 1N/C se aplica en dirección horizontal de izquierda a derecha. En su interior se introduce un

hilo, que actúa como péndulo simple, del que suspendemos una masa de 10 microgramos, con una carga de 0.2 miliculombios. Determinar el ángulo de inclinación del hilo respecto a la vertical y la tensión que soporta el hilo en la nueva posición de equilibrio.

34) Una carga de +1 nanoculombio se coloca en el origen de coordenadas. Otra carga, de valor -3 nanoculombios se coloca en el punto $x=1\text{m}$. Hacer un esquema o dibujo del problema. a) Dar una expresión para el potencial eléctrico, V , en un punto x , comprendido entre las dos cargas, y dibujar una gráfica de V como función de x , para los siguientes valores de x : 20, 30, y 40 cm. b) Dentro de ese mismo intervalo de valores, $0 < x < 1$, hallar el punto en el que el potencial es nulo, comparando el resultado con lo que se puede apreciar en la gráfica anterior.

35) Determinar la intensidad del campo eléctrico y el potencial en el punto (0,0), creado por una carga eléctrica de valor -8 microculombios, situada en el punto (0,2).

36) Una masa m es obligada a desplazarse entre Saturno y uno de sus satélites, Jano, según la recta que une sus centros. Si es R la distancia de la masa al centro de Saturno en cada instante, determinar:

a) Energía potencial de m en función de R .
b) Suponiendo que la órbita descrita por Jano sea circular, halla su velocidad orbital.

c) Halla el período de revolución de Jano.

Datos: Masa de Saturno= $M_S = 5.076 \cdot 10^{26}\text{kg}$, masa de Jano= $M_J = 14.6 \cdot 10^{18}\text{kg}$, distancia centro a centro entre Jano y Saturno: $d=159000\text{ km}$, masa $m=10^6\text{kg}$.

37) Explica la razón de la incorrección de la siguiente frase: “La Luna, en movimiento de rotación alrededor de la Tierra, está en equilibrio porque la fuerza que actúa hacia afuera debida a su movimiento equilibra exactamente la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella”.

38) En un campo eléctrico, el punto A se encuentra a un potencial de 6V, y el B a un potencial de 10 V. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Para trasladar una carga puntual de 1 C desde A hasta B es necesario realizar un trabajo de 4J.

b) Las cargas positivas tienen más energía potencial en B que en A.

c) Las cargas positivas se mueven espontáneamente desde A hacia B.

d) El campo eléctrico es mayor en B que en A.

39) La masa de Júpiter es 318.36 veces la masa de la Tierra, y su radio es 11.14 veces mayor que nuestro planeta. Halla el peso de una persona en la Tierra y compara su valor el peso en Júpiter, si la masa de dicha persona es de 70kg.

40) Hallar el valor de Q , en función de q , para que el potencial eléctrico generado por 4 cargas sea nulo en el origen de coordenadas, si se encuentran colocadas de la siguiente forma: hay una carga $+Q$ en $(-a,0)$, una carga $+q$ en $(0,-b)$ y una carga $-q$ en $(0,+b)$, hay una carga $-2q$ en el punto $(a,0)$.

Termodinámica (problemas)

1) Calcular la cantidad de hielo a -20°C que tenemos que introducir en 0.25kg de agua a 20 grados Celsius para que la temperatura final sea de 0 grados Celsius, suponiendo que todo el hielo se funde. El calor de fusión del hielo es de 3350J/kg, el calor específico del hielo vale 2302J/kg $^{\circ}\text{C}$, calor específico del agua 4186J/kg $^{\circ}\text{C}$.

2) Un gramo de agua se convierte en 1.671 litros de vapor cuando hierve a la presión de 1 atm. El calor de vaporización es de 2256J/kg a dicha presión. Hallar el trabajo exterior y el incremento de energía interna.

3) Halla a qué temperatura en grados Celsius y grados Fahrenheit la temperatura es la misma en valor numérico.

