$A\hbar = mc^3$ (Thoschei)
"Herramientas de la Física y Química"

The Strange Doctor and the another dimension

Multiverse of Madness

Contents

1 Matemáticas. 7

1.1 Trigonometría . . . 7
1.2 Trigonometría: extras . . . 11
1.3 Logaritmos . . . 12
1.4 Combinatoria . . . 13
1.5 Funciones de trigonometría hiperbólica . . . 14
1.6 Números complejos . . . 15
1.7 Límites y derivadas . . . 15
1.8 Integrales elementales . . . 17
1.9 Desarrollos en serie de Taylor . . . 20
1.10 Fórmulas de Geometría elemental . . . 22
1.10.1 Volúmenes . . . 22
1.10.2 Otros volúmenes de cuerpos exóticos . . . 23
1.11 Cónicas . . . 23
1.12 Cuádricas(simplificadas) . . . 24
1.13 Espacios vectoriales . . . 26
1.14 Matrices, determinantes y más allá . . . 27
1.14.1 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales . . . 29
1.14.2 Geometría del espacio euclidiano 3d . . . 30
1.14.3 Rectas y planos en el espacio 3d . . . 32
1.14.4 Paralelismo y perpendicularidad . . . 32
1.14.5 Ángulos entre rectas y planos . . . 33
1.14.6 Distancias, áreas, volúmenes . . . 33
1.14.7 Posiciones relativas en el espacio . . . 35
1.14.8 Movimientos y semejanzas en el espacio . . . 35
1.15 Estadística y probabilidad . . . 38
1.15.1 Variable aleatoria discreta . . . 39
1.15.2 Variable aleatoria continua . . . 39
1.15.3 Algunas distribuciones de probabilidad habituales . . . 40
1.16 Errors and measurements . . . 44
1.17 Linear fits, least squares . . . 48
1.18 Ecuaciones y funciones . . . 50
1.19 Teoremas clásicos del cálculo infinitesimal y de folding . . . 52
1.20 Números y potencias . . . 54
1.21 Polinomios y gráficas de funciones simples . . . 57
1.22 Combinatoria y triángulo de Pascal-Tartaglia . . . 57
1.23 Aplicaciones y funciones. Estructuras algebraicas . . . 59
1.24 Probabilidad . . . 60
1.25 Progresiones y sucesiones . . . 62
1.26 Geometría plana resumida . . . 63

1.27 Algunas funciones especiales . . . 64
1.27.1 Distribuciones y funciones delta . . . 64
1.27.2 Función zeta de Riemann . . . 67
1.27.3 Función de Lambert . . . 68
1.28 Criterios de convergencia de series y productos . . . 68

2 Física **71**
2.1 Símbolos matemáticos . . . 72
2.2 Escalares, vectores y más allá . . . 74
2.3 El movimiento . . . 79
2.3.1 Ejercicios . . . 82
2.3.2 Ejercicios(II) . . . 83
2.4 Cinemática . . . 87
2.4.1 M.R.U. . . . 88
2.4.2 M.R.U.A. . . . 89
2.4.3 Composición de 2 MRU . . . 93
2.4.4 Tiro parabólico horizontal . . . 94
2.4.5 Tiro parabólico oblícuo . . . 95
2.4.6 Composición de 2/3 MRUA . . . 97
2.4.7 Movimiento circular uniforme (MCU) . . . 97
2.4.8 Movimiento circular uniformemente acelerado(MCUA) . . . 99
2.5 Dinámica . . . 100
2.5.1 El movimiento armónico simple (MAS) . . . 105
2.5.2 Fuerzas de rozamiento . . . 107
2.5.3 Fuerzas centrales y fuerzas conservativas . . . 108
2.5.4 Listado de fuerzas relevantes en Física . . . 109
2.5.5 Aplicaciones de leyes de Newton: ejercicios . . . 111
2.6 Dinámica de rotación . . . 123
2.7 Trabajo, energía y potencia . . . 124
2.8 Sistemas de partículas . . . 127
2.9 Fuerza y campo. Potencial . . . 129
2.10 Campo gravitacional y eléctrico . . . 129

3 Química **133**
3.1 Conceptos básicos de Química . . . 133
3.1.1 Moles y masa . . . 133
3.1.2 Número de partículas y número de Avogadro . . . 134
3.1.3 Masa y partículas . . . 134
3.1.4 Leyes de los gases ideales . . . 134
3.1.5 Disoluciones . . . 136
3.1.6 Propiedades coligativas y otras propiedades . . . 138
3.1.7 Estequiometría y ecuaciones químicas . . . 140
3.1.8 Tipos de reacciones principales . . . 141
3.2 Físico-química atómica . . . 143
3.2.1 Teoría cuántica básica . . . 143
3.2.2 Modelo de Bohr . . . 144
3.2.3 Modelo mecanocuántico . . . 145
3.3 Enlace químico y configuraciones electrónicas . . . 147
3.3.1 Números cuánticos . . . 147
3.3.2 Enlace químico . . . 148
3.3.3 Propiedades periódicas . . . 149

3.3.4 Fuerzas intermoleculares . . . 149
3.4 Termoquímica (1º y 2º Bachillerato) . . . 150

A Ecuaciones favoritas(I) 155

B Ecuaciones favoritas(II) 157

C Multivectores, polivectores,. . . 161
C.1 Física multitemporal y multidimensional . . . 162

D Ejercicios avanzados 163
D.1 Polea con cuerda masiva . . . 163

E Vector cross product 165

F El SI: magnitudes y dimensiones 169
F.1 Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros. . . . 169
F.2 Magnitudes base en el S.I. . . . 170
F.3 Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones . . . 173
F.4 Otras constantes universales . . . 175
F.5 Potencias de 10 y notación científica . . . 176
F.6 Cifras significativas (c.s.) . . . 176

G Ejercicios-actividades de la E.S.A. 177
G.1 Control térmico de satélites . . . 177
G.2 Despegue del Ariane . . . 177
G.3 Rosetta . . . 177
G.4 ¿Cuánto ruido hace un cohete? . . . 178
G.5 Radar imagen de Envisat.ERS . . . 178
G.6 Universo y longitudes de onda . . . 178
G.7 Amaneceres en la ISS . . . 179
G.8 Ariane 5 grande, ¿por qué? . . . 179
G.9 Basura espacial . . . 179
G.10 XMM-Newton . . . 179
G.11 Velocidad de rotación de la Tierra . . . 179
G.12 Eliminar gases en el espacio . . . 180
G.13 Química espacial: Bonus de astroquímica . . . 180
G.14 ISS y ATV: encuentro en el espacial . . . 180
G.15 Misión a Marte . . . 181
G.16 Batería LiIon . . . 181
G.17 Marte 3D . . . 181
G.18 SMART-1 . . . 182
G.19 Reacciones químicas en un cohete espacial . . . 182
G.20 Vuelos parabólicos . . . 182
G.21 Fotón-M y microgravedad . . . 183
G.22 Envisat y mantenimiento orbital . . . 183
G.23 Varias masas con cuerdas arrastrándose por plano horizontal . . . 184
G.24 Varias masas con cuerdas levantadas por fuerza vertical . . . 184
G.25 Planos inclinados con dos ángulos vs. un ángulo . . . 184
G.26 El eco y el pozo de los deseos . . . 184
G.27 Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4 . . . 185
G.27.1 Ecuaciones de primer grado . . . 185

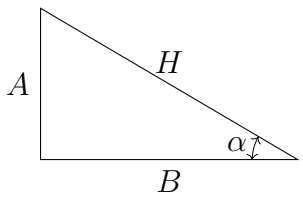
G.27.2 Ecuación de segundo grado 185
G.27.3 Ecuación de tercer grado(cúbica) 186
G.27.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica) 190
G.28 Espacios vectoriales 193

Chapter 1

Matemáticas.

1.1 Trigonometría

Funciones trigonométricas básicas. Sea un triángulo rectángulo $A\overset{\triangle}{B}H$, $\triangle ABH$, donde A, B son los catetos y H la hipotenusa, de forma que los catetos subtienden un ángulo α.



Entonces:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{H} \tag{1.1}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{H} \tag{1.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{B} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{co\,sec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{H}{A} \tag{1.4}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{H}{B} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{co\,tan}\alpha = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A} \tag{1.6}$$

Razones trigonométricas de ángulos más importantes del primer cuadrante (el resto se sacan por simetría mediante circunferencia goniométrica):

Equivalencia entre radianes y grados

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400^g$$

$\varphi(°, rad)$	sin	cos	tan
$0, 0$	0	1	0
$30, \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45, \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60, \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90, \pi/2$	1	0	∞

Identidades trigonométricas notables:

Teorema fundamental

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{co}\sec^2 x$

Ángulo suma-diferencia: razones

$$\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y \tag{1.7}$$
$$\cos(X \pm Y) = \cos(X)\cos(Y) \mp \sin(X)\sin(Y) \tag{1.8}$$
$$\tan(X \pm Y) = \frac{\tan(X) \pm \tan(Y)}{1 \mp \tan(X)\tan(Y)} \tag{1.9}$$
$$\cot(X \pm Y) = \frac{\cot(X)\cot(Y) \mp 1}{\cot(X) \mp \cot(Y)} \tag{1.10}$$

Razones ángulo doble

$$\sin(2X) = 2\sin(X)\cos(X) \tag{1.11}$$
$$\cos(2X) = \cos^2(X) - \sin^2(X) \tag{1.12}$$
$$\tan(2X) = \frac{2\tan(X)}{1 - \tan^2(X)} \tag{1.13}$$

Razones ángulo mitad

$$\sin(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{2}} \tag{1.14}$$
$$\cos(X/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos(X)}{2}} \tag{1.15}$$
$$\tan(X/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(X)}{1 + \cos(X)}} \tag{1.16}$$

Identidades útiles

$$\sin^2 X = \frac{1 - \cos(2X)}{2} \tag{1.17}$$
$$\cos^2 X = \frac{1 + \cos(2X)}{2} \tag{1.18}$$

Identidades útiles(II)

$$\sin(X)\sin(Y) = \frac{\cos(X-Y)-\cos(X+Y)}{2} \tag{1.19}$$
$$\cos(X)\cos(Y) = \frac{\sin(X+Y)-\sin(X-Y)}{2} \tag{1.20}$$
$$\sin(X)+\sin(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{1.21}$$
$$\sin(X)-\sin(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{1.22}$$
$$\cos(X)+\cos(Y) = 2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2} \tag{1.23}$$
$$\cos(X)-\cos(Y) = 2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2} \tag{1.24}$$

Identidades ángulo triple

$$\sin(3X) = 3\sin(X)-4\sin^3(X) \tag{1.25}$$
$$\cos(3X) = 4\cos^3(X)-3\cos(X) \tag{1.26}$$
$$\tan(3X) = \frac{3\tan(X)-\tan^3(X)}{1-3\tan^2(X)} \tag{1.27}$$
$$\sin^3(X) = \frac{3}{4}\sin(X)-\frac{1}{4}\sin(3X) \tag{1.28}$$
$$\cos^3(X) = \frac{3}{4}\cos(X)+\frac{1}{4}\cos(3X) \tag{1.29}$$
$$\tag{1.30}$$

Identidades ángulo cuádruple

$$\sin(4X) = 4\sin(X)\cos(X)-8\sin^3(X)\cos(X) \tag{1.31}$$
$$\cos(4X) = 8\cos^4(X)-8\cos^2(X)+1 \tag{1.32}$$
$$\tan(4X) = \frac{4\tan(X)-4\tan^3(X)}{1-6\tan^2(X)+\tan^4(X)} \tag{1.33}$$
$$\sin^4(X) = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2X)+\frac{1}{8}\cos(4X) \tag{1.34}$$
$$\cos^4(X) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2X)+\frac{1}{8}\cos(4X) \tag{1.35}$$
$$\tag{1.36}$$

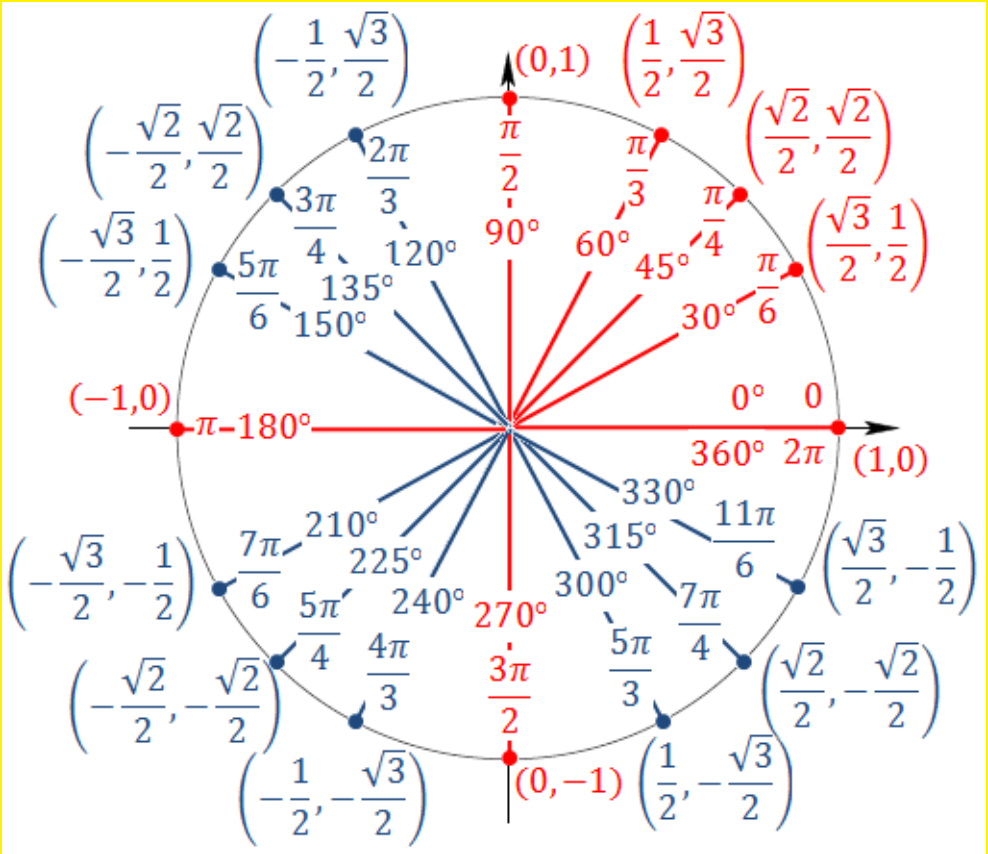
Identidades ángulo quíntuple

$$\sin(5X) = 5\sin(X) - 20\sin^3(X) + 16\sin^5(X) \tag{1.37}$$
$$\cos(5X) = 16\cos^5(X) - 20\cos^3(X) + 5\cos(X) \tag{1.38}$$
$$\tan(5X) = \frac{\tan^5(X) - 10\tan^3(X) + 5\tan(X)}{1 - 10\tan^2(X) + 5\tan^4(X)} \tag{1.39}$$
$$\sin^5(X) = \frac{5}{8}\sin(X) - \frac{5}{16}\sin(3X) + \frac{1}{16}\sin(5X) \tag{1.40}$$
$$\cos^5(X) = \frac{5}{8}\sin(X) + \frac{5}{16}\sin(3X) + \frac{1}{16}\sin(5X) \tag{1.41}$$

Identidad de Euler y fórmula de Moivre

$$e^{iX} = \cos(X) + i\sin(X) \tag{1.42}$$
$$e^{inX} = \cos(nX) + i\sin(nX) = (\cos(X) + i\sin(X))^n \tag{1.43}$$

Circunferencia mnemotécnica



1.2 Trigonometría: extras

Teorema del seno

En cualquier triángulo $A\hat{B}C$, de ángulos A, B, y C, con lados opuestos a, b, c, se cumple que:

$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}} \tag{1.44}$$

La demostración se simplifica enormemente usando el álgebra vectorial, y el producto vectorial. Basta con ver que el área del triángulo $A\hat{B}C$ es 1/2 del módulo del producto vectorial de cualesquiera de los lados con mismo origen, e.g., $\vec{AB}, \vec{AC}$, $\vec{BC}, \vec{BA}$ o bien $\vec{CA}, \vec{CB}$.

Teorema del coseno

En cualquier triángulo $A\hat{B}C$, de ángulos A, B, y C, con lados opuestos a, b, c, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{1.45}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \tag{1.46}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{1.47}$$

La demostración se simplifica enormemente usando el álgebra vectorial, y el producto escalar. Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, entonces se tiene que

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, y multiplicando escalarmente consigo mismo este vector resulta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

- Mediana: recta que une un vértice con el mpunto medio del lado opuesto.
- Baricentro: punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.
- Altura: recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.
- Ortocentro: punto de intersección de las 3 alturas de un triángulo.
- Mediatriz: recta perpendicular a un lado y que pasa por su punto medio.
- Circuncentro: punto de intersección de las 3 mediatrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo.
- Bisectriz: recta que pasa por un vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.
- Incentro: punto de intersección de las 3 bisectrices de un triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Otras fórmulas relevantes para triángulos: la fórmula de Herón

$$A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{1.48}$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} \tag{1.49}$$

$$a = b\cos C + c\cos B \tag{1.50}$$
$$b = a\cos C + c\cos A \tag{1.51}$$
$$c = a\cos B + b\cos A \tag{1.52}$$

1.3 Logaritmos

Logaritmo: propiedades

$$y = \log_b(x) \longleftrightarrow b^y = x \tag{1.53}$$
$$\text{Dom (f=}\log_b) = (0, \infty) \tag{1.54}$$
$$\log_e = \ln \quad \log_{10} = \log \tag{1.55}$$
$$\log_b(0^+) = -\infty \tag{1.56}$$
$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \tag{1.57}$$
$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1 \quad \log_b b^\alpha = \alpha \tag{1.58}$$
$$\log_b(XY) = \log_b X + \log_b(Y) \quad \log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b(X) - \log_b(Y) \tag{1.59}$$
$$\log_b x^y = y\log_b x \tag{1.60}$$

1.4 Combinatoria

Factorial y coeficiente binomial

$$n! \equiv= n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.61}$$

Coeficiente binomial: propiedades

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1.62}$$

Binomio de Newton

$$(X+Y)^n = \binom{n}{0} X^n + \binom{n}{1} X^{n-1}Y + \binom{n}{2} X^{n-2}Y^2 + \\ + \binom{n}{3} X^{n-3}Y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1} XY^{n-1} + \binom{n}{n} Y^n$$

Multinomial

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k}$$

donde la suma comprende todos los enteros $n_1, \ldots, n_k$ tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Aproximación de Newton

$(1+X)^n = 1 + nX + \mathcal{O}(X^2)$ si $X << 1$.

1.5 Funciones de trigonometría hiperbólica

Definiciones

$$\sinh(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{2} \tag{1.63}$$

$$\cosh(X) = \frac{e^X + e^{-X}}{2} \tag{1.64}$$

$$\tanh(X) = \frac{\sinh(X)}{\cosh(X)} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \tag{1.65}$$

Algunas propiedades de funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1 \tag{1.66}$$

$$\sec\mathrm{h}^2 X + \tanh^2 X = 1 \tag{1.67}$$

$$\mathrm{co}\tanh^2(X) - \mathrm{cosech}^2(X) = 1 \tag{1.68}$$

$$\sinh(X \pm Y) = \sinh(X)\cosh(Y) \pm \cosh(X)\sinh(Y) \tag{1.69}$$

$$\cosh(X \pm Y) = \cosh(X)\cosh(Y) \pm \sinh(X)\sinh(Y) \tag{1.70}$$

$$\tanh(X \pm Y) = \frac{\tanh(X) + \tanh(Y)}{1 \pm \tanh(X)\tanh(Y)} \tag{1.71}$$

$$\mathrm{co}\tanh(X \pm Y) = \frac{\mathrm{co}\tanh(X)\mathrm{co}\tanh(Y) \pm 1}{\mathrm{co}\tanh(Y) \pm \mathrm{co}\tanh(X)} \tag{1.72}$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\sinh^{-1} X = \mathrm{Arg}\sinh(X) = \ln\left(X + \sqrt{1 + X^2}\right) \tag{1.73}$$

$$\cosh^{-1} X = \mathrm{Arg}\cosh(X) = \ln\left(X + \sqrt{-1 + X^2}\right) \tag{1.74}$$

$$\tanh^{-1} X = \mathrm{Arg}\tanh(X) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + X}{1 - X} \tag{1.75}$$

$$\tag{1.76}$$

1.6 Números complejos

Números complejos: $Z = x + yi$, con $i = \sqrt{-1}$. Propiedades:

$$|Z|^2 = \overline{Z}Z = Z^*Z = (X^2 + Y^2) \tag{1.77}$$
$$\overline{Z} = Z^* = X - Yi \tag{1.78}$$
$$|Z| = +\sqrt{X^2 + Y^2} \tag{1.79}$$
$$\varphi = \text{Arg Z} = \tan^{-1}\frac{Y}{X} \tag{1.80}$$
$$\overline{Z_1 \pm Z_2} = \overline{Z_1} \pm \overline{Z_2} \tag{1.81}$$
$$|\overline{Z}| = |Z| \tag{1.82}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad |z_2| \neq 0 \tag{1.83}$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.84}$$
$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \tag{1.85}$$

Forma polar de un número complejo

$$Z = X + Yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.86}$$
$$Z = re^{i\theta} \tag{1.87}$$
$$Z^n = r^n e^{in\theta} \tag{1.88}$$

Potencias y raíces de un número complejo

$$Z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Si $w^n = z$, entonces la raíz n-ésima de un número complejo es

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right],$$
$$\forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Logaritmo de un número complejo

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = r + i\theta + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z} \tag{1.89}$$

1.7 Límites y derivadas

Límite

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0/\text{si } 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite: versión métrica. Limit: metric definition

Let $M_1 = (A_1, d_1)$ and $M_2 = (A_2, d_2)$ be metric spaces.
Let c be a limit point of M_1.
Let $f : A_1 \to A_2$ be a mapping from A_1 to A_2 defined everywhere on A_1 "except possibly" at c.
Let $L \in M_2$.
$f(x)$ is said to tend to the limit L as x tends to c and is written $f(x) \to L$ as $x \to c$ or $\lim_{x \to c} f(x) = L$ with the following definition. Definition:
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : 0 < d_1(x, c) < \delta \implies d_2(f(x), L) < \epsilon$.
That is, for every real positive ϵ there exists a real positive δ such that "every" point in the domain of f within δ of c has an image within ϵ of some point L in the codomain of $f(x)$.

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ se define como

$$TVM(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivada

La derivada de la función es el límite cuando el intervalo de variación independiente se hace infinitesimal:

$$Df = \frac{df}{dx} = \partial_x f = \dot{f} = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si $f = g(x)^{h(x)}$, entonces:

1. Se toma logaritmos (e.g. en base neperiana).
2. Se derivan los dos lados.
3. Se despeja la derivada f'.
4. Se sustituye f por su valor.

Así, se tiene que:

$$(f^g)' = \frac{df(x)^{g(x)}}{dx} = g(x)f(x)^{g(x)-1}f(x)' + f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x)$$

Si $f = g = x$, se tiene que la derivada es $(f^g)' = x^x(1 + \ln(x))$. La derivada implícita de una función $F(x, y)$, donde $y = f(x)$. Se deriva de izquierda a derecha, teniendo en cuenta que $y = f(x)$ y $y' = df(x)/dx$. Se despeja y'. Fórmula para el caso de funciones inversas:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Algunas derivadas de funciones elementales:

$$f(x) = k = constante \to Df = 0 \tag{1.90}$$
$$D(f+g) \to D(f+g) = Df + Dg \tag{1.91}$$
$$\lambda \in \mathbb{R} \to D(\lambda f) = \lambda Df \tag{1.92}$$
$$f(x) = g(x)h(x) \to Df = Dg \cdot h + g \cdot Dh \tag{1.93}$$
$$f(x) = g(h(x)) \to Df = Dg(h(x))Dh \text{ (Regla de la cadena)} \tag{1.94}$$
$$f = \frac{g}{h} \to Df = \frac{Dg \cdot h - g \cdot Dh}{h^2} \tag{1.95}$$
$$f = x^n \to Df = nx^{n-1} \tag{1.96}$$
$$f = e^x \to Df = e^x \tag{1.97}$$
$$f = a^x \to Df = a^x \ln a \tag{1.98}$$
$$f = \log_a x \to Df = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \tag{1.99}$$
$$f = \sin(x) \to Df = \cos(x) \tag{1.100}$$
$$f = \cos(x) \to Df = -\sin(x) \tag{1.101}$$
$$f = \tan(x) \to Df = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{1.102}$$
$$f = \cot(x) \to Df = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{co}\sec^2 x \tag{1.103}$$
$$f = \sin^{-1} x \to Df = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.104}$$
$$f = \cos^{-1} x \to Df = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.105}$$
$$f = \tan^{-1} x =\to Df = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.106}$$
$$f = \sinh(x) \to Df = \cosh(x) \tag{1.107}$$
$$f = \cosh(x) \to Df = \sinh(x) \tag{1.108}$$
$$f = \tanh(x) \to Df = 1 - \tanh^2 x \tag{1.109}$$
$$f = \operatorname{co}\tanh(x) \to Df = 1 - \operatorname{co}\tanh^2(x) \tag{1.110}$$
$$f = \sinh^{-1}(x) \to Df = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1.111}$$
$$f = \cosh^{-1} x \to Df = \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}} \tag{1.112}$$
$$f = \tanh^{-1}(x) \to Df = \frac{1}{1-x^2} \tag{1.113}$$

Si las funciones en la lista anterior son compuestas, i.e. $x = g(x)$, basta sustituir $x = g(x)$ y multiplicar al final por la derivada de $g(x)$ en acuerdo con la regla de la cadena.

1.8 Integrales elementales

Primitiva de una función

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si y sólo si $DF = f$. Se dice que F es la integral indefinida de f, salvo una constante. Matemáticamente

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Regla de Barrow

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$. Se llama integral indefinida entre $x = a$ y $x = b$, al área bajo la curva de $F(x)$, que se simboliza como

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Regla de Barrow generalizada

Sea una función $F(x)$ tal que $DF = f$, y dos funciones $G(x)$ y $H(x)$ suficientemente diferenciables. Entonces:

$$J(x) = \int_{G(x)}^{H(x)} F(t)dt \to J'(x) = F'(H(x))H'(x) - F'(G(x))G'(x)$$

Las siguientes integrales indefinidas son útiles:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{1.114}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{1.115}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{1.116}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{1.117}$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C \tag{1.118}$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C \tag{1.119}$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan(x) + C \tag{1.120}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C \tag{1.121}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C = -\cos^{-1}(x) + C \tag{1.122}$$

Y las correspondientes integrales indefinidas compuestas similarmente se obtienen de ahí.

Métodos de integración elemental:

- Sustitución: $x = f(t)$, luego $dx = f'dt$ y $\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt$.
- Por partes: $\int udv = uv - \int vdu$. Regla ALPES: arcos, logaritmos, potencias, exponenciales y senos/cosenos para la elección primordial de u. Equivalentemente, la prioridad es (por este orden): funciones trascendentes, polinomios, exponenciales, trigonométricas.

La integración de funciones racionales es más complicada. Si

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

En general los grados de P, Q son distintos. Primero se logra tener el cociente más racional con grado menor, esto es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una vez con raíces menores, si las raíces son reales y distintas, del denominador $Q(x)$, siendo $Q(x) = 0$ para $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

produce integrales de tipo logaritmo neperiano. Si las raíces son múltiples, la descomposición para cada raíz múltiple del tipo

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)^n}$$

produce logaritmos y potencias. Finalmente, si hay raíces complejas, la descomposición para cada término complejo $Ax^2 + Bx + C = q(x)$ producirá

$$\frac{P}{Q} = \sum_j \frac{M_j x + N_j}{A_j x^2 + B_j x + C_j}$$

de forma que cada integral de tipo

$$I(x) = \int \frac{(Mx + N)dx}{Ax^2 + Bx + C}$$

es una integral que se descompondrá en un logaritmo más una arcotangente.

En el caso de integrales de funciones trigonométricas hay también algunas recetas:

- Aplicar fórmulas trigonométricas e identidades trigonométricas.
- Para funciones impares en el seno, se sustituye el coseno, para funciones impares en el coseno, se sustituye el seno. Para funciones pares en el seno y el coseno, se sustituye la tangente. En cualquier otro caso, se busca un cambio de tipo $t = \tan(x/2)$, de forma que

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \; dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Como el área de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es precisamente $A = \int_a^b f dx$, también, si $a \leq c \leq b$ se tiene que

$$\int_c^c f dx = 0$$

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx$$

$$\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$$

Si $f \leq g$ entonces

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

Además

$$|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$$

y también, si $m \leq f(x) \leq M$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Otros resultados:

- Cálculo del volumen por secciones. Si $A(x)$ es el área transversal de un volumen V, éste será
$$V = \int_a^b A(x)dx$$

- Área de la superficie de un cuerpo de revolución. Si $y = f(x)$ es diferenciable, entonces el área del cuerpo obtenido al girar la curva entre a y b alrededor del eje X será
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f')^2}dx$$

- Volúmenes de revolución. Si f es una función de x no negativa, el volumen al girar la función entre a y b alrededor del eje X viene dado por
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

- Volúmenes por método de capas. Sea $f(x)$ una función entre a y b que genera un área sobre el eje X. Entonces, el volumen generado al girar dicha área en torno al eje Y viene dado por
$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

- Cálculo de longitudes de curvas. Si $f(x)$ es diferenciable en $[a, b]$, entonces la longitud de la curva desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por
$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}dx$$

1.9 Desarrollos en serie de Taylor

Toda función diferenciable puede desarrollarse según la expresión de Taylor

Desarrollo de Taylor

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}|_{x=x_0}(x-x_0)^n$$

Al truncar el desarrollo de Taylor a orden n, el término del resto se puede escribir de dos formas:

- Resto de Lagrange: $R_n(x,a) = \dfrac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ con $t \in (x_0, x)$.

- Resto de Cauchy: $R_n(x,a) = \dfrac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-t)^n$ con $t \in (x_0, x)$.

Algunos desarrollos de Taylor en $x_0 = 0$ habituales:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$a^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^j}{j!} = 1 + x + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{15} + \frac{17x^5}{315} + \cdots$$

$$\sin^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$$

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdots \right)$$

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (j+1) x^j = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{3x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^n}{n}$$

Indeterminaciones en los límites:

$$\frac{k}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

1.10 Fórmulas de Geometría elemental

Áreas

Rectángulo: $A = bh$
Cuadrado: $A = L^2$
Paralelogramo: $A = bh$
Triángulo: $A = bh/2$
Trapecio de lados paralelos a y b, altura h: $A = \dfrac{(a+b)h}{2}$
Polígono regular de n lados de longitud L: $A = \dfrac{1}{4}nL^2 \mathrm{co}\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$
Círculo de longitud $L_c = 2\pi R = \pi d$: $A_C = \pi R^2$
Elipse de semiejes a, b: $A = \pi ab$
Cono circular recto de radio R y altura h con generatriz L: $A = \pi RL = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$
Cilindro circular recto de altura h y radio R: $A = 2\pi Rh$
Esfera de radio R: $A = 4\pi R^2$
Sector circular de ángulo θ: $A = R^2\theta/2$
Área de un hipercubo D-dimensional: $A_{D-1} = D!L^{D-1}$
El área del toro es igual a $A_{toro} = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo.

1.10.1 Volúmenes

Paralelepípedo u ortoedro: $V = abc = \det(OA, OB, OC)$
Hiperparalelepípedo, politopo rectangular de lados X_i: $V_n = \prod_i X_i$
Esfera 3d: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Esfera nd: $V_n = \dfrac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Esfera nd, área: $A_{d-1} = \dfrac{dV_n}{dR} = \dfrac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(n/2+1)}$
Cilindro recto 3d: $V = \pi R^2 h$
Huso o cuña esférica: $V = \dfrac{4 \cdot \pi R^3 n}{3 \cdot 360}$, $A = 4\pi R^2 n/360$.
Casquete esférico: $V = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$, $A = 2\pi Rh$.
Zona esférica: $V = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2 + 3r'^2\right)$, $A = 2\pi Rh$.
Pirámide de área A y altura h en 3d: $V = \dfrac{Ah}{3}$
Cono circular recto de radio R, altura h: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$. $A_c = \pi R(g + R)$.
Tronco de cono: $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$, $A = \pi\left[g(R + r) + R^2 + r^2\right]$.
Elipsoide de semiejes a, b, c: $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$
Volumen del hipercubo nd: $V = L^n$.
Volumen tetraedro 3d: $V_t = L^2\sqrt{2}/12$, área $A_t = L^2\sqrt{3}$.
Dónut o toro: $V_{toro} = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 Rr^2$, donde R es la distancia del centro del toro al centro del tubo, y r es el radio del tubo.

1.10.2 Otros volúmenes de cuerpos exóticos

Si tenemos un vector $(x_1, \cdots, x_n)$ en L_p con norma

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Entonces tenemos el volumen de las p-hiperesferas en nd:

$$V_n(p) = \frac{\left(2\Gamma(\frac{1}{p}+1)R\right)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$$

En particular $V_n^1 = \frac{2^n}{n!}R^n$ y $V_n^\infty = (2R)^n$, que coinciden con las fórmulas del politopo cruzado (cross-polytope) y el hipercubo (hypercube, n-cube). Otra posible generalización asimétrica: para números reales positivos, se define: $B_{p_1,\ldots,p_n} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_1|^{p_1} + \cdots + |x_n|^{p_n} \leq 1\}$. El volumen de esta bola particular se conoce desde tiempos de Dirichlet:

$$V(B_{p_1,\ldots,p_n}) = 2^n \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)}$$

1.11 Cónicas

Circunferencia y círculo

Circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan una distancia R (radio) de un punto llamado centro C. El diámetro es la mayor cuerda de una circunferencia $D = 2R$, y el perímetro de la circunferencia vale $2\pi R = \pi D = L_C$. Círculo es el espacio interior de una circunferencia y tiene un área igual a $A = \pi R^2$. La ecuación cartesiana de una circunferencia de radio R en el plano, con centro $C(x_0, y_0)$ es

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2} \tag{1.123}$$

y la ecuación polar es

$$x = R\cos\varphi \tag{1.124}$$
$$y = R\sin\varphi \tag{1.125}$$

Otra forma de escribir la ecuación es:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \quad C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \quad R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} \tag{1.126}$$

Además de la circunferencia, hay otras cónicas: la elipse la hipérbola y la parábola.

La elipse

Lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. La ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.127}$$

donde a es el semieje mayor de la elipse, b es el semieje menor de la elipse, y c la llamada semidistancia focal $c = (a + b)/2$. La excentricidad de una elipse es la cantidad $e = c/a$, y se cumple también que $b^2 + c^2 = a^2$. $0 < e < 1$.

La hipérbola

Lugar geométrico de todos los puntos en un plano cuya diferencia de distancias, a dos puntos fijos llamados focos, es constante. La ecuación cartesiana es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{1.128}$$

donde si definimos ahora la distancia semifocal $c = (a+b)/2$, entonces $e = c/a$ es de nuevo la excentricidad $e > 1$, y $b^2 + c^2 = a^2$.

La parábola

Lugar geométreico de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija, llamada directriz. La ecuación cartesiana es

$$y = 2px \tag{1.129}$$

donde ahora p es la llamada distancia focal a la directriz.

Todas las cónicas pueden escribirse mediante una sucinta ecuación general, llamada ecuación focal de las cónicas:

Ecuación focal de las cónicas

$$\boxed{r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \tag{1.130}$$

y donde si $0 < e < 1$ es una elipse de excentricidad $e = c/a$ ($e = 0$ es una circunferencia), si $e = 1$ tenemos una parábola con $p = b^2/a$, y si $e > 1$ se tiene una hipérbola con $e = c/a$.

1.12 Cuádricas(simplificadas)

La generalización espacial de la cónicas condunce a funciones de 3 variables llamadas cuádricas. Hay 17 casos de cuádricas, que tienen diferentes representaciones espaciales.

- Elipsoide. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1.131}$$

- Elipsoide imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0 \tag{1.132}$$

- Hiperboloide de una hoja. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{1.133}$$

- Hiperboloide de dos hojas. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \tag{1.134}$$

- Cono de segundo orden. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1.135}$$

- Cono de segundo orden imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1.136}$$

- Paraboloide elíptico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2cx=0 \tag{1.137}$$

- Paraboloide hiperbólico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2cx=0 \tag{1.138}$$

- Cilindro elíptico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1.139}$$

- Cilindro elíptico imaginario. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0 \tag{1.140}$$

- Par de planos imaginarios que se cortan. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{1.141}$$

- Cilindro hiperbólico. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1.142}$$

- Par de planos que se cortan. Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{1.143}$$

- Cilindro parabólico. Ecuación:

$$y^2 - 2px = 0 \tag{1.144}$$

- Par de planos paralelos. Ecuación:

$$x^2 - a^2 = 0 \tag{1.145}$$

- Par de planos paralelos imaginarios. Ecuación:

$$x^2 + a^2 = 0 \tag{1.146}$$

- Par de planos coincidentes. Ecuación:

$$x^2 = 0 \tag{1.147}$$

1.13 Espacios vectoriales

Subespacio vectorial

Sea E un espacio vectorial, y $V \subset E$ un subconjunto de E. Se dice que V es subespacio vectorial si y sólo si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Independencia lineal

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto linealmente independiente de vectores en E, entonces

$$\sum_i^n \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \leftrightarrow \lambda_i = 0 \tag{1.148}$$

Generadores

Sea E un espacio vectorial. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ son un conjunto V de vectores en E, entonces son un generador de vectores $\vec{u}$ si puedo encontrar siempre combinaciones lineales tales que puedo expresar en componentes del conjunto generador de vectores a $\vec{u}$

$$\vec{u} = \sum_i^n \lambda_i \vec{v}_i = c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_n \vec{v}_n \tag{1.149}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ serían las componentes de $\vec{u}$ en G. Equivalentmente, el generador de un conjunto de m vectores en E es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de G, y se denota como $Span(G) = G_V$.

Un conjunto de un espacio vectorial que es a la vez linealmente independiente y generador del espacio vectorial, se denomina habitualment **base** de V. La dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores de su base, o el mínimo número posible de vectores generadores. La base canónica de un espacio vectorial está caracterizada por vectores que tienen un 1 en una sola componente, y son cero las demás componentes. En el caso del espacio vectorial de vectores en $\mathbb{R}^D$, la base canónica es:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad \vec{e}_D = (0, \ldots, 1) \tag{1.150}$$

Las aplicaciones lineales o 1-formas en un espacio vectorial son entes matemáticos abstractos. Si J e Y son espacios vectoriales, la aplicación $f : J \to Y$, donde J, Y son espacios vectoriales se dice lineal si y sólo si:

- $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$, donde $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores de J, y $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ vectores de Y. Esto se debe cumplir para cualesquiera vectores de J, Y.

Conjuntos interesantes de aplicaciones lineales:

- Núcleo o kernel. Es el conjunto $ker(f) = \{\vec{v} \in J / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

- Imagen, recorrido o conúcleo. Es el conjunto $Im(g) = \{f(J), \vec{u} \in Y / \exists \vec{v} \in J, f(\vec{v}) = \vec{u}$.

- Rango es generalmente la dimensión de la imagen de f, i.e., $Rang(f) = \dim(\mathrm{Im(f)})$.

- Teorema de la dimensión: $\dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(J)$.

- Autovector o vector propio de una aplicación. Si A es un operador lineal asociado a una aplicación lineal f, se dice que $\vec{v}$ es eun autovector o vector propio con autovalor o valor propio λ si y sólo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El conjunto de todos los valores propios (con matices en espacios de dimensión infinita), se denomina espectro de un operador lineal $\sigma(A)$. En espacios de dimensión finita, el espectro es discreto en general, y se llama espectro puntual. En dimensión infinita el espectro en general se divide en espectro puntual, espectro residual y espectro continuo.

1.14 Matrices, determinantes y más allá

Matriz/Matrix

Una matriz A es una tabla ordenada de números con filas y columnas $A = (a_{ij})$. La dimensión de una matriz es el número de fijas por el número de columnas, i.e., $n \times m$. Si tiene n filas y m columnas, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. La suma de 2 matrices de igual dimensión $M_{n\times m}$ se realiza sumando cada término análogo, mediante la regla $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $\forall i, j$. El producto de 2 matrices de tamaños $n \times r$ y $r \times m$ se realiza mediante la expresión formal:

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \tag{1.151}$$

La matriz de una aplicación lineal es la matriz que tiene por columna j-ésima las componentes del vector $f(e_j)$.

Determinante

Para matrices cuadradas, $n \times n$ (orden n), existe una función interesante denominada determinante. $det(a_{ij}) = \prod \varepsilon_{ij} a_{ij}$. Para órdenes 2 y 3 se tiene que:

$$\left|A_{2\times 2}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.152}$$

$$\left|A_{3\times 3}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.153}$$

en virtud de la llamada regla de Sarrus. Y, en general,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} \tag{1.154}$$

donde A_{ij} es determinante formado de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j de a_{ij}. El producto $(-1)^{i+j}A_{ij}$ es el denominado adjunto formal de a_{ij}. Un menor de orden p de una matriz son los determinantes de las matrices cuadradas que se obtienen al suprimir $n-p$ filas y $m-p$ columnas.

Tipos especiales de matrices:

- Traspuesta: es la matriz obtenida de intercambiar la fija i y la columna j. $a^t_{ij} = a_{ji}$.
- Matriz adjunta o de cofactores: es la matriz obtenida al sustituir cada elemento por su adjunto. $A_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$.
- Matriz identidad: es la matriz que se obtiene con todos las componentes igual a 1 es la diagonal principal (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo), y el resto son elementos nulos, i.e., $I_{ij}/a_{ij} = 1(i=j), a_{ij} = 0(i \neq j)$.
- Matriz inversa: es aquella matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
- Matriz ortogonal: matrices tales que $AA^t = A^tA = I$.
- Matriz unitaria: matrices tales que $A^+A = AA^+ = I$.
- Matrix simétrica: aquella que es igual a su traspuesta.
- Matrix antisimétrica o hemisimétrica: si es igual a su traspuesta cambiada de signo.
- Matrix nilpotente: matriz cuyo cuadrado (o en general una potencia mayor que uno) es igual a cero.
- Matrix idempotente: matriz que cumple $A^2 = I$.
- Matriz adjunta compleja o conjugada hermítica: $A^+ = (A^\star)^t = (A^t)^\star$.
- Rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes, y coincide con el orden del mayor menor o determinante no nulo que puedo formar en la matriz.
- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{Adj})^t$.

Propiedades de los determinantes: son funciones multilineales, en el sentido siguiente:

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, para una matriz de orden n.
- $\det(AB) = \det A \det B$.
- $\dfrac{d}{dx}|A(x)_{ij}| = \sum_i |\dfrac{d}{dx}A(x)_{ij}|$.
- Una matriz es invertible si y sólo si su determinante es no nulo (aunque existen inversas generalizadas de matrices singulares con determinante nulo y similares).

1.14.1 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones inhomogéneos

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es una expresión formal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \quad + \vdots \quad + \cdots \quad + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_m + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \tag{1.155}$$

Matricialmente, este sistema se escribe $AX = B$ donde $A = a_{ij}$ y $Y = Y_k$ son las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.156}$$

$$B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{1.157}$$

Clasificación general de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales (caso no homogéneo $AX = Y$ con $Y \neq 0$) mediante el teorema de Rouché-Frobenius:

- Sistemas incompatibles (sistemas sin solución). Ocurre cuando el rango de la matriz A y la de la ampliada con las columnas de Y, $A|Y$, son diferentes.
- Sistemas compatibles (sistemas con solución). Si la solución es única, se dice que el sistema es compatible determinado. Para ello se debe cumplir que $R(A) = R(A|Y) = n$, donde n es el número de incógnitas. Si la solución es múltiple (infinitas soluciones), el sistema se dice que es compatible indeterminado. Para eso se tiene que cumplir que $R(A) = R(A|Y) < n$.

En el caso de sistemas homogéneos con $B = 0$, como el $R(A) = R(A|Y)$ siempre, el sistema es siempre compatible. Si $R(A) = n$, la solución es única pero igual a la solución trivial $x_i = 0 \forall i$. Si $R(A) < n$, hay infinitas soluciones no triviales. Se denomina grado de libertad de un sistema de ecuaciones lineales a la cantidad $N = n - R(A) = n - r$, donde $R(A) = r$ es el rango de la matriz A. El número de grados de libertad es el número de parámetros lineales que espefican la solución de un sistema compatible indeterminado.

Un sistema se puede resolver mediante el denominado método de Gauss y operaciones elementales por filas, o también por el denominado método de Cramer. En este método, se puede escribir que la solución en caso compatible determinado es

$$x_p = \frac{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{y}_p, \cdots, \vec{a}_n)}{\det A} \tag{1.158}$$

1.14.2 Geometría del espacio euclidiano 3d

El producto escalar generalizado $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$, si hay una base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ es igual a un número basado obtenido de los dos vectores en dicha base con la expresión formal siguiente:

Producto escalar generalizado

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \vdots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.159}$$

Matricialmente, se puede escribir como $A \cdot B = G_{ij} A^i B^j = A^t G B$, donde G es la matriz de productos escalares de la base, o métrica, de dichos vectores. Si el producto escalar se calcula en la base canónica, el resultado es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{1.160}$$

En forma intrínseca, el producto escalar es también igual a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi \tag{1.161}$$

y donde $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ es el módulo o longitud de $\vec{v}$, y φ es el ángulo formado por los dos vectores. El producto escalar permite calcular proyecciones sobre vectores, módulos o longitudes, estudiar la ortogonalidad y también permite calcular vectores unitarios a uno dado $\vec{v}$. $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Se llama producto vectorial de dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ al vector

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \tag{1.162}$$

y donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^3$. En componentes:

$$XYZZY = \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \tag{1.163}$$

El producto vectorial es siempre un vector perpendicular al plano que generan los vectores factores, y tiene sentido dado por la regla de Maxwell, del tornillo o sacacorchos: el sentido el del avance de un tornillo o sacacorchos desde el primer factor al segundo por el camino más corto (regla de la mano derecha). El módulo del producto vectorial puede escribirse como sigue:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \tag{1.164}$$

y, además, es el área del paralelogramo que generan los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, i.e., $|\vec{a} \times \vec{b}| = A_{\square}(\vec{a}, \vec{b})$. Por otra parte, el producto vectorial no es ni conmutativo ni asociativo. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (es anticonmutativo), y $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o proporcionales es nulo. Por tanto, el producto vectorial: mide paralelismo, áreas, y representa giros en el espacio.

El producto vectorial cumple sin embargo las identidades de Lagrange y Jacobi:

Identidad de Lagrange

Se puede probar que:

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \tag{1.165}$$

Identidad de Jacobi

Se puede probar que aunque el producto vectorial en 3d no es asociativo, satisface la identidad

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0} \tag{1.166}$$

o bien, la equivalente

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \tag{1.167}$$

El producto mixto de tres vectores en el espacio es el volumen del paralelepípedo que generan. Se calcula de la forma siguiente:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \mathrm{Vol}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \tag{1.168}$$

1.14.3 Rectas y planos en el espacio 3d

En el espacio 3d, una recta tiene las siguientes expresiones formales para sus ecuaciones:

- Ecuación vectorial:
$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(v_x, v_y, v_z)$$
- Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = a + \lambda v_x \\ y = b + \lambda v_y \\ z = c + \lambda v_z \end{cases}$$
- Ecuación contínua:
$$\frac{x-a}{v_x} = \frac{x-b}{v_y} = \frac{x-c}{v_z}$$
- Intersección de dos planos:
$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$
donde $(v_x, v_y, v_z) = (A, B, C) \times (A', B', C')$.

En el espacio 3d, las ecuaciones de un plano son las siguientes:

- Ecuación vectorial:
$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda_1(u_x, u_y, u_z) + \lambda_2(v_x, v_y, v_z)$$
- Ecuaciones paramétricas:
$$\Pi : \begin{cases} x = a + \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x \\ y = b + \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y \\ z = c + \lambda_1 u_z + \lambda_2 v_z \end{cases}$$
- Ecuación implícita y general:
$$\begin{vmatrix} (x-a) & (y-b) & (z-c) \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$
donde $(A, B, C) = \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ es un vector ortogonal o perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1.14.4 Paralelismo y perpendicularidad

Recta/Recta

Dos rectas r, s son paralelas si y sólo si
$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z} \tag{1.169}$$
Dos rectas serán perpendiculares si y sólo si $\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = 0$, i.e., si y sólo si
$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \tag{1.170}$$

Recta/Plano

Un plano Π y una recta r son paralelos si y sólo si

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0 = Au_x + Bu_y + Cu_z = 0 \tag{1.171}$$

Serán perpendiculares si y sólo si

$$\frac{A}{u_x} = \frac{B}{u_y} = \frac{C}{u_z} \tag{1.172}$$

Plano/Plano

Dos planos Π, Π' son paralelos si y sólo si

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{1.173}$$

Serán perpendiculares si y sólo si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, i.e., si y sólo si:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \tag{1.174}$$

1.14.5 Ángulos entre rectas y planos

Recta/Recta

El ángulo que forman dos rectas se calcula mediante la expresión

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_r \vec{v}_s}{|\vec{u}_r||\vec{v}_s|} \tag{1.175}$$

Recta/Plano

El ángulo que forman una recta y un plano se calcula mediante la expresión

$$\sin\varphi = \frac{\vec{u}_r \vec{n}_\pi}{|\vec{u}_r||\vec{n}_\pi|} \tag{1.176}$$

Plano/Plano

El ángulo que forman dos planos se calcula mediante la expresión

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_\pi \vec{n}_{\pi'}}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_{\pi'}|} \tag{1.177}$$

1.14.6 Distancias, áreas, volúmenes

Sean un punto $P(a_x, a_y, a_z)$, un punto $Q(b_x, b_y, b_z)$, una recta $r : \vec{r} = \vec{y} + \lambda\vec{u}_r$, y un plano $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$, entonces:

Distancia entre dos puntos

$$D(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

Distancia entre punto y recta

$$D(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{YP}|}{|\vec{u}_r|}$$

Distancia entre recta y recta

$$D(r,r') = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{u}_{r'} \cdot \overrightarrow{YY'}|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_{r'}|}$$

Distancia entre punto y plano

$$D(P,\Pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Esta fórmula también puede usarse para hallar la distancia entre recta y plano, y entre dos planos.

Área del triángulo en el plano y el espacio

En el plano:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.178}$$

En el espacio, si los vértices son los puntos $X(x_1,x_2,x_3), Y(y_1,y_2,y_3), Z(z_1,z_2,z_3)$, entonces:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}||\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}|| \tag{1.179}$$

o también:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2} \tag{1.180}$$

Volumen del tetraedro

Un tetraedro generado por 4 puntos X, Y, Z, W, con vértices $X(x_1,x_2,x_3), Y(y_1,y_2,y_3), Z(z_1,z_2,z_3), W(w_1,w_2,w_3,w_4)$ en el espacio, tiene un volumen dado por:

$$V_T = \frac{1}{3!}|\left(\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}\right) \cdot \overrightarrow{XW}| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.181}$$

1.14.7 Posiciones relativas en el espacio

Sean dos rectas r, s con matrices $M, \overline{M}$ de tamaños 4×3 y 4×4. Además, $\vec{d} = (a, b, c) - (a', b', c')$. Entonces:

- r, s se cortan en un punto si $R(M) = R(\overline{M}) = 3$. Vectorialmente $\det(\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{d} = 0$ con $\vec{u}, \vec{v}$ no paralelos.
- r, s se cruzan si $R(M) \neq R(\overline{M})$ $(R(M) = 3, R(\overline{M}) = 4)$. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}) \neq 0$.
- $r||s$ si $R(M) = 2 \neq R(\overline{M}) = 3$, $\vec{u}||\vec{v}$.
- r, s son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$, y $\vec{u}||\vec{v}||\vec{d}$.

Sean Π, r un plano y una recta en el espacio. Sean M y $\overline{M}$ matrices de tamaños 3×3 y 3×4. Entonces:

- Recta y plano se cortan en un punto si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 3$, y además tenemos $\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = Au_x + Bu_y + Cu_z \neq 0$.
- Recta y plano son paralelos si y sólo si $R(M) = 2 \neq R(\overline{M}) = 3$, y además tenemos $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = Au_x + Bu_y + Cu_z = 0$, con $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$.
- Recta y plano son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$, y además tenemos que $\vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0$ y $Aa + Bb + Cc + D = 0$.

Sean dos planos Π, Π', con ecuaciones $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Sean $M, \overline{M}$ matrices de tamaños 2×3 y 2×4. Entonces:

- Dos planos se cortan en una recta si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 2$ y además se tiene que $A/A' \neq B/B'$ ó $A/A' \neq C/C'$ ó $B/B' \neq C/C'$.
- Dos planos son paralelos si y sólo si $R(M) = 1 \neq R(\overline{M}) = 2$, y donde tenemos $A/A' = B/B' = C/C' \neq D/D'$.
- Dos planos son coincidentes si y sólo si $R(M) = R(\overline{M}) = 1$, y además se tiene que $A/A' = B/B' = C/C' = D/D'$.

1.14.8 Movimientos y semejanzas en el espacio

Movimiento

Un movimiento es una ecuación formal de tipo

$$\boxed{\vec{r}' = A\vec{r} + \vec{t}} \tag{1.182}$$

donde A es una matriz ortogonal $AA^t = I$.

Homotecias

Una homotecia (dilatación, contracción) es una transformación general de tip

$$\boxed{\vec{r}' = k\vec{r}} \tag{1.183}$$

donde k es la razón.

Semejanza

Una semejanza es una transformación del tipo siguiente

$$\vec{r'} = A\vec{r} + \vec{t} \tag{1.184}$$

donde $A = kB$ es tal que B es una matriz ortogonal y $\vec{t}$ es una traslación. Una semejanza es una composición de homotecia y un movimiento de rotación con traslación.

Las ecuaciones de transformación del espacio más usuales son:

- Traslación con vector $\vec{t}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

- Giro o rotación de ángulo φ alrededor del eje Z:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría axial: el eje es una recta del plano XY, por el origen y con un ángulo φ respecto al eje X:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Movimiento helicoidal: ángulo φ, eje Z y traslación $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

- Simetría central, con centro el origen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría especular: plano que contiene al eje Z, ángulo φ respecto al eje X

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría rotatoria: plano XY, giro de ángulo φ en torno al eje Z

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Simetría con deslizamiento: plano XY, traslación con vector $\vec{t} = (t_1, t_2, 0)$ en el plano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otras transformaciones:

- Boosts galileanos: $\vec{r'} = \vec{V}(t - t_0) + \vec{t}$.
- Transformaciones fraccionales lineales:

$$X' = \frac{AX + B}{CX + D}$$

- Transformaciones conformes.
- Transformaciones afines.
- Transformaciones proyectivas.
- Transformaciones simplécticas.
- Transformaciones unitarias.
- Transformaciones lineales generales y lineales especiales.
- Transformaciones difeomorfas o difeomorfismos.
- Transformaciones homeomorfas y homeomorfismos.
- Transformaciones conformes especiales.
- Transformaciones métricas.
- Transformaciones metriplécticas.
- Transformaciones de dualidad.
- Transformaciones de reciprocidad de Born.
- Transformaciones de Clifford.
- Transformaciones modulares.
- Transformaciones de (relatividad de) escala.
- Transformaciones supersimétricas.
- Transformaciones hipersupersimétricas.
- Transformaciones BMS y generalizaciones: supertraslaciones, super-rotaciones, superboosts y transformaciones (super)conformes (especiales).
- ...

1.15 Estadística y probabilidad

En el tratamiento estadístico de datos intervierne la Matemática de la Teoría de la Probabilidad. Algunas definiciones útiles previas (aunque las veremos más tarde en inglés):

Media

Se llama media aritmética (existen otros tipos de media) a la cantidad:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i f_i}{N} \tag{1.185}$$

donde f_i es la frecuencia de x_i. Se llama frecuencia relativa a $F_i = f_i/N$, donde N es el número de experimentos o tamaño de la muestra. Se llama **moda** al dato de mayor frecuencia.

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 f_i}{N-1} \tag{1.186}$$

Se llama **desviación típica** σ a la raíz cuadrada de la varianza, i.e.,

Desviación típica o estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 f_i}{N-1}}$$

En el caso de distribuciones de probabilidad bidimensionales, se puede definir también una cantidad llamada **covarianza**

Covariancia

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \overline{xy})$$

El coeficiente de correlación r se define en función de la covarianza y las desviaciones típicas de cada variable como sigue

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Interpretación del coeficiente de correlación:

- Si $r = 0$ la correlación de las variables es nula.
- Si $r > 0$ la correlación es directa.
- Si $r < 0$ la correlación es inversa o indirecta.
- Si $r = \pm 1$ la correlación implica dependencia funcional.

Hay dos rectas denominadas de *regresión lineal* entre variables X, Y aleatorias. Las expresiones son las siguientes:

Recta de regresión lineal de Y sobre X

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}) \tag{1.187}$$

Recta de regresión lineal de X sobre Y

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y_i - \overline{y}) \tag{1.188}$$

En Teoría de la probabilidad y del error, toman especial consideración las funciones de variable aleatoria. Una función de variable aleatoria es cualquier función $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Una función de variable aleatoria es discreta cuando $X(\Omega)$ es un número finito. Cuando $X(\Omega)$ es una función sobre un intervalo $[a, b]$ o incluso $(-\infty, \infty)$, la función de variable aleatoria se dice que es una función contínua.

1.15.1 Variable aleatoria discreta

En el caso de funciones de variables aleatorias discretas, se tienen los siguientes conceptos y definiciones:

Función de probabilidad

$$p(x_i) = P[X^{-1}(x_i)] \forall x_i \in X(\Omega) \tag{1.189}$$

Función de distribución

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \tag{1.190}$$

Esperanza o valor medio

$$\mu = E(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i) \tag{1.191}$$

Varianza y desviación estándar o típica

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 p(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p(x_i) - \mu^2 \tag{1.192}$$

1.15.2 Variable aleatoria continua

En el caso de funciones de variables aleatorias continuas, se tienen los siguientes conceptos y definiciones:

Función de distribución

$$F(x_i) = P(X \leq x) = P[X^{-1}([a, x])] \tag{1.193}$$

Función densidad

$$f(x) = F'(x) \rightarrow P(x \leq x \leq d) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(t)dt \tag{1.194}$$

Esperanza o valor medio

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x)dx \tag{1.195}$$

Varianza y desviación estándar o típica

$$\sigma_x^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{1.196}$$

1.15.3 Algunas distribuciones de probabilidad habituales

Distribución binomial

Es una función de variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

donde n es el número de repeticiones u observaciones(experimentos), que tienen una probabilidad p de éxito y una probabilidad $q = 1 - p$ de fracaso. La media o esperanza y la desviación típica de esta distribución son

$$\mu = E(X) = np = n(1-q)$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$$

Distribución normal o gaussiana

Es una distribución continua de mucha importancia en Estadística, Probabilidad, Física y Ciencias Experimentales. La función densidad de la distribución normal reza

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Una simplificación de esta función, que está tabulada por matemáticos y científicos, es la llamada distribución normal o gaussiana tipificada, que es una distribución normal de media nula y desviación típica unidad:

$$N(0,1) \to f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

En este caso, es más sencillo calcular la función de distribución y la probabilidad, pues para la normal tipificada se tiene que

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

y la integral tabulada permite la obtención de los valores oportunos de la probabilidad. Para tipificar una distribución normal o gaussiana se hace mediante la transformación

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Distribución de Cauchy-Lorentz

La distribución de Cauchy se conoce en el ámbito de la Física como la distribución de Lorentz, la función Lorentziana o la distribución de Breit-Wigner. Su importancia en la Física es dada por ser la solución de la ecuación diferencial que describe la resonancia forzada. En espectroscopia describe la forma de las líneas espectrales que son ampliadas por diversos mecanismos, en particular, el mecanismo de ensanchamiento por colisión.
Se trata de una distribución de probabilidad continua cuya función de densidad es

$$f(x; x_0, \Gamma) = \frac{1}{\pi\Gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\Gamma}\right)^2\right]} \tag{1.197}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\Gamma}{(x-x_0)^2 + \Gamma^2}\right] \tag{1.198}$$

y donde x_0 es el parámetro de corrimiento que específica la ubicación del pico de la distribución, Γ es el parámetro de escala que específica el ancho medio al máximo medio (*half-width at half-maximum, HWHM*). En el caso especial donde $x_0 = 0$ y $\Gamma = 1$ es denominado la distribución estándar de Cauchy con la función de densidad de probabilidad

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

En general la distribución de Cauchy no tiene valor esperado ni varianza. Sin embargo, la moda y la mediana son x_0. En la hidrología, se utiliza la distribución de Cauchy para analizar variables aleatorias como valores máximos de la precipitación y la descarga de ríos, y además para describir épocas de sequía.

Distribución exponencial

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$ cuya función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Su función de distribución acumulada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Donde e representa el número e. De forma adicional esta distribución presenta una función adicional que es función Supervivencia (S), que representa el complemento de función de distribución

$$S(x) = P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial son:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La distribución exponencial es un caso particular de la llamada distribución gamma con $k = 1$. Además la suma de variables aleatorias que siguen una misma distribución exponencial es una variable aleatoria expresable en términos de la distribución gamma.
Ejemplos para la distribución exponencial:

- La distribución de la longitud de los intervalos de una variable continua que transcurren entre dos sucesos, que se distribuyen según la distribución de Poisson.
- El tiempo transcurrido en un centreo de llamadas hasta recibir la primera llamada del día se podría modelar como una exponencial.
- El intervalo de tiempo entre terremotos (de una determinada magnitud) sigue una distribución exponencial.
- Supongamos una máquina que produce hilo de alambre, la cantidad de metros de alambre hasta encontrar un fallo en el alambre se podría modelar como una exponencial.
- En fiabilidad de sistemas, un dispositivo con tasa de fallo constante sigue una distribución exponencial.
- En Física o en Química, los procesos de desintegración de átomos, núcleos o partículas inestables, o las reacciones de primer orden.

Distribución de Poisson

The Poisson distribution is popular for modeling the **number of times an event occurs in an interval of time or space**. A discrete random variable X is said to have a Poisson distribution with parameter $\lambda > 0$ if, for $k > 1, 2, \ldots$ the probability (mass) function of X is given by

$$f(k; \lambda) = \Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

where $e = 2.71828\ldots$, k is the number of occurrences and $k!$ is the factorial of k. The positive real number λ is equal to the expected value of X and also to its variance

$$\lambda = \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X)$$

$\mu = \sigma = \lambda$ for a Poisson p.d.f. The Poisson distribution can be applied to systems with a large number of rare events—large number of possible events, each of which is rare. The number of such events that occur during a fixed time interval is, under the right circumstances, a random number with a Poisson distribution. The equation can be adapted if, instead of the average number of events λ, we are given a time rate for the number of event sr to happen. Then $\lambda = rt$ (showing r number of events per unit of time), and

$$P(k \text{ events in interval } t) = \frac{(rt)^k e^{-rt}}{k!}$$

The Poisson distribution may be useful to model events such as

- The number of meteorites greater than 1 meter diameter that strike Earth in a year.
- The number of patients arriving in an emergency room between 10 and 11 pm.
- The number of laser photons hitting a detector in a particular time interval

The Poisson distribution is an appropriate model if the following assumptions are true:

- k is the number of times an event occurs in an interval and k can take values $0, 1, 2, \ldots$
- The occurrence of one event does not affect the probability that a second event will occur. That is, events occur independently. The average rate at which events occur is independent of any occurrences. For simplicity, this is usually assumed to be constant, but may in practice vary with time.
- Two events cannot occur at exactly the same instant; instead, at each very small sub-interval exactly one event either occurs or does not occur.

If these conditions are true, then k is a Poisson random variable, and the distribution of k is a Poisson distribution. If for every $t > 0$ the number of arrivals in the time interval $[0, t]$ follows the Poisson distribution with mean λt, then the sequence of inter-arrival times are independent and identically distributed exponential random variables having mean $1/\lambda$. The Poisson distribution can be derived as a limiting case to the binomial distribution as the number of trials goes to infinity and the expected number of successes remains fixed. Therefore, it can be used as an approximation of the binomial distribution if n is sufficiently large and p is sufficiently small. There is a rule of thumb stating that the Poisson distribution is a good approximation of the binomial distribution if n is at least 20 and p is smaller than or equal to 0.05, and an excellent approximation if $n \geq 100$ and $np \leq 10$.

1.16 Errors and measurements

Here, we will review formulae to handle them with experimental data.

Errors can be generally speaking:
1st. Random. Due to imperfections of measurements or intrinsically random sources.

2nd. Systematic. Due to the procedures used to measure or uncalibrated apparatus.

There is also a distinction of accuracy and precision:
1st. *Accuracy* is closeness to the true value of a parameter or magnitude. It is, as you keep this definition, a measure of systematic bias or error. However, sometime accuracy is defined (ISO definition) as the combination between systematic and random errors, i.e., accuracy would be the combination of the two observational errors above. High accuracy would require, in this case, higher trueness and high precision.
2nd. *Precision*. It is a measure of random errors. They can be reduced with further measurements and they measure statistical variability. Precision also requires repeatability and reproducibility.
1. Statistical estimators.
Arithmetic mean:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\text{(Sum of measurements)}}{\text{(Number of measurements)}}} \tag{1.199}$$

Absolute error:

$$\boxed{\varepsilon_a = |x_i - \overline{x}|} \tag{1.200}$$

Relative error:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} \cdot 100} \tag{1.201}$$

Average deviation or error:

$$\boxed{\delta_m = \frac{\sum_i |x_i - \overline{x}|}{n}} \tag{1.202}$$

Variance or average quadratic error or mean squared error:

$$\boxed{\sigma_x^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{1.203}$$

This is the unbiased variance, when the total population is the sample, a shift must be done from $n-1$ to n (Bessel correction). The unbiased formula is correct as far as it is a sample from a larger population.
Standard deviation (mean squared error, mean quadratic error):

$$\boxed{\sigma \equiv \sqrt{\sigma_x^2} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} \tag{1.204}$$

This is the unbiased estimator of the mean quadratic error, or the standard deviation of the sample. The Bessel correction is assumed whenever our sample is lesser in size that than of the total population. For total population, the standard deviation reads after shifting $n-1 \to n$:

$$\boxed{\sigma_n \equiv \sqrt{\sigma_{x,n}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}} = s_n} \tag{1.205}$$

Mean error or standard error of the mean:

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}}} \tag{1.206}$$

If, instead of the unbiased quadratic mean error we use the total population error, the corrected standar error reads

$$\boxed{\varepsilon_{\overline{x},n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}{n}} \tag{1.207}$$

Variance of the mean quadratic error (variance of the variance):

$$\boxed{\sigma^2\left(s^2\right) = \sigma_{\sigma^2}^2 = \sigma^2\left(\sigma^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}} \tag{1.208}$$

Standard error of the mean quadratic error (error of the variance):

$$\boxed{\sigma\left(s^2\right) = \sqrt{\sigma_{\sigma^2}^2} = \sigma\left(\sigma^2\right) = \sigma_{\sigma^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \tag{1.209}$$

Standard deviation of the standard deviation of the mean (error of error)

$$\sigma(\sigma) = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma(\frac{n-1}{2})^2}{\Gamma(\frac{n}{2})^2} - 1} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{1.210}$$

2. Gaussian/normal distribution intervals for a given confidence level (interval width a number of entire sigmas)

Here we provide the probability of a random variable distribution X following a normal distribution to have a value inside an interval of width $n\sigma$. Note that also, we could know how many observations we would need to accomplish certain number of sigmas.

1 sigma amplitude (1σ).

$$x \in [\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma] \longrightarrow P \approx 68.3\% \sim \frac{1}{3} \tag{1.211}$$

2 sigma amplitude (2σ).

$$x \in [\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma] \longrightarrow P \approx 95.4\% \sim \frac{1}{22} \tag{1.212}$$

3 sigma amplitude (3σ).

$$x \in [\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma] \longrightarrow P \approx 99.7\% \sim \frac{1}{370} \tag{1.213}$$

4 sigma amplitude (4σ).

$$x \in [\overline{x} - 4\sigma, \overline{x} + 4\sigma] \longrightarrow P \approx 99.994\% \sim \frac{1}{15787} \tag{1.214}$$

5 sigma amplitude (5σ).

$$x \in [\overline{x} - 5\sigma, \overline{x} + 5\sigma] \longrightarrow P \approx 99.99994\% \sim \frac{1}{1744278} \tag{1.215}$$

6 sigma amplitude (6σ).

$$x \in [\overline{x} - 6\sigma, \overline{x} + 6\sigma] \longrightarrow P \approx 99.9999998\% \sim \frac{1}{506797346} \tag{1.216}$$

For a given confidence level $C.L.$ (generally 90%, 95%, 98%, 99%), the interval width will be: $1.645\sigma, 1.96\sigma, 2.326\sigma, 2.576\sigma$.

3. Error propagation

Usually, the error propagates in non direct measurements.

3A. Sum and substraction.

Let us define $x \pm \delta x$ and $y \pm \delta y$. Furthermore, define the variable $q = x \pm y$. The error in q would be:

$$\boxed{\varepsilon(q) = \delta x + \delta y} \tag{1.217}$$

Example. $M_1 = 540 \pm 10g$, $M_2 = 940 \pm 20g$. $M_1 = m_1 + liquid$, with $m_1 = 72 \pm 1g$ and $M_2 = m_2 + liquid$, with $m_2 = 97 \pm 1g$. Then, we have:

$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$ as liquid mass.

$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$, as total liquid error.

$M_0 = 1311 \pm 32g$ is the liquid mass and its error, together, with 3 significant digits or figures.

3B. Products and quotients (errors).

If

$$x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

$$y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right)$$

then, with $q = xy$ you get

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{1.218}$$

If $q = x/y$, you obtain essentially the same result:

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} = |y|\delta x + |x|\delta y} \tag{1.219}$$

3C. Error in powers.

With $x \pm \delta x$, $q = x^n$, then you derive

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|} = |n||x^{n-1}|\delta x \tag{1.220}$$

and if $g = f(x)$, with the error of x being δx, you get

$$\boxed{\delta f = |\frac{df}{dx}|\delta x} \tag{1.221}$$

In the case of a several variables function, you apply a generalized Pythagorean theorem to get

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}} \tag{1.222}$$

or, equivalently, the errors are combined in quadrature (via standard deviations):

$$\boxed{\delta q = \delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta^2 x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta^2 x_n}} \tag{1.223}$$

since

$$\sigma(X) = \sigma(x_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2} \tag{1.224}$$

for independent random errors (no correlations). Some simple examples are provided:
1st. $q = kx$, with $x \pm \delta x$, implies $\boxed{\delta q = k\delta x}$.
2nd. $q = \pm x \pm y \pm \cdots$, with $x_i \pm \delta x_i$, implies $\boxed{\delta q = \delta x + \delta y + \cdots}$.
3rd. $q = kx_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ would imply

$$\boxed{\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha_1|\frac{\delta x_1}{|x_1|} + \cdots + |\alpha_n|\frac{\delta x_n|}{|x_n|}}$$

When different experiments with measurements $\overline{x}_i \pm \sigma_i$ are provided, the best estimator for the combined mean is a weighted mean with the variance, i.e.,

$$\overline{X}_{best} = \frac{\sum_{i=n}^{n}\frac{\overline{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{1.225}$$

The best standard deviation from the different combined measurements would be:

$$\frac{1}{\sigma_{best}^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2} \tag{1.226}$$

This is also the maximal likelihood estimator of the mean assuming they are independent AND normally distributed. There, the standard error of the weighted mean would be

$$\sigma_{\overline{X}_{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}} \tag{1.227}$$

1.17 Linear fits, least squares

Least squares. Linear fits to a graph from points using least square procedure proceeds as follows. Let (X_i, Y_i) from $i = 1, \ldots, n$ be some sets of numbers from experimental data. Then, the linear function $Y = AX + B$ that is the best fit to the data can be calculated with $Y - Y_0 = \overline{A}(X - X_0)$, where

$$X_0 = \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$Y_0 = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$\overline{A} = A = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

Moreover, $B = Y_0 + AX_0$.

We can also calculate the standard errors for A and B fitting. Let the data be

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

We want to minimize the variance, i.e., the squared errors ε_i^2, i.e., we need to minimize

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

$$\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$$

Writing $y = \alpha + \beta x$, the estimates are rewritten as follows

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} \tag{1.228}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=i}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \tag{1.229}$$

where s_x, s_y are the uncorrected standard deviations of x, y samples, $s_x^2, s_{x,y}$ are the sample variance and covariance. Moreover, the fit parameters have the standard errors

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2} \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} \tag{1.230}$$

$$s_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\beta}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \right) \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} \tag{1.231}$$

$$s_\alpha^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}\right] \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{1.232}$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{n-2} \tag{1.233}$$

Alternatively, all the above can be also written as follows. Define

$$S_x = \sum x_i \tag{1.234}$$

$$S_y = \sum y_i \tag{1.235}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i \tag{1.236}$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 \tag{1.237}$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 \tag{1.238}$$

then, for a minimum square fit with $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x + \hat{\varepsilon}$, we find out that

$$\hat{\beta} = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x^2} \hat{\alpha} = \frac{1}{n} S_y - \hat{\beta} \frac{1}{n} S_x \tag{1.239}$$

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n(n-2)} \left[nS_{yy} - S_y^2 - \hat{\beta}^2 (nS_{xx} - S_x^2)\right] \tag{1.240}$$

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{n s_\varepsilon^2}{nS_{xx} - S_x^2} \tag{1.241}$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s_{\hat{\beta}}^2 \frac{1}{n} S_{xx} \tag{1.242}$$

and where the correlation coefficient is

$$r = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(nS_{xx} - S_x^2)(nS_{yy} - S_y^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1) s_x s_y} \tag{1.243}$$

or equivalently

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] \left[n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}} \tag{1.244}$$

and where s_x, s_y are the corrected sample standard deviations of x, y. To know what $s_{x,y}$ is in a more general setting, we note that the sample mean vector $\bar{\mathbf{x}}$ is a column vector whose j-element x_{ij} is the average value of the N observations of the j-variable:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, K.$$

and thus, the sample average or mean vector contains the average of every variable as component, such as

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_j \\ \vdots \\ \bar{x}_K \end{bmatrix} \tag{1.245}$$

The sample covariance matrix is a "K"-by-"K" matrix

$$\mathbf{Q} = [q_{jk}]$$

with entries

$$q_{jk} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k)$$

where q_{jk} is an estimate of the covariance between the j-th variable and the k-th variable of the population underlying the data. In terms of the observation vectors, the sample covariance is

$$\mathbf{Q} = s_{x,y} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_{i\cdot} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{i\cdot} - \bar{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}$$

Finally, you can also provide a calculation with confidence level of the intervals where $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$ are. The t-value has a Student's t-distribution with $n-2$ degrees of freedom. Using it, we can construct a confidence interval for $\hat{\beta}$:

$$\beta \in \left[\widehat{\beta} - s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2},\ \widehat{\beta} + s_{\widehat{\beta}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where t^*_{n-2} is the $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$-th quantile of the t_{n-2} distribution. For example, $\gamma = 0.05$, then the C.L. is 95%.

Similarly, the confidence interval for the intercept coefficient $\hat{\alpha}$ is given by

$$\alpha \in \left[\widehat{\alpha} - s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2},\ \widehat{\alpha} + s_{\widehat{\alpha}} t^*_{n-2}\right]$$

at confidence level (C.L.) $1-\gamma$, where as before above

$$s_{\widehat{\alpha}} = s_{\widehat{\beta}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_i^2\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

1.18 Ecuaciones y funciones

Las ecuaciones lineales de variable real y compleja se resuelven de forma sencilla.

Ecuaciones lineales: $ax+b=c$. Si $a \neq 0 \to x = \dfrac{c-b}{a}$. Ecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c=0$. La resolución es mediante la conocida fórmula:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac \text{ es el discriminante.}$$

Si $\Delta > 0$, las soluciones son simples y diferente $x_{\pm}$. Si $\Delta = 0$, las soluciones son iguales $x_{\pm} = x_+ = x_- = -\dfrac{b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, las soluciones son simples pero complejas conjugadas (en los complejos). La suma de las dos soluciones de una ecuación cuadrática da siempre $S = -b/a$,

y el producto de las dos soluciones es siempre $P = c/a$. Además, una ecuación cuadrática se puede reescribir de la forma siguiente $x^2 - Sx + P = 0$.

Una ecuación bicuadrática $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se resuelve mediante el cambio $z = x^2$. Hay 4 soluciones en general. Hay fórmulas complicadas para la resolución de las ecuaciones de cuarto y tercer grado. Para las de grado quinto o superior, no se puede hacer mediante funciones "elementales".

Una función es una aplicación de números reales en números reales con solamente una imagen. Para representar una función $f(x)$ de variable real, generalmente se estudian los siguientes aspectos:

- Dominio y rango (o recorrido/imagen/codominio).
- Signo de la función.
- Simetrías (paridad) de la función: $f(-x) = f(x)$ es par, $f(-x) = -f(x)$ es impar.
- Puntos de corte con el eje X ($y = 0$) y el eje Y ($y_c = f(0)$).
- Asíntotas: verticales, horizontales y oblícuas.
  - Asíntotas horizontales $y = b$ cuando $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.
  - Asíntotas verticales $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} = \pm\infty$.
  - Asíntotas oblícuas $y = mx + n$ cuando $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$.
- Máximos, mínimos y puntos de inflexión. Máximos y mínimos son puntos con o bien $f' = 0$, o bien puntos cuya primera derivada el punto crítico no nula es de orden par. Puntos de inflexión son puntos con o bien $f'' = 0$, o bien puntos cuya primera derivada no nula es de orden impar.
- Crecimiento y decrecimiento de la función. Una función es creciente en un intervalo si la derivada es positiva en ese intervalo. Una función es decriente en un intervalo si la derivada es negativa en ese intervalo.
- Curvatura de la función (concavidad-convexidad). Una función tiene gráfica cóncava $\cup$ en un intervalo, si la segunda derivada es positiva en ese intervalo. Una función es convexa $\cap$ en un intervalo si la segunda derivada es negativa en ese intervalo.

Las funciones de varias variables necesitan una dimensión más para ser representadas que las funciones de variables real. Así, una función $z = f(x, y)$ se representa mediante superficies en el espacio. Los campos (espinoriales, escalares, vectoriales, tensoriales,...) son generalizaciones del concepto de función a un espacio multidimensional o con tipos exóticos de variables numéricas. La idea de número (real, complejo, hipercomplejo, de Grassmann, ...) forma parte intrínseca del concepto de función. Es importante saber qué "valores" o "números" toma una función o campo.

1.19 Teoremas clásicos del cálculo infinitesimal y de folding

Continuidad de una función en un punto

Se dice que una función es contínua en un punto x_0 (en un intervalo abierto o cerrado) si solo si:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{1.246}$$

Si f y g son funciones contínuas, también lo son $\lambda f, \lambda g, f \pm g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$, la última si $g(a) \neq 0$. Si f es continua en $x = a$, y g es continua en $f(a)$, entonces $f \circ g = g(f(x))$ es continua en $x = a$. Hay varios tipos de discontinuidades:

- Evitable: si $\lim\limits_{x\to x_0} = L$, pero $f(x_0) \neq L$ o bien $f(x_0)$ no está bien definido.
- De salto: si existen límites laterales finitos, pero son diferentes.
- Asintóticos: si $\lim\limits_{x\to x_0} f = \pm\infty$.

Límites asintóticos de cocientes entre dos polinomios:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_n} \text{ si } m = n \\ \pm\infty, \text{ si } n > m \\ 0 \text{ si } n < m \end{cases}$$

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a, b]$, y la función cambia de signo en los extremos, i.e., signo$[f(a)] \neq$ signo$[f(b)]$, entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a, b]$, y $f(a) \leq A \leq f(b)$, entonces $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = A$. Como corolarios, con la hipótesis de continuidad en el cerrado, se sigue que:

- $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(x_0) \forall x$.
- $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x$.