4) Cuando 100 g de aluminio se calienta hasta 100 grados centígrados y se introducen en 500 g de agua a 18.3 grados en la misma escala, la temperatura final de equilibrio es de 21.7 $^{\circ}\text{C}$. Halla el valor del calor específico del aluminio.

5) Un mol de nitrógeno se expande a temperatura ambiente (tomada 20 $^{\circ}\text{C}$) desde 10 a 20 litros. Hallar el calor suministrado para mantener el gas a temperatura constante.

6) Una cierta cantidad de aire se expande adiabática y cuasiestáticamente desde una presión inicial de 2atm y volumen 2 litros a temperatura ambiente (20 $^{\circ}\text{C}$) hasta dos veces su volumen original. Hallar la presión y temperatura final. Para el aire, $\gamma = 1.4$.

7) Un mol de oxígeno gaseoso se calienta desde la temperatura ambiente y presión de 1atm hasta 100°C. Si el volumen permanece constante durante el proceso, halla el calor que es necesario suministrar en el proceso. Si la presión permanece constante, hallar el trabajo realizado. Suponer que el oxígeno es un gas ideal y que $C_V = 5/2nR$.

8) Cierta cantidad de un gas ideal o perfecto se expande reversible e isotérmicamente a 300K, triplicando el volumen inicial y produciendo un trabajo de 1kWh. Calcular los moles que realizan esta expansión.

9) Hallar el trabajo, en julios, realizado por un litro de agua al congelarse a presión atmosférica normal. La densidad del agua a cero grados celsius es de $d = 0.00087g/cm^3$. La densidad del hielo a esa misma temperatura vale $d' = 0.91674g/cm^3$.

10) Calcular la altura desde la que hay que dejar caer una casa de hielo para que, si toda la energía cinética se transforma en calor en el choque contra el suelo, se fundiese completamente. Dato: $L_f = 80cal/kg$.

11) Calcular la variación de energía interna que tiene lugar cuando calentamos 1 kg de hielo de 0 a 4 grados celsius, a presión normal de 1atm. La densidad del hielo la tomamos igual a $d = 0.917g/cm^3$, su calor de fusión vale 80cal/kg, mientras que la densidad del agua a 4 grados celsius es la usual de $1g/cm^3$.

12) Hallar el cambio de energía interna que experimenta 100 g de helio al pasar de 0 a 100 grados celsius en una transformación isóbara.

13) Se calienta, a volumen constante, cierta cantidad de un gas ideal desde 27°C hasta 127°C, para lo que se necesitan 500 cal. Calcula el cambio en la energía interna del gas. Seguidamente, se expande el gas en forma reversible, y se mantiene constante la temperatura a 127°C, hasta que su volumen se duplica. Calcular, para este último proceso, el trabajo por mol y el calor por mol intercambiado por el gas con el medio.

14) Hallar cuántos cubitos de hielo deben añadirse a una vasija que contiene 1 kg de agua a 100 grados celsius, para que la mezcla alcance una temperatura final de 40 grados celsius. Suponer que cada cubito de hielo es de 20 gramos y la vasija está aislada perfectamente. El calor de fusión del hielo es de 80cal/kg.

15) UN nadador consume 120000 julios de energía en una carrera de 50 metros. Tres cuartas partes de la energía se pierden en forma de calor y el resto se disipa por sus brazos y piernas realizando trabajo mecánico. Hallar: a) La fuerza media que se opone a su avance. b) La elevación de temperatura del agua de la piscina, cuyo volumen es de 10 metros cúbicos.

16) Hallar la velocidad a la que debemos lanzar un proyectil de plomo para que al aplastarse sobre un obstáculo de cemento se fundiera totalmente por efecto del choque. Se supone que el 80 por ciento del calor desprendido es absorbido por el proyectil y que su temperatura inicial es de 20 grados celsius. Calcular la altura a la que debe dejarse caer libremente dicho proyectil para que se produzca el mismo proceso. El calor específico del plomo es de $0.031\text{cal/g}^\circ\text{C}$, y el calor de fusión del plomo 5.47cal/g . La temperatura de fusión del plomo es de 327°C .