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f(x), g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, y derivables en (a, b), con $g'(x)$ no nula en (a, b). Entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(b)}{g(b) - g(a)}$$

Regla de L'Hôspital

Sean $f(x), g(x)$ dos funciones continuas y derivables en un entorno reducido del punto x_0. Si en el entorno de x_0, $g'(x_0) = 0$, de forma que, o bien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to} g(x) = 0$$

o bien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to} g(x) = \infty$$

Entonces existe el límite (incluso si es cero o infinito):

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el último límite existe.

Gallivan 1st theorem

Single direction folding a piece of paper, of strip length L and thickness t provides the bound

$$\boxed{L = \frac{\pi t}{6}\left(2^n + 4\right)\left(2^n - 1\right)} \tag{1.247}$$

Gallivan 2nd theorem

Alternate direction folding a piece of paper, of strip length L and paper width W provides the bound

$$\boxed{W = \pi t 2^{\frac{3(n-1)}{2}}} \tag{1.248}$$

Proof: first fold gives $W_0 \to W_0/2$, 1st alternate fold: n-odd $t' = \pi t$. 2nd fold gives $W_0 \to W_0/4$, and the 2nd alternate fold $t'' = 2\pi t'$. The 3rd fold gives $W_0 \to W_0/8$, and the second alternate fold $t''' = 2t'' = 4t' = 4\pi t$. By induction, $W = 2^{n/2}\pi t/2^{-n}2^{3/2}$. It yields $W_n(t) = \pi t 2^{3(n-1)/2}$, Q.E.D.

Gallivan's first theorem can be also proved, as follows:

Proof. Let me consider a paper with length L and thickness t. In the first fold, via a semicircle, the lost length is πt. After the second fold, the lost length is

$$\pi t + \pi t + 2\pi t$$

The third fold lost length becomes

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t) + (3\pi t) + (4\pi t)$$

And after n-folds

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t) + (3\pi t) + (4\pi t) + \ldots + (\pi t + \ldots + 2^{n-1}\pi t)$$

Adding the lost length after the n-folds, you have

$$\pi\left(1 + (1+2) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1})\right)$$

Using the result about how to sum any arithmetic sum (Gauss, the king!):

$$\frac{\pi t}{2}\left(1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 5+8\cdot 9+\ldots+2^{n-1}\cdot(2^{n-1}+1)\right)$$

Now, you can split this last sum as two, as follows

$$\frac{\pi t}{2}\left((2^0+2^2+\ldots+2^{2(n-1)})+(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1})\right)$$

Finally, use the result for getting the sum of geometric series, to obtain

$$L=\frac{\pi t}{2}\left(\frac{(2^{2n}-1)}{3}+(2^n-1)\right)$$

or equivalently, after basic algebra (hint, use $x=2^n$),

$$L=\frac{\pi t}{6}\left(2^n+4\right)\left(2^n-1\right)$$

as we wanted to demonstrate. Q.E.D.

1.20 Números y potencias

Los números elementales son los números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y los números complejos. Se suelen simbolizar por $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{I},\mathbb{R},\mathbb{C}$. Existen otros números más allá de estos. El valor absoluto de un número es el número definido por:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{si} \quad x>0 \\ -x, \text{si} \quad x<0 \\ 0, \text{si} \quad x=0 \end{cases} \tag{1.249}$$

Las sumas de varios números definen la multiplicación, y la multiplicación de varios números la potenciación:

$$\underbrace{a+\cdots+a}_{n-veces}=n\cdot a=na \tag{1.250}$$

$$\underbrace{a\cdots a}_{n-veces}=a^n \tag{1.251}$$

En esta última expresión, a se llama base, y n es el exponente. Las propiedades de las potencias

(y raíces n-ésimas) son las siguientes:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \tag{1.252}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1.253}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.254}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{1.255}$$
$$a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{1.256}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.257}$$
$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1 \leftrightarrow a \neq 0, \infty \tag{1.258}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{1.259}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1.260}$$
$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b} \qquad \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} \tag{1.261}$$
$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \tag{1.262}$$
$$\text{Si } \frac{a}{n} = c + \frac{r}{n} \rightarrow \sqrt[n]{x^a} = x^c \sqrt[n]{x^r} \tag{1.263}$$

Con los números reales se pueden realizar TODAS las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división, y además tienen las propiedades conmutatitva y distributiva. También se pueden hacer potencias y raíces. Así, se tiene que:

$$a + b = b + a \tag{1.264}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{1.265}$$
$$a + 0 = 0 + a = a \tag{1.266}$$
$$a + (-a) = 0 \tag{1.267}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.268}$$
$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{1.269}$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{1.270}$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{1.271}$$
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{1.272}$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \tag{1.273}$$
$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b} \tag{1.274}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.275}$$
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{1.276}$$
$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \tag{1.277}$$
$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \tag{1.278}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{1.279}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \cdots \tag{1.280}$$

Para obtener la *fracción irreducible* se usa el máximo común divisor (M.C.D.). Para dividir fracciones con diferente denominador, se usa el mínimo común múltiplo (m.c.m.) para lograr el **común denominador**. Un número primo es un número que solamente es divisible entre sí mismo y el 1. El número 1 generalmente NO se considera primo. Los números primos más pequeños son los siguientes:

$$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots \tag{1.281}$$

Máximo común divisor

El máximo común divisor de una serie de números $a, b, c, \ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes elevados al menor exponente. Se representa como $M.C.D.(a, b, c, \ldots)$.

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de una serie de números $a, b, c, \ldots$ se calcula factorizando esos números en números primos, y operando los factores comunes y no comunes elevados a su correspondient mayor exponente. Se representa como $m.c.m.(a, b, c, \ldots)$.

Fracciones generatriz de los números racionales:

- Números enteros no decimales: $\dfrac{\text{número}}{1}$. Ejemplo: $4 = \dfrac{4}{1}, -7 = \dfrac{-7}{1}$.
- Números enteros decimales exactos: $\dfrac{\text{número sin decimal}}{10\cdots}$, donde hay tantos ceros como cifras decimales. Ejemplos: $3.5 = \dfrac{35}{10}$, $-0.75 = -\dfrac{75}{100}$, $88.976 = \dfrac{88976}{1000}$. Es decir, la fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y decimal) sin coma, y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Nótese que esto incluye el caso anterior.

$$a, x_1x_2\cdots x_n = \frac{ax_1x_2\cdots x_n}{1\underbrace{0\cdots 0}_{n}}$$

- Números decimales periódicos puros: $0.\overline{3} = \dfrac{1}{3}$, $0.\overline{1} = \dfrac{1}{9}$, $0.\overline{25} = \dfrac{25}{99}$, $1.\overline{58} = \dfrac{157}{99}$, $11.\overline{314} = \dfrac{11303}{999}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera y periodo sin coma) menos la parte entera, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo.

$$a, \overline{x_1\cdots x_n} = \frac{ax_1\cdots x_n - a}{\underbrace{9\cdots 9}_{n}}$$

- Números decimales periódicos mixtos. Ejemplo: $5, 17\overline{54}\ldots = \dfrac{(51754 - 517)}{9900} = \dfrac{51237}{9900}$. La fracción tendrá por numerador el número decimal (parte entera, anteperiodo y periodo sin coma) menos la parte entera seguida del anteperiodo, y como denominador una cifra con tantos 9 como cifras diferentes tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras diferentes tenga el anteperiodo.

$$a, y_1\cdots y_p\overline{x_1\cdots x_n} = \frac{ay_1\cdots y_px_1\cdots x_n - ay_1\cdots y_p}{\underbrace{9\cdots 9}_{n}\underbrace{0\cdots 0}_{p}}$$

1.21 Polinomios y gráficas de funciones simples

Polinomio

Un polinomio de grado n es una expresión algebraica del siguiente tipo:

$$\boxed{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \tag{1.282}$$

Teorema de la raíz

Si $x = a$ es en una raíz del polinomio, entonces $P(a) = 0$.

Teorema del resto

El resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ es $P(a)$. Si $x = a$ es en una raíz del polinomio, entonces $P(a) = 0$, y por el teorema del resto, entonces es divisible por $(x - a)$.

Teorema del fundamental del álgebra polinómica

Todo polinomio (ecuación) de grado n tiene, por lo general, n raíces complejas. Usando el teorema del resto, el polinomio $P(z)$ factoriza en

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \tag{1.283}$$

Hay 3 casos (4 ó 5 si contamos las funciones cúbicas o de cuarto grado) interesantes como funciones:

- Funciones constantes: $F(x) = k$. Son polinomios de grado cero cuya gráfica son rectas paralelas al Eje X de abscisas, que pasan por el punto $(0, k)$.
- Funciones lineales: $F(x) = ax + b$. Son polinomios de grado uno cuya gráfica son rectas que pasan por $(0, b)$ y tienen pendiente a.
- Funciones cuadráticas: $F(x) = ax^2 + bx + c$. Son polinomios de grado dos cuya gráfica son parábolas de vértice el punto P:

$$P_V(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

1.22 Combinatoria y triángulo de Pascal-Tartaglia

Las identidades notables siguientes:

Cuadrado de una suma

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{1.284}$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{1.285}$$

	Los elementos se repiten	Orden	Identificación	Número de grupos
Variaciones	No $(n < m)$	Sí	$V(n,m)$	$V(n,m) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
Permutaciones	No $(n = m)$	Sí	$P(m)$	$P(m) = m!$
Combinaciones	No $(n \leq m)$	No	$C(m,n) = \binom{m}{n}$	$C(m,n) = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$
Combinaciones con repetición	Sí $(n \leq m)$	No	$CR(m,n) = \binom{m+n-1}{n}$	$CR(m,n) = \dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$
Variaciones con repetición	Sí, pueden	Sí	$VR(m,n)$	$VR(m,n) = m^n$
Permutaciones con repetición	Sí, pueden	Sí	$PR(p,q,r)$	$P(p,q,r) = \dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1.286}$$

se recuperan como resultado del triángulo de la binomial. Para otras potencias, existe una fórmula más general denominada identidad binomial. Para recordar las identidades notables y los llamados coeficientes binomiales del desarrollo de $(a+b)^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se usa el llamado triángulo de Pascal o Tartaglia:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(x+y)^0 & 1 \\
(x+y)^1 & 1x + 1y \\
(x+y)^2 & 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
(x+y)^3 & 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
(x+y)^4 & 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \\
(x+y)^5 & 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5
\end{array}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

1.23 Aplicaciones y funciones. Estructuras algebraicas

Aplicación y función

Un objeto $f : A \to B$ es una aplicación o función si para todo elemento $a \in A$ le corresponde un único valor $f(a) = b \in B$. a se llama elemento original o antiimagen. b es la imagen. A es el dominio, $f(A) = B$ es el recorrido o rango de A. f es la aplicación, función o functor (teoría de categorías).

Existen varios tipos de aplicaciones:

- Inyectiva: si $f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$. Elementos distintos tienen imágenes distintas.
- Exhaustiva(sobreyectiva): si todo $b \in B$ tiene por lo menos una antiimagen $f(A) = B$.
- Biyectiva. Cuando f es a la vez inyectiva y exhaustiva.

¿Cuántas aplicaciones pueden establecerse entre dos conjuntos A, B? Supongamos que hay n elementos en A y m elementos en B. Entonces:

- Número de aplicaciones inyectivas: $N_I = V(m, n)$.
- Número de aplicaciones exhaustivas: $N_E = PR(p, q, r)$, donde $(p + q + r) = n$.
- Número de aplicaciones biyectivas: $N_B = P(m) = P(n) = n!$.
- Número de aplicaciones cualesquiera: $VR(m, n)$.

Si C es un conjunto, y denotamos por $(+, \cdot)$ dos operaciones en el conjunto. Hay varias estructuras algebraicas básicas:

- Grupo $G(C, +)$. Suponiendo que $+$ es una operación asociativa, con elemento neutro y simétrico.
- Grupo abeliano. Cuando además de ser grupo, $+$ es una operación conmutativa.
- Cuerpo $(C, +, \cdot)$. Si $(C, +)$ es un grupo abeliano, y además $(C - \{0\}, \cdot)$ es un grupo, y $\cdot$ es distributivo respecto de la operación $+$.
- Anillo $(C, +, \cdot)$. Si $(C, +)$ es grupo abeliano, $\cdot$ es asociativo, $\cdot$ es distributivo respecto de la operación $+$.
- Espacio vectorial sobre K, donde $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son los números reales o complejos. Entonces, $V(+, \cdot)$ es espacio vectorial si y sólo si: $(V, +)$ es grupo abeliano, y además:
  - $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$.
  - $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\alpha \cdot \vec{v}) + (\alpha \cdot \vec{w})$.
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$.
  - $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

  y donde $\vec{v}, \vec{w}$ son vectores en V, y α, β son escalares en K.

1.24 Probabilidad

Espacio muestral

Un conjunto de sucesos o resultados es un conjunto de valores $\Omega = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de forma que

$$p : \Omega \to [0, 1] \tag{1.287}$$

tal que $\sum_i p(x_i) = 1$. Un suceso es un $T \subset \Omega$. $p(T) = \sum_i p(x_i)$ para todo $x_i \in T$.

Propiedades del espacio muestral y vacío

$$p(\Omega) = 1 \tag{1.288}$$

$$p(\emptyset) = 0 \tag{1.289}$$

$$p(T \cup S) = p(T) + p(S) \tag{1.290}$$

cuando $T \cap S = \emptyset$ (incompatibles). Además, el suceso contrario u opuesto o complementario a T, denotado por $\overline{T}$ es aquel que verifica

$$\overline{T} = \Omega - T, \quad p(\overline{T}) = 1 - p(T) \tag{1.291}$$

La regla de la suma dice que:

$$p(T \cup S) = p(T) + p(S) - p(T \cap S) \tag{1.292}$$

Si dos sucesos son independientes, entonces $p(T \cap S) = p(T)p(S)$.

Regla de Laplace

Para resultados repetidos y equiprobables, la regla de Laplace señala que la probabilidad de un suceso T es el cociente de casos favorables entre los casos posibles:

$$p(T) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \tag{1.293}$$

Probabilidad condicionada y teorema de Bayes

La probabilidad condicionada de un suceso D por un suceso Y, es la probabilidad:

$$p(D|Y) = \frac{p(D \cap Y)}{p(Y)} \tag{1.294}$$

El teorema de Bayes, afirma que la probabilidad de un suceso D_i de una serie de sucesos $D_i = (D_1, \ldots, D_n)$ condicionada por un suceso Y se calcula mediante la expresión:

$$p(D_i|Y) = \frac{p(D_i)p(Y|D_i)}{p(D_1)p(Y|D_1) + \cdots + p(D_n)p(Y|D_n)} \tag{1.295}$$

Nótese que $p(D|Y) \neq p(Y|D)$ en general.

1.25 Progresiones y sucesiones

Progresiones aritméticas

Término general: $a_n = nd + b$. $d = a_{n+1} - a_n$ es la diferencia de dos términos consecutivos. Además:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1.296}$$

y

$$a_n = a_m + (n-m)d \tag{1.297}$$

Además la suma de n términos de la progresión aritmética es igual a

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{1.298}$$

El producto de n términos de una sucesión o progresión arimética es

$$P = \prod_{i=1}^{n} a_i = d^n \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{d} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)} \tag{1.299}$$

Progresiones geométricas

Término general: $a_n = a_1 r^{n-1}$. $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es la razón de dos términos consecutivos. Además, si $r > 1$ la progresión es creciente, si $0 < r < 1$, la progresión es decreciente, supuesto $a_1 > 0$. Si, por el contrario, $a_1 < 0$, entonces si $r > 1$ la progresión es decreciente, si $0 < r < 1$ es decreciente. Para cualquier signo de a_1, si $r = 1$ la progresión es constante, y si $r < 0$, entonces la sucesión es alternada.
Además la suma de n términos de la progresión geométrica es igual a

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{1.300}$$

que si $|r| < 1$ produce

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \tag{1.301}$$

El producto de n términos de una sucesión o progresión geométrica es

$$P = \prod_{i=1}^{n} a_i = (\sqrt{a_1 \cdot a_n})^n \tag{1.302}$$

si $a_1, r > 0$.

Sucesión

Una sucesión es una aplicación $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, donde $a_n = S(n)$ es el término general. Una sucesión se dice que es creciente si $a_n \leq a_{n+1} \forall n$. Se dice que es decreciente si $a_n \geq a_{n+1} \forall n$. Se dice monótona si es creciente o decreciente. Una sucesión está acotada inferiormente si y sólo si $a_i \geq m \forall i$, siendo m la cota inferior. Una sucesión está acotada superiormente si y sólo si $a_i \leq M \forall i$, siendo M la cota superior. Una sucesión se dice tiene límite en el infinito si $\lim_{n\to\infty} = L$. Entonces la sucesión tiene límite único y está acotada.

Las sucesiones se pueden clasificar en convergentes (acotadas con límite), oscilantes (acotadas sin límite), o divergentes (no acotadas sin límite finito. El número e es el límite de la sucesión natural

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281\cdots$$

Interés simple y compuesto

Sea C un capital inicial. Y sea C_n es capital final con un interés r en tanto por uno. Entonces, el interés simple produce un capital

$$C_n = C(1+nr) \tag{1.303}$$

y el interés compuesto

$$C_n = C(1+r)^n \tag{1.304}$$

Anualidades de capitalización y amortización

Las anualidades de capitalización A son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de n años.

$$A = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)-1\right]} \tag{1.305}$$

Las anualidades de amortización a son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, n de años.

$$a = \frac{Dr(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \tag{1.306}$$

1.26 Geometría plana resumida

Vector: $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$.
Vector AB desplazamiento entre A y B: $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j}$.
Combinación lineal de vectores: $\vec{\omega} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$.
Una base de vectores es un conjunto linealmente independiente de vectores tales que cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de vectores. En el plano, una base cualquiera son dos vectores no paralelos. Si la base es de vectores ortogonales (perpendiculares) y unitarios(módulo o longitud uno), se dice entonces que la base es ortonormal.
La pendiente de una recta en el plano es la cantidad:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Una recta horizontal en el plano tiene pendiente $m = 0$. Una recta de pendiente $m = 1$ es bisectriz del primer y tercer cuadrante. Una recta de pendiente $m = -1$ es bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.
Sean dos rectas en el plano: $r : AX + By + C = 0$, $s : A'x + B'y + C' = 0$, entonces:

- Las rectas son paralelas si y sólo si $m = m' = A/A' = B/B'$. Si además, $C/C' = m$, son coincidentes.

- Las rectas son secantes en un punto si $m \neq m'$, i.e., $A/A' \neq B/B'$.

Producto escalar en el plano: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, donde φ es el ángulo formado entre los dos vectores. El módulo es la longitud del vector: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.
Componentes de un vector $v_x = v\cos\varphi$, $v_y \sin\varphi$, donde v es el módulo del vector.
La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es:

$$p(\vec{a} \to \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Un vector unitario a un vector se calcula dividiendo por el módulo del vector:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Otras fórmulas:

- Distancia entre dos puntos:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

- Distancia entre punto y una recta:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Distancia entre dos rectas. Si no son paralelas y se cortan $d(P, r) = 0$ por convención. Si son paralelas, $d(r, r') = d(P, r')$, con $P \in r$.

- Ángulo entre dos rectas: $r : Ax + By + C = 0$, $s : A'x + B'y + C' = 0$,

$$\cos\alpha = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{m - m'}{1 - mm'}$$

- Rectas perpendiculares en el plano si y sólo si: $AA' + BB' = 0$, $mm' = -1$, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0$.
  Rectas perpendiculares por un punto (x_p, y_p): $B(x - x_p) - A(y - y_p) = 0$

1.27 Algunas funciones especiales

1.27.1 Distribuciones y funciones delta

La función delta de Dirac es una función generalizada o distribución sobre la recta real que es cero en todas partes salvo en el origen (o un punto) donde es infinita:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

y también está ligada a satisfacer la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Esto es meramente heurístico. La delta de Dirac no es una función en el sentido usual sobre los números reales o complejos ya que ninguna función normal cumple sus propiedades. La función delta de dirac solamente puede ser definida en el sentido de las distribuciones como una medida (densidad). Si como medida, conceptualizamos la función delta como un punto ideal de masa o carga en el origen, $\delta(A)$ representa la masa o carga contenida en el conjunto A. Una función delta se define entonces más bien como una convolución o su integración frente a una función de prueba. Formalmente, se necesita la maquinaria de la integral de Lebesgue para justificar su existencia. La integral de Lebesgue con respecto a una medida δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta\{dx\} = f(0)$$

para toda funcion continua y *de soporte compacto.* La medida δ no es absolutamente continua con respecto a la medida Lebesgue (no tiene derivada de Radon-Nikodym), luego no hay realmente una función usual con la propiedad formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

Por ende, este resultado es un abuso de notación o formalidad, y no una integración estándar de Riemann o de Lebesgue. Como medida sobre $\mathbb{R}$, la medida delta es una probabilidad con función cumulativa igual a la función paso de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

$$H(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(t)\,\delta\{dt\} = \delta(-\infty, x]$$

o más formalmente

$$\delta\big((-\infty, x]\big)$$

La integral de una función delta frente a una función continua puede ser entendida como una integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\{dx\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dH(x)$$

Todos los momentos de la función delta superiores al primero son nulos. En particular, la función característica de probabilidad y generatriz de momentos son ambos igual a la unidad.

Otras definiciones equivalentes de la función delta:

$$\delta[\varphi] = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)H(x)\,dx.$$

Intuitivamente, la integración por partes produce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)H'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx,$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)H(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dH(x)$$

Generalizaciones:

- La función delta en el espacio euclidiano N-dimensional

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\delta\{d\mathbf{x}\} = f(\mathbf{0})$$

- Como medida multidimensional

$$\delta(\vec{x}) = \delta^N(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_N)$$

Propiedades:

- Scaling:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, \frac{du}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$$

- Simetría:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

que es una función homogénea de grado -1.

- Traslación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-T)\, dt = f(T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x)\delta(x-\eta)\, dx = \delta(\eta - \xi)$$

- Composición:

$$\int_{\mathbf{R}} \delta\big(g(x)\big) f\big(g(x)\big) |g'(x)|\, dx = \int_{g(\mathbf{R})} \delta(u) f(u)\, du$$

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(g(x))\, dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

y donde la suma se extiende a todas las raíces de $g(x)$, asumidas simples por simplicidad.

- Multidimensionales

$$\delta(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha|^{-n}\delta(\mathbf{x})$$

$$\delta(\rho \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(g(\mathbf{x}))\, f(g(\mathbf{x}))\, |\det g'(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} = \int_{g(\mathbf{R}^n)} \delta(\mathbf{u}) f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\, \delta(g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_{g^{-1}(0)} \frac{f(\mathbf{x})}{|\nabla g|}\, d\sigma(\mathbf{x})$$

$$\delta_S[g] = \int_S g(\mathbf{s})\, d\sigma(\mathbf{s})$$

$$-\int_{\mathbf{R}^n} g(\mathbf{x})\, \frac{\partial 1_D(\mathbf{x})}{\partial n}\ d\mathbf{x} = \int_S g(\mathbf{s})\ d\sigma(\mathbf{s}),$$

- Transformada de Fourier

$$\widehat{\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} \delta(x)\, dx = 1$$

- Derivadas distribucionales

$$\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0)$$

y para la derivada k-ésima

$$\delta^{(k)}[\varphi] = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\delta(-x) = \frac{d}{dx}\delta(x) \tag{1.307}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{1.308}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \tag{1.309}$$

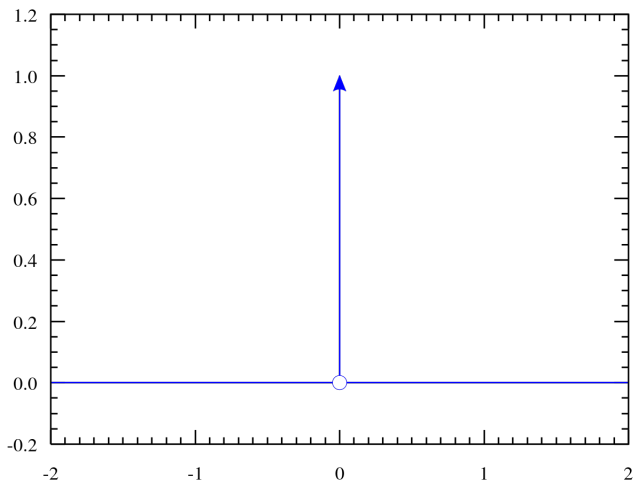
- Derivadas parciales: sobre un conjunto abierton n-dimensional, por ejemplo en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, la distribución delta centrada en el punto a

$$\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$$

y en el espacio de todas las funciones de soporte compacto en U, si α denota un multiíndice de derivadas parciales, el operador ∂^α actuando sobre δ_a, i.e., $\partial^\alpha \delta_a$ resulta

$$\langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_a, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x)\Big|_{x=a} \text{ for all } \varphi \in S(U)$$

Esto es, la derivada α-ésima de δ_a es la distribución cuyo valor sobre cualquier función de prueba φ es la derivada α-ésima con un signo apropiado positivo o negativo. Las primeras derivadas parciales de la función delta se pueden imaginar como potenciales de doble capa a lo largo de los planos de coordenadas. Más generalmente, la derivada normal de una simple capa sobre una superficie es una doble capa sobre la superficie, y representa un monopolo magnético. Derivadas de alto orden de la función delta se conocen en Física como multipolos. En Matemáticas, son los bloques naturales de distribuciones con soporte puntual de funciones continuas.



1.27.2 Función zeta de Riemann

La función zeta de Riemann es la función compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p=prime} (1 - p^{-s})^{-1}$$

1.27.3 Función de Lambert

La función $W(x)$ de Lambert es la función inversa de

$$f(x) = xe^x = y$$

1.28 Criterios de convergencia de series y productos

Test del cociente

(Ratio test, criterio de D'Alembert). Supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \tag{1.310}$$

si $r < 1$ la serie es absolutamente convergente. Si $r > 1$ la serie diverge. Si $r = 1$ este test no puede decidir la convergencia.

Test de la raíz

El criterio de la raíz (o criterio de la raíz n-ésima de Cauchy) es el siguiente: sea

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

donde (lim sup) denota el límte superior (posiblemente infinito), si el límite existe, entonces tiene el mismo valor. No obstante, si $r < 1$, la serie converge, si $r > 1$ la serie diverge, y si $r = 1$, este test también no permite decidir. Este test es más fuerte que el criterio del cociente. Si el criterio del cociente determina la convergencia o divergencia de una serie infinita, también lo hará el criterio de la raíz pero no al revés. Por ejemplo, la serie

$$1 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.25 + 0.25 + 0.125 + 0.125 + ... = 4$$

converge según el test de la raíz pero no con el test del cociente.

Test integral

Una serie puede ser comparada con una integral para establecer la convergencia o divergencia. Sea$f : [1, \infty) \to R_+$ una función no negativa monótonamente decreciente tal que $f(n) = a_n$, entonces, si:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx < \infty$$

entonces la serie converge. Pero si la integral diverge, la serie también. En otras palabras, la serie a_n converge si y solo si la integral converge.

Test de comparación

Si la serie $\sum_{n=1}^\infty b_n$ es absolutamente convergente y $|a_n| \leq |b_n|$ para n suficientemente grande, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge absolutamente.

Criterio del límite

Si $\{a_n\}, \{b_n\} > 0$, i.e., cada elemento de dos series es positivo, y el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y es finito, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Criterio de condensación de Cauchy

Sea $\{a_n\}$ una sucesión positiva no creciente. Entonces la suma $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la suma $A^* = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge. Además, si converge, entonces se tiene que $A \leq A^* \leq 2A$.

Test de convergencia absoluta

Sean las hipótesis verdaderas:

- $\sum a_n$ es una serie convergente.
- $\{b_n\}$ es una sucesión monótona.
- $\{b_n\}$ está acotada.

Entonces $\sum a_n b_n$ es también convergente. Nota: toda serie absolutamente convergente converge.

Test de series alternadas

También llamado criterio de Leibniz, supongamos que las siguientes condiciones son dadas:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $\forall n, a_{n+1} \leq a_n$.

Entonces, $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n$ y $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ son series convergentes.

Criterio de Dirichlet

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y b_n es una sucesión de números complejos que satisfacen las condiciones:

- $a_n \geq a_{n+1}$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M$, donde M es alguna constante.

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Criterio de Raabe-Duhamel

Sea $b_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Si

$$L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

existe, entonces:

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no podemos decidir la convergencia.

Alternativamente, si una serie a_n de números reales, y $b > 1$, con $K \in \mathbb{N}$ existente tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{b}{n} \forall n > K$$

entonces la serie es convergente.

Criterio de Bertrand

Sea a_n una sucesión de números positivos. Definamos

$$b_n = \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)$$

Si existe

$$L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

entonces:

- Si $L > 1$, la serie converge.
- Si $L < 1$, la serie diverge.
- Si $L = 1$, no podemos decidir la convergencia.

Convergencia de productos

Mientras los tests anteriores enfrentan series infinitas, también pueden usarse para mostrar convergencia o divergencia de productos infinitos. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos. El producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Similarmente, si $0 < a_n < 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ se acerca a un límite no cero si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Esto puede demostrarse tomando logaritmos del producto, y usando el límite o criterio de comparación.

Chapter 2

Física

Las Matemáticas son un *lenguaje*. Galileo Galilei dijo tiempo ha que la Naturaleza estaba escrita en lenguaje matemático. Quizás el mayor descubrimiento de todos para la Física y las Ciencias Naturales. Wigner indicó que la eficacia de las Matemáticas para describir el mundo le parecía poco razonable. Las ventajas del lenguaje matemático para describir el mundo parecen evidentes:

- Brevedad. El lenguaje matemático es breve o conciso, con una notación adecuada.
- Precisión y exactitud. Las Matemáticas son quizás las más exactas de todas las Ciencias de la Naturaleza. Son también muy precisas cuando se afinan sus instrumentos.
- Universalidad. Las Matemáticas sirven para modelar sistemas muy diferentes y diversos. Esto les confiere una propiedad de universalidad difícil de encontrar en otras Ciencias. ¿Es también multiversal?

Vamos a escribir ejemplos de ecuaciones de la Física-Matemática. Quizás, hoy día la Física y las Matemáticas están condenadas a unirse en una Ciencia común, la Fismática (idea propuesta por E. Zaslow en el Clay Institute):

$$S_{NG} = -T_p \int d^{p+1}\xi\sqrt{-g} \qquad S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x R$$

$$\partial_\beta\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu\right) = 0$$

$$PV = nRT, \quad dU = \delta Q + \delta W, \quad dS \geq 0$$

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{F} = -k\Delta\vec{r}, \quad \vec{F}_N = -G_N\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r, \quad \vec{F}_N = -mg\vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K_C\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r, \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}_N}{m} = -G_N\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

$$E = mc^2, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad H\Psi = E\Psi, \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{m\gamma v}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right), \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{j} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad L_{SM} = -\frac{F^2}{4} - \frac{G^2}{4} + i\hbar\overline{\Psi}\gamma\cdot D\Psi + h.c. - Y\phi\overline{\Psi}\Psi + h.c - |D\phi|^2 - V_H(\phi)$$

$$Z = \int [DgDADD\Psi D\phi] \exp\left(i \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_P^2}{2}R - \frac{G^2}{4} + i\overline{\Psi}\gamma\cdot D\Psi - Y\phi\overline{\Psi}\Psi - |D\phi|^2 - V_H(\phi)\right]\right)$$

$$\{Q,\overline{Q}\} = 2\gamma^\mu P_\mu, \quad \{Q,Q\} = \epsilon Z, \quad [Z,Q] = 0$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2} + \cdots + (C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_p})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

$$4D : \{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2}$$

$$11D : \{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2} + (C\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5})_{\alpha\beta}Z_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}$$

$$E_c(NR) = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_c(Rel) = E_t - mc^2 = mc^2(\gamma-1), \quad [X,P] = i\hbar, \quad U = 0, \quad \Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad P = \frac{dE}{dt} = F\cdot v, \quad (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V)\Psi = E\Psi, (i\hbar\gamma\cdot D - mc)\Psi = 0$$

$$\left[\{a_\alpha, a_\beta^+\}, a_\gamma\right] = -2\delta_{\beta\gamma}a_\alpha, \quad e^{\pi i} + 1 = 0, \quad e^{2\pi i} = 0 + 1$$

$$\{a_\alpha, a_\alpha^+, \{a_\alpha, a_\beta\}, \{a_\alpha, a_\beta^+\}, \{a_\alpha^+, a_\beta^+\}\}_{\alpha,\beta=1,2,\cdots,n}$$

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}, \quad \partial_\sigma X_L^\mu(\sigma,\tau) + \partial_\tau X_R^\mu(\sigma,\tau) = 0, \quad \partial_\tau^2 X^\mu(\sigma,\tau) - \partial_\sigma^2 X^\mu(\sigma,\tau) = 0$$

2.1 Símbolos matemáticos

Generalmente, en Matemáticas o Física usamos letras de alfabetos (normalmente latino o griego, y de otros excepcionalmente, cuando es necesario) y símbolos de operadores matemáticos. Para los operadores:

$$=, \neq, \approx, \simeq, \cong, \sim, \propto, >, <, \geq, \leq, \gtrsim, \lesssim, \equiv, \doteq, \pm, \mp$$

$$D, \Delta x, \nabla, \Box, |x|, \|, \sum_i x_i, +, \cdot, -, :, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r}, f(t), A_{ij}, A_{i_1\cdots i_n}, \rightarrow, \vec{A}, \vec{\vec{A}}, \overleftrightarrow{A}, \ldots$$

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}, \int dt, \int_a^b ()dt, a\cdot b, a\times b, a\wedge b, ab, \frac{a}{b}, a^x, \log_b x, \sqrt[n]{x}$$

A continuación, una breve colección de identidades que todo el mundo debería saber:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{d}{c} = \frac{ac \pm bd}{bc}$$

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \frac{ac}{bd} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$x^n x^m = x^{n+m}$$
$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$
$$(x^n)^m = x^{nm}, (x^n)^m \neq x^{n^m}, \frac{1}{x^n} = x^{-n}, x^0 = 1$$

Resolver ecuaciones cuadráticas (o bicuadráticas) completas: $ax^2 + bx + c = 0$.
Completas:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Incompletas:

$$ax^2 = 0 \to x = 0$$
$$ax^2 + bx = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -b/a \end{cases}$$
$$ax^2 + c = 0 \to x = \pm\sqrt{-c/a}$$

Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = h^2$.
Además, el conocimiento del área y volumen de figuras planas y multidimensionales es útil.
Ecuaciones de rectas y planos en 2d. En 2d, las rectas tienen diversas ecuaciones (vectorial, paramétrica, contínua, punto-pendiente, la general, explícita y segmentaria):

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(a, b)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}$$
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$AX + BY + C = 0$$
$$y = mx + n$$
$$\frac{X}{u} + \frac{Y}{v} = 1$$

Ecuación de una circunferencia de radio R centrada en (a, b):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ecuación de una parábola: $y = ax^2 + b$.
Ecuación de una hipérbola: $xy = c$.
Ecuación de una elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

En general, para una curva cuadrática plana, se tiene que:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$$

También existen curvas cúbicas, con forma general:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + H = 0$$

O también curvas elípticas planas, con forma general:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

y más generalmente curvas (hiper)elípticas con $y^2 = P(x)$. Existen otras fórmulas para politopos en nd, para positroides, y también para apeirógonos, apeiroedros, o también para el amplituedro:

$$\boxed{\mathcal{M}_{n,k,L}\left[Z_a\right] = \mathrm{Vol}\left[\mathcal{A}_{n,k,L}\left[Z_a\right]\right]}$$

y

$$\mathcal{P} = |\mathcal{A}|^2$$

Además, conviene saber el uso de la circunferencia goniométrica o unidad, el sistema de radianes y gradianes (o gones): $2\pi\ rad = 360° = 400^g$.
Teorema del seno:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{2.1}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{2.2}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{2.3}$$

2.2 Escalares, vectores y más allá

En Física hay diferentes estilos de magnitudes. Las dos más básicas son

Escalares: magnitudes solamente definidas por un número o valor. Ejemplos son la longitud de un objeto o el espacio recorrido, la temperatura, la masa, la intensidad de corriente eléctrica, la cantidad de sustancia, el tiempo, la intensidad luminosa, la densidad, la carga eléctrica, la potencia,...

Vectoriales: magnitudes definidas por un número (magnitud o módulo), una dirección, un sentido y un punto de aplicación u origen. Requieren varios números para su especificación precisa.

Las magnitudes escalares suelen tener dimensiones físicas en un determinado sistema de unidades, y un símbolo de dimensión. Por ejemplo, las magnitudes fundamentales del S.I:: masa (M), tiempo (t), temperatura Θ, longitud L, cantidad de sustancia n, intensidad de corriente eléctrica I, intensidad luminosa I_L. Luego las magnitudes derivadas tienen también símbolos, como el trabajo W, energía E, presión P, carga eléctrica Q, pero hay que recordar que las letras en los diferentes alfabetos son finitas, de ahí usar el alfabeto griego, además del latino, y a veces otros como el ruso o el hebreo.

Ejemplos de magnitudes vectoriales: posición y desplazamiento $\vec{r}, \Delta\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$, aceleración $\vec{a}$, fuerza $\vec{F}$, campo eléctrico $\vec{E}$, campo gravitacional no relativista $\vec{g}$.

Las magnitudes básicas del S.I. son:

- Longitud (L), unidad metro (m).
- Masa (M), unidad el kilogramo (kg).
- Tiempo (T), unidad el segundo (s).
- Temperatura absoluta Θ, unidad el kelvin (K).
- Cantidad de sustancia n, unidad el mol (mol).
- Intensidad de corriente eléctrica I, unidad el amperio (A).
- Intensidad luminosa I_L, unidad la candela (cd).

Estas 7 magnitudes básicas, y sus unidades, usan 7 constantes de la naturaleza para su definición: c (velocidad de la luz), h (constante de Planck), $\Delta t(Cs-133)$, k_B (constante de Boltzmann), N_A (número de Avogadro), e (carga eléctrica elemental del electrón), y K_{cd} (eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540 THz).

La expresión de resultados en Física o Ciencias experimentales usa la notación científica

$$a.xyz\cdots 10^{\pm n}$$

donde $a, n \neq 0$. El número de cifras significativas de un resultado coincide conel número de cifras de una cantidad expresada en notación científica.

Para múltiplos y submúltiplos de unidades en cualquier sistema de medida, se suelen usar unos prefijos universales. Las potencias de 10 positivas son $da, h, k, M, G, T, P, E, Z, Y$ y las potencias de 10 negativas son $d, c, m, \mu, n, p, f, a, z, y$. Un resumen de estas potencias en forma de tabla:

METRIC PREFIXES			
Power of Ten	Exponential Notation	Metric Prefix	Abbreviation
septillion	10^{24}	yotta	Y
sextillion	10^{21}	zetta	Z
quintillion	10^{18}	exa	E
quadrillion	10^{15}	peta	P
trillion	10^{12}	tera	T
billion	10^{9}	giga	G
million	10^{6}	mega	M
thousand	10^{3}	kilo	k
hundred	10^{2}	hecto	h
ten	10^{1}	deca	da
tenth	10^{-1}	deci	d
hundredth	10^{-2}	centi	c
thousandth	10^{-3}	milli	m
millionth	10^{-6}	micro	µ
billionth	10^{-9}	nano	n
trillionth	10^{-12}	pico	p
quadrillionth	10^{-15}	femto	f
quintillionth	10^{-18}	atto	a
sextillionth	10^{-21}	zepto	z
septillionth	10^{-24}	yocto	y

Table 2. Proposed prefixes for powers of ten larger than 24 and smaller than –24.

Power of ten	Prefix	Symbol	Origin
–27	xenno	x	Gr, ennea, nine
–30	weko	w	Gr, deka, ten
–33	vendeko	v	Gr, hendeka, eleven
–36	udeko	u	Gr, dodeka, twelve
27	xenta	X	Gr, ennea, nine
30	wekta	W	Gr, deka, ten
33	vendekta	V	Gr, hendeka, eleven
36	udekta	U	Gr, dodeka, twelve

Q1. Familiarization with prefixes and abbreviations.

10^n	Prefix	Abbreviation	10^n	Prefix	Abbreviation
10^0					
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{24}	yotta-	Y	10^{-24}	yocto-	y

Suppose, $x = ay^4$ where $a = 2.00$ ng/Pm. Determine the value of y when x = 16.0 (Zg fm^2)/(ms^3). Express the result in scientific notation and simplify the units.
(*Hint: Refer to the table above, and note that SI prefixes are never used to multiply powers of units. For example, the abbreviation cm^2 means (10^{-2} m)^2, not 10^{-2} m^2, and ns^{-1} is 1/ns or 10^9 s^{-1}, not 10^{-9}s^{-1}. Also note m that can stand for meter or for milli, depending on the context.*)

La magnitud de un vector o su módulo es en 2d:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

y en 3d

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y en D dimensiones:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{D} v_i^2}$$

Para $3d$ tendremos que:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \left(\lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\right)$$

Desigualdad triangular: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Proyecciones de las componentes de un vector en el plano:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{2.4}$$
$$v_x = v\cos\varphi \tag{2.5}$$
$$v_y = v\sin\varphi \tag{2.6}$$

En el espacio se usan cosenos directores:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{2.7}$$
$$v_x = v\cos\varphi_x \tag{2.8}$$
$$v_y = v\cos\varphi_y \tag{2.9}$$
$$v_z = v\cos\varphi_z \tag{2.10}$$

donde

$$\cos^2\varphi_x + \cos^2\varphi_y + \cos^2\varphi_z = 1$$

Relación que es extrapolable a cualquier dimensión como sigue:

$$\sum_{i=1}^{D}\cos^2\varphi_i = 1$$

Los vectores unitarios (módulo uno) y ortogonales entre sí de la base canónica son $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, aunque también se usan en ocasiones en nD como $\vec{e_i}, \vec{u_i}$.

Otras operaciones con vectores son el producto escalar y el producto vectorial (y también el producto exterior o externo). El producto escalar de dos vectores en la base canónica es trivialmente escrito como sigue:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

El producto vectorial se define como la expresión formal:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

que se define explícitamente con

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\,\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\vec{k}$$

y donde $\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} = \vec{k}$, también:

$$\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} = \vec{j}$$

En un espacio euclídeo existe un producto escalar canónico (también en un espacio pseudoeuclídeo riemanniano o complejo hermítico o pseudohermítico). En el caso del producto vectorial, éste existe solamente como tal estrictamente como producto binario en $3d$ y $7d$, como producto ternario en $8d$ y como producto $(n-1)-ary$ en nD. El producto externo $a\wedge b$ existe en cualquier dimensión para n factores es no nulo para $n \leq D$ en general. Existe una operación entre $p-formas$ en D dimensiones que las transforma en $(D-p)-formas$, mediante el denominado operador de Hodge (estrella $\star$). Las $p-formas$ son duales de los multivectores o $p-vectores$ formados externamente con el producto de p vectores y el producto $\wedge$.

El producto escalar tiene una serie de aplicaciones:

- Determinar la ortogonalidad o más generalmente el ángulo formado entre 2 vectores.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{2.11}$$

- Determinar la longitud o módulo de un vector.

$$L(\vec{v}) = |\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \tag{2.12}$$

- Calcular la proyección de un vector sobre otro.

$$\text{proy}(a \to b) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{2.13}$$

- Calcular un vector unitario a uno dado.

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{2.14}$$

✍ **Ejercicio 1**. Sean los vectores $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i}-8\vec{j}$, $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{i}-\frac{5}{2}\vec{j}$. Calcular:
a) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-2\vec{d}$, $\vec{a}+3\vec{c}$, $\vec{a}-2\vec{c}$,$\vec{a}+\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{d}$, $-\vec{a}+\vec{d}$.
b) $3\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $-\frac{1}{3}\vec{c}$, $4\vec{d}$, $-3\vec{a}+5\vec{c}$.
c) El módulo de los cuatro vectores: $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, |\vec{d}|$.
d) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{d}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot d$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$.
e) El ángulo que forman entre sí cada par de vectores.
f) Un vector perpendicular a cada uno de los 4 vectores dados.
g) Un vector unitario a cada uno de los 4 vectores dados.
h) Un vector unitario perpendicular a cada uno de los vectores dados.

✍ **Ejercicio 2**. Practica derivadas. Calcula la derivada de las funciones siguientes:
$f(t) = 8+\pi$
$f(t) = 8t$
$f(t) = -\frac{t}{2}$
$f(t) = -\frac{\pi}{3}t^2$
$f(t) = \dfrac{3\sqrt{14}t}{2}$
$f(t) = (8+t)^2$
$f(t) = (8+2t)^3$
$f(t) = (4-3t)^4$
$f(t) = (-1-3t^3)^{-2}$
$f(t) = \sin(3t+4)$
$f(t) = \cos(10t)$
$f(t) = 3+\pi^8-e-\sqrt{10}+100$
$f(t) = -10^{100}t$
$f(t) = t^2+5$
$f(t) = \frac{1}{t+8}$
$f(t) = 8t^3-5$
$f(t) = -10t^2-6t$
$f(t) = \frac{t^{11}}{10}-3t^5$

$f(t) = -\frac{8}{3}t$

Algunas propiedades útiles de la Trigonometría:

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \tag{2.15}$$
$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \tag{2.16}$$
$$\sin(90^\circ - \varphi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi \tag{2.17}$$
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi \tag{2.18}$$
$$\tan(-\varphi) = -\tan\varphi \tag{2.19}$$

2.3 El movimiento

El modelo de la partícula o punto material, el que se toma o aproxima la descripción de un cuerpo o sistema por un punto matemático abstracto, con dimensión cero, es habitual. En el espacio $\mathbb{R}^3$ ó $\mathbb{R}^2$ (espacio y plano euclídeos usuales), la descripción de un punto material viene dada por un vector de posición:

Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \text{en el espacio 3d}$$
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \text{en el plano 2d}$$

Más generalmente, el vector de posición de un punto material, con una dimensión del tiempo en nD, resulta ser

Vector de posición nD

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n$$

Para el caso en el que el número de dimensiones espaciales es infinita $D = \infty$:

Vector de posición dD y ∞D

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i |i\rangle = c^0 |0\rangle + \ldots + c^{d-1} |d-1\rangle \quad \text{(qdit, d-level q-state)}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |i\rangle = c^0 |0\rangle + \ldots + c^d |d\rangle + \cdots \quad \text{(q}\infty\text{it, quantum field)}$$

El módulo del vector de posición es

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{en el plano}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{en el espacio}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{\sum_{i}^{d} x_i^2}, \quad \text{en el espacio de d-dimensiones}$$

Se denomina *trayectoria* al conjunto de puntos por los que pasa un móvil u objeto/punto durante su movimiento. Se denomina *hodógrafo* a la trayectoria que sigue el vector velocidad $\vec{v}$ en su movimiento. En coordenadas polares (en el plano):

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi$$

$$\vec{r} = R\cos\varphi(t)\vec{i} + R\sin\varphi(t)\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

El vector desplazamiento es:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

o infinitesimalmente

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2 + dx^3\vec{e}_3 + \cdots + dx^n\vec{e}_n$$

Ahora podemos definir la velocidad, la aceleración y jerk medios:

Vector velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta x^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Vector aceleración media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta v^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

Vector jerk medio

$$\vec{j}_m = \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} = \frac{\Delta a^1}{\Delta t}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\Delta a^n}{\Delta t}\vec{e}_n$$

También podemos definir los vectores velocidad, aceleración y jerk instantáneos:

Vector velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dx^n}{dt}\vec{e}_n = v^1\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n$$

Vector aceleración instantánea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{dv^n}{dt}\vec{e}_n = a^1\vec{e}_1 + \cdots + a^n\vec{e}_n$$

Vector jerk instantáneo

$$\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{da^1}{dt}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{da^n}{dt}\vec{e}_n = j^1\vec{e}_1 + \cdots + j^n\vec{e}_n$$

Las unidades de la velocidad son m/s, de la aceleración m/s^2, y del jerk m/s^3. Pueden seguirse definiendo las sucesivas derivadas temporales también para el jerk, siempre y cuando estén matemáticamente bien definidas (lo que ocurre para cierta clase de funciones "suaves", continuas y diferenciables). También podemos definir el denominado "absement" (en castellano sería ausición o ausimiento):

$$\mathcal{A}(t) = \int \vec{r}(t)dt$$

y, asimismo, sus integrales sucesivas

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_2 = \int \mathcal{A}dt = \iint \vec{r}(t)d^2t$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}_3 = \int \mathcal{B}dt = \iiint \vec{r}(t)d^3t$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_4 = \int \mathcal{C}dt = \iiiint \vec{r}(t)d^4t$$

o en general

$$\mathcal{A}_n = \int \cdots \int \vec{r}(t)d^nt$$

Para $\vec{r}(t) = constante$, se tiene

$$\mathcal{A} = \vec{r} \cdot \Delta t = \vec{r} \cdot (t - t_0)$$

Las unidades de $\mathcal{A}_n$ son $m \cdot s^n$. La generalización del modelo de la partícula puntual a múltiples dimensiones es como sigue:

Vector de posición multitemporal

$$\vec{r}(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{t}) = X^i(t_k), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

Campo multitemporal

$$\phi(X^i, T^k) = \phi(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{t}), \quad i = 1, 2, \ldots, D; k = 1, 2, \ldots, N$$

Se puede hoy día también generalizar el modelo de la partícula puntual a objetos extensos denominados p-branas (o membranas de dimensión p). Para $p = 1$ tenemos una cuerda ($p = 0$ es la partícula por supuesto), para $p = 2$ una membrana bidimensional, etcétera. Así, en una dimensión temporal tendremos

Campo de la p-brana 1T

$$X^\mu(\Sigma, \tau) = X^\mu(\sigma^0, \ldots, \sigma^{p-1}, \tau)$$

Campo de la p-brana multitemporal NT

$$X^\mu(\overrightarrow{\Sigma}, \overrightarrow{\tau}) = X^\mu(\sigma^0, \ldots, \sigma^{p-1}, \tau^0, \ldots, \tau^{N-1})$$

También se podría pensar en otra generalización, denominada multivectorial, para los grados de libertad de las p-branas. En ese caso se define $X^{\mu_1 \cdots \mu_p} = X^{\overline{\mu}}(\Sigma, \tau)$. Esto lleva a cierta generalación "tensorial" (multivectorial, polivectorial) o "multiforma" de las magnitudes físicas.

Otras formas de dar las coordenadas adaptadas a ciertas simetrías en el espacio son las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y las coordenadas esféricas (r, θ, ψ):

Coordenadas cilíndricas

Sean $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $-\infty < z < \infty$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r\cos\theta \tag{2.20}$$
$$Y = r\sin\theta \tag{2.21}$$
$$Z = z \tag{2.22}$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y $z = Z$.

Coordenadas esféricas

Sean $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, entonces un punto arbitrario en el espacio se especifica mediante las coordenadas

$$X = r\sin\theta\cos\varphi \tag{2.23}$$
$$Y = r\sin\theta\sin\varphi \tag{2.24}$$
$$Z = r\cos\theta \tag{2.25}$$

La transformación inversa está dada por $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}}{Z}$ y $\varphi = \tan^{-1}\dfrac{Y}{X}$.

2.3.1 Ejercicios

1. Busca ejemplos de relaciones funcionales entre magnitudes físicas y químicas. Por ejemplo, $PV = nRT$, $E = mc^2$ ó $E = hf$.

2. Busca las definiciones de los siguientes tipos de magnitudes o clases de objetos matemáticos: pseudovector, pseudoescalar, multivector, polivector, espinor, multiespinor, twistor, hipertwistor, supervector, hipersupervector, número real (complejo, cuaterniónico, octoniónico), número de Clifford, supernúmero, matriz, tensor, pseudotensor, supermatriz, hipermatriz.

3. ¿Qué gráfica poseen las ecuaciones siguientes? $PV = const.$, $v = v_0 + at$, $x = \frac{1}{2}at^2$, $v = gt$, $x = x_0 - vt$, $y = y_0 + v_0 t - 1/2gt^2$.

4. Busca la historia y origen de los radianes, grados sexagesimales y los gradianes (o grados centesimales, gones).

5. Si $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = \hat{ab} = 60°$, halla el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

6. Sean los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcula: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$.

7. Sean los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Calcula: la suma de los vectores y el ángulo que forman.

8. Para los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{j} + 4\vec{k}$, determina el valor de $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{\omega} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{v}$, $\vec{a} \cdot \vec{\omega}$.

2.3.2 Ejercicios(II)

1. Sean las funciones:
$$y_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$y_2(t) = 3t^4 - 2t^2 + t$$
$$y_3(t) = 10\cos(2t)$$
$$y_4(t) = 5\sin(t/2 + \pi/3)$$
Calcula la derivada de cada una de ellas y', así como las derivadas sucesivas y'' e y'''.

2. Si una fuerza tiene un valor de 100N, formando un ángulo φ con el eje X, ¿cuánto valen las componentes de la fuerza F_x, F_y?

3. Busca información sobre los posibles significados geométricos de la derivada de una función. Comenta los hallazgos.

4. Para el vector $\vec{r} = (3t^2 - 2t)\vec{i} + (5t^3/3 - 5t)\vec{j}$m, determina su derivada primera y segunda.

5. Para los vectores:
$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j} + kt\vec{k}$$
determina su velocidad, aceleración y jerk.

6. Define radián e investiga las variantes del concepto de movimiento, espacio y tiempo a través de la historia de la Física y la Filosofía. ¿Cuáles son los prerrequisitos para una definición de movimiento en el espacio-tiempo? Indicación: $s = \varphi R$.

Movimiento

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{r}(t_B) = \vec{r}(t_A), \quad \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r} \neq 0 \rightarrow \vec{r}(t_B) \neq \vec{r}(t_A), \quad \text{movimiento}$$

Esta definición es extrapolable a un conjunto arbitrario de puntos materiales $\vec{r}_i$. Extendida a múltiples dimensiones del tiempo, es posible que las diferentes proyecciones sobre los diferentes vectores del tiempo puedan diferir. En tal caso, el concepto de reposo está restringido a subvariedades de tiempo o "ciertas ventanas" o ejes del tiempo.

Movimiento multitemporal

Se denomina movimiento al cambio o desplazamiento del vector de posición de un objeto respecto de un sistema de referencia. Se dice que un objeto está en *reposo* cuando el desplazamiento es nulo, y en movimiento en caso contrario.

$$\Delta\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) = \vec{r}(\vec{t}_A) \leftrightarrow \vec{r}(t_{A1}, \ldots, t_{AN}) = \vec{r}(t_{B1}, \ldots, t_{BN}), \quad \text{reposo}$$

$$\Delta\vec{r} \neq 0 \rightarrow \vec{r}(\vec{t}_B) \neq \vec{r}(\vec{t}_A), \quad \text{movimiento}$$

La extensión de este concepto de movimiento a partículas u objetos extensos, lleva a también considerar la variación o fluctuación de las dimensiones espaciales. Es importante notar que la noción de velocidad es sutil con dimensiones múltiples o sin ella. De hecho hay generalizaciones en el cálculo del concepto de derivada como la diferenciación fraccional o la diferentegración que hacen tal concepto más complicado y sofisticado, además de que para cierta clase de números importa el tipo de "número" que soportan las magnitudes. Así, aunque consideramos el tiempo "real", éste podría ser complejo o hipercomplejo en general, o incluso ser multivectorial. En general, el ritmo de cambio del desplazamiento respecto del tiempo es la velocidad, el ritmo de cambio de la variación de la velocidad es la aceleración y así sucesivamente. La posición puede considerarse el ritmo de cambio del "absement" o "ausición" respecto del tiempo.

Otras formas de dar las coordenadas de un punto en el espacio que hemos mencionado en cuadros antes involucran otros vectores unitarios (en el plano tenemos las cartesianas y polares) son las coordenadas cilíndricas y las esféricas. Para las coordenadas cilíndricas:

$$R : 0 \leq R < \infty \tag{2.26}$$
$$\varphi : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{2.27}$$
$$z : -\infty < z < \infty \tag{2.28}$$

donde

$$\vec{r}(t) = R\cos\varphi\vec{e}_r + R\sin\varphi\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z$$

Para coordenadas esféricas tendremos:

$$R : 0 \leq R < \infty \tag{2.29}$$
$$\theta : 0 \leq \theta \leq \pi \tag{2.30}$$
$$\varphi : 0 \leq \varphi < 2\pi \tag{2.31}$$

donde

$$\vec{r}(t) = R\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_r + R\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_\theta + R\cos\theta\vec{e}_\varphi$$

Las dimensiones físicas de la velocidad son LT^{-1}. En general no vale dividir un vector entre otro vector (hay sin embargo una generalización del álgebra vectorial que permite dividir en algunas dimensiones). Además,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y donde la velocidad en el plano se obtiene con $v_z = 0$. Ahora unas propuestas de ejercicios.

Ejercicio 1. Si me desplazo del punto A(2,1) al B(5,7), halla el desplazamiento y el espacio recorrido supuesto rectilíneo el movimiento.

Ejercicio 2. Sea el vector $\vec{r} = 5t\vec{i} + 2t\vec{j}$. Escribe las ecuaciones paramétricas del movimiento. Halla la velocidad media en el intervalo de 0 a 5 segundos, y en el intervalo de 0 a 10 segundos. Finalmente, halla la velocidad media en el intervalo de 5 a 10 segundos. ¿Qué concluyes?

Ejercicio 3. Sea $\vec{r} = (2t^2 + 2)\vec{i} + 3\vec{j}$. Halla el desplazamiento entre 0 y 10 segundos, y la velocidad media en el intervalo de 0 a 10 segundos. ¿Es constante?

Ejercicio 4. Sean las siguientes gráficas, en la figura 1, indica si piensas representan movimientos.

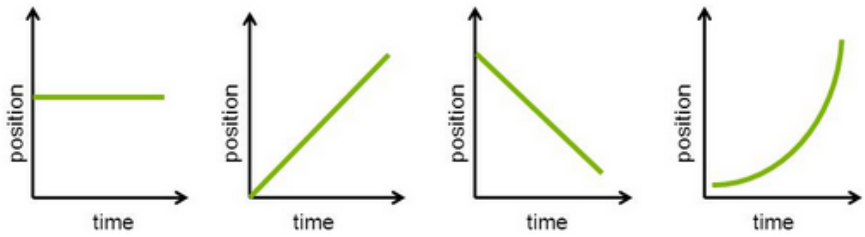


Figure 2.1: Diagramas espacio vs. tiempo.

La idea de velocidad media conlleva un promedio. Pero la velocidad puede cambiar en cada instante, supuesto que podemos dividir infinitesimalmente el tiempo. Esto es el origen del cálculo infinitesimal (diferencial e integral) de Newton y Leibniz. Newton llamó al cálculo de derivadas cálculo de fluxiones de fluentes. Así, la derivada es el cociente de las razones últimas evanescentes o gradiente/cociente de dos cantidades infinitesimales, esto es, el cambio instantáneo de dos números que tienden a cero. Leibniz usó un lenguaje más transparente que es el que usamos hoy día. También, existe la pregunta de si este cociente puede ser arbitrariamente pequeño realmente, y si la velocidad (o la posición) pueden realmente tomar cualquier valor grande o pequeño arbitrario. Clásicamente, la celeridad o valor del módulo de la velocidad puede ser arbitrario. En Física Relativista Especial tenemos la limitación de la velocidad de la luz (o del espacio-tiempo). Finalmente, en cuántica, es posible que debido a las fluctuaciones cuánticas el valor cero de la velocidad carezca de significado debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Además, consideraciones generales, que funden gravedad con la relatividad y la física cuántica, llevan generalmente a pensar que existe una longitud última fundamental denominada longitud de Planck $L_p \sim 10^{-35}m$ y un tiempo mínimo fundamental análogo llamado tiempo de Planck $t_p \sim 10^{-43}s$. Las desigualdades $\Delta x \geq L_p$ y $\Delta t \geq t_p$ llevan asociada cierta carga de misterio, pues se piensa que por debajo de esas escalas carece de significado el propio concepto de espacio y de tiempo. Por ende, aunque son muy pequeños, cabe preguntarse qué significado tendría el propio "espacio" o "tiempo" por debajo de esas escalas, y si no puede definirse, entender cómo emerge la estructura causal espacio-temporal a dichas escalas o superiores (si acaso) donde los efectos cuánticos del espacio-tiempo se manifiesten. Es el borde o frontera de la física cuántica espacio-temporal. Tengamos en cuenta que $L_p^2 = G\hbar/c^3$ y que $t_p = L_p/c = \sqrt{G\hbar/c^5}$. Sin embargo, dada la pequeñez de estas cantidades, podemos considerarlas cero para todos los propósitos prácticos en la descripción del movimiento convencial y ordinaria. La longitud de Planck solamente es relevante para objetos pesados y muy densos, para los que la longitud $L_Q = \hbar/Mc$ y $L_G = GM/c^2$ son iguales a L_p.

La velocidad como vector tiene propiedades interesantes:

- Es un vector $\vec{v}$ tangente a $\vec{r}$ en cada punto de la trayectoria.
- La velocidad media solamente es igual a la velocidad instantánea en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme. Eso implica trayectoria recta y velocidad constante en todos los puntos.
- Los tipos de movimiento pueden ser clasificados de acuerdo a la constancia del vector velocidad o no. Si la velocidad instantánea es constante, el movimiento se dice uniforme. Si la velocidad instantánea cambia, el movimiento se dice que es acelerado.

Según la trayectoria, los movimientos pueden ser:

- Rectilíneos. La trayectoria es recta.

- Curvilíneos. La trayectoria es una curva. Movimientos curvilíneos importantes usuales: circular, hiperbólico, parabólico, elíptico, sinusoidal o armónico simple, helicoidal, lemniscático,...

✍**Ejercicio**. Sea $\vec{r} = (5t+2)\vec{i} - t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ metros, determina: a) la velocidad instantánea, b) la velocidad en t=2 segundos, c) la velocidad media en el intervalo d 1 a 2 s, y en el intervalo 0 a 2 segundos, d) la velocidad inicial, e) la aceleración instantánea, f) el módulo de la velocidad para cualquier valor del tiempo.

Como hemos mencionado, nada prohíbe calcular no solamente la primera y segunda derivada de la posición, sino sucesivas derivadas de dicho vector, para una función suficientemente regular o suave. En tal caso, y bajo la condición de existencia de la derivabilidad, podemos calcular la derivada de cualquier orden entero y su integral. Además, como se ha escrito previamente en estas notas, $\vec{r}(t) = d\mathcal{A}/dt$.

Además de las componentes cartesianas, se pueden definir un sistema intrínseco para la aceleración en el plano. La aceleración en un plano se puede escribir generalmente como la suma de dos componentes denominadas tangencial y normal o centrípeta:

$$\vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau}$$

y donde $\vec{n}, \vec{\tau}$ son vectores unitarios ortogonales entre sí, en la dirección tangente y normal a la trayectoria. Para curvas planas, se tien que

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \leftrightarrow a^2 = a_c^2 + a_t^2$$

La aceleración tangencial es la derivada del módulo de la velocidad:

$$a_t = a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

La aceleración normal o centrípeta se define como

$$a_c = a_n = \frac{v^2}{R}$$

donde v es el módulo de la velocidad y R es el radio de curvatura de la trayectoria. Hay una demostración relativamente simple de por qué hay estas dos aceleraciones en el sistema de referencia de un plano:

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = v\tau$$

Derivando

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

donde hemos usado que el vector unitario tangente intrínseco no es constante. Ahora, para una longitud de arco curva en el espacio del plano, $ds = Rd\varphi$, $d\varphi = ds/R$.Y ahora:

$$\vec{a}_c = v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = v\frac{ds}{dt}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\vec{u}_t}{d\varphi} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

Ejercicios:

1. Analiza el movimiento del objeto cuya gráfica espacio-tiempo viene dada por la figura 2 (arriba).

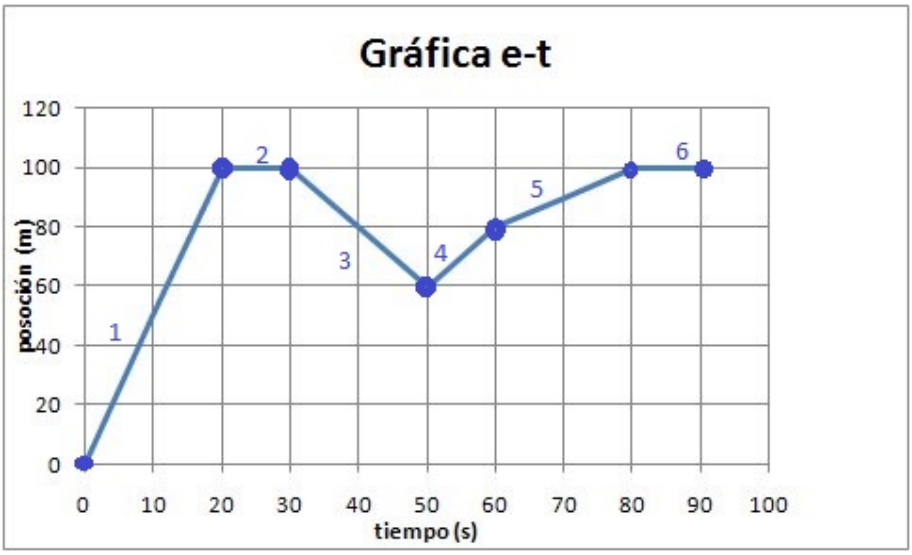


Figure 2.2: Espacio vs. tiempo.

2. Para el vector $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, a) describe el movimiento, b) determina la trayectoria, c) halla la velocidad media entre 0 y 10 s, 5 y 10 s y entre 0 y 5 segundos, d) el valor de la velocidad instantánea en t=5s, e) halla la aceleración instantánea.

3. A y B son dos puntos separados 200 km. Un móvil parte desde A con velocidad de 60km/h, y otro desde B con 80km/h. Determina dónde se encuentran si salen simultáneamente, y cuando el coche en A sale cuarto de hora después de que B salga. Considera las velocidades constantes.

4. Sea $\vec{r}(t) = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$, describe su movimiento y halla la velocidad, la aceleración, el jerk, y su absement, para una partícula de masa m. Calcula la fuerza que actúa sobre dicha partícula.

2.4 Cinemática

La Cinemática es la parte de la Mecánica, ciencia del movimiento, que estudia el movimiento sin atender a la causa que producen dicho movimiento.

Problema: Aprender a plantear ecuaciones de movimiento y/o deducir las magnitudes y significado de las ecuaciones.

Ecuaciones: Es un código o lenguaje a interpretar.

Magnitudes: posición y desplazamiento, velocidad, aceleración, jerk, absement (ausición), celeridad, snap (jounce), crackle, pop,...

Según la aceleración, los movimientos se clasifican en:

- Acelerados si $\vec{a} \neq \vec{0}m/s^2$. Si la aceleración es constante, son movimientos uniformemente acelerados. Si la aceleración no es constante se denominan movimientos variados.
- No acelerados o uniformes si $\vec{a} = \vec{0}m/s^2$.

Según la trayectoria los movimientos pueden ser:

- Rectilíneos.
- Curvilíneos (circulares, sinusoidales o armónicos simples, parabólicos, hiperbólicos, elípticos, lemniscáticos, cardioides, helicoidales,...)

Los movimientos no planos son más complicados en general. Estudiaremos ahora unos cuantos casos de movimientos simples y compuestos.

2.4.1 M.R.U.

M.R.U.: Movimiento Rectilíneo Uniforme. Movimiento de aceleración nula y trayectoria recta o lineal.

Características: $\vec{a} = 0$, $\vec{v} = constant$. La velocidad media coincide con la velocidad instantánea y se define como

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Las ecuaciones de movimiento del M.R.U. son 3:

Ecuaciones del M.R.U.

$$\vec{a} = \vec{0}\ m/s^2 \tag{2.32}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots + v^n\vec{e}_n = \frac{d\vec{r}}{dt}\ m/s \tag{2.33}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t\ m \tag{2.34}$$

En el plano $2d$, se tiene que $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, y que también, en $3d$, es $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. En ecuaciones paramétricas, para $\vec{r} = (x, y, z, \ldots)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0) \\ y = y_0 + v_y(t - t_0) \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \\ \ldots \end{cases}$$

Si la velocidad fuera igual a cero, entonces se dice que objeto, cuerpo o sistema está en reposo.

Si tuviésemos que estudiar un movimiento uniforme en diversas dimensiones del tiempo, caso multitemporal, si $D = d_s + d_t$ es el número de dimensiones totales del espacio y del tiempo, con d_s las dimensiones de género espacio y d_t las dimensiones de género tiempo, con

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{D} v^i\vec{e}_i = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + \cdots + v^D\vec{e}_D = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

entonces habría que definir una ecuación de tipo tensorial/multivectorial de clase

$$[r] = [V]\,[\Delta t] \leftrightarrow \overrightarrow{r} = \overrightarrow{\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{\Delta t}$$

donde

$$\overrightarrow{\overrightarrow{v}} = v^\alpha{}_\beta = \frac{dX^\alpha}{dt^\beta}$$

y que mediría las diferentes velocidades a lo largo de los vectores del tiempo $\overrightarrow{t} = t^\beta u_\beta$.

La última generalización de la definición de velocidad consiste en cambiar el operator diferenciación traslacional por una derivada fraccional o integrodiferencial...O cambiar la derivada y su definición por un cálculo q-deformado o de incrementos finitos. En el caso de la diferenciación fraccional, tenemos:

$$ {}^{\gamma}\mathcal{V}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{d^{\gamma}X^{\alpha}}{dt^{\beta}} $$

2.4.2 M.R.U.A.

M.R.U.A.: Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

Características: $\vec{a} = constant = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ m/s^2$.

Ecuaciones del M.R.U.A.

$$ \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{constante} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k} \neq 0\ m/s^2 \tag{2.35} $$

$$ \overrightarrow{v} = v^1\overrightarrow{e}_1 + v^2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + v^n\overrightarrow{e}_n = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}\Delta t\ m/s \tag{2.36} $$

$$ \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\Delta t\ m \tag{2.37} $$

$$ v^2 - v_0^2 = 2\overrightarrow{a}\overrightarrow{\Delta r} \tag{2.38} $$

La última ecuación del cuadro anterior se obtiene despejando el tiempo de la segunda, y sustituyendo en la primera ecuación. Otra observación útil recibe el nombre de *Teorema de Merton* sobre la velocidad media del M.R.U.A.: "Si $v(t)t = Vt$, cuando la velocidad cambia de modo uniforme (con aceleración constante), desde v_0 hasta v_f, entonces el espacio recorrido es el mismo que recorrería de forma uniforme con la velocidad promedio o media v_m". Este teorema solamente es válido en el M.R.U.A., y falla en los movimientos variados (cuando $\vec{a}$ no es constante). Demostración gráfica en la figura 3 siguiente.

El teorema de Merton permite obtener las ecuaciones del MRUA desde un MRU de la forma siguiente

$$ \begin{cases} \Delta x = v_m\Delta t \rightarrow \Delta x = \dfrac{v + v_0}{2}\Delta t \\ \\ v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta x = \left(\dfrac{v_0 + a\Delta t + v_0}{2}\right)\Delta t \rightarrow \Delta x = v_0\Delta t + \dfrac{1}{2}a\Delta t^2 \end{cases} $$

Si la aceleración no fuera constante, las ecuaciones de movimiento de la velocidad y la posición deben obtenerse usando el cálculo infinitesimal de Leibniz y Newton (fluxiones). Así, se tendría que

$$ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 + \int \overrightarrow{a}\,dt $$

$$ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \int \overrightarrow{v}\,dt $$

Observación: sabiendo las ecuaciones del MRUA, se obtienen las del MRU si ponemos $a = 0$ y $v_0 = v = constante$.

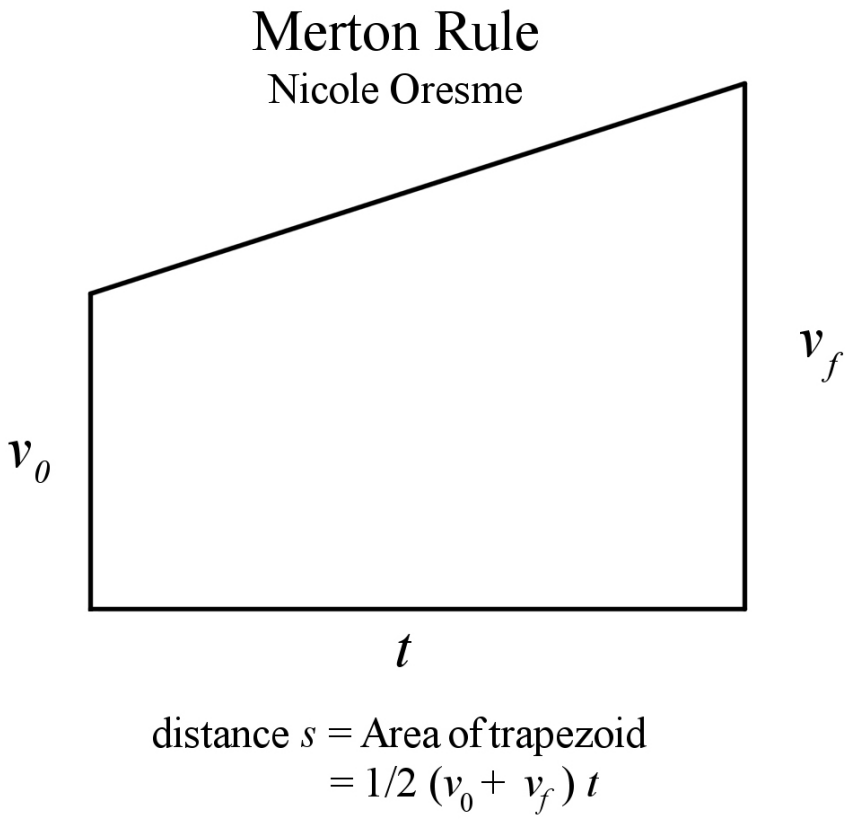


Figure 2.3: Teorema de Merton (Oresme) sobre la velocidad media en el MRUA.

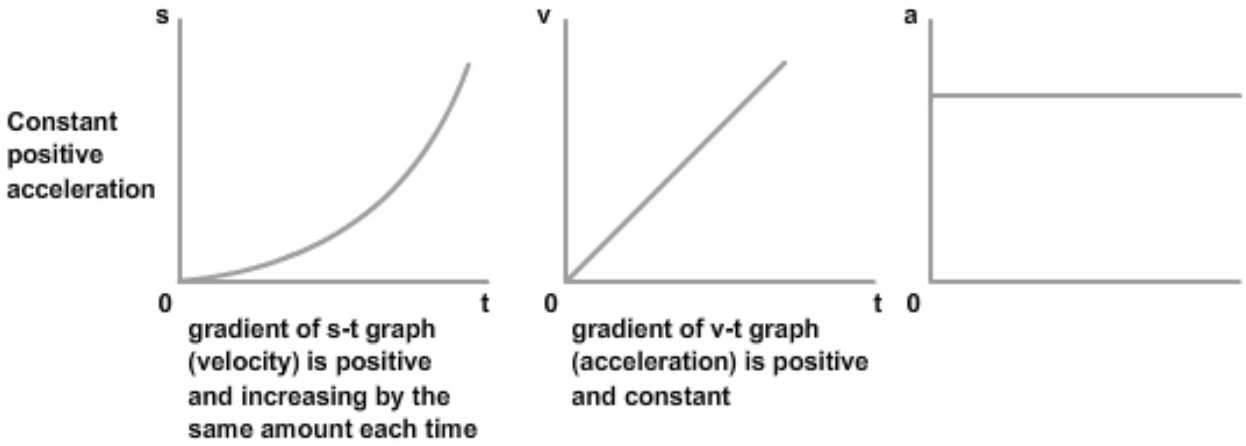


Figure 2.4: Gráficas del MRUA.

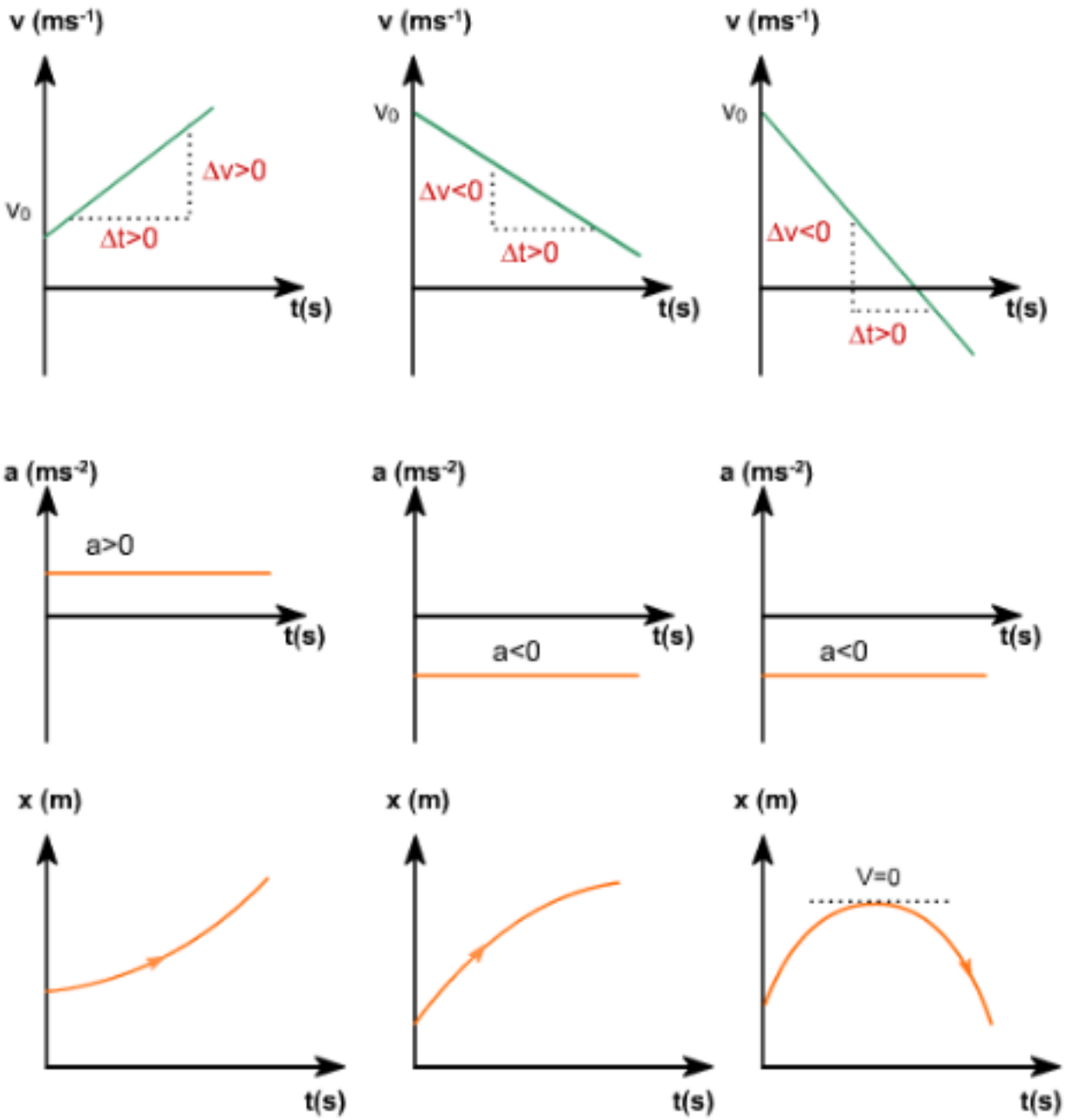


Figure 2.5: Versión más general de las gráficas posibles del MRUA.

Dos casos particularmente importantes del MRUA son el denominado movimiento de caída libre y el lanzamiento vertical.