17) Hallar la cantidad de calor que hace falta suministrar para duplicar la temperatura en una transformación isócora de 100 l de hidrógeno a 3 atm de presión y 300K de temperatura.

18) Hallar el calor que se necesita para pasar 1g de hielo totalmente a vapor de agua, a presión de 760mmHg. Indicar el aumento de volumen que experimenta el hielo. Hallar el valor del trabajo realizado por este aumento de volumen. La densidad del hielo en las condiciones del problema es de 0.92g/cm^3 .

19) El aire de una habitación de $5 \times 5 \times 4$ metros se dilata a presión constante (760mmHg), y se escapa por las ventanas al pasar su temperatura de 15 a 20 grados celsius. Se considera el aire como un gas ideal perfecto. Deseamos calcular: a) El volumen de aire que escapa. b) el trabajo que realiza en la expansión. c) El volumen que ocuparía todo el aire de la habitación (el que queda y el que escapa) en las condiciones normales de presión y temperatura. d) La cantidad de calor absorbido al dilatarse en las condiciones arriba expresadas y el aumento de su energía interna. $C_F = 7\text{cal/molK}$.

20) Hallar el calor necesario para duplicar el volumen en una transformación isóbara de 50 L de oxígeno que se encuentran a 27°C y 2 atm de presión. Calcular la temperatura final y la variación de energía interna.

21) Se tiene un gramo de nitrógeno a 0°C bajo la presión normal. Calcular: a) El volumen ocupado por el gas. b) Se calienta el gas hasta 100 grados celsius a presión constante (calor molar a presión constante= $7\text{cal/mol}^\circ\text{C}$).

Hallar el calor que se necesita y el volumen final. c) A partir del mismo estado inicial, se calienta de nuevo hasta 100 grados celsius a volumen constante. Hallar la cantidad de calor requerido en este caso y la presión final. d) Interpretar físicamente la diferencia observada entre las respuestas a las cuestiones b) y c).

22) Un estudiante de termodinámica, de 70 kg de peso, quiere poder subir en un ascensor (200 kg) hasta una altura de 15 m, simplemente con la energía interna acumulada por 18 g de agua, cuando pasa de líquido a 0 grados celsius, a vapor de agua a 100 grados celsius, y presión normal atmosférica. Razona si tal deseo es matemáticamente y físicamente posible. Despreciar la pequeña variación de volumen del agua líquida al pasar de 0 a 100 grados celsius. El calor de vaporización del agua vale 539cal/g.

23) En un calorímetro de latón de 180 g de masa hay agua a 20 grados celsius. Se colocan 80 gramos de hielo fundente en el agua y, cuando se alcanza el equilibrio térmico, quedan 15 gramos de hielo sin fundir. Calcular la masa de agua a 20 grados celsius que contenía el calorímetro y la masa de agua a 50 grados celsius que se debe añadir para que la temperatura final sea de 12°C. El calor específico del latón es de 0.1Kcal/kg°C.

24) Un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 50 gramos, contiene 400 gramos de agua y 100 g de hielo a 0°C. Se introducen en él 100 g de vapor de agua a 100°C. Hallar la temperatura final de la mezcla.

25) Calcular la variación de energía interna que experimentan 100 g de helio al pasar de 0 a 100 grados celsius, en una transformación isóbara.

26) Se realiza una transformación isoterma de un gas perfecto a la temperatura de 300K, desde un volumen de 10 L y presión 5 atm, hasta que se reduce el volumen a la mitad. Calcular: a) La presión final. b) El número de moles. c) El calor y el trabajo puestos en juego en la transformación.

27) Se expansiona adiabáticamente un gas perfecto diatómico, desde un volumen de 2 L y 2 atm a 300 K, hasta que su temperatura final sea la cuarta parte de la inicial. Calcular: a) Volumen y presión finales. b) Trabajo y variación de energía interna en la transformación.