Caída libre

En el campo gravitacional terrestre, supuesto $a = -g = 9,8m/s^2$, que es una aproximación de baja altura al caso más general posible de una teoría de campos, se puede resolver el problema del tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo desde una altura $H = h_0 = y_0$ arbitraria, dejándose caer (con velocidad inicial cero, $v_0 = 0$).

Ecuaciones (Sistema de referencia en el suelo): $a = -g\ m/s^2$.

$$v = v_0 - gt = -gt$$

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiempo en llegar al suelo t_s (en $h = 0$, $t = t_s$):

$$\boxed{t_s = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

La velocidad cuando llega al suelo es

$$\boxed{v_s = -gt_s = -\sqrt{2h_0 g}}$$

Notad que si hubiera inicialmente una velocidad inicial hacia abajo, hay que cambiar un par de ecuaciones y resolver:

$$a = -g$$

$$v = -v_0 - gt$$

$$y = H_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

mediante

$$-\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + H_0 = 0$$

Lanzamiento vertical

Si lanzamos un objeto desde el suelo ($h_0 = 0$) con velocidad inicial v_0, podemos calcular su altura máxima h_{max}, el tiempo en alcanzar dicha altura máxima t_m, y el tiempo que tarda en volver al suelo $t_s = 2t_m$ (que será el doble por simetría de t_m y despreciando el efecto de rozamientos y otros detalles).

$$a = -g\ \ m/s^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

En la altura máxima h_m, la velocidad es nula, por lo que tardará

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

Sustituyendo y operando en la ecuación de la altura proporciona la altura máxima

$$y_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

El tiempo que tarda en volver al suelo es

$$t_s = 2t_m = \frac{2v_0}{g}$$

Este tiempo puede obtenerse o bien de la ecuación del tiempo o del análisis por simetría del problema. Esto proporciona una velocidad al llegar al suelo igual y de sentido opuesto que la inicial

$$v_s = -v_0$$

El espacio recorrido es por tanto $s = 2h_m$. Si la altura inicial es h_0, se rompe la simetría y debemos calcular para el tiempo de llegada al suelo:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 = 0$$

cuyas soluciones son

$$t_\pm = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{-g} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$$

Para la altura máxima con altura inicial no nula, se sigue teniendo que

$$t_m = \frac{v_0}{g}$$

Pero ahora, por la nueva ecuación, se tiene que

$$h_m = h(t_m) = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

2.4.3 Composición de 2 MRU

Problema tipo: un nadador en un río, o un móvil con velocidad en dos direcciones (sentidos).

Características: Tomamor de referencia el punto de salida del nadador o móvil del río. La velocidad del río la podemos elegir perpendicular al nadador pero éste puede empezar con la velocidad en cualquier dirección arbitraria, pero son en cualquier caso velocidades constantes en todo momento (2 MRU).

$$\vec{V} = \vec{v}_{corriente} + \vec{v}_n = v_c\vec{i} + v_n\vec{j}$$

La descomposición del movimiento en componentes cartesianas da:

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_c \quad m/s \\ x = v_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = 0 \quad m/s^2 \\ v_y = const. = v_n \quad m/s \\ x = v_n t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores:} \\ \vec{a} = \overrightarrow{0} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = \overrightarrow{v}_c + \overrightarrow{v}_n = v_c\vec{i} + v_n\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = v_c t\vec{i} + v_n t\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

Si el ancho del río es D, entonces el tiempo en cruzar será:

$$t_{cruzar} = \frac{D}{v_n}$$

Y tras este tiempo, en $y = D$, el punto donde llega en el eje X será

$$x = \frac{v_c D}{v_n}$$

luego

$$\vec{r}(t_c) = \frac{v_c D}{v_n}\vec{i} + D\vec{j} \quad m$$

2.4.4 Tiro parabólico horizontal

La composición de un MRU y un MRUA da un movimiento parabólico. Imaginad un avión en vuelo a una determinada altura y una velocidad constante, que deja caer una carga. En este primer caso, denominado tiro horizontal, tenemos las siguientes características:

1. MRU en el eje X, con velocidad constante $v_x = v_{ox}$.
2. MRUA en el eje Y, con aceleración constante $a_y = -g$, $\vec{a}_y = -g\vec{j}m/s^2$. No hay velocidad inicial en el eje Y, y se deja caer el cuerpo.
3. La altura inicial es $h_0 = H$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = V \quad m/s \\ x = v_x t = Vt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = -g, \quad g = 9.8m/s^2(Earth) \\ v_y = -gt \quad m/s \\ y = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores :} \\ \vec{a} = -g\vec{j} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = v_x\vec{i} - gt\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = Vt\vec{i} + \left(H - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

El alcance máximo se logra cuando llega al suelo $Y = 0m$. Resolviendo la ecuación $0 = H - gt^2/2$, se obtiene que:

$$\boxed{t(X_m) = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

$$\boxed{X_m = V\sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

La velocidad justo en el instante de llegada al suelo del objeto lanzado es

$$\vec{V}_s = V\vec{i} - gt(X_m)\vec{j} = v_x\vec{i} - \sqrt{2gH}\vec{j} \quad m/s$$

cuyo módulo es

$$v = \sqrt{v_x^2 + 2gH}$$

y forma un ángulo de entrada en el suelo de

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sqrt{2gH}}{V} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2gH}}{V}\right)}$$

2.4.5 Tiro parabólico oblícuo

Es una composición de movimientos de MRU y MRUA. A diferencia del caso anterior, se lanza un proyectil desde una altura y_0, que podemos tomar como nula por simplicidad, una velocidad en módulo v_0 pero con una inclinación horizontal de valor φ respecto de la horizontal, y ascendente. Entonces, las caracterícscticas de este lanzamiento son:

1. Aceleración $a_y = -g \;\; m/s^2$, en el eje Y.
2. Velocidad inicial constante con valor v_0 de módulo e inclinación φ respecto la horizontal (positiva).
3. Altura inicial h_0, que podemos tomar nula por simplicidad en un análisis desde el punto de lanzamiento (suelo).

Las ecuaciones de movimiento son (para una altura inicial arbitraria y_0):

$$\begin{cases} \text{Eje X :} \\ a_x = 0 \quad m/s^2 \\ v_x = const. = v_x\cos\varphi \quad m/s \\ x = v_x t = v_0 t\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eje Y :} \\ a_y = -g, \quad g = 9.8m/s^2(Earth) \\ v_y = v_{oy} - gt = v_0\sin\varphi - gt \quad m/s \\ y = h_0 + v_0\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Vectores :} \\ \vec{a} = -g\vec{j} \quad m/s^2 \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_0\cos\varphi\vec{i} + (v_0\sin\varphi - gt)\,\vec{j} \quad m/s \\ \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = v_0 t\cos\varphi\vec{i} + \left(y_0 + v_0 t\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} \quad m \end{cases}$$

Podemos calcular la altura máxima, si imponemos que la velocidad vertical es nula en esa altura h_m ($v_y = 0$):

$$v_y = 0 \rightarrow t(h_m) = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

Si la altura inicial es cero, el tiempo del alcance máximo X_m es el doble de éste (y solamente si la altura inicial es cero):

$$t(X_m, y_0 = 0) = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = 2t(Y_m)$$

Si la altura inicial no es cero, el tiempo del alcance máximo se calcula resolviendo la ecuación cuadrática completa

$$\left(y_0 + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2\right) = 0$$

es decir

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\varphi t - y_0 = 0$$

lo cual produce

$$\boxed{t(X_m, y_0) = \frac{v_0 \sin\varphi \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}}$$

El alcance máximo y la altura máxima para $y_0 = 0$ resultan ser, tras álgebra sencilla:

$$\boxed{X_m = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}}$$

$$\boxed{Y_m = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}}$$

de donde se obtiene que el alcance máximo para v_0 fija se da para $\varphi = 45° = \pi/4\ rad$, porque $\sin 2\varphi = 1$ si $\varphi = 45°$. También, para altura inicial nula, el vector de llegada o impacto es igual a (se puede usar simetría especular a la velocidad inicial, o bien evaluar el vector velocidad en el tiempo del alcance máximo):

$$\overrightarrow{V}_s = v_x(t(X_m))\vec{i} + v_y(t(X_m))\vec{j} = v_0 \cos\varphi \vec{i} - v_0 \sin\varphi \vec{j} \quad m/s$$

El ángulo de entrada en el suelo es igual y de sentido opuesto al de salida

$$\tan\theta_s = \tan\frac{v_y}{v_x} = \tan(-\varphi) = \tan(-\varphi) \rightarrow \theta_s = -\varphi$$

Si la altura inicial no es cero, el alcance y altura máximos son iguales a

$$X_m(y_0) = v_0 \cos\varphi t_\pm = \frac{v_0^2 \cos\varphi \sin\varphi \pm v_0 \cos\varphi \sqrt{v_0^2 \sin^2\varphi + 2gy_0}}{g}$$

$$Y_m(y_0) = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g}$$

La ecuación de la trayectoria de este movimiento es:

$$y = y_0 + x \tan\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi}$$

2.4.6 Composición de 2/3 MRUA

Si tenemos dos MRU en dimensión $d = 2$ (plano), en el espacio $d = 3$, o más generalmente en D dimensiones, el problema es descriptible de forma sencilla en forma vectorial (más laboriosa en forma paramétrica según el número de dimensiones por tener que escribir más)

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad m/s^2$$

Integrando la aceleración y la velocidad se tienen las velocidades y posición instantáneas:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int \vec{a}dt = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \int \vec{v}_0 dt + \iint \vec{a}dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2$$

o equivalentemente

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_m\Delta t = \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2}\right)\Delta t$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\Delta t$$

$$\Delta\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{a} = constant.$$

En paramétricas:

$$\text{Aceleración} \begin{cases} a_x = constant. \\ a_y = constant'. \\ a_z = constant''. \end{cases}$$

$$\text{Velocidad} \begin{cases} v_x = v_{ox} + a_x\Delta t \\ v_y = v_{oy} + a_y\Delta t \\ v_z = v_{oz} + a_z\Delta t \end{cases}$$

$$\text{Posición} \begin{cases} x = x_0 + v_{ox}\Delta t + \frac{1}{2}a_x\Delta t^2 \\ y = y_0 + v_{oy}\Delta + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2 \\ z = z_0 + v_{oz}\Delta t + \frac{1}{2}a_z\Delta t^2 \end{cases}$$

El módulo de la velocidad, posición y aceleración se calculan como habitualmente:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

2.4.7 Movimiento circular uniforme (MCU)

Se trata de un movimiento plano, con unas características especiales. Hay que definir unas nuevas magnitudes angulares análogas a las lineales.

Velocidad angular media e instantánea

Se definen la velocidad angular media e instantánea como el cambio del ángulo en un intervalo de tiempo, y el ritmo de cambio instantáneo del desplazamiento angular respecto del tiempo. Matemática y respectivamente son:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad rad/s \tag{2.39}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad rad/s \tag{2.40}$$

Generalmente, se usan los grados sexagesimales o los radianes en Física para magnitudes angulares. En casos excepcionales, se definen también los grados centesimales o gradianes(gones). La equivalencia entre estas escalas es la siguiente:

$$\boxed{2\pi \;\; rad = 360^\circ = 400^g}$$

Para la aceleración angular media e instantánea también hay definiciones análogas

Aceleración angular media e instantánea

Se definen la aceleración angular media e instantánea como el cambio de la velocidad angular en un intervalo de tiempo, y el ritmo de cambio instantáneo de la velocidad angular respecto del tiempo. Matemática y respectivamente son:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad rad/s^2 \tag{2.41}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad rad/s^2 \tag{2.42}$$

Habitualmente se usan las unidades de las revoluciones por minuto (r.p.m.) o también los ciclos (vueltas) por segundo (c.p.s.) para la velocidad angular:

$$1r.p.m. = \frac{2\pi \; rad}{60s}$$

$$1c.p.s. = \frac{2\pi \; rad}{s}$$

Los ángulos son adimensionales en general, mientras que las dimensiones de ω, α son T^{-1}, T^{-2}, respectivamente. Las relaciones entre magnitudes angulares y lineales son como sigue. Si para una circunferencia $s = \theta R$, infinitesimalmente $ds = Rd\theta$ y a nivel incremental:

$$\Delta s = \Delta\theta R \leftrightarrow \text{Arco} = (\text{Radio})(\text{Ángulo})$$

$$\boxed{v = \omega R}$$

A nivel diferencial en la circunferencia, $dv = d\omega R$, luego a nivel incremental

$$\Delta v = \Delta\omega R$$

de donde dividiendo por ΔT:

$$\boxed{a = a_t = \alpha R}$$

En un MCU no hay aceleración tangencial pero sí una aceleración ligada al hecho de la variación de la dirección de la velocidad lineal: la aceleración centrípeta $a_c = v^2/R = \omega^2 R$. Las ecuaciones del MCU serán pues:

- Aceleraciones: $a_t = 0m/s^2$, $\alpha = 0rad/s^2$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.

- $\omega = constant$.

- $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t \leftrightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t$.

En el plano, se puede escribir la ecuación del MCU en forma vectorial como sigue:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \;\; m$$

La velocidad lineal y la aceleración resultan ser:

$$\vec{v} = -R\omega\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} + R\omega\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\cos(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{i} - R\omega^2\sin(\omega\Delta t + \theta_0)\vec{j} \quad m/s^2 = -\omega^2\vec{r}$$

En el MCU también se definen los siguientes conceptos:

1. **Período** T: Tiempo que tarda en dar una vuelta completa u oscilación. $\boxed{T = 2\pi/\omega = 1/f}$.

2. **Frecuencia** f: Número de vueltas dadas en cada segundo.$\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$. Las unidades de la frecuencia (no confundir con frecuencia angular ω) son los s^{-1} o hertzios (Hz).

3. **Número de vueltas** N general. $N = \Delta\varphi/2\pi$.

4. **Número de onda** (variable de movimiento armónico simple, proyección sobre una línea del MCU): $k = 2\pi/\lambda$ (unidades m^{-1}). La longitud de onda λ es el **período espacial** de un MCU que sea periódico en el espacio y no solamente en el tiempo como el MCU (movimiento ondulatorio sinusoidal o armónico). También se define $\overline{k} = \overline{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$, como el recíproco de la longitud de onda, o el número de vueltas u oscilaciones por metro (no angulares).

2.4.8 Movimiento circular uniformemente acelerado(MCUA)

Características: trayectoria circular, $\alpha = constant.rad/s^2$, y aceleraciones tangencial y centrípeta no nulas, con valores dados por las relaciones usuales $a_t = \alpha R = constant \neq 0$, $a_c = \omega^2 R = v^2/R$.

Ecuaciones del MCUA

$$\alpha = constant \quad rad/s^2, \quad \text{y si} \quad \Delta t = (t - t_0) \;\; s \tag{2.43}$$

$$\Delta\omega = \alpha\Delta t \;\; rad/s \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha\Delta t \;\; rad/s \tag{2.44}$$

$$\Delta\theta = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \quad rad \tag{2.45}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \tag{2.46}$$

Para el MCUA, las componentes intrínsecas y la aceleración total resultan ser igual a

Aceleraciones del MCUA

$$a^2 = a_c^2 + a_t^2 \leftrightarrow a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \tag{2.47}$$

$$a_c = \omega^2 R \quad \text{no constante} \tag{2.48}$$

$$a_t = \alpha R \quad \text{constante} \tag{2.49}$$

$$\alpha = constante \;\; rad/s^2 \tag{2.50}$$

$$a = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha R)^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{2.51}$$

2.5 Dinámica

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento atendiendo a las causas que lo producen. Esas causas o interacciones que producen el movimiento reciben, en Mecánica Clásica, el nombre de **fuerzas**.

Fuerza (The Force)

Fuerza es todo agente o causa que es capaz de modificar el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo.

Otras definiciones:

Inercia (Inertia)

Inercia[a] es la tendencia o propiedad de todos los cuerpos de conservar o mantener su estado de movimiento (o reposo) frente a interacciones (fuerzas). El reposo es el estado de movimiento con velocidad nula ($\vec{v} = 0$) que no produce desplazamientos $\Delta\vec{r} = 0$.

[a] Trägheitslosigkeit: no inertia, from the movie Explorers (1985).

Hay tres medidas de la masa "clásica": la masa inercial m_i, la masa gravitacional activa M_g y la masa gravitacional pasiva m_g. El hecho empírico no refutado de que las tres sean idénticas ($m_i = M_g = m_g$) se llama *Principio de Equivalencia*, y tiene diversas extensiones y formulaciones que aún son investigadas y debatidas en la Física al más alto nivel. Galileo fue el primer científico en indicar que la caída libre en un campo gravitacional era independiente de la masa y constitución del objeto, algo que contradecía claramente los fundamentos de la Física aristotélica. A nivel cuántico, el concepto de masa es más sutil, también debido a que la relatividad especial confiere propiedades equivalentes a materia y energía, puesto que son intercambiables mediante la relación $E = mc^2$.

Masa inercial y gravitacional

La masa inercial es una medida cuantitativa de la inercia, que depende de la fuerza y aceleración que produce sobre un cuerpo:

$$m_i = \frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \cdots$$

La masa gravitacional activa se obtiene de la teoría de campos mediante el teorema del flujo de Gauss, y la masa gravitacional pasiva es la que mide el peso de un cuerpo en un campo gravitacional $\vec{g}$:

$$\vec{F}_g = \vec{P} = m_g\vec{g}, \quad \Phi_g = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G_N M_g$$

Impulso

Se llama impulso, ímpetu, cantidad de movimiento, simplemente momento lineal (este último término es el más frecuente actualmente, circa 2020) o *momento*, a la magnitud vectorial

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \text{unidades:} \quad kg\cdot m\cdot s^{-1}(N\cdot s).\ \left[MLT^{-1}\right]$$

Reposo: $\Delta\vec{r} = 0, \Delta\vec{v} = 0, \Delta\vec{a} = 0, \ldots$

La importancia del impulso o momento es que $\vec{p}$ es una magnitud conservada en cuerpos aislados, o invariantes bajo traslaciones en el espacio según el teorema de Nöether (la invariancia traslacional espacial implica la conservación del momento).

René Descartes sobre los movimientos de cuerpos libres: el movimiento es perpetuo y en línea recta.

Newton: sobre los cuerpos libres indica que se quedan en MRU o en reposo solamente si no hay fuerza externa neta. Establece las tres leyes de la Dinámica.

Primera ley de Newton (Ley de inercia de Galileo).

Es una reformulación del Principio de Inercia de Galileo. Según la primera ley de Newton, todo cuerpo o sistema que está en reposo, o en movimiento rectilíneo y uniforme, permanece en reposo o en MRU mientras no actúe ninguna fuerza. Equivalentemente, se puede enunciar como sigue: en un sistema de referencia inercial (MRU) son válidas las leyes de Newton de la Dinámica. También, existe al menos un sistema de referencia (inercial), donde el objeto o sistema se mueve "en línea recta" conservando el momento.

Comentario: algunas veces se "deduce" la primera ley de Newton de la segunda ley de Newton. Es incorrecto. Sin la primera ley antes enunciada, no se puede deducir a priori que de $F = 0$ no haya aceleraciones. De hecho, en sistema de referencia no inerciales aparecen fuerzas "ficticias". Además, la primera ley dice algo más que simplemente esa implicación. Indica que si está en reposo permanece en reposo, y si está en MRU, queda en MRU si no hay fuerzas. Un cuerpo podría experimentar no fuerza instantánea, ni velocidad, y aún así empezar a moverse (por ejemplo, si aplicásemos un jerk contínuo y no nula en un instante). La primera ley elimina esa opción porque por su enunciado implica que la constante de movimiento debe ser la misma para el cuerpo o sistema. Algunas veces, el primer principio actúa de forma que el jerk sería no continuo.

La descripción de todo movimiento depende del observador y el sistema de referencia elegido. Pero en una clase especial de sistemas de referencia, valen las leyes de Newton (las 3). El movimiento tiene en cuenta que los objetos cambian. Los sistemas de referencia en reposo o con velocidad uniforme (constante) se llaman sistemas inerciales. Otros sistemas de referencia, denominados no inerciales, están en rotación y poseen aceleración de algún tipo. Se usa también como sinónimo de sistema de referencial la palabra *referencial*.

Segunda ley de Newton (Ley fundamental de la Dinámica).

La segunda ley de Newton o Ley fundamental de la Dinámica señala que la fuerza externa total sobre un cuerpo o sistema es igual a la variación del momento del objeto o sistema. Matemáticamente

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si la masa es constante, se puede reexpresar como

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_i$$

La fuerza es una magnitud vectorial que se mide en newtons N, y tiene dimensiones de $[F] = MLT^{-2}$. Una fuerza es cualquier acción o interacción capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo (MRU o reposo). Una fuerza implica una interacción entre cuerpos o partículas diferentes. Estas interacciones no requieren a priori contacto. El efecto de las interacciones es variado: 1) Una interacción puede cambiar el sentido, dirección y velocidad (momento) del cuerpo/sistema, 2) Una interacción puede deformar un cuerpo/sistema de partículas. Las fuerzas son interacciones entre cuerpos. A nivel finito incremental, la segunda ley puede también reescribirse como

$$\vec{f} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Si no hay fuerzas externas, el momento se conserva

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = constant$$

Observación: en movimiento de cohetes y proyectiles, o bien en sistemas de masa variable, hay que usar con cuidado la segunda Ley de Newton.

✍**Ejercicio:** investigar la ecuación de los cohetes, su origen y su relevancia. Estudiar su manejo en diversas situaciones y su derivación. ¿Es coherente la ecuación de los cohetes con la segunda ley de Newton?

Como la fuerza es un vector, su composición debe realizarse mediante vectores. Si hay dos fuerzas $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ y las componemos, se tiene que

$$\vec{f}_t = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$
$$|\vec{f}_t|^2 = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|^2$$

$$F_t^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi = (F_1 + F_2)^2$$

Tercera ley de Newton (Principio de acción-reacción).

La Tercera ley de Newton, o principio de acción-reacción, señala que si un cuerpo aplica una fuerza sobre otro, éste reacciona ejerciendo una fuerza igual y de sentido opuesto Matemáticamente

$$\vec{F}(1 \to 2) = -\vec{F}(2 \to 1)$$

Importante: las fuerzas de acción-reacción actúan sobre cuerpos diferentes, no sobre el mismo cuerpo. El impulso de una fuerza $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ puede ser finito o instantáneo. Las aplicaciones de las leyes de Newton son múltiples:

1. Cuerpos en equilibrio (Estática): cuerdas, masas, planos inclinados, peraltes, campos eléctricos, campos magnéticos,...
2. Cuerpos en movimiento (cuerdas, masas,...)
3. Procesos de colisión o choques (que conservan el momento y/o la magnitud denominada energía cinética, vis viva).
4. Movimientos de cohetes, proyectiles y fluidos.
5. Fuerzas elásticas y gravitacionales. Fuerzas electromagnéticas. Las fuerzas nucleares son difíciles de modelar según la física newtoniana, aunque pueden elaborarse modelos aproximados cuasiclásicos de la interacción nuclear fuerte o débil.
6. Movimientos de resortes, y de campos clásicos. Análisis de fuerzas fundamentales y de deformación o contacto.

Algunos ejemplos de leyes de fuerza:

- Fuerza gravitacional (3d, 4D): $\vec{F} = -G_N \dfrac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$.
- Fuerza eléctrica (3d, 4D): $\vec{F}_C = K_C \dfrac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$.
- Fuerza magnética de una partícula cargada: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$.
- Fuerza magnética sobre un hilo de corriente: $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$.
- Fuerza recuperadora o elástica: $\vec{F}_{el} = -k\vec{r}$.
- Fuerza cosmológica de repulsión cósmica: $\vec{F}_\lambda = \Lambda\vec{r}$.
- Fuerza central: $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$.
- Peso: $\vec{P} = m_g\vec{g}$.
- Fuerzas de rozamiento: $\vec{F}_r = -K_\alpha v^\alpha \vec{e}_r$.
- Fuerza normal en superficies: $\vec{F}_r = \vec{R} = \mu\vec{N}$. Si la fuerza de rozamiento es estática $F_r = \mu_e N$, y si es dinámica (en movimiento), $F_r = \mu N$, con $0 < \mu_e < \mu < 1$ como coeficientes de rozamiento estático y dinámicos.

Las fuerzas fundamentales conocidas, exceptuando la actual (circa 2020) desconocida fuerza ligada a la energía oscura y constante cosmológica, son 4: fuerza gravitacional, fuerza electromagnética, fuerza nuclear débil y fuerza nuclear fuerte. A nivel cuántico, están mediadas por partículas mensajero o bosones gauge llamadas gravitones, fotones, bosones W y Z, y gluones. Se puede considerar que el campo de Higgs, o dador de masa de las partículas elementales (el protón y los nucleones obtienen su masa de objetos compuestos por un mecanismo diferente debido a la interacción fuerte) puede considerarse otra interacción fundamental que da origen a la masa de partículas. Por tanto la masa puede entenderse también como interacción entre campos cuánticos. De hecho, para cualquier partícula, podemos escribir que su valor de masa es el valor de su acoplo de Yukawa y el campo de Higgs por el valor del campo de Higgs en el vacío, que no es nulo, en la forma $m = g_Y \langle H \rangle$. Las fuerzas fundamentales, entonces, tienen unas constantes de fuerza características:

- Fuerza gravitacional: $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

- Fuerza eléctrica: $K_C = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$.

- Fuerza magnética: $K_m = 2K_A = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$, permeabilidad magnética $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$ (unidades equivalentes N/A^2, H/m, donde H es el henrio). Aparece en la ley de Ampère $\dfrac{F_m}{L} = 2K_A \dfrac{I_1 I_2}{r}$.

- Electromagnetismo: $\alpha = \dfrac{K_C e^2}{\hbar c} \simeq 1/137$, donde la última igualdad es a escalas de energía ordinarias. La constante de estructura fina α es renormalizada a altas energías (distancias pequeñas).

- Interacción nuclear débil: constante de Fermi

$$G_F^0 = \frac{G_F}{(\hbar c)^3} = \frac{\sqrt{2} g^2}{8 M_W^2 c^4} = \frac{\sqrt{2} g^2}{8 E_{W0}^2} = 1.166 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$$

- Valor esperado del campo de Higgs en el vacío (o vacío del campo de Higgs), v.e.v.:

$$\langle H \rangle = \upsilon = \left(\sqrt{2} G_F^0\right)^{-1/2} = 246.22 GeV$$

  A nivel de árbol, en el Modelo Estándar (ME/Standard Model,SM), se tiene que

$$G_F^0 \simeq \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_W^2 \left(1 - \dfrac{M_W^2}{M_Z^2}\right)}$$

  Esta expresión se simplifica usando el ángulo de Weinberg

$$G_F^0 \simeq \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} M_W^2 \cos^2\theta_W \sin^2\theta_W}$$

  El hecho de que este v.e.v. sea no nulo es la razón de la existencia de las diferentes masas de partículas elementales: se acoplan diferente al campo de Higgs.

- Interacción nuclear fuerte: g_s ó $\dfrac{g_s^2}{\hbar c} = \alpha_s \sim 1$.

2.5.1 El movimiento armónico simple (MAS)

El movimiento de cuerpos bajo una fuerza recuperadora o elástica, tipo ley de Hooke:

$$\vec{F}_e = -k\vec{r}$$

produce un tipo de movimiento llamado movimiento armónico simple (MAS) que ya hemos comentado previamente en estos apuntes y notas. La descripción de un MAS en una dimensión espacial y temporal es relativamente simple. Se determina la elongación $x(t)$ de tipo sinusoidal

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) = B\cos(\omega' t + \varphi_0')$$

Se puede ver que, el MAS, es en realidad la proyección sobre una recta de un MCU, donde $A = B$ es la máxima elongación, que se llama *amplitud*. Podemos calcular la elongación sobre el eje X o el eje Y $(x(t), y(t))$, o más generalmente, la proyección sobre cualquier eje o recta en un espacio multidimensional arbitrario $X_n(t)$. ω es la velocidad angular o pulsación, constante en un MAS, t es el tiempo (generalmente unidimensional), φ_0 es la fase inicial, $\varphi = \omega t - \varphi_0$ es la fase, $T = 2\pi/\omega$ es el período y $f = 1/T$ la frecuencia. Recordad que para el MCU teníamos:

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = R\sin(\omega t + \varphi_0)$$

de donde se sigue la semejanza y dualidad entre el MAS y el MCU. El MAS es un movimiento periódico, ya que $x(t) = x(t+T) = x(t+nT)$, con n entero. Para ver el origen del MAS derivado de la ley de Hooke, en una simple dimensión, se tiene que:

$$ma = -kx$$

por tanto

$$ma + kx = 0$$

o dividiendo entre la masa

$$a + \frac{k}{m}x = a + \omega^2 x = 0$$

de donde se sigue que $w = \sqrt{k/m}$, o $k = m\omega^2$. La resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

produce efectivamente

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Derivando respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

lo que efectivamente satisface $a + \omega^2 x = 0$. La fase inicial se puede fijar mediante condiciones iniciales sobre la elongación, velocidad, aceleración o sobre la energía mecánica, cinética y potencial elástica de la partícula que realiza el MAS:

$$x(0) = x_0 = A\sin(\varphi_0)$$

$$v(0) = v_0 = A\omega\cos(\varphi_0)$$
$$a(0) = a_0 = -A\omega^2\sin(\varphi_0)$$

La elongación, velocidad y aceleración (y realmente cualquier derivada temporal del MAS) se encuentran acotadas superior e inferiormente:

$$-A \leq x(t) \leq A$$

$$-A\omega \leq v(t) \leq A\omega$$
$$-A\omega^2 \leq a(t) \leq A\omega^2$$
$$-A\omega^n \leq \frac{d^n x}{dt^n} \leq A\omega^n$$

La energía cinética de un MAS es la cantidad:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad J$$

La energía potencial elástica (la fuerza recuperadora es conservativa y deriva de una función energía potencial) es

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad J$$

La suma de energía cinética y potencial es la *energía mecánica*:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

de donde

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = constant$$

Que la energía potencial elástica es $E_p = kx^2/2$ puede deducirse de un simple argumento geométrico del MAS. La fuerza recuperadora es proporcional a la cantidad de deformación o estiramiento x producido. Por tanto, el trabajo realizado es el área bajo la curva $F = F(x) = kx$, que no es más que un triángulo en la representación $F-x$. El área es $W = F(x)x/2 = (kx)x/2 = kx^2/2 = E_p$. Este argumento es visible en la figura adjunta.

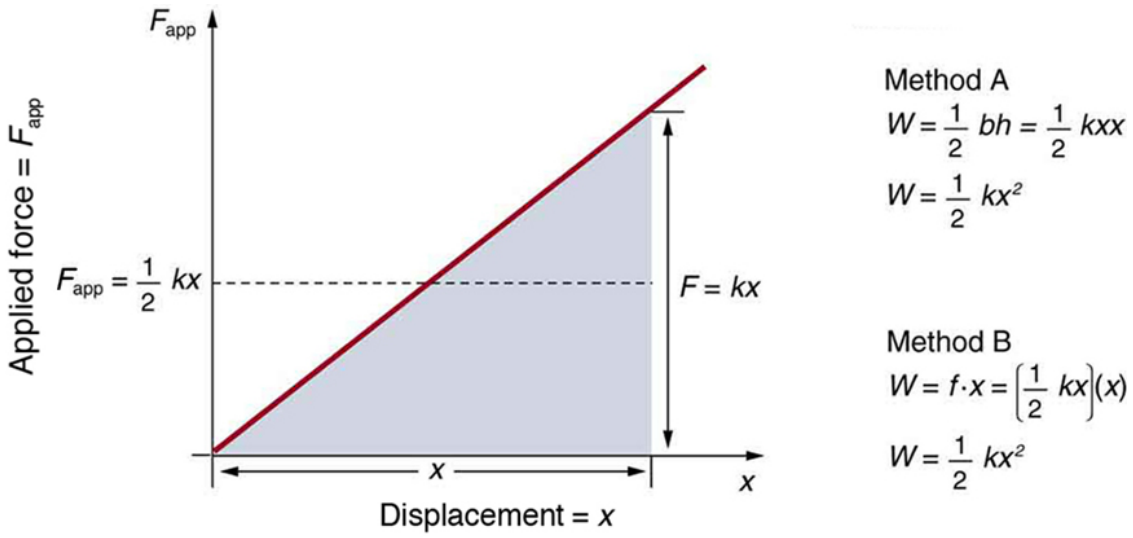


Figure 2.6: Derivación geométrica de la energía potencial para la ley de Hooke.

2.5.2 Fuerzas de rozamiento

En reposo, hay que vencer una fuerza de rozamiento estático F_e para lograr que un cuerpo en contacto con otro empiece a moverse. La fuerza de rozamiento estática es $\vec{F_e} = \mu_e \vec{N}$, donde $\vec{N}$ es la fuerza normal a la superficie de contacto con el cuerpo. Una vez iniciado el movimiento, el rozamiento disminuye un poco (debido a las interacciones entre superficie y cuerpo/objeto). En tal caso, se habla de fuerza de rozamiento dinámica, y se escribe $\vec{F_d} = \mu_d \vec{N} = \mu \vec{N}$. Habitualmente, en Dinámica, se suele considerar con mayor frecuencia el rozamiento dinámico, y no el estático, aunque los dos conceptos son relevantes e importantes. Además, se tiene que

$$0 \leq \mu_d = \mu < \mu_e < 1$$

En general, pues

$$\vec{F_r} = -\mu N \vec{e_v}$$

donde e_v es un vector unitario (módulo unidad) en la dirección y sentido de la velocidad $\vec{v}$. También, en módulo, por tanto,

$$|\vec{F_d}| < |\vec{F_e}|$$

En fluidos (líquidos y gases), se tiene

$$\vec{F}r = -kv^n \vec{e_v}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ es un entero generalmente. En fluidos viscosos, se obtiene habitualmente

$$\vec{F_r} = -K\eta v \vec{e_v}$$

donde K es una constante de viscosidad geométrica, η es la viscosidad, y v es el módulo de la velocidad. Las unidades de la viscosidad son

$$[\eta] = [F] \,/\, [v] = J \cdot s \cdot m^{-2} = MT^{-1} = kg \cdot s^{-1}$$

Un caso particular de esta ley de viscosidad es cuando hay fricción en esferas fluidas. En tal caso la expresión anterior se reexpresa mediante la forma denominada Ley de Stokes

$$F_r = -6\pi R\eta v \vec{e_v}$$

Si $[R] = L$, entonces η cambia la dimensionalidad previa a

$$[\eta] = J \cdot s \cdot m^{-3} = ML^{-1}T^{-1}$$

Por lo tanto, hay que tener cuidado con el coeficiente K (R) de viscosidad geométrica porque a veces lleva unidades de longitud. Usando la ley de Stokes, se puede calcular la velocidad terminal o límite en el aire (despreciando el empuje y otros factores) como sigue:

$$F = ma = mg - 6\pi R\eta v$$

Si $a = 0$, entonces la velocidad límite es

$$v_l = \frac{mg}{6\pi R\eta}$$

Vectorialmente se puede escribir también

$$\vec{v_l} = \frac{m\vec{g}}{6\pi R\eta}$$

2.5.3 Fuerzas centrales y fuerzas conservativas

Una fuerza se dice que es central si

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r$$

Es decir, una central es aquella que solamente depende de la dirección hacia un punto C, en un línea, y se denomina centro de fuerzas. La definición de fuerza conservativa es más sutil (íntimamente relacioanda con la tercera ley de Newton y la primera ley también en última instancia). Se dice que una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si cumple cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes (véase el apartado de trabajo y energía más adelante):

1. $\vec{F} = -\nabla E_p = -\nabla U$. Aquí ∇ es el operador de derivadas parciales $\nabla = \partial_i$, en componentes cartesianas y $3d$:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

2. $\nabla \times \vec{F} = \text{rot}\vec{F} = \text{curl}\vec{F} = 0$. Aquí el rotacional es un producto vectorial (en 3d). En dimensiones superiores a 3, hay que usar el producto exterior $\wedge$ o la derivada exterior $F = dA$, en ocasiones con el operador estrella de Hodge $\star$, para generalizar este concepto de rotacional y producto vectorial. El producto vectorial está restringido dimensionalmente, como operación binaria, a espacios de 3 y 7 dimensiones; como operación n-aria hay restricciones también. El producto exterior se define para espacios de cualquier dimensión $p \leq n$.

3. El trabajo para llevar una partícula desde un punto inicial A a otro B no depende del camino sino solamente de la posición de A y de B.

$$W_\gamma(A, B) = W_{\gamma'}(A, B) = \dots$$

4. El trabajo anterior se puede escribir como menos la variación de la función energía potencial:

$$W_\gamma(A, B) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

5. El trabajo para ir y volver al mismo punto no depende del camino y es igual a cero:

$$W_\gamma(A, A) = 0, \quad \forall \gamma$$

   Esto último puede escribirse también como

$$W_\gamma = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma$$

6. La variación de energía mecánica es nula $\Delta E_m = 0J$.

7. La energía mecánica permanece constante, i.e., $E_m = constant \;\; J$.

Las fuerzas más fundamentales son conservativas, mientras que las fuerzas de contacto suelen ser no conservativas. Las fuerzas centrales son conservativas, pero hay fuerzas conservativas que NO son centrales.

2.5.4 Listado de fuerzas relevantes en Física

Fuerzas elásticas/cósmicas

Para muelles, osciladores, que no superar el límite de elasticidad de su estructura atómico-molecular:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{r}$$
$$\vec{F}_{\Lambda} = +\Lambda\Delta\vec{r}$$

Dimensiones: $[k] = MT^{-2} = [\Lambda]$.

Fuerza gravitacional y peso

En gravitación newtoniana, no relativista especial/general, el campo gravitacional determina una fuerza

$$\vec{F}_N = -G_N\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r = -G_N\frac{Mm\vec{r}}{r^3}$$

El peso es la fuerza con la que un objeto de masa M atrae otro de masa m hacia sí. En la Tierra el peso es igual a

$$\vec{P} = m\vec{g} = -m\left(G_N\frac{M_\oplus}{r^2}\vec{e}_r\right)$$

Fuerza eléctrica

La fuerza entre cargas puntuales está dada por la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_e = K_C\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r = K_C\frac{Qq\vec{r}}{r^3}$$

Para el espacio euclídeo tridimensional (o el espacio-tiempo cuadridimensional), las constantes de gravitación universal y de Coulomb para masas y cargas puntuales valen respectivamente

$$G_N = \frac{1}{4\pi g_0} = 6.674\cdot 10^{-11}Nm^2/kg^2$$
$$K_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\cdot 10^{9}Nm^2/C^2$$

A veces se define también la permitividad eléctrica (gravitacional) como sigue

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_C} = 8.85\cdot 10^{-12}C^2/Nm^2$$

$$g_0 = \frac{1}{4\pi G_N} = 1.19\cdot 10^{9}kg^2/Nm^2$$

Igualando la fuerza eléctrica coulombiana a la gravitacional newtoniana, para $Q = q$ y $M = m$, a igual distancia, se sigue que

$$\left(\frac{Q}{M}\right)^2 = \frac{G_N}{K_C}$$

o equivalentemente

$$\left(\frac{Q}{M}\right) = \sqrt{\frac{G_N}{K_C}}$$

o bien

$$M = Q\sqrt{\frac{K_C}{G_N}}$$

De la relación habitual entre las permitividades eléctrica y magnética en el vacío

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{4\pi K_C}{\mu_0} = \frac{K_C}{K_m}$$

si usamos la cuantización de Dirac $Q_eQ_m = 2\pi N$, se sigue que un monopolo magnético $N = 1$ tendría una masa

$$M = 2\pi q_e c\sqrt{\frac{K_m}{G_N}} = q_e c\sqrt{\frac{\pi\mu_0}{G_N}} \sim 1.17 \cdot 10^{-8} kg$$

Esta masa es similar a la masa de Planck, que también se obtiene por otro camino: igualando la escala de longitud cuántica dada por la longitud de onda de de Broglie/Compton (fotón o cuanto de energía con momento Mc) con la mitad (por comodidad) del radio de Schwarzschild

$$\frac{\hbar}{Mc} = \frac{G_N M}{c^2}$$

de donde

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \sim 10^{-8} kg$$

La longitud de Planck, distancia fundamental a las que se espera la unificación de la gravitación con la teoría cuántica sale también con el argumento paralelo

$$L_C L_G = L_p^2 \to \frac{\hbar}{Mc}\frac{G_N M}{c^2} = L_p^2 \to L_p^2 = \frac{G_N\hbar}{c^3} \to L_P = \sqrt{\frac{G_N\hbar}{c^3}} \sim 10^{-35} m$$

El tiempo de Planck es igual a

$$T_p = L_p/c = \sqrt{\frac{G_N\hbar}{c^5}} \sim 10^{-43} s$$

Además, el absement o ausición de Planck es

$$\mathcal{A} = L_p T_p \sim 10^{-78} m \cdot s$$

Algunas expresiones de energías potenciales para fuerzas habituales son:

- Energía potencial gravitacional $E_p(g) = -G_N\frac{Mm}{r}$. A baja altura, adopta la expresión $E_p = mgh = (-mg)(-h)$.

- Energía potencial eléctrica $E_p(el) = K_C\frac{Qq}{r}$.

- Energía potencial elástica $E_p(elas) = \frac{kx^2}{2}$, o más generalmente se escribe también $\Delta E_c(elas) = \frac{1}{2}k\Delta x^2$.

Figure 2.7: Fuerza sobre un coche o trineo.

2.5.5 Aplicaciones de leyes de Newton: ejercicios

Movimiento de trineo/coche

Supongamos un coche o trineo se mueve por superficie horizontal, con coeficiente de rozamiento μ dinámico.

Entonces:

$$\sum F = F - F_r = ma$$

de donde

$$a = \frac{F - \mu N}{m}$$

Como $N = P = mg$, entonces

$$\boxed{a = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu g}$$

Máquina de Atwood simple

Despreciando la masa de la cuerda, la máquina de Atwood simple (polea de masa despreciable y dos masas) con masas m_1, m_2 ($m_2 > m_1$) plantea las siguientes ecuaciones para las masas y el sistema:

$$\text{Masa 1} : T - P_1 = T - m_1 g = m_1 a$$

$$\text{Masa 2} : P_2 - T = m_2 g - T = m_2 a$$

Sumando y resolviendo par la aceleración y tensión, resulta:

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}}$$

La hipótesis de la igualdad entre tensiones es consecuencia de la condición previa de que la masa de la cuerda es despreciable. En caso contrario, con una densidad lineal (masa por unidad de longitud) $\lambda = M/L$ para la cuerda, $M_s = \lambda L_s$, y la ligadura $x + y + \pi R = L_s$ ha de ser tenida en cuenta (R es el radio de la polea). x, y están relacionados con los centros de masa mediante $P_s(1)) = \lambda g x$, $P_s(2) = \lambda g y$.

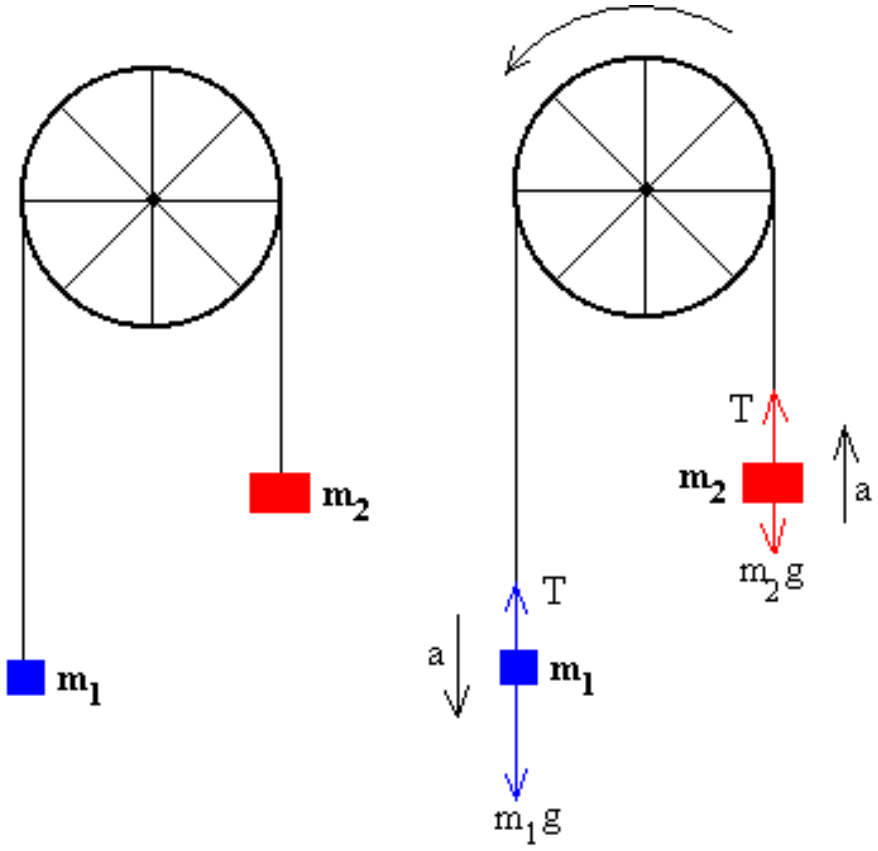


Figure 2.8: Máquina de Atwood.

Plano inclinado sin rozamiento

En un plano inclinado (φ) grados respecto la horizontal, tenemos un cuerpo de masa M. Al descender tendrá aceleración si le dejamos caer con velocidad inicial nula. Aplicando las leyes de Newton y fuerzas sobre cada eje (tomamos el sistema solidario con el cuerpo):

$$\text{Eje X} : \sum F_x = ma_x, \quad P_x = ma_x \quad mg\sin\varphi = ma$$

$$\text{Eje Y} : \sum F_y = 0 \quad N = P_y = mg\cos\varphi$$

de donde

$$\boxed{a = g\sin\varphi}$$
$$N = P_y = mg\cos\varphi$$

Plano inclinado con rozamiento

Si el cuerpo que desciendo por el plano, ahora tiene un rozamiento con éste con coeficiente dinámico μ, entonces:

$$\text{Eje X} : \sum F_x = ma_x, \quad P_x - F_r = ma_x \quad mg\sin\varphi - \mu N = ma$$

$$\text{Eje Y} : \sum F_y = 0 \quad N = P_y = mg\cos\varphi$$

de donde

$$\boxed{a = g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi}$$

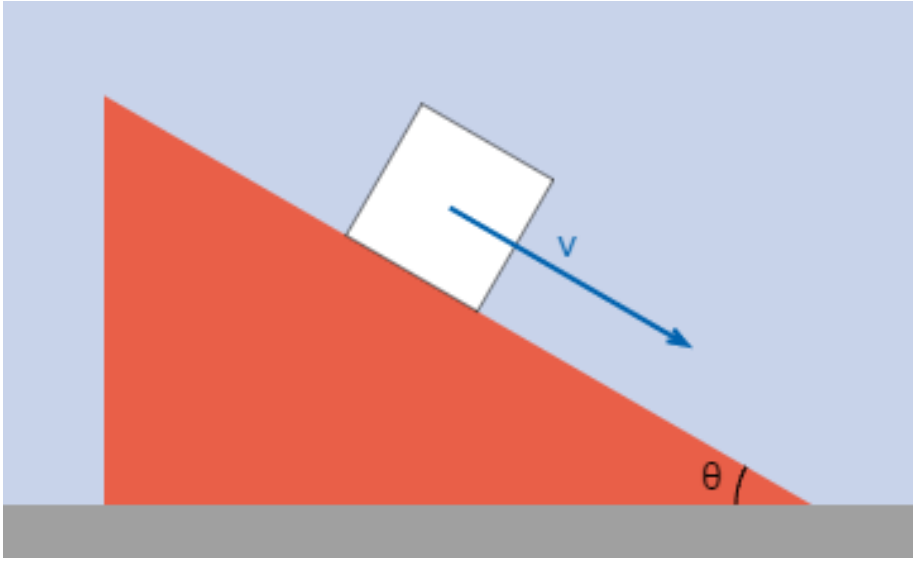


Figure 2.9: El plano inclinado.

$$N = P_y = mg\cos\varphi$$

Una variante de este problema es si en lugar de bajar, sube por una fuerza externa F. En ese caso tendremos:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = ma_x, \quad F - P_x - F_r = ma_x \quad F - mg\sin\varphi - \mu N = ma$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = 0 \quad N = P_y = mg\cos\varphi$$

de donde

$$\boxed{a = \frac{F}{m} - g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi}$$

$$N = P_y = mg\cos\varphi$$

Plano inclinado con polea vertical

Una variante del plano inclinado tiene una polea vertical, de la que cuelga una masa m_1. En el plano inclinado con la cuerda está un cuerpo de masa $m_2 < m_1$. Si el movimiento es hacia la polea vertical porque $m_1 > m_2$ es la que dicta el sentido de movimiento, entonces, para el cuerpo 1:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = m_1 a_x, \quad 0 = 0, a_x = 0$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = m_1 a \quad P_1 - T = m_1 a$$

Para el cuerpo 2:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = m_2 a_x, \quad T - P_{2x} = T - m_2 g\cos\varphi = m_2 a$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = 0 \quad N_2 = P_{2y} = m_2 g\cos\varphi$$

Debemos resolver el sistema:

$$\text{Sistema de masas} \begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g\cos\varphi = m_2 a \end{cases}$$

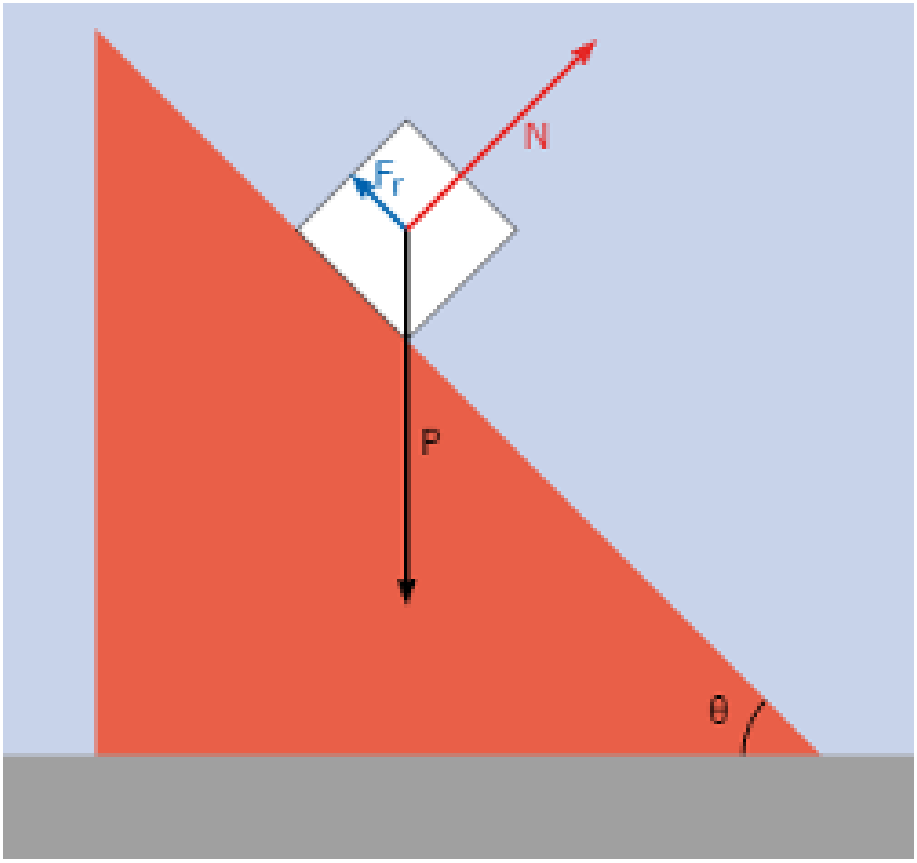


Figure 2.10: Plano inclinado y rozamiento (depende del sentido de movimiento).

La resolución produce

$$\boxed{a = \frac{(m_1 - m_2 \cos\varphi)g}{m_1 + m_2}}$$

y la tensión

$$\boxed{T = m_1 g - m_1 a = m_1(g - a) = m_1 g - \frac{m_1 g(m_1 - m_2\cos\varphi)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 g(1 + \cos\varphi)}{m_1 + m_2}}$$

Si el sentido fuera el contrario (por el opuesto valor numérico de las masas), el replanteamiento y resolución de las ecuaciones cambia solamente unos pocos signos:

$$a = \frac{g(m_2\cos\varphi - m_1)}{m_1 + m_2}$$

$$T = m_1 g + m_1 a = m_1 g + \frac{m_1 g(m_2\cos\varphi - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 g(1 + \cos\varphi)}{m_1 + m_2}$$

Como se observa, las tensiones son iguales independiente del sentido de movimiento. Si incluimos un rozamiento en el plano, tendremos las ecuaciones algo más complicadas pero igualmente resolubles. Suponiendo un movimiento hacia el plano, donde está $m_1 > m_2$ ahora, para el cuerpo 1:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = m_1 a_x, \quad P_{1x} - T - F_{r1} = m_1 a \quad m_1 g\sin\varphi - \mu m_1 g\cos\varphi - T = m_1 a$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = 0 \quad P_1 = m_1 g \quad N_1 = P_{2y} \quad F_{r1} = \nu N = \mu m_1 g\cos\varphi$$

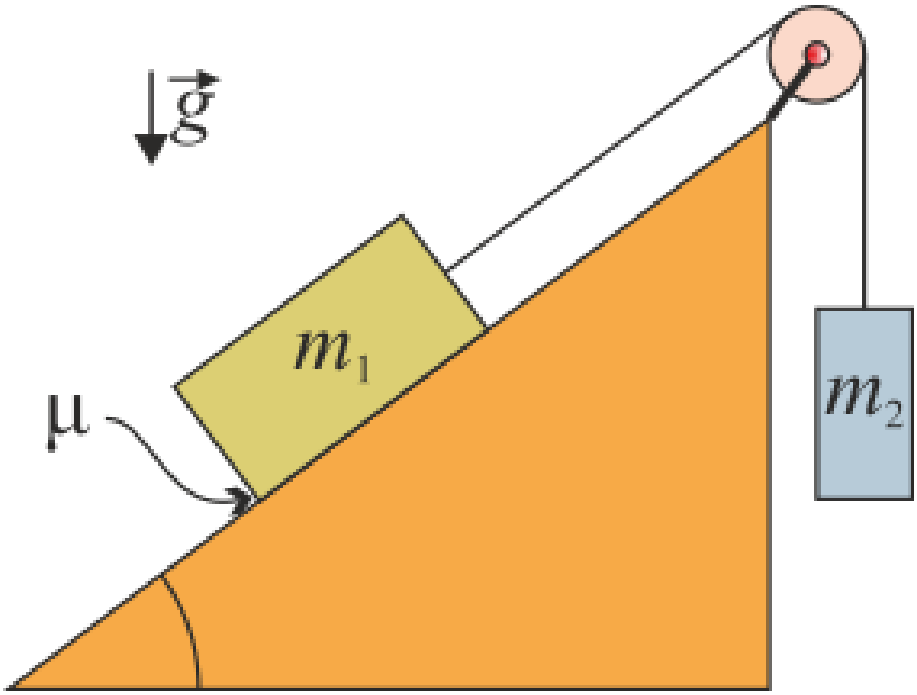


Figure 2.11: Plano inclinado con polea (y rozamiento opcional).

Para el cuerpo 2:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = 0, \quad 0 = 0$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = m_2 a \quad T - P_{2y} = m_2 a$$

Las ecuaciones resultan ser entonces ahora:

$$\text{Ecuaciones plano con rozamiento y polea} \begin{cases} m_1 g \sin\varphi - \mu m_1 g \cos\varphi - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Resolviendo para la aceleración y la tensión de la cuerda:

$$\boxed{a = \frac{m_1 g(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

$$\boxed{T = m_2 g + m_2 a = m_2(g + a) = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\varphi - \mu\cos\varphi)}{m_1 + m_2}}$$

El cambio de sentido de movimiento no cambia el signo de la aceleración, sino que su valor sería:

$$\boxed{a' = \frac{m_2 g - m_1 g(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{m_1 + m_2}}$$

Y la tensión sería entonces:

$$\boxed{T' = m_2 g - m_2 a = m_2(g - a) = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{m_1 + m_2}}$$

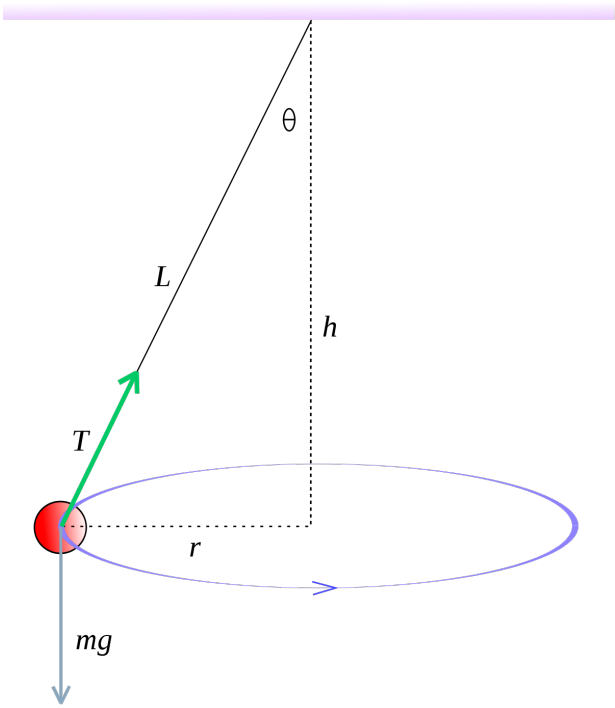


Figure 2.12: Péndulo cónico.

Péndulo cónico

De un techo o un punto a una determinada altura cuelga una masa sostenida por un hilo que suponemos de masa despreciable, de longitud L, y se hace girar con radio R en la horizontal, con un ángulo respecto de la vertical θ. La masa que se cuelga tiene valor M. Descomponiendo la tensión en componentes y aplicando las leyes de Newton se tiene que:

$$\text{Eje X}: \sum F_x = F_c$$

$$\text{Eje Y}: \sum F_y = 0 \quad \vec{P} = -\vec{T}_y \quad P = T_y \quad Mg = T\cos\theta$$

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{F}_c$$

$$T_x = T\cos\theta \quad T_y = T\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{T_y}{T_x}$$

$$T_x = F_c \quad T\sin\theta = \frac{Mv^2}{R}$$

$$T\cos\theta = Mg$$

Dividiendo las 2 últimas ecuaciones, se tiene que

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

con lo que la velocidad del péndulo cónico es

$$\boxed{v = \sqrt{Rg\tan\theta}}$$

Nota: $\sin\theta = R/L$ relaciona R y L.

Si en vez de un círculo horizontal, se hace girar conla cuerda a la masa m en una circunferencia vertical, conviene plantear las ecuaciones con las componentes tangenciales y normales. Tangencialmente:

$$F_t = ma_t = P \qquad ma_t = mg\sin\theta \quad a_t = g\sin\theta$$

La componente normal es:

$$T - P_r = ma_n \quad T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \quad T = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\theta$$

y donde θ es el ángulo que forma con la vertical como antes (eje OX negativo desde el punto superior o centro). La ley de conservación de la energía mecánica permite relacionar tensiones en los puntos inferior y superior (ver figura adjunta).

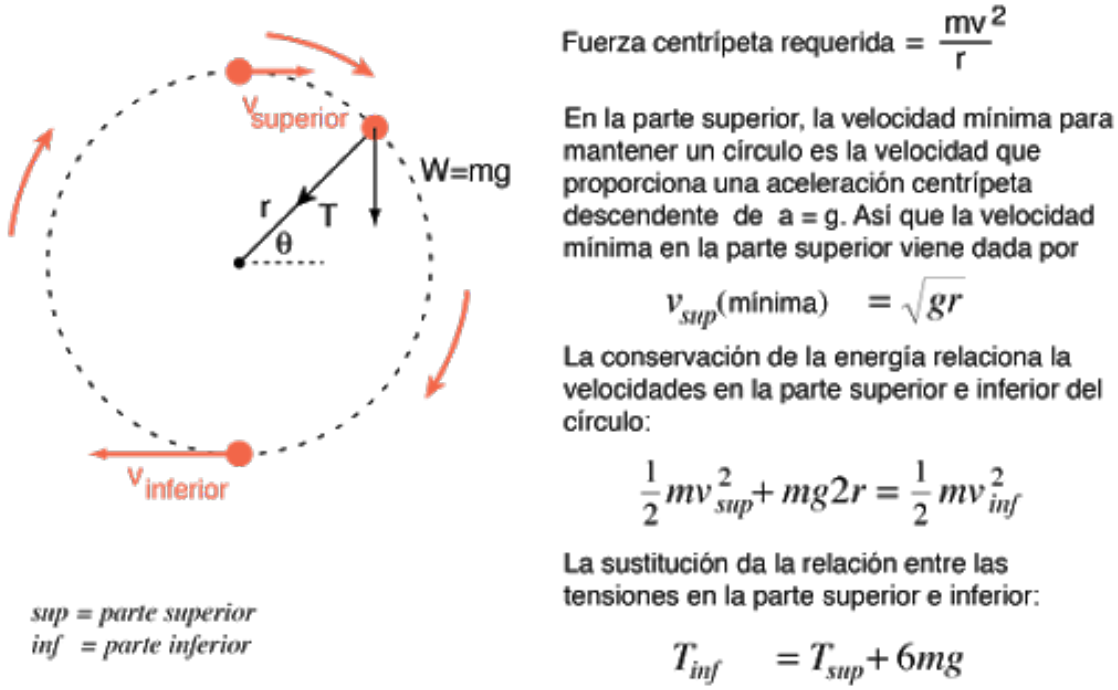


Figure 2.13: Tensiones, hilos y energía. Se deja como ejercicio probar la relación de tensiones del dibujo.

Masa rotante en MCU en mesa con agujero

Suponed una cuerda de la que se ata una masa m_1, que gira en un plano de una mesa horizontal sin rozamiento con un MCU de radio R, mediante una cuerda que pasa por un agujero en la mesa, y de la que cuelga una masa m_2. Aplicando las leyes de Newton a los dos cuerpos:

$$T_1 = T = m_1 a_c = m_1 \frac{v^2}{R}$$

$$T_2 = T = m_2 g$$

La velocidad v para que el sistema esté en equilibrio se deduce de las ecuaciones anteriores:

$$m_1 \frac{v^2}{R} = m_2 g \rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right) Rg}$$

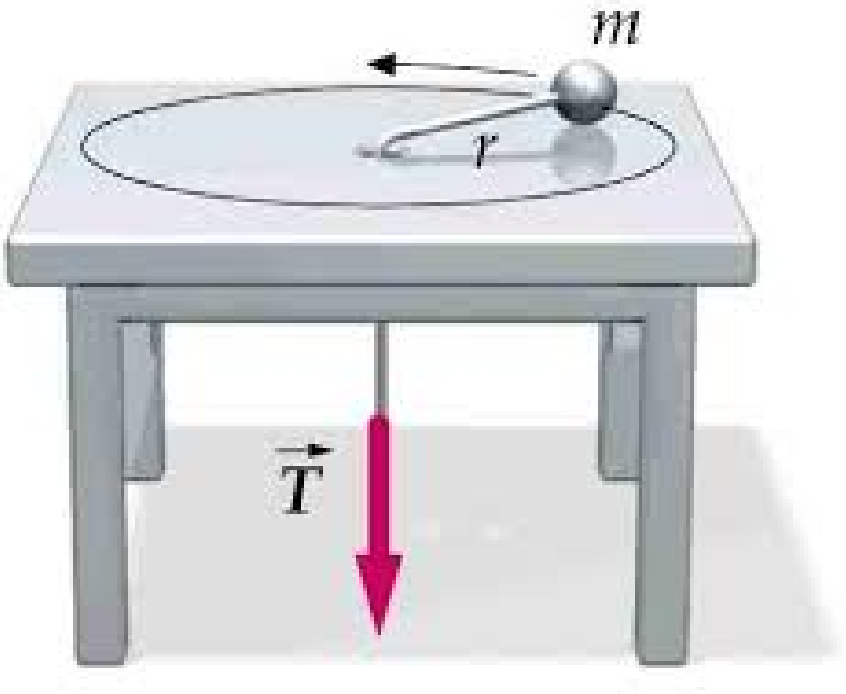


Figure 2.14: Masa rotante y masa colgada en equilibrio.

Curva peraltada

Para un problema de una curva con peralte, descomponemos la normal en vez del peso por comodidad. En este caso:

$$N_x = N \sin\varphi \quad N_y = N\cos\varphi$$

$$\text{Eje X} : \sum F_x = F_c \quad N_x = F_c \quad N\sin\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

$$\text{Eje Y} : \sum F_y = 0 \quad N_y = P \quad N\cos\varphi = mg$$

El sistema de ecuaciones se resuelve, para dar

$$\tan\varphi = \frac{v^2}{Rg} = N_x/N_y$$

$$v = \sqrt{Rg\tan\varphi}$$

donde φ es el ángulo de peralte de la curva o plano. No depende de la masa del vehículo u objeto.

Plano metálico cargado y bolita metálica

Un plano metálico se sitúa verticalmente y genera un campo eléctrico $\vec{E}$. Del plano sale un hilo del que cuelga una masa esférica puntual metálica cargada que se encuentra en equilibrio formando un ángulo φ con la vertical del plano. La longitud de la cuerda es L y, en equilibrio, se encuentra a una distancia D medida desde la perpendicular del plano. Para una carga q y masa m dadas, determina la distancia D de equilibrio es sencillo. Aplicando leyes de Newton:

$$\text{Eje X} : T_x = F_e = qE = T\sin\varphi$$

$$\text{Eje Y} : T_y = T\cos\varphi = mg$$

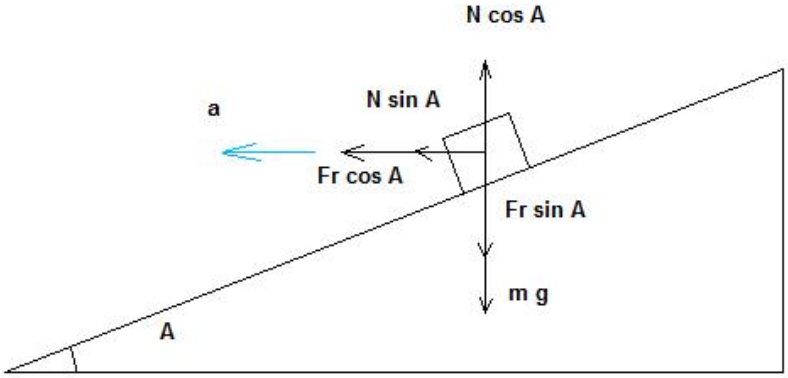


Figure 2.15: Diagrama de fuerzas para el peralte.

Dividiendo:

$$\tan\varphi = \frac{qE}{mg}$$

Por trigonometría, se deduce que $\sin\varphi = D/L$. Entonces:

$$\boxed{D = L\sin\varphi = L\sin\tan^{-1}\left(\frac{qE}{mg}\right)}$$

Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler admite una deducción sencilla para órbitas circulares (aunque es válidad para órbitas elípticas y más generalmente para cónicas). Para un objeto que gire mediante MCU, igualando fuerza gravitacional y fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \quad \rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

se deduce pues que

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

La tercera ley de Kepler en $3d$ ($4D$) es pues

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3}$$

o bien

$$\boxed{GM = \omega^2 r^3}$$

que es la famosa "ley 1-2-3" de las *armonías* de Kepler. La versión más generalizada usa el concepto de centro de masas de un sistema de cuerpos.

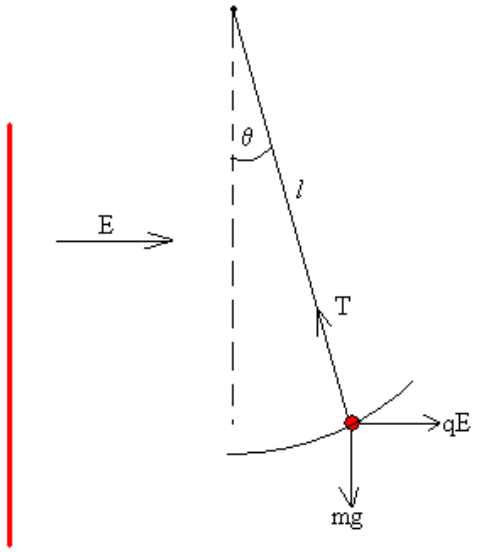


Figure 2.16: Diagrama de fuerzas para el plano y la bolita.

Choques inelásticos

Si no actúan fuerzas externas sobre un cuerpo o sistema, el momento $\vec{p}$ se conserva. Supongamos dos cuerpos, que se mueven con velocidades $\vec{v}, \vec{V}$ y masas m, M. Chocan y se quedan unidos. ¿Cuál es la nueva velocidad? Aplicando la conservacion del momento:

$$\vec{p}(\text{antes}) = \vec{p}(\text{después})$$

$$m\vec{v} + M\vec{V} = (m + M)\vec{V}'$$

de donde

$$\boxed{\vec{V}' = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M}}$$

Para un choque inelástico donde el cuerpo final sale con velocidad final arbitraria, colisionando los objetos previos con unos determinados ángulos y orientaciones, hace falta un planteamiento vectorial general. Para el caso en el que la masa 1 tiene una velocidad $\vec{v}_1 = v_1\vec{i}$ y la masa 2 tiene una velocidad $\vec{v}_2 = v_2\vec{j}$, saliendo la masa conjunta con velocidad $\vec{V} = V\cos\theta\vec{i} + V\sin\theta\vec{j}$, la conservación del momento produce las ecuaciones

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V\cos\theta$$

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V\sin\theta$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1}$$

$$V^2 = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

o bien

$$V = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{(m_1 + m_2)}$$

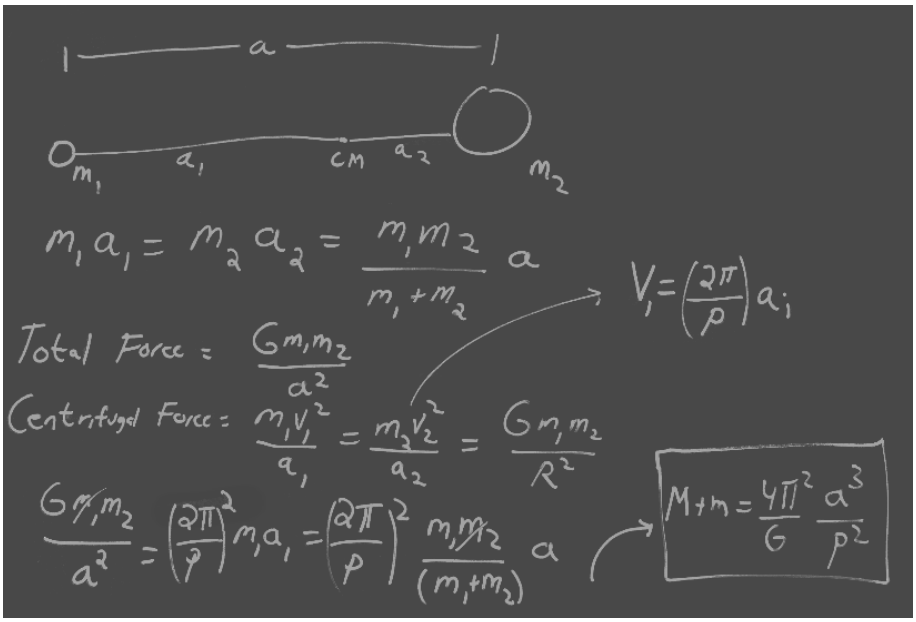


Figure 2.17: Tercera ley de Kepler generalizada. La contribución de Newton a la mejora de los cálculos astronómicos.

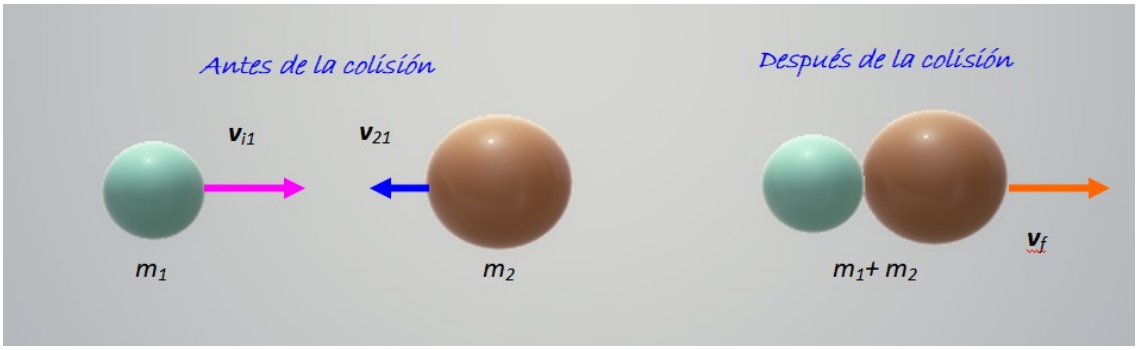


Figure 2.18: Choque inelástico.

Choques elásticos

Un choque es elástico cuando además del momento se conserva la energía cinética. Esto es así porque no hay variación de la energía interna de las partículas en general, ni hay deformaciones o pérdidas. Realmente, los choques a nivel cotidiano usual ni son puramente elásticos ni puramente inelásticos, sino intermedios, lo que lleva asociado un concepto llamado coeficiente de restitución para indicar cuánto de inelástico o elástico es un choque. Si consideramos un choque elástico en una sola dimensión, de dos partículas con masa m_1, m_2, inicialmente con velocidades v_1, v_2, que tras el choque se transforman en velocidades V_1, V_2

$$\vec{p}(\text{antes}) = \vec{p}(\text{después})$$

$$E_c(\text{antes}) = E_c(\text{después})$$

de donde

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_2 + m_2 V_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Reordenamos la segunda ecuación de la forma siguiente

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 V_2^2 + m_2 V_2^2$$

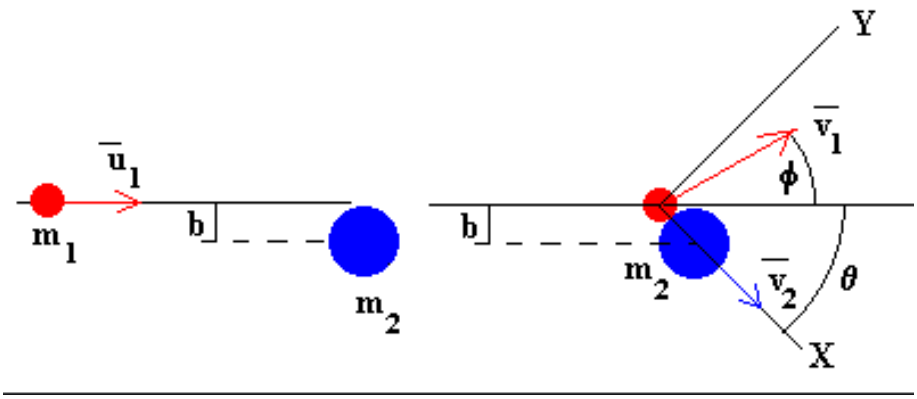


Figure 2.19: Choque elástico.

Y reordenamos también la primera de la forma

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(v_2 - V_2)$$

$$m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \leftrightarrow m_1(v_1 + V_1)(v_1 - V_1) = m_2(V_2 + v_2)(V_2 - v_2)$$

Dividiendo la segunda entre la primera

$$\boxed{(v_1 + V_1) = (V_2 + v_2)}$$

o bien

$$V_2 = v_1 + V_1 - v_2$$

Insertando esta ecuación en la primera ecuación (conservación del momento lineal) se obtiene

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2(v_1 + V_1 - v_2)$$

de donde despejamos V_1

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 v_1 + m_2 V_1 - m_2 v_2$$

$$(m_1 + m_2)V_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - m_2 v_1$$

$$\boxed{V_1 = \frac{m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

Por simetría entre $1, 2$ se obtiene V_2:

$$\boxed{V_2 = \frac{m_2 v_2 + 2m_1 v_1 - m_1 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$$

El coeficiente de restitución C_R se define como

$$C_R = \frac{V_2 - V_1}{v_2 - v_1}$$

para colisiones en una dimensión. En casos más generales, se define como el valor

$$C_R = \frac{\Delta V}{\Delta v} = \sqrt{\frac{E_c'}{E_c}}$$

Para un choque elástico plano, donde las masas al final salen en diferentes direcciones, hace falta un planteamiento vectorial general.

2.6 Dinámica de rotación

Cuando se ponen en acción rotaciones y giros, aparecen no ya solamente en cinemática magnitudes nuevas de rotación (ángulo, velocidad y aceleración angular, jerk angular,...) sino conceptos asociados a las rotaciones. El aparato matemáticos para tratar las rotaciones en 3d son los productos vectoriales, pero en espacios multidimensionales se necesitan tensores antisimétricos de orden dos (o superior), y los bivectores (multivectores y polivectores en general). Hay tres magnitudes relevantes para Dinámica de rotación: el momento angular $\vec{L}$, el momento de una fuerza $\vec{M}$ y el momento de inercia I ó $I_{ij} = \overrightarrow{\overrightarrow{I}}$ (tensor de inercia).

Momento angular

Se llama momento angular $\vec{L}$ a la magnitud definida por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{2.52}$$

Dimensiones: $[L] = ML^2T^{-1}$. Unidades: $J \cdot s = J/Hz = kgm^2s^{-1}$. En dimensiones superiores, el objeto equivalente es el bivector $L = r \wedge p = mr \wedge v$, o bien el tensor antisimétrico $L_{ij} = r_i p_j - r_j p_i$.

Momento de una fuerza

Se llama momento de una fuerza $\vec{F}$ o torque a la magnitud $\vec{M}$ (a veces se escribe $\vec{\tau}$ definida por

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \tag{2.53}$$

Dimensiones: $[M] = ML^2T^{-2}$. Unidades: $N \cdot s = kgm^2s^{-2}$. En dimensiones superiores, el objeto equivalente es el bivector $M = r \wedge F = mr \wedge a$, o bien el tensor antisimétrico $M_{ij} = r_i F_j - r_j F_i$.

Momento de inercia de una partícula

El análogo de la masa como invariante geométrico de la Dinámica de rotación es una cantidad y magnitud llamada momento de inercia, que intuitivamente puede imaginarse como la distribución de la masa sobre el eje (plano, hiperplano, hiperobjeto) de giro. Para una partícula de masa m con una rotación simple de radio de giro R, el momento de inercia es igual a la cantidad

$$I = mR^2 \tag{2.54}$$

Deducción: para el MCU, la aceleración angular es nula, pero la aceleración centrípeta vale $a_c = \omega^2 R$. La fuerza centrípeta es $F_c = ma_c = m\omega^2 R = I\omega^2/R$. El momento es $M = FR = I\omega^2$. Para objetos que no sean puntuales, el momento de inercia es una cantidad más complicada que depende de la dirección del eje de giro y la geometría del objeto. Existen tablas de momentos de inercia, y procedimientos (de tipo integral) para el cálculo de los momentos de inercia de cuerpos con diferentes simetrías y ejes de giro(distribuciones de masa).

Ecuación fundamental de la Dinámica de rotación

Si derivamos respecto del tiempo en la definición de momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\vec{F} = \vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M} = \vec{\tau}$$

debido a que velocidad y momento lineal (o impulso), son directamente proporcionales. Por tanto, se tiene que

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}} \tag{2.55}$$

Tomando módulos, $M = rma = Rm\alpha R = mR^2\alpha = I\alpha$. Análogamente, con el momento angular, $L = Rm\omega R = I\omega$. Por lo tanto,

$$\vec{L} = \vec{\vec{I}}\vec{\omega} \tag{2.56}$$

$$\vec{M} = \vec{\vec{I}}\vec{\alpha} \tag{2.57}$$

De forma también similar a la ley de conservación del momento lineal, para el momento angular o cinético hay un teorema de conservación cuando la suma de momentos de fuerzas exteriores se anula, el momento angular es constante:

Teorema de conservación del momento angular o cinético

Si la resultante de todos los momentos de fuerzas exteriores es nula, entonces el momento angular total de la partícula permance constante. La demostración es trivial:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{constant}$$

Cuando en vez de ser una partícula es un sistema de partículas, la conservación del momento angular se extiende a la suma de momentos angulares o cinéticos de todas las partículas, es decir:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots \vec{l}_N = \sum_{j=1}^{N}\vec{l}_i = \overrightarrow{constant}$$

Una consecuencia divertida de la conservación del momento angular se observa en el patinaje artístico: al cambiar la distribución de masa, extendiendo o recogiendo los brazos, cambiamos la velocidad angular de giro. La demostración también es muy simple:

$$L_0 = L_f \rightarrow I_0\omega_0 = I_f\omega_f \rightarrow mR_0^2\omega_0 = mR_f^2\omega_f \rightarrow \frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{I_0}{I_f} = \frac{R_0^2}{R_f^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{I_0}{I_f}} = \frac{R_0}{R_f}$$

de donde $\omega_f > \omega_0$ si $R_0 > R_f (I_0 > I_f)$, y $\omega_f < \omega_0$ si $R_0 < R_f (I_0 > I_f)$.

2.7 Trabajo, energía y potencia

Trabajo W es un concepto muy importante en Física y la vida cotidiana. Así como el concepto de energía. Energía es la capacidad de hacer algo. Matemáticamente, el trabajo es una integral de línea (más estrictamente una forma de fabricar una 0-forma de una 1-forma):

$$W_\gamma = \int_\gamma \omega = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En términos más técnicos, es la circulación de un campo vectorial $\vec{F}$, a lo largo de una curva $\gamma = C$. Si la fuerza es constante, puede extraerse de la integral, y a nivel diferencial e incremental, respectivamente:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\theta$$

Las unidades del trabajo W son los julios J en el S.I. A nivel dimensional:

$$[W] = ML^2T^{-2} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = J$$

Otras unidades de energía usadas en Física son:

- El ergio (erg). En el sistema cegesimal, $1erg = 1g \cdot cm^2/s^2$. Equivalencia: $1J = 10^7 erg$.
- Electrón-voltio eV. Equivalencia: $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$. O también: $1GeV = 1.6 \cdot 10^{-10} J$.
- El kilovatio-hora. $1kWh = 3.6 \cdot 10^6 J = 3.6MJ$.
- El FOE (fifty one ergs) en explosiones de supernovas.
  $1FOE = 10^{51} ergs = 10^{44} J$.

La integral del trabajo puede hacerse en coordenadas cartesianas u otras coordenadas:

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F = \int_C dU = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r'}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

De este concepto hay múltiples generalizaciones, tanto en versión multiforma como multivectorial y polivectorial. Para varias fuerzas diferentes se tiene

$$W_t = \sum_i W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

La potencia se define como la variación instantánea o media del trabajo respecto del tiempo:

Potencia

Se llama potencia media a la variación temporal del trabajo en un intervalo de tiempo. Matemáticamente:

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

La potencia instantánea es el ritmo de cambio del trabajo respecto del tiempo en cualquier instante:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

Dimensiones: $[P] = ML^2T^{-3}$.
Unidades: el vatio (W). $1W = 1J/1s = 1J \cdot 1s^{-1}$.

Hay una relación sencilla y universal entre fuerza, velocidad y potencia si la fuerza es constante (o no), conocida ésta. De la definición de potencia y trabajo elemental

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

de donde obtenemos por tanto

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Históricamente, la primera noción de energía es la *vis viva*, enrgía cinética, de Descartes. La energía cinética está asociada al cambio de velocidad de un cuerpo. Podemos extraer la definición de esta energía usando la noción de trabajo elemental y la segunda ley de Newton, con un poco de análisis infinitesimal básico de la forma siguiente.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt}dt$$

de donde

$$dW = \frac{1}{2}md(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}mdv^2$$

o bien

$$\Delta W = \frac{1}{2}m\Delta v^2 = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right)$$

que no es es más que el Teorema de las Fuerzas Vivas (o Vis Viva) de Descartes. Esto lleva a la definición de energía cinética (no relativista) como sigue:

Energía cinética (Vis viva)

Se llama energía cinética (vis viva) a la cantidad

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

o bien, usando el momento $p = mv$,

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

La expresión de la energía cinética anterior es válida solamente para partículas libres y no relativistas[1], siempre que $v \neq 0$. La vis viva se origina en Descartes. Y es una magnitud conservada si no hay fuerzas externas. ¿Por qué? Hay principios de simetría: la invarianza frente a traslaciones espaciales de la partícula libre (y traslaciones temporales). Como $\dot{p} = 0$, podríamos construir una magnitud (llamada acción) tal que:

$$S(p) = \int pdt \tag{2.58}$$

La variación de la acción frente a una perturbación pequeña es

$$\delta S = \int \delta pdt \tag{2.59}$$

Como $\delta p(t) = \frac{dp}{dt}\delta t = 0$, eso significa que

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \int \frac{dp}{dt}dt = \int dp = const \tag{2.60}$$

[1]La energía cinética relativista especial tiene la expresión siguiente:

$$E_k = (\gamma - 1)\,mc^2 = E - E_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2$$

de donde

$$\frac{\delta S}{\delta t} = const \tag{2.61}$$

Por ende, la conservación del momento está asociada a una variación temporal constante de la acción. Una manera alternativa de ver esto es deducir la forma funcional de la energía cinética a partir de la conservación del momento:

$$\dot{p} = 0 \tag{2.62}$$

Multiplicando por el momento:

$$p\dot{p} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{dE_c}{dt} = 0 \tag{2.63}$$

✍ **Ejercicio**. ¿Qué pasaría si en vez de multiplicar por p, multiplicásemos por p^n? ¿Qué pasaría con la energía cinética? ¿Y si multiplicásemos por $d^n p/dt^n$? Comenta el resultado.

La importancia de los conceptos de energía radica en la potencia de la idea de simetría y leyes de conservación que los rodea. Si solamente actúan fuerzas conservativas sobre un cuerpo o sistema, la energía mecánica total se conserva, con lo que tenemos el teorema de la energía mecánica. Si hay fuerzas no conservativas involucradas, la variación de energía mecánica mecánica será precisamente el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

Teorema de la energía mecánica (generalizado)

Si sobre una partícula, cuerpo o sistema actúan una serie de fuerzas conservativas y no conservativas, la variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas:

$$\Delta E_m = W(F_{nc})$$

Para los cuerpos en rotación, hay fórmulas para la energía cinética de rotación.

Energía cinética de rotación

Para una partícula simple, si usamos $v = \omega R$, se tiene una energía cinética de rotación:

$$E_c(rot) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

es decir

$$\boxed{E_c(rot) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{\vec{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j} \tag{2.64}$$

2.8 Sistemas de partículas

Cuando hay no una sino varias partículas, tenemos un sistema de partículas. La masa total de un sistema de partículas es la suma de las masas de las partículas:

$$M = m_t = \sum_{i=1}^{N} = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$$

Se llama sólido rígido a un sistema de puntos materiales cuyas posiciones relativas permanecen constantes. En un sólido rígido, el equilibrio se alcanza cuando la suma de fuerzas y momentos

externos son cero. Se llama momento de inercia I de un sólido rígido, respecto de un eje, a la cantidad $I = md^2$ para una partícula, y $I = \sum_i m_i d_i^2$, para el sistema de partículas. el teorema de Steiner señala que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje paralelo que pase por el centro de masa están relacionados mediante la ecuación $I_G = I_e + Md^2$. Algunos momentos de inercia sencillos:

- Esfera maciza: $I = \frac{2}{5}MR^2$.
- Cilindro por su eje: $I = \frac{1}{2}MR^2$.
- Cono circular por su eje: $I = \frac{3}{10}MR^2$.
- Varilla alargada por eje perpendicular a su centro: $I = \frac{1}{12}ML^2$.
- Caja paralelepípedo: $I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$.

El momento de inercia permite simplificar, como hemos mencionado antes, la Dinámica de rotación. Así, el análogo de $\vec{F} = m\vec{a}$ es $\vec{\tau} = I\alpha$, donde $L = I\omega$. Además, podemos definir la energía cinética de rotación como $E_c(rot) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$. El trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el sólido ha girado un ángulo se puede determinar mediante la integral del momento de fuerzas o torque sobre el ángulo:

$$W = \int_i^f M d\varphi = \int_i^f \tau d\varphi \tag{2.65}$$

Supongamos un sistema de puntos materiales formado por n masas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Se define el centro de masa como el punto con vector de posición:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \tag{2.66}$$

La velocidad del centro de masas se define derivando:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \tag{2.67}$$

y la aceleración similarmente:

$$\vec{a}_G = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{f}_i}{M} = \frac{\vec{F}}{M} \tag{2.68}$$

La resultante de fuerzas externas satisface $\vec{R} = M\vec{a}_G$. Para un punto material, también se definen el momento angular y momento de una fuerza(torque), respectivamente, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{2.69}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a} \tag{2.70}$$

El momento de un sistema de partículas es aditivo:

$$\vec{P} = M\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{2.71}$$

En cambio, el momento angular de un sistema de partículas es una cantidad más complicada de relacionar con el centro de masas:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = (\vec{r}_G \times \vec{P}) + \sum (\vec{r}_i^* \times \vec{p}_i^*) \tag{2.72}$$

donde $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, y $\vec{p}_i^* = m_i \vec{v}_i^*$. El impulso y el impulso angular de una partícula se definen como las cantidades

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \tag{2.73}$$

$$\vec{I}_M = \int \vec{\tau} dt = \int \vec{r} \times \vec{F} dt = \Delta \vec{M} \tag{2.74}$$

2.9 Fuerza y campo. Potencial

Para las fuerzas gravitacional y eléctrica, el campo gravitacional y eléctrico se define como

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G_N \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \quad N/km(m/s^2)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}_e}{m} = K_C \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \quad N/C$$

El potencial es una definición análoga para energías:

$$V_g = \frac{E_p(g)}{m} = -G_N \frac{Mm}{r} \quad J/kg$$

$$V_e = \frac{E_p(el)}{q} = K_C \frac{Q}{r} \quad V(J/C)$$

Así, se definen también las variaciones de energía en función de las variaciones de potencial y viceversa:

$$\Delta E_p(g) = m \Delta V_g$$

$$\Delta E_p(el) = q \Delta V_e$$

2.10 Campo gravitacional y eléctrico

El concepto de campo subyace a toda la Física. El sueño de todo teórico y científico que quiera estudiar el Universo/Multiverso y explicarlo es la construcción de una teoría unificada del campo. Los campos son objetos que podemos imaginar de tipo "fluídico" que llenan el vacío o espacio-tiempo. Los campos tienen propiedades características que lo generan: el campo gravitacional la masa(energía), el campo eléctrico la carga eléctrica, el campo magnético las cargas en movimiento, la fuerza nuclear débil el sabor, y la fuerza nuclear fuerte el color. La carga eléctrica y también la energía sabemos desde el siglo XX que están cuantizadas:

$$E = Nhf$$

$$Q = Ne$$

La carga eléctrica y la energía son magnitudes generalmente conservadas en la Naturaleza:

$$\sum_i \Delta E_i = 0$$

$$\sum_i Q_i^+ + \sum_i Q_i^- = \sum \Delta Q_i = 0$$

La materia se organiza en distribuciones de carga y masa discretas y continuas. Existen materiales aislantes, semiconductores y conductores. También existen superconductores y aislantes topológicos (conducen en la superficie pero no lo hacen en el "bulk"). La ley de Coulomb vale para cargas puntuales (para cargas distribuidas en volúmenes hay que usar un teorema denominado teorema de Gauss):

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{e}_r$$

La permitividad eléctrica de un material es

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

Para un conductor, dentro, no hay campo (el potencial es constante en el interior de un conductor eléctrico estándar).

Tanto el campo eléctrico como el campo gravitacional obedecen un principio denominado principio de superposición (aunque en el caso de la gravitación relativista y electromagnetismo en medios no lineales, no es cierto en general dicho principio), que indica que el campo total de un conjunto de cargas o masas en un punto es igual a la suma de campos de cada carga y punto:

$$\vec{E}_t(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} K_C \frac{Q_i}{r_i^2(P)}\vec{e}_i(P)$$

$$\vec{g}_t(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + \vec{g}_n = -\sum_{i=1}^{n} G_N \frac{M_i}{r_i^2(P)}\vec{e}_i(P)$$

El principio de superposición también vale para potenciales

$$V_t(el) = \sum_i V_i(el) = V_1(el) + V_2(el) + \cdots + V_n(el) = \sum_i \frac{K_C Q_i}{r_i(P)}$$

$$V_t(g) = \sum_i V_i(g) = V_1(g) + V_2(g) + \cdots + V_n(g) = -\sum_i \frac{G_N M_i}{r_i(P)}$$

Es importante no confundir el símbolo de campo eléctrico con el de energía. El trabajo eléctrico se relaciona con el potencial si hay suficiente simetría de la forma siguiente:

$$W_{el} = QEr = QEd$$

Como el campo eléctrico es conservativo $\Delta E_c = -\Delta E_p$, i.e. $\Delta E_m = 0$.

Los condensadores eléctricos son dispositivos que almacenan carga:

$$C = \frac{Q}{V}$$

o en genral

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Las unidades de la capacidad o de los condensadores eléctricos son los faradios (F), $1F = 1C/1V$. La resistencia eléctrica disipa calor por efecto Joule, y es responsable de la pérdida de

eficiencia en el transporte de electricidad o carga eléctrica. Matemáticamente, la ley de Ohm relaciona la resistencia eléctrica de materiales usuales con el potencial y la corriente

$$V = IR$$

La corriente eléctrica es la magnitud que mide el flujo de carga por unidad de tiempo, es decir, la variación de carga por unidad de tiempo (media o instantánea) es la corriente eléctrica:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

La corriente eléctrica se mide en amperios A ($1A = 1C/1s$) y la resistencia eléctrica se mide en ohmios (Ω), $1\Omega = 1V/1A$. La asociación de resistencias en paralelo o serie da lugar a dos fórmulas:

- Resistencias en serie. Se suman:

$$R_t = \sum_i R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

- Resistencias en paralelo. Se hace el recíproco:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Para condensadores es al revés:

- Condensadores en paralelo. Se suman:

$$C_t = \sum_i C_i = C_1 + \cdots + C_n$$

- En serie. Se hace el recíproco:

$$\frac{1}{C_t} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Factores que afectan a la resistencia:

1. Temperatura.
2. Naturaleza del material.
3. La longitud del material.
4. La sección o área del material

La relación entre resistencia, longitud y área de un conductor viene dada por la fórmula de la resistividad ρ_e

$$R = \rho_e \frac{L}{S}$$

Para un generador de corriente, el trabajo se calcula

$$W_g = \varepsilon I t$$

en donde ε es ahora el voltaje del motor o generador. La potencia de un generador viene dada por la ley de Joule

$$P = \varepsilon I = I^2 R$$

donde R es la resistencia del generador. Para un generador realista o real, se tiene que

$$\varepsilon_r = \varepsilon - Ir$$

donde r es una resistencia interna del generador. Con un motor intercalado, de voltaje ε' y resistencia r', esta definición produce la ley de Ohm generalizada

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'}$$

Demostración: Por el circuito total circula una corriente I.La resistencia interna es r y la interna r', estando todas en serie, luego $R_t = R + r + r'$. El voltaje del circuito es es del generador menos el del motor interno, i.e., $V = \varepsilon - \varepsilon'$. Igualando se obtiene la ley de Ohm generalizada de arriba.

Chapter 3

Química

3.1 Conceptos básicos de Química

3.1.1 Moles y masa

Moles y masa molar

El número de moles (n) de una sustancia o especie química se calcular dividiendo la masa en gramos $m(s)$ entre la masa molar de dicha sustancia. Matemáticamente:

$$\boxed{n = \frac{m(g)}{MM}}$$

Uso: cuando me dan la masa en gramos y puedo calcular o me dan la masa molar de la sustancia.
Uso(II): cuando me dan los moles y la masa molar, puedo calcular los gramos, despejando

$$\boxed{m(g) = n \cdot MM}$$

Abundancia relativa y masa molar de un elemento X

Todo elemento de la Tabla Periódica viene en forma de varios isótopos, que tienen ciertas abundancia isotópicas relaticas $A_i(X)$. La masa atómica de un elemento que figura en la Tabla Periódica es, en realidad, la suma ponderada de las masas atómicas de los diferentes isótopos de X, que podemos denotar por X_i, cada uno con una abundancia relativa natural $A_i(X_i)$ en tanto por uno (o por ciento). Entonces, la masa atómica molar de un elemento es

$$\boxed{m(X) = MM(X) = \sum_i A_i(X_i) m_i(X_i)} \tag{3.1}$$

y donde $A_i(X_i)$ es la abundancia relativa del isótopo X_i, con masa molar $m_i(X_i)$.

3.1.2 Número de partículas y número de Avogadro

Un mol, en el S.I., está relacionado con la constante de Avogadro

$$N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23} mol^{-1}.$$

Entonces, el número de partículas en una determinada cantidad de moles se puede calcular por proporcionalidad simple y directa:

Ecuaciones para el número de partículas y moles

El número N de partículas de una sustancia, que hay en una cantidad de moles dada n, se calcula mediante la expresión

$$N = n \cdot N_A$$

Uso: Calcular el número de partículas (átomos, moléculas, iones,...) en una determinada cantidad de moles.
Uso(II): Calcular el número de moles si sé una determinada cantidad de partículas, despejando

$$n = \frac{N}{N_A}$$

3.1.3 Masa y partículas

Combinando los casos anteriores, podemos calcular la masa de un determinado número de partículas porque igualando

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m(g)}{MM}$$

Por tanto, tendremos que

Masa y número de partículas

Para calcular la masa de un determinado número de partículas N, sabiendo la masa molar y el valor de la constante o número de Avogagro N_A, se usa la expresión:

$$m(g) = \frac{N}{N_A} \cdot MM$$

3.1.4 Leyes de los gases ideales

Para un gas igual o perfecto, las leyes de los gases ideales de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac, Charles, Avogadro y combinada (general) de Clapeyron pueden sintentizarse en una simple ecuación de estado denominada ecuación del gas ideal, que tiene la forma siguiente.

Ecuación de estado del gas ideal

Para todo gas ideal o perfecto, se cumple la ecuación

$$\boxed{PV = nRT}$$

donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles,T es la temperatura absoluta en kelvin y R es la constante de los gases ideales.
Uso: Hallar el volumen conocida la presión P, la temperatura T, y los moloes n, o bien calcular cualquiera de las 4 variables (P, V, n, T), conocidas 3 de ellas.
Generalmente, P se da en atmósferas (atm), V en litros, y T en kelvin, por lo que la constante de los gases en estas unidades es

$$R = 0.082 atm \cdot L \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

En unidades del S.I.:

$$R = 8.31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

Comentario: la constante R está relacionada con el número de Avogadro y la constante de Boltzmann de la teoría cinética y termodinámica estadística mediante la relación

$$R = k_B \cdot N_A$$

Ley de Dalton de las presiones parciales

Para un gas que sea mezcla de varios gases o componentes, se tiene que

$$\boxed{P_i = \chi_i P_T} \tag{3.2}$$

donde χ_i es la fracción molar de la especie i-ésima, y P_T es la presión total, dada por la suma de presiones parciales de cada gas:

$$\boxed{P_T = \sum_i P_i = \sum_{i=1}^{N} P_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_N} \tag{3.3}$$

Recuerda: $1atm = 760mmHg = 1013mb = 101300Pa = 1013hPa$.

Recuerda(II): $T(K) = T(°C) + 273$.

Recuerda(III): $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$.

Recuerda(IV): se denominan condiciones normales (c.n.) de presión y temperatura a $P = 1atm, T = 0°C = 273K$; se denominan condiciones estándar (c.e.) de presión y temperatura a $P = 1atm, T = 25°C = 298K$.

Mnemotecnia: **P**a**V**o=**R**a**T**ón. O también, frases como
Pues Vale, no Recuerdo Todo
Poderes Valiosos (Venusianos) no Requieren Telequinesis (Teletransportación)
o cualquier otra que produzca vuestra imaginación.

3.1.5 Disoluciones

Las disoluciones son mezclas homogéneas con un soluto y disolvente. La concentración es la medida de cuánto soluto hay en la disolución. Hay varias formas de medir la concentración

Gramos por litro

Si simplemente dividimos la masa en gramos de soluto M_s entre el volumen en litros de disolución V, tenemos la concentración de una disolución en g/L(ó g/mL u otras unidades)

$$C(g/L) = \frac{\text{Masa en gramos de soluto}}{\text{Volumen en litros de disolución}} = \frac{M_s(g)}{V(L)}$$

Porcentaje en masa y volumen

Si conocemos la masa de soluto y disolvente M_s, M_d, o el volumen de soluto y disolvente V_s, V_d, conocemos la masa total y el volumen total de disolución $m = M_s + M_d$, y $V = V_s + V_d$. Entonces definimos la concentración en porcentaje de masa y volumen como sigue:

$$C(\%, m) = \frac{M_s}{m} \cdot 100 = \frac{\text{Masa de soluto}}{\text{Masa de disolución}} \cdot 100$$

y donde la masa de soluto y disolvente está en las mismas unidades, generalmente en gramos en Química.

$$C(\%, V) = \frac{V_s}{V} \cdot 100 = \frac{\text{Volumen de soluto}}{\text{Volumen de disolución}} \cdot 100$$

Molaridad y molalidad

En Química, es frecuente trabajar con moles, por lo que hay varias formas de dar la concentración con moles. La más frecuente es la molaridad M que mide los moles por litro (partido por litro, L) de disolución $M = mol/L$:

$$\boxed{M = \frac{\text{Moles de soluto}}{\text{Volumen de disolución en litros}} = \frac{n_s}{V_d(L)}}$$

La otra medida de concentración molar es la llamada molalidad m (no confundir con masa), que mide los moles por kilogramo de disolvente $m = mol/kg$:

$$\boxed{m = \frac{\text{Moles de soluto}}{\text{Masa en kg de disolvente}} = \frac{n_s}{M_d(kg)}}$$

Finalmente, hay otra medida de concentración de disoluciones, llamada fracción molar

Fracción molar

La fracción molar X_i (sin unidades) de una especie química o compuesto/sustancia i es igual al número de moles de la sustancia i (n_i) entre el número de moles totales n_t:

$$\boxed{X_i = \frac{n_i}{n_t}}$$

Si solamente hay un soluto y un disolvente, las fracciones molares de soluto X_s y disolvente X_d satisfacen las ecuaciones:

$$\boxed{X_s = \frac{n_s}{n_t}} \quad \boxed{X_d = \frac{n_d}{n_t}} \quad n_t = n_s + n_d \quad \boxed{X_s + X_d = 1}$$

¿Cuándo se usan unas formas de concentración y cuándo otras? Depende del contexto y la situación. En industria alimentaria, y otras áreas, se prefiere los tantos por ciento en masa y volumen o el g/L (ó g/mL). En Química, es más habitual usar la molaridad y la fracción molar, en menor medida la molalidad.

Recuerda: no confundir concentración con densidad. La densidad mide la masa total (no solamente la de soluto) en un volumen

$$\boxed{d = \frac{m}{V}}$$

La densidad se mide en $kg \cdot m^{-3}$ o en g/cm^3 ($g/c.c.$) habitualmente.

Ley de Lavoisier

En toda reacción química (no nuclear) se conserva la masa y el número de átomos de cada elemento que intervienen en ella, pudiendo cambiar las identidades de los compuestos o moléculas. Matemáticamente:

$$\boxed{\sum_{reactivos} M_{reactivos} = \sum_{productos} M_{productos}} \leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{r} M_i = \sum_{j=1}^{s} M_j} \tag{3.4}$$

para las masas, y para los átomos de las diferentes especies:

$$\boxed{\sum_{reactivos} N(x, reactivos) = \sum_{productos} N(x, productos)} \tag{3.5}$$

para el número de átomos de x en reactivos y productos (para una ecuación o reacción química balanceada o ajustada, el número de átomos de cada tipo en reactivos y productos es el mismo).

3.1.6 Propiedades coligativas y otras propiedades

Aumento ebulloscópico y descenso crioscópico

El aumento del punto de ebullición y el descenso del punto de fusión o congelación debido a la adición de un soluto se calcula mediante las expresiones:

$$\Delta t_e = m\ K_{eb}$$

donde la m es molalidad y K_{eb} es la constante ebulloscópica, mientras que

$$\Delta t_c = m\ K_c$$

donde K_c es la constante crioscópica. En el caso del aumento ebulloscópico, se introduce a veces el llamado factor de van't Hoff (por Jacobus Henricus van't Hoff): es un parámetro que indica la cantidad de especies presentes que provienen de un soluto tras la disolución del mismo en un solvente dado. Se lo denomina " i". Si un electrolito u otro compuesto se disocia en q iones distintos al disolverse, siendo α el grado de disociación del electrolito, entonces el factor de van't Hoff será: $i = 1 + \alpha \cdot (q - 1)$ $i = 1 + \alpha \cdot (q - 1)$, y $\Delta t_e = i \cdot m \cdot K_{eb}$.

Aumento de la presión de vapor y presión osmótica

El aumento de la presión de vapor y el valor de la presión osmótica debido a la naturaleza de un soluto en una membrana se calcula con las expresiones:

$$\Delta P = \chi_s P_0, \qquad \Pi = MRT$$

Además se definen la pureza $\mathcal{P}$ y el rendimiento $\mathcal{R}$ de la forma siguiente:

Pureza

$$\mathcal{P} = \text{Pureza} = \frac{\text{Cantidad de materia pura}}{\text{Cantidad de materia total}} \cdot 100 \tag{3.6}$$

Rendimiento

$$\mathcal{R} = \text{Rendimiento} = \frac{\text{Cantidad de sustancia real producida}}{\text{Cantidad de sustancia teórica}} \cdot 100 \tag{3.7}$$

Reacciones químicas y estequiometría

Reacción química: es toda transformación de unas sustancias o especies químicas llamadas REACTIVOS en otras sustancias o especies químicas llamadas PRODUCTOS:

$$\text{Reactivos} \rightarrow \text{Productos}$$

o bien

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n \rightarrow b_1Y_1 + b_2Y_2 + \ldots + b_sY_s$$

Para una reacción química en la que las especies estén eléctricamente cargadas, se tiene la expresión general

$$a_1X_1^{r_1\pm} + a_2X_2^{r_2\pm} + \ldots + a_nX_n^{r_n\pm} \rightarrow b_1Y_1^{R_1\pm} + b_2Y_2^{R_2\pm} + \ldots + b_sY_s^{R_s\pm}$$

$$a_1X_1^{q_1} + a_2X_2^{q_2} + \ldots + a_nX_n^{q_n} \rightarrow b_1Y_1^{Q_1} + b_2Y_2^{Q_2} + \ldots + b_sY_s^{Q_s}$$

Leyes de conservación de las reacciones químicas

La ley de conservación de la masa de las reacciones químicas, o de Lavoisier, indica que la masa total de los reactivos es igual a la masa total de los productos. Matemáticamente

$$\sum M(reactivos) = \sum M(productos) \quad \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{j=1}^{s} M(Y_j)$$

$$M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = M(Y_1) + M(Y_2) + \ldots + M(Y_s)$$

La ley de conservación de la carga eléctrica de las reacciones químicas indica que la carga eléctrica total de los reactivos es igual a la carga eléctrica total de los productos. Matemáticamente

$$\sum q(reactivos) = \sum Q(productos)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q(X_i) = \sum_{j=1}^{s} Q(Y_j)$$

$$q(X_1) + q(X_2) + \ldots + q(X_n) = Q(Y_1) + Q(Y_2) + \ldots + Q(Y_s)$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_s$$

En una reacción química con varios números cuánticos, bajo ciertas simetrías S_i, se conservan ciertas cargas (masa, carga eléctrica, carga de color,...) con lo que hay igual carga de tipo Q. Toda reacción química puede entenderse con un proceso de transferencia de cierto tipo de cargas entre diferentes tipos de sustancias u objetos elementales/compuestos.

Las etapas de cualquier reacción química son generalmente:

- Choques y colisiones entre átomos, moléculas e iones.
- Ruptura de los enlaces de los reactivos.
- Formación de los enlaces de los productos, en general a través de una sustancia intermedia denominada complejo activado o estado de transición.
- Finalización de la reacción cuando se agota el reactivo limitante o los choques dejan de ser efectivo o suficientemente energéticos para que la reacción tenga lugar.

3.1.7 Estequiometría y ecuaciones químicas

La Estequiometría es la parte de la Química que se ocupa del análisis de las reacciones químicas y los cálculos químicos. En particular, se ocupa de balancear las reacciones químicas y hacer cálculos con reactivos y productos. Se dice que una reacción o ecuación química está *balanceada* o *ajustada*, cuando el número de átomos o especies de cada tipo, y las cargas eléctricas si no fueran reacciones neutras (sin carga), son iguales en reactivos y productos. El proceso mediante el cual se logra que una reacción química esté ajustada, se llama ajuste o balance de una reacción química (ecuación química). Los números que preceden a cada compuesto, partícula, o ión en el proceso de ajuste se denominan **coeficientes estequiométricos**.

Una reacción química puede verse como cierto tipo de igualdad, o una representación simbólica de un proceso químico real, mediante los símbolos de los elementos, compuestos, y los números que indican cuántos átomos de cada elemento en el compuesto hay, y los coeficientes estequiométricos indicando el número de moléculas o unidades de cada entidad química fundamental que intervienen en la reacción química. Además, en una reacción química, se suele especificar también otras informaciones:

- El estado físico de cada sustancia, si ha lugar. Por ejemplo $Cu(s)$ indica cobre sólido, $H_2O(l)$ indica agua líquida, $O_2(g)$ oxígeno gaseoso y $HCl(aq.)$ ó $HCl(ac.)$ indican disolución acuosa.

- La energía necesaria para que se produzca la reacción química. Si la energía es absorbida $\Delta E > 0$ y se dice que la reaccióne es **endotérmica**. Si la energía es cedida o liberada, $\Delta E < 0$ y la reacción se dice que es **exotérmica**. La parte de la Química de reacciones que estudia los procesos de energía en las reacciones químicas se llama Termoquímica.

De nuevo, el procedimiento para igualar el número de átomos de cada tipo, en reactivos y productos, se llama ajuste. El ajuste se puede realizar por tanteo, o usando diversos procedimientos algebraicos o numéricos. De estos últimos, destaca el método de los coeficientes indeterminados, que no explicaré aquí. En general, en el proceso de ajuste por tanteo, se realizan los siguientes pasos:

1. Escribir la reacción química.

2. Analizar los reactivos y productos, contando el número de átomos de cada elemento que interviene en la reacción.

3. Añadir los coeficientes estequiométricos oportunos, por tanteo, delante de las fórmulas o especies químicas correspondientes para igualar el número de átomos. Suele preferirse multiplicar el resultado final por números de forma que los coeficientes estequiométricos sean números enteros, aunque en ocasiones se puede permiter el dejar coeficientes estequiométricos fraccionarios, no es lo más común esto último.

4. En casos difíciles, usar métodos numéricos o el procedimiento de los coeficientes indeterminados. Si una reacción no puede ajustarse, es que no es posible en la naturaleza.

5. Comprobación del resultado.

Observación: para que una reacción química tenga lugar, ésta absorbe o libera energía, según el caso. En las reacciones exotérmicas:

$$R \to P + Q, \quad Q = \Delta E < 0$$

y para las reacciones endotérmicas

$$R + Q \to P, \quad Q = \Delta E > 0.$$

Una reacción química ajustada o balanceada, que incluya además los estados físicos o de cada reactivo y producto, aporta una información crucial para el científico (químico, biólogo, físico, médico,...). Esta información puede ser:

1. Las fórmulas de los reactivos y productos, por lo que se identifica la naturaleza de la reacción química. Eso incluye tipo de compuesto o elemento o partícula(ion), y su carga eléctrica (en general se trabaja con reacciones químicas neutras, pero son importantes también las reacciones de transferencia de carga eléctrica, o procesos de oxidación-reducción).

2. Número de átomos de cada elemento y especie química (partícula, ion) que interviene, así como su carga eléctrica.

3. Número de moles de cada sustancia que intervienen en reactivos y productos.

4. Volumen de reactivo y producto, en el caso de reacciones en las que intervienen gases. En reacciones gaseosas, se cumple la denominada *Ley de Avogadro*: "El mismo número de moles de gases diferentes, en las mismas condiciones de presión y temperatura, contienen el mismo número de partículas y tienen el mismo volumen".

5. Masas de reactivos y productos que intervienen, en virtud de la ley de Lavoisier.

3.1.8 Tipos de reacciones principales

Hay una cantidad enorme de reacciones químicas posibles. Sin embargo, hay unas categorías o tipos de reacciones químicas particulares que son importantes en las aplicaciones o muy frecuentes en la Naturaleza, al menos a escalas de nuestro planeta, la Tierra. Son las siguientes:

1. Reacción de **síntesis** o de **formación**. Son aquellas reacciones en las que hay solamente una sustancia en los productos. Ejemplos:

$$H_2(g) + O_2(l) \to H_2O_2(l)$$

$$Ca(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \to CaO(s)$$

2. Reacción de **descomposición** o de **desintegración** o **disociación**. Son aquellas reacciones en las que solamente hay un reactivo, que da lugar a uno o varios productos. Ejemplos:

$$N_2O_4(g) \to 2NO_2(g)$$

$$CaCO_3(s) \to CaO(s) + CO_2(g)$$

3. Reacción de **desplazamiento**. Aquella en la que se produce un cambio, y solo uno, de las partes o iones de reactivos entre sí. Ejemplo:

$$CaO(s) + \quad H_2(g) \to CaH_2(s) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

$$4FeS(s) + \quad 2O_2(g) \to 4FeO(s) + \quad S_4(s)$$

4. Reacción de **doble desplazamiento** o *metátesis*. Aquella en la que hay dos cambios en las partes de los iones de reactivos entre sí. Ejemplo:

$$Ca(OH)_2(s) + \quad H_2SO_4(l) \rightarrow \quad CaSO_4(s) + \quad 2H_2O(l)$$

$$H_2S(aq.) + \quad CoO(s) \rightarrow \quad CoH_2(s) + \quad SO(s)$$

Un caso particular importante de las reacciones de doble desplazamiento son las que se producen por combinación de un ácido (sea hidrácido u oxoácido) con un hidróxido (llamado también base). Estas reacciones son llamadas reacciones *ácido-base*, y son importantes en Química, Física y la vida cotidiana (también en Bioquímica).

5. Reacciones de **combustión** (u oxidación). Son aquellas reacciones que tienen lugar con la reacción de una sustancia con el oxígeno. Algo $+ O_2(g) \rightarrow$ Otra cosa. Ejemplos:

$$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$$

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s)$$

$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$$

La reacción de combustión de un compuesto de carbono e hidrógeno (hidrocarburo), un hidroxicarburo (carbono, hidrógeno y oxígeno), produce generalmente dióxido de carbono y agua en general.

6. Reacciones de **polimerización**. Son aquellas reacciones que se forman por la adición o repetición de una unidad fundamental o *monómero*, en una unidad compuesta de varios llamada **polímero**:

$$nX \rightarrow X_n$$

Ejemplos: $2NO_2 \rightarrow (NO_2)_2 \rightarrow N_2O_4, \qquad nCH_2 \rightarrow (CH_2)_n.$

3.2 Físico-química atómica

3.2.1 Teoría cuántica básica

Hipótesis cuántica de Planck

Todo fotón no tiene una energía arbitraria sino viene dada en paquetes o unidades mínimas denominadas cuantos de energía. Par un fotón simple, se verifica:

$$\boxed{E = hf = \hbar\omega} \tag{3.8}$$

donde h es la constante de Planck y $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck racionalizada.

Ley de Einstein del efecto fotoeléctrico

La frecuencia final de un fotón f que es capaz de arrancar electrones de un metal, que salen con velocidad v_e, verifica la relación

$$\boxed{hf = hf_0 + E_c} \leftrightarrow \boxed{hf = hf_0 + \frac{1}{2}m_e v_e^2} \tag{3.9}$$

donde $W_e = hf_0$ es el trabajo de extracción del metal, m_e es la masa del electrón, y el potencial de frenado se define como $V_f = hf_0/e = E_c(max)/e$.

3.2.2 Modelo de Bohr

Modelo de Bohr

La cuantización del momento angular $L = pr = mvr = nh$, con $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, conlleva el espectro de la fórmula de Balmer

$$\boxed{\Delta E(n_1, n_2) = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)} \tag{3.10}$$

y donde $n_1 < n_2$ para transiciones de niveles excitados $\Delta E > 0$, y $n_2 < n_1$ para transiciones de desexcitación $\Delta E < 0$.R es la constante de Rydberg, que tiene un valor de $13.6eV = 2.18 \cdot 10^{-18}J$, y se puede expresar en términos de magnitudes más fundamentales. La fórmula de Balmer se puede escribir para número de dondas $\overline{k} = 1/\lambda$ como sigue

$$\boxed{\Delta\overline{k}(n_1, n_2) = \overline{R}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)} \tag{3.11}$$

y donde ahora la constante de Rydberg en número de ondas es $\overline{R} = R/hc = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$. Los niveles de energía o capas, están cuantizados en radios por la expresión

$$\boxed{r_n = a_0 n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ = 1, 2, 3, \ldots, \infty \tag{3.12}$$

y donde $a_0 = 0.53\text{Å} = 5.3 \cdot 10^{-11}m$ es el radio de Bohr.

De todos los modelos atómicos, el primero que usó las ideas cuánticas fue el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno. Pero solamente funcionara para átomos con un electróno hidrogenoides. En dicho modelo, además de usar las ideas cuánticas, y aunque se mantiene la imagen clásica de átomo, se puede explicar el espectro del átomo de hidrógeno (sin incluir efectos adicionales mecanocuánticos como el efecto Stark, el desdoblamiento de líneas espectrales debido a un campo magnético, llamado efecto Zeeman, o el efecto del espín del electrón sobre el espectro, efecto Zeeman anómalo). Intentando extender el modelo para incluir correcctiones relativistas, Sommerfeld introduce las cuantizaciones adiabáticos o acción-ángulo:

$$\int p_i dq = n_i h \tag{3.13}$$

que llevaban en general a órbitas elípticas del electrón. Pero la cantidad de evidencias que dejaba sin explicar esta corrección relativista, fue lo que obligó a la introdución del modelo cuántico del átomo y partículas subatómicas.

3.2.3 Modelo mecanocuántico

Longitud de onda de De Broglie

Usando relaciones cinemáticas relativistas, y la idea subyacente de dualidad, De Broglie propone que toda partícula tiene una longitud de onda asociada:

$$\boxed{\lambda_{dB} = \frac{h}{p}} \tag{3.14}$$

Para el caso no relativista con masa, el momento $p = mv$ y

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \tag{3.15}$$

Para el caso relativista con masa, el momento $p = m\gamma v = Mv$, y

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{mv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.16}$$

Para "fotones", o más generalmente partículas relativistas sin masa (fotones, gluones, gravitones,...) se tiene

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = hf \rightarrow \boxed{\lambda_{dB} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}} \tag{3.17}$$

porque $E = pc$ para el caso de partículas relativistas sin masa. Nótese que en relavidad $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, $E = mc^2$ es la masa en reposo, mientras que $E = Mc^2 = m\gamma c^2$ es la energía total relativista, y la energía cinetica relativista sería $E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$.

La idea de longitud de onda de De Broglie permite ya introducir el concepto de microscopio con partículas cuánticas. Un microscopio es simplemente el resultado de arrojar fotones sobre algo y reconstruir una imagen...Eso mismo puede hacerse con electrones y en general cualquier otra partícula-X:

Electron microscope

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} \tag{3.18}$$

X-particle microscope

$$\lambda_X = \frac{h}{\sqrt{2m_X ZeV}} \tag{3.19}$$

Electron microscope(II)

$$\lambda_e = \frac{12.25 \cdot 10^{-10} m}{\sqrt{V}} = \frac{1.225 nm}{\sqrt{V}} \tag{3.20}$$

X-particle microscope(II)

$$\lambda_e = \frac{12.25 \cdot 10^{-10} m}{\sqrt{N_X Z_X V}} = \frac{1.225 nm}{\sqrt{N_X Z_X V}} \tag{3.21}$$

Relativistic electron microscope

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \left[2 m_e e V \left(1 + \frac{eV}{2mc^2} \right) \right]^{-1/2} \tag{3.22}$$

Relativistic X-particle microscope

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \left[2 m_X Z_X e V \left(1 + \frac{Z_X eV}{2 m_X c^2} \right) \right]^{-1/2} \tag{3.23}$$

El mundo subatómico se describe mediante una teoría llamada Mecánica Cuántica, de la que el modelo estándar es la variante más elaborada. A nivel de los átomos y moléculas, la Mecánica Cuántica puede ser descrita con bastante precisión en general por la ecuación de Schrödinger:

Ecuación de Schrödinger

$$H\Psi = (T + V)\Psi = E\Psi \tag{3.24}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V(x, y, z, t) \right) \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = E\Psi \tag{3.25}$$

y donde Ψ es la denominada función de onda, generalmente un número complejo, cuyo módulo, según Born (no confundir con Bohr), $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$, se interpreta como la probabilidad de encontrar a la partícula en una localización determinada en el espacio-tiempo.

La versión relativista de la ecuación de Schrödinger se denomina ecuación de Dirac. Acoplada a un campo electromagnético tiene la expresión

Ecuación de Dirac

$$\left(i\hbar \Gamma^\mu \partial_\mu - e \Gamma^\mu A_\mu + mcI \right) \Psi = 0 \tag{3.26}$$

La ecuación de Dirac o de Schrödinger son ecuaciones lineales, que predicen los niveles de energía de partículas relativistas o no relativistas, según el caso. Sus soluciones satisfacen el principio de superposición $\Psi = \sum_i c_i \psi_i$, así como las partículas cuánticas satisfacen el principio de indeterminación de Heisenberg

Principio de Heisenberg

Dos variables mecanocuánticas conjugadas A, B, cuyo producto dimensional tiene dimensiones de acción, no pueden conocerse simultáneamente sin influir en la otra (el conocimiento de una, dificulta el conocimiento de la otra), mediante la ley general

$$\boxed{\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|} \tag{3.27}$$

Las 2 relaciones de indeterminación más usuales son las de posición y momento, y la de energía y tiempo:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.28}$$

3.3 Enlace químico y configuraciones electrónicas

3.3.1 Números cuánticos

Los orbitales en un átomo, están clasificados mediante tres números cuánticos, y los electrones, por cuatro números cuánticos.

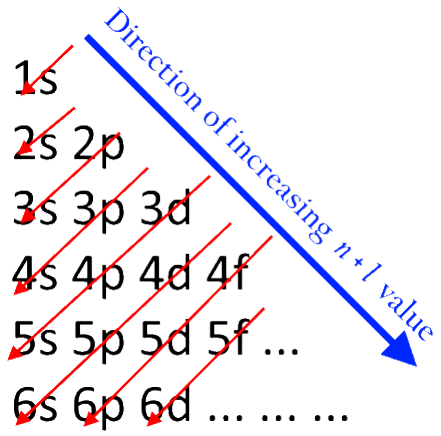
- Número cuántico principal n. Toma valores enteros positivos, $n \in \mathbb{Z} = 1, 2, \ldots, \infty$ Indica la energía del electrón u orbital. Orbitalmente, indica la capa donde estamos, espectroscópicamente $K, L, M, \ldots$

- Número cuántico secundario l. Toma valores enteros positivos incluyendo al cero, desde 0 hasta $n - 1$. $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Indica la forma del orbital, y está relacionado con el momento angular orbital $L^2 = l(l + 1)\hbar^2$. Orbitalmente, indica la subcapa (s,p,d,f,...)

- Número cuántico magnético m. Toma valores enteros desde $-l$, hasta $+l$, i.e., $m \in [-l, +l]$. Se relaciona con el valor de la proyección del momento angular en una dirección espacial dada, i.e., L_z, como $L_z = m_l \hbar$. Orbitalmente, indica la orientación espacial o de energía del orbital

- Número cuántico de espín s. Toma valores, en un electrón, igual a $-1/2, +1/2$, i.e., s_-, s_+, donde se ve que el espín electrónico es bivalorado $s_\pm = s\hbar/2$. Indica el estado de espín de un electrón (o más generalmente de una partícula cuántica, que estará entre $-s$ y s, a pasos de un entero como ocurre en m_l.

Para realizar una configuración electrónica, hay una serie de reglas que seguir, denominadas principio de Aufbau, y que se condensan generalmente en el denominado diagrama de Möller:



En una capa, caben $2N^2$ electrones, y en una subcapa $2(2l+1)$ electrones. Los principios adicionales, además del Aufbau, para una configuración electrónica son: principio de exclusión de Pauli (un electrón no puede tener los 4 números cuánticos iguales), regla de Hund (máxima multiplidad, tiene excepciones por estabilidad energética en algunas configuraciones de elementos de transisión).

3.3.2 Enlace químico

El enlace químico es la unión entre átomos para lograr una especie química con menor energía que la que tendrían separadamente. Hay 3 tipos generales de enlace: iónico, covalente y metálico.
Las moléculas tienen una geometría molecular que puede estudiarse con diferentes modelos: teoría de la repulsión electrónica de los pares de electrones de la capa de valencia, la teoría de la hibridación, y la teoría de los orbitales moleculares y de forma numérica con la ecuación de Schrödinger o Dirac. El modelo A-X-E y la TRECV proporciona un modelo cualitativo para la deducción de la geometría molecular aproximada, en donde se puede deducir la polaridad de la molécula mediante la magnitud $\vec{\mu} = \sum_i q_i \Delta\vec{r_i}$, llamada momento dipolar eléctrico, que se suele medir en debyes (D). $1D \approx 3,34 \cdot 10^{-30} C \cdot m$. A nivel de enlaces moleculares, circa 2020, existen los orbitales moleculares de tipo $\sigma, \pi, \delta, \phi$, que dependen también de la multiplicidad del enlace covalente. En general, átomos y moléculas buscan configuraciones de mínima energía y máxima estabilidad. El octeto electrónico ns^2np^6 es una configuración muy estable, pero existen moléculas y átomos con octeto reducido u amplidado. Por ejemplo: $BeCl_2$, SF_6, He,...

- Enlace iónico. Alto número de coordinación. Tiene una energía reticular que se puede calcular mediante el ciclo de Born-Haber. La energía reticular se puede escribir según al siguiente expresión (de Born-Landé):

$$\boxed{U_r = \frac{K_C Z_1 Z_2 e^2 N_A \mathcal{M}}{d_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \tag{3.29}$$

- Enlace covalente. Hay enlaces covalentes de red y moleculares.

- Enlace metálico. Teoría de la nube electrónica. Teoría de bandas y gap de energía.

3.3.3 Propiedades periódicas

(Primera) Energía de ionización

La energía (primera) de ionización E_I es la energía que hay que suministrar a un mol de átomos en su estado neutro, fundamental y gaseoso para que pierda un electrón:

$$\boxed{A(g) + E_I \rightarrow A^+(g) + 1e^-} \tag{3.30}$$

Se pueden definir sucesivas energías de ionización. En un átomo, la energía de ionización aumenta hacia arriba en un grupo y hacia la derecha en un periodo.

(Primera) Afinidad electrónica

La afinidad electrónica A_E es la energía que hay se desprende en un mol de átomos en su estado neutro, fundamental y gaseoso cuando acepta un electrón:

$$\boxed{A(g) + 1e^- \rightarrow A^-(g) + A_E} \tag{3.31}$$

Se pueden definir sucesivas afinidades electrónicas. En un átomo, afinidad electrónica aumenta hacia arriba en un grupo, y hacia la derecha en un período.

El radio atómico se puede definir como la mitad de la distancia internuclear entre dos átomos en unión bimolecular. El radio atómico de un átomo crece hacia la izquierda en un período y hacia abajo en un grupo. El carácter metálico de un átomo crece hacia la izquierda y hacia abajo en la Tabla Periódica. El radio iónico y el volumen atómico varían de forma más complicada. En el caso del radio iónico, sigue aproximadamente la misma tendencia periódica que el radio atómico, y el volumen atómico es más complicado, porque depende de los efectos de apantallamiento de carga por los electrones en los diferentes átomos.

3.3.4 Fuerzas intermoleculares

Hay varioes tipos de fuerzas que se establecen entre moléculas:

- Fuerzas de Van der Waals. Tiene 3 subtipos: fuerzas de Keesom, fuerzas de Debye y fuerzas de dispersión o de London. Las fuerzas de Keesom y de Debye son de dipolo permanente con potencial $V \sim 1/r^6$, mientras que las uferzas de London o de dispersión son más débiles y tienen también similar potencial. Son más débiles que los enlaces covalentes o iónicos. Son fuerzas aditivas y no saturan. No tienen característica direccional, y son fuerzas de corto alcance o residuales. Salvo para la fuerza de dipolo-dipolo, no dependen de la temperatura.

- Enlaces iónicos.

- Enlaces ión-dipolo inducido.

- Enlace de hidrógeno (hidrógeno con F, O, N).

3.4 Termoquímica (1º y 2º Bachillerato)

Leyes de la Termodinámica

- La ley cero de la Termodinámica señala que, en equilibrio, existe una temperatura entre dos o más sistemas en contacto en una frontera.
- La primera ley de la Termodinámica y la Termoquímica señala que el cambio de la energía interna es igual a la variación de trabajo más la variación de calor de un sistema.
$$\Delta U = \delta Q + \delta W$$
- La segunda ley de la Termodinámica que le entropía de un sistema aislado no puede decrecer con el tiempo.
$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T}$$
$$\Delta S_U \geq 0$$
- La tercera ley de la Termodinámica indica que el cero absoluto es inalcanzable.

Matemáticamente, solemos usar el criterio de signos egoísta con las funciones de estado. Una variación de calor positiva es calor absorbido. Una variación de calor negativa es calor desprendido o cedido. Una variación de trabajo positiva es una contracción del sistema. Una variación de treabajo negativa es una dilatación del sistema. Una variación de energía interna positiva, aumenta la energía interna, y si es negativa disminuye. La entropía es una función de estado que mide el desorden, o más precisamente, el número de configuraciones microscópicas o grados de libertad posibles para un sistema de estado macroscópico. Boltzmann dedujo en el siglo XIX a partir de la teoría atómico-molecular, que $S = k_B \ln \Omega$, donde Ω es el número de microestados posibles compatibles para un macroestado dado. Efectivamente, si solamente hubiera UN estado o configuración, la entropía sería cero. No ocurre así en general. Una manera graciosa de recordar las leyes termodinámicas es mediante la frase metafórica: "No puedes ganar, no puedes empatar, no puedes salirte del juego".

- Una reacción es exotérmica si $\Delta H_R^0 < 0$, y endotérmica si $\Delta H_R^0 > 0$. El calor de reacción para n moles es $\Delta Q = n\Delta H_R^0$.

- Una reacción aumenta el desorden si $\Delta S_R^0 > 0$, y lo disminuye si $\Delta S_R^0 < 0$. El signo de ΔS_R^0 coincide generalmente con el de la variación de moles gaseosos de una reacción.

- Las espontaneidead de una reacción se deduce con la energía libre de Gibbs. $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$. La temperatura de equilibrio es $T_e = \Delta H/\Delta S$ (no existe para todas las reacciones). Una reacciónes espontánea (exergónica) si $\Delta G_R^0 < 0$, y no espontánea (endergónica) si $\Delta G_R^0 > 0$.

Entalpías y entropías de reacción según reactivos y productos

$$\Delta H_R^0 = \sum_p n_p \Delta H_f^0(prod) - \sum_r n_r \Delta H_f^0(reac) \tag{3.32}$$

$$\Delta S_R^0 = \sum_p n_p \Delta S_f^0(prod) - \sum_r n_r \Delta S_f^0(reac) \tag{3.33}$$

$$\Delta H_R^0 = \sum \Delta H_e(rotos) - \sum \Delta H_e(formados) \tag{3.34}$$

$$\Delta H_R^0 = \sum_i c_i \Delta H_i \quad \text{(Ley de Hess)} \tag{3.35}$$

Otras definiciones de Termoquímica son las siguientes:

- Sistema aislado: aquel sistema que no intercambia ni energía ni materia con el entorno.
- Sistema cerrado: aquel sistema que intercambia energía pero no materia con el entorno.
- Sistema abierto: aquel sistema que intercambia energía y materia con el entorno.

La Termodinámica o termoquímica se ocupa de variables macroscópicas de estado, que pueden ser extensivas (si dependen de la cantidad del tamaño del sistema como masa o el volumen) e intensivas (no dependen del tamaño del sistema como presión, temperatura, o la densidad). Un sistema termodinámico es una parte del Universo que sometemos a estudio. En él tienen lugar procesos reversibles e irreversibles en general. La reversibilidad de un proceso está generalmente ligado a la variación de entropía. Un sistema evoluciona de acuerdo a la segunda ley de la Termodinámica. El signo de la variación de entropía coincide con la variación de número de moles gaseosos, o el número de estados accesibles. La entropía de los estados sólido, líquido o gas crece (disminuye) con los cambios progresivos, y disminuye con los cambios regresivos. En general, un sistema tiende a desordenarse. Fuera del equilibrio ocurren fenómenos de autoorganización y el sentido del crecimiento de la variación de entropía puede cambiar, pero en equilibrio evoluciona de forma que la entropía alcanza un máximo (MaxEnt). El principio de máxima entropía es análogo al de mínima acción y mínima energía en otros sistemas clásicos o cuánticos.

De acuerdo a la teoría cinético-molecular la temperatura es una medida de la agitación de las moléculas o átomos(partículas) constituyentes. Vía la ecuación de Boltzmann

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T$$

La presión es una medida del número de impactos o choques de las partículas con el recipiente o frontera que contiene. Un gas o una substancia en general puede tener ecuaciones de estado, que es una relación entre magnitudes termodinámicas. Para el gas ideal

$$pV = nRT = Nk_B T$$

pero hay otras ecuaciones de estado posibles. Por ejemplo, la ecuación de los gases reales o de Van der Waals, la ecuación del gas de Chaplygin (y sus generalizaciones) y otras varias. La ecuación de Van der Waals es

$$\left(p + \frac{a'}{v^2}\right)(v - b') = k_B T$$

donde:

- p es la presión del fluido en atmósferas.

- v es el volumen molar de las partículas, en L/mol.
- k_B es la constante de Boltmann.
- T es la temperatura absoluta.
- a' es un término que involucra la atracción entre partículas.
- b' es un término que denota el volumen medio excluido de v por cada partícula.

Si se introducen el número de Avogadro N_A, el número de moles n, y el número total de partículas nN_A, entonces se reescribe como

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

y donde ahora

- p es la presión del fluido.
- V es el volumen total del recipiente.
- a mide la atracción entre partículas con $a = N_A^2 a'$.
- b es el volumen disponible de un mol con $b = N_A b'$.
- n es el número de moles.
- T es la temperatura absoluta en kelvin.
- R es la constante de los gases ideales $R = N_A k_B$.

Generalmente una ecuación de estado liga presión con densidad y/o temperatura. Para el gas de Chaplygin normal

$$p = p(\rho) = \frac{A}{\rho}$$

y para los gases de Chaplygin generalizados se puede tener por ejemplo

$$p = p(\rho) = \frac{A}{\rho^n} + B\rho^m + C\ln\rho + D$$

Nótese que el gas ideal en función de la densidad, supuesta la temperatura constante, tiene una ecuación de estado $p = p(\rho) = K\rho$.

Se puede calcular la temperatura de equilibrio que alcanzan 2 ó más cuerpos en contacto mediante el principio general:

$$\Delta Q_{abs} + \Delta Q_{ced} = 0$$

Los calores absorbidos y cedidos pueden ser:

- Calor por cambio de temperatura $\Delta Q = C\Delta T = mc_e\Delta T$.
- Calor por cambio de estado o transición de fase $\Delta Q = mL$.

y donde C es la capacidad calorífica, c_e es el calor específico ($C = mc_e$) y L es el calor latente por cambio de estado.

Existen otras funciones termodinámicas interesantes para el científico. Quizás, una de las más relevantes es la energía libre de Helmholtz $F = U - TS$ ($\Delta F = \Delta U - T\Delta S$). Además, desde el punto de vista de la segunda ley de la Termodinámica, el trabajo útil no es igual nunca al trabajo total. Para un sistema cíclico, que funciona entre dos focos térmicos a diferente temperatura, Carnot demostró que el rendimiento es igual a

$$\eta = \frac{W_u}{W_t} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \tag{3.36}$$

y donde $T_c = T_1$ es la temperatura fría, y $T_2 = T_h$ es la temperatura caliente ($T_1 < T_2$). Así, el rendimiento de un ciclo de Carnot nunca puede ser igual al 100% (segundo principio) dado que la temperatura es siempre positiva y nunca igual al cero absoluto (tercer principio de la Termodinámica). Un ciclo de Carnot funcionando en sentido inverso es un frigorífico (cooler, refrigerator) o también puede ser una bomba de calor (heat pump). Para estos sistemas "invertidos" respecto al ciclo de Carnot usual se suele definir una magnitud llamada coeficiente de funcionamiento (Coefficient Of Performance, COP; en el caso del heat pump también se le llama coefficient of amplification, COA):

$$COP = \frac{Q}{W} \tag{3.37}$$

$$COP(R) = \frac{Q_L}{W} \tag{3.38}$$

$$COP(HP) = \frac{Q_H}{W} = 1 + \frac{Q_L}{W} = 1 + COP(R) \tag{3.39}$$

Ambos coeficientes pueden ser mayores que uno. En términos de la temperatura, estos coeficientes valen:

$$COP(R) = \frac{T_L}{T_H - T_L} = \frac{1}{\frac{T_H}{T_L} - 1} \tag{3.40}$$

$$COP(HP) = \frac{T_H}{T_H - T_L} = \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_H}} \tag{3.41}$$

Los móviles perpetuos, o máquinas de movimiento perpetuo y continuo, infringen las leyes termodinámicas generales. Una clasificación de móviles perpetuos (perpetuum mobile) es la siguiente:

- Móvil perpetuo de primera especie. Máquina hipotética que produciría trabajo sin suministro de energía externa. Violaría la primera ley de la Termodinámica.

- Móvil perpetuo de segunda especie. Máquina hipotética que (espontáneamente) transformaría todo el calor íntegramente en trabajo. Violaría la segunda ley de la Termodinámica.

- Móvil perpetuo de tercera especie. Máquina hipotética que no tendría fricción ni ninguna fuerza disipativa. Así, mantendría el movimiento debido solamente a su inercia. No está relacionado a priori conel tercer principio de la Termodinámica o su violación.

- Móvil perpetuo de cuarta especie. El único posible (en principio). Aprovecharía los sutiles efectos mecanocuánticos como el efecto Casimir, la polarización del vacío, la inversión de población de un láser (máser, gráser,...), o la energía propia del vacío mismo. También podría usar estados de la materia conocidos como cristales de tiempo o alguna de sus variantes como los (cuasi)(poli)cristales de espacio-tiempo o similares estructuras asociadas a la ruptura espontánea de la simetría de inversión temporal.

Appendix A

Ecuaciones favoritas(I)

- **Relatividad especial.**
  $E = Mc^2$, $E = m\gamma c^2$, $E_0 = mc^2$, $\Delta E = \Delta M c^2$.
  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$, $\beta = v/c$, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, $p = Mv = m\gamma v$.

- **Física cuántica**.
  $E = hf = \hbar\omega$, $p = \hbar k = \frac{hc}{\lambda}$, $p = E/c$, $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$.

- **Función zeta de Riemann**.
  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p=2}^{\infty}(1 - p^{-s})^{-1}$.
  $\zeta(s) = 0 \leftrightarrow s = -2n, n \in \mathbb{Z}, s_n = 1/2 \pm i\lambda_n$ (Hipótesis de Riemann).

- **Ecuaciones de campos**.
  $\Delta\Psi(x,t) = 0$. $\Box^2\phi(x,t) = 0$. $(\Box^2 + m^2c^2/\hbar^2)\phi = 0$.
  $(i\gamma \cdot D - mc/\hbar)\Psi = 0$.

- **Ecuaciones de Maxwell**.
  $F = dA$. $dF = 0$, $\star d \star F = \delta F = 4\pi j$.$[F = d_D A$, $\star d \star F = -\Omega_D j_D]$.
  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\partial_\nu F_{\sigma\tau} = 0$.

- **Ecuaciones de Euler-Lagrange**.
  $\delta S = 0$, $S = \int L dt$, $S = \int \mathcal{L} d^D x$, $E(L) = 0$.
  $E(L) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$. $E(L) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi}\right) = 0$.

- **Ondas planas**.
  $\vec{E} = \vec{\varepsilon} e^{i(\omega t - kr)}$. $\vec{B} = \vec{\epsilon} e^{i(\omega t - kr)}$. $h_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}\exp(i(\omega t - kr))$.

- **Ecuaciones de Yang-Mills**.
  $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\mu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a_{bc}\left[A^b_\mu, A^c_\nu\right]$. $DF = 0$ $(D^\mu F_{\mu\nu})^a = 0$.$[D_A F = 0$, $\star D_A \star F = -\Omega_D J_D]$.
  Bianchi: $D_\mu F_{\nu\kappa} + D_\kappa F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\kappa\mu} = 0$. $\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{ab}_c A^\mu_b F^c_{\mu\nu} = 0$.

- **Dualidad**.
  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}$. $D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

- **Dimensiones de los campos**.
  $\left[A^a_\mu\right] = L^{\frac{2-D}{2}} = \sqrt{L^{2-D}}$. $g^2_{YM} = L^{D-4}$,$g_{YM} = \sqrt{L^{D-4}}$. $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$ adimensional.

- **Ecuación del grupo de renormalización**.
  Función beta: $\beta(g) = \mu^2 \dfrac{\partial g}{\partial \mu^2} = \dfrac{\partial g}{\partial \log \mu^2}$
  $\beta(\alpha_s)(SU(N)) = -\dfrac{11N}{12\pi}\alpha_s^2 - \dfrac{17N^2}{24\pi^2}\alpha_s^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ implica que
  $\beta(\alpha_s) = \dfrac{\alpha_s^2}{\pi}\left(-\dfrac{11N}{6} + \dfrac{N_F}{3}\right)$.
  El Modelo Estándar tiene $SU(3)$, $N_c = 3$, y $N_F = 6$, con lo cual $\beta(g) < 0$ y tenemos el fenómeno denominado libertad asintótica de quarks. En general, la negatividad de la función beta implica, bajo hipótesis de libertad asintótica, una relación

$$-\frac{11N_c}{6} + \frac{N_F}{3} < 0 \to N_F < \frac{11N_c}{2}$$

  El número máximo de sabores para 3 colores es 16.

- Transformaciones de gauge.

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \varphi_x$$

Appendix B

Ecuaciones favoritas(II)

- **Efecto Schwinger gravitacional y eléctrico**.

$$A = \frac{mc^3}{\hbar}, \quad E = \frac{m^2c^3}{q\hbar}$$

- **Radio de Schwarzschild y longitud, tiempo y energía de Planck**.
  $R_s = 2GM/c^2$, $L_p^2 = G\hbar/c^3$, $t_p = L_p/c$, $E_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}$.

- **Absement espacio-temporal**.
  $\mathcal{A}^\mu = \int \varphi(x) dx^\mu$. $\mathcal{A}^\mu = \int X^\mu d\tau$. $\mathbb{A}^\mu = \int \mathcal{A}^\mu d^d x = \int X^\mu d\tau d^d x = \int X^\mu dvol$.

- **Ecuaciones de campo de la relatividad general**.
  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$ $(c = 1)$.

- **Perturbaciones gravitacionales débiles**.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

- **Ondas gravitacionales débiles (lineales)**.

$$\overline{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ixp}$$

- Mecánica cuántica.
  $E\,|\Psi\rangle = H\,|\Psi\rangle$. $H = T + U$. $p = i\hbar\partial$. $[x, p] = i\hbar$.
  $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = 0$. $\Psi = \prod_i \Psi(x_i)$. $[x, x] = [p, p] = 0$.
  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\langle [A, B]\rangle$, $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$. $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2.\hbar = h/2\pi$.

- **Física básica de agujeros negros**.
  $S_{BH} = k_B \frac{A}{4L_p^2}$, $S_{BH} = \frac{k_B c^3 A}{G\hbar}$, $S = k_B \log\Omega$, $dS/dt \geq 0$, $dS/dt \geq k_B$. $S \geq k_B$. $S \geq \hbar$.
  $v \leq c$.
  $T_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M k_B}$. $t_{ev} = \frac{5120\pi G^2 M^3}{\hbar c^4}$. $\tau_{XD} \sim \frac{1}{M_\star}\left(\frac{M_{BH}}{M_\star}\right)^{\frac{n+3}{n+1}}$.
  $P_{BH} = L_{BH} = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2}$.

- **Agujeros negros microscópicos (primordiales,...)**:
  $T \leq 2.73K \to M_{BH} \leq 5 \cdot 10^{22} kg$ (now, ligeramente menor que la masa lunar).

- **Átomo de Bohr**.
  $L = mvr = n\hbar$, $r_n = a_0 n^2$. $E_n = Ry\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$. $E_n = -\frac{Ry}{n^2}$.

- **Desintegraciones radioactivas. Ley de desintegración**.
  $N = N_0 e^{-\lambda t}$. $t(1/2) = \frac{\ln 2}{\lambda}$. $N = N_0 2^{-t/t_{1/2}}$. $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}$. $\Gamma\tau \geq \hbar/2$.

- **Polilogaritmos**.

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$
$$Li_s(1) = \zeta(s)$$
$$Li_{s+1}(z) = \int_0^z \frac{Li_s(t)}{t} dt$$

  Y las derivadas del polilogaritmo siguen las reglas

$$z\partial_z \operatorname{Li}_s(z) = \operatorname{Li}_{s-1}(z)$$
$$\frac{\partial \operatorname{Li}_s(e^\mu)}{\partial \mu} = \operatorname{Li}_{s-1}(e^\mu)$$

  Los polilogaritmos sirven para calcular la integral de Bose-Einsteing o la de

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^\infty \frac{t^j}{e^{t-x}+1} dt, \qquad (j > -1)$$

  esto es igual a

$$I_{FD} = -\operatorname{Li}_{j+1}(-e^x),$$

  donde $\operatorname{Li}_s(z)$ es ¡el polilogaritmo! La derivada es

$$\frac{dF_j(x)}{dx} = F_{j-1}(x)$$

  y se usa para diferentes valores de j.

- Polilogaritmos y efecto Schwinger en Q.E.D. escalar y $D = d+1$:

$$\omega_B = \frac{g_s}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{qE}{n}\right)^{\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\pi n m^2 c^3}{q\hbar E}} = -\frac{g_s}{(2\pi)^d c} \left(\frac{qE}{\hbar}\right)^{\frac{d+1}{2}} Li_{\frac{d+1}{2}}\left(-e^{\frac{nm^2c^3}{q\hbar E}}\right)$$

$$\omega_F = \frac{g_s}{(2\pi)^d c} \left(\frac{qE}{\hbar}\right)^{\frac{d+1}{2}} Li_{\frac{d+1}{2}}\left(e^{\frac{nm^2c^3}{q\hbar E}}\right)$$

$$\omega_{BF} = \sigma \frac{g_s}{(2\pi)^d c} \left(\frac{qE}{\hbar}\right)^{\frac{d+1}{2}} Li_{\frac{d+1}{2}}\left(\sigma e^{\frac{nm^2c^3}{q\hbar E}}\right)$$

- Gas ideal cuántido de fermiones. La energía de Fermi en 3d es

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$$

  La energía de una esfera de N fermiones es igual a

$$E_T = \left(E_0 + \frac{3}{5} E_F\right) N$$

donde la E_0 es la energía del punto cero y E_F la energía de Fermi o máxima energía a temperatura nula. La presión de degeneración es igual a

$$P = -\frac{\partial E_{\mathrm{T}}}{\partial V} = \frac{2}{5}\frac{N}{V}E_{\mathrm{F}} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{5m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

Usando una integral espacial de volumen en d dimensiones espaciales, la denominada densidad de estados es:

$$g^{(d)}(E) = g_s \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\delta\left(E - E_0 - \frac{\hbar^2|\mathbf{k}|^2}{2m}\right) = g_s\,\frac{d}{2}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{d/2}\frac{(E-E_0)^{d/2-1}}{\Gamma(d/2+1)}$$

La energía de Fermi se obtiene mirando la densidad de número de partículas

$$\rho = \frac{N}{V} = \int_{E_0}^{E_0+E_{\mathrm{F}}^{(d)}} g^{(d)}(E)\,\mathrm{d}E$$

para obtener

$$E_{\mathrm{F}}^{(d)} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\tfrac{1}{g_s}\Gamma\left(\tfrac{d}{2}+1\right)\frac{N}{V}\right)^{2/d}$$

donde V es el d-dimensional volumen y g_s es la dimensión para el espacio de Hilbert interno o factor de degeneración por espín. En el caso de espín 1/2, toda energía es doblemente degenerada y $g_s = 2$. En el caso particular de $d = 2$, la densidad de estados es una constante que no depende de la energía

$$g^{(2\mathrm{D})}(E) = \frac{g_s}{2}\frac{m}{\pi\hbar^2}$$

Aquí hemos tratado solo una relación de dispersió no relativista entre energía y momento. En el caso relativista

$$E = \sqrt{(pc)^2 - (mc^2)^2}$$

y la energía de Fermi debe definirse como

$$E_F = \sqrt{(p_F c)^2 - (mc^2)^2} - mc^2 \approx p_F c$$

en la aproximación ultrarrelativista. De aquí

$$p_F = \hbar\left(\frac{6\pi^2}{g_s}\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

y la presión de degeneración es proporcional a $P_F \propto (N/V)^{4/3}$.

- Para un gas cuántico de bosones, el gran potencial es la función :

$$\Omega = g_0 \ln(1-z) - \frac{\mathrm{Li}_{\alpha+1}(z)}{(\beta E_{\mathrm{c}})^{\alpha}}$$

y permite definir la termodinámica de un gas ideal (cuántico) de bosones que lleva a la tabla de magnitudes siguiente

Quantity	General	$T \ll T_c$	$T \gg T_c$
z		$\approx \frac{\zeta(\alpha)}{\tau^\alpha} - \frac{\zeta^2(\alpha)}{2^\alpha \tau^{2\alpha}}$	$= 1$
Vapor fraction $1 - \frac{N_0}{N}$	$= \frac{\mathrm{Li}_\alpha(z)}{\zeta(\alpha)} \tau^\alpha$	$= \tau^\alpha$	$= 1$
Equation of state $\frac{PV\beta}{N} = -\frac{\Omega}{N}$	$= \frac{\mathrm{Li}_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha)} \tau^\alpha$	$= \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} \tau^\alpha$	$\approx 1 - \frac{\zeta(\alpha)}{2^{\alpha+1}\tau^\alpha}$
Gibbs Free Energy $G = \ln(z)$	$= \ln(z)$	$= 0$	$\approx \ln\left(\frac{\zeta(\alpha)}{\tau^\alpha}\right) - \frac{\zeta(\alpha)}{2^\alpha \tau^\alpha}$

y donde $\alpha = d/2$ es la constante de dimensionalidad. También hay generalizaciones para relaciones de dispersión complicadas de energía-momento, tanto no relativistas como relativistas, pero la dependencia termodinámica general se mantiene.

Appendix C

Multivectores, polivectores,...

Los objetos extensos requieren teoría de campos y matemáticas avanzadas más sofisticadas. Un campo es una deformación del espacio-tiempo o de cierta variedad abstracta, que impregna o llena el vacío. El campo es un tipo de sustancia o fluído. De igual forma que una partícula puntual se puede describir como $x(t)$ ó $x(\vec{t})$ en tiempos múltiples, se puede describir una cuerda (1-brana) como un objeto tal que

$$X(\sigma, \tau) = X(\Sigma)$$

Para una membrana de tipo unitemporal

$$X(\vec{\sigma}, \tau)$$

y para una membrana de tipo multitemporal

$$X(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$$

y donde $D = d_s + d_t$ es la dimensión espacio-tiempo total. El concepto de reposo o invariancia para una membrana multidimensional multitemporal se sigue de la definición

$$X(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) = X'(\vec{\sigma}', \vec{\tau}') \leftrightarrow X(\Sigma) = X'(\Sigma')$$

No hay aún (circa 2020), una manera universalmente aceptada de tratar con objetos de tipo extenso multidimensional multitemporal. Sin embargo, hay varias técnicas y lenguajes matemáticos útiles. La teoría de p-formas (y sus duales p-vectores) es una herramienta útil. También lo es el denominado cálculo de Clifford, que permite la superposición de objetos de distinto grado. En un espacio de Clifford se puede "sumar" una partícula, una cuerda, una 2-brana, mediante un objeto polivectorial que es la suma de multivectores:

$$X = \sigma 1 + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{\overrightarrow{x}} + \cdots + \hat{x}$$

La expansión de un polivector usando una desposición en p-vectores y el producto exterior es como sigue

$$X = \sigma + x^{\mu}\gamma_{\mu} + x^{\mu_1\mu_2}\gamma_{\mu_1} \wedge \gamma_{\mu_2} + x^{\mu_1\mu_2\mu_3}\gamma_{\mu_1} \wedge \gamma_{\mu_2} \wedge \gamma_{\mu_3} + \cdots + x^{\mu_1\cdots\mu_D}\gamma_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{\mu_D}$$

Para hacer el objeto adimensional, puede introducirse una longitud fundamental L_p, de forma que la anterior expansión es

$$X = X^A\gamma_A = \sum_{i=0}^{D} \left(\frac{1}{L_p}\right)^{2i-2} x^i\gamma_i$$

donde la suma se extiende a todos los $i-$grados, con

$$x^0 = \sigma, \gamma_0 = 1 \tag{C.1}$$
$$x^1 = x^\mu, \gamma_1 = \gamma_\mu \tag{C.2}$$
$$x^2 = x^{\mu_1\mu_2}, \gamma_2 = \gamma_{\mu_1} \wedge \gamma_{\mu_2} \tag{C.3}$$
$$\vdots \tag{C.4}$$
$$x^D = x^{\mu_1\cdots\mu_D}, \gamma_D = \gamma_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \gamma_{\mu_D} \tag{C.5}$$

Así, para campos en $\mathcal{C}$-espacios, podemos escribir:

$$ds^2 = d\sigma^2 + dx^\mu dx_\mu + \cdots + dx^{\mu_1\cdots\mu_D} dx_{\mu_1\cdots\mu_D} = G_{AB} dX^A dX^B \tag{C.6}$$
$$A_M = \sigma + A_\mu \gamma^\mu + \cdots + A_{\mu_1\cdots\mu_D} \gamma^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \gamma^{\mu_D} \tag{C.7}$$

donde $A = A_M \gamma^M$. Además, $X^{\mu_1\mu_2} \neq X^{\mu_2\mu_1}$, teniendo una simetría antisimétrica de permutaciones

$$X^{\mu_1\cdots\mu_D} = (-1)^{\varepsilon(D)} X^{\varepsilon(\mu_1\cdots\mu_D)}$$

C.1 Física multitemporal y multidimensional

Si una partícula tiene tiempos múltiples, podemos definir diferentes velocidades:

$$V^\alpha_\beta = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t^\beta}$$

Segunda ley de Newton en formato multitemporal:

$$F^\gamma = M\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} = M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X^\gamma}{\partial t_\alpha \partial t_\beta}$$

La ley de gravitación universal newtoniana admite una generalización "simple" a tiempos múltiples o multitemporal. En dimensión $D = n + 1 + d$, donde n es la dimensión de la variedad temporal y d es la dimensión espacial, se tiene que

$$F_N = G_N \cos^2\theta \frac{M_1 M_2}{R^d}$$

o equivalentemente

$$F = G_N \frac{(\epsilon_i \epsilon_j M^{ij})^2}{R^d} = G_N(ij) \cos^2\theta \frac{M_{ik} M^k_j}{R^d}$$

En el caso de multidimensional espacial unitemporal, se tiene que

$$F(Xd) = G(Xd) \frac{Mm}{R^{2+n}} = \frac{G(Xd)Mm}{R^2 R^n}$$

y como

$$F(4d) = G_N \frac{Mm}{R^2}$$

entondes la pequeñez de la constante gravitacional puede entenderse como una dilución dimensional en un espacio de más dimensiones de forma que se cumple, comparando las constantes

$$G_N(4d) = \frac{G(Xd)}{R^n}$$

Este argumento puede generalizarse a variedades complicadas con volumen compacto $\mathcal{V}_n$, de forma que

$$G_N = \frac{G_\star}{\mathcal{V}_n}$$

Se pueden combinar sin ninguna dificultad el caso multitemporal y multidimensional espacial, incluyendo los ángulos de la variedad temporal y la oscilación de valor de la constante gravitacional.

Appendix D

Ejercicios avanzados

D.1 Polea con cuerda masiva

Ecuaciones para el primer y segundo cuerpo:

$$T_1 - P_a - P_{1c} = m_1 a \tag{D.1}$$
$$T_1 - m_1 g + \lambda g x = m_1 a \tag{D.2}$$

$$-T_2 + P_2 + P_{2c} = m_2 a \tag{D.3}$$
$$-T_2 + m_2 g - \lambda g y = m_2 a \tag{D.4}$$
$$\tag{D.5}$$

Ecuaciones para la cuerda:

$$T_2 - T_1 = m_s a \tag{D.6}$$
$$x + y + \pi R = L_s \tag{D.7}$$
$$x + y = L_s - \pi R \tag{D.8}$$
$$x + y = L \tag{D.9}$$
$$y = L - x \tag{D.10}$$

Las ecuaciones son ahora todas juntas:

$$\text{Ecuaciones de cuerda y masas} \begin{cases} T_1 - m_1 g + \lambda g x = m_1 a \\ -T_2 + m_2 g - \lambda g y = m_2 a \\ T_2 - T_1 = m_s a \\ -\lambda(y - x) + (m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2 + m_s) g \end{cases}$$

Y ahora, con $y = L - x$, escribimos

$$(m_1 + m_2 + m_s) a = -\lambda g L + 2\lambda g x + (m_2 - m_1) g$$

Se puede incluir también el término de masa de la polea con la ecuación adicional $(T_2 - T_1) R^2 = I \alpha R$, o bien $(T_2 - T_1) = I a / R^2$, y así el primer miembro sería igual a

$$(m_1 + m_2 + m_s + I/R^2) a = M a = M \ddot{x} = -\lambda g L + (m_2 - m_1) g + 2\lambda g x$$

y despejando se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{x} - \omega^2 x = k$$

donde ω y k están definidos en términos de los parámetros dados por $\omega^2 = 2\lambda g/M$ y

$$k = \frac{(m_2 - m_1)g - \lambda g L}{M}$$

La solución de la ecuación diferencial por métodos convencionales del análisis sale

$$x(t) = x_h(t) + x_p$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 + \frac{k}{\omega^2}\right)\cosh(\omega t) - \frac{k}{\omega^2}}$$

Este problema puede resolverse con métodos denominados lagrangianos. Para este sistema: $L = T - V$ es tal que

$$T = T_1 + T_2 + T_s + T_P = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g y - \lambda g x\frac{x}{2} - \lambda g y\frac{y}{2}$$

La ligadura es $x + y + \pi R = L_s$, $y = L - x$, $L = L_s - \pi R$. El cálculo y reordenamiento del lagrangiano produce

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g(L - x) + \lambda g x^2 - \lambda L g x + \lambda g L^2/2$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange producen para este lagrangiano una simple ecuación equivalente a las ecuaciones de Newton:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$m_1 g - m_2 g - \lambda L g + 2\lambda g x = M\ddot{x}$$

$$M\ddot{x} - 2\lambda g x = (m_1 - m_2)g - \lambda g L$$

Que resulta en la misma solución que antes si imponemos las mismas condiciones de contorno iniciales.

Appendix E

Vector cross product

There is a relation between cross product and matrices in $\mathbb{R}^3$. Define:

$$A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \tag{E.1}$$

$$B = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \tag{E.2}$$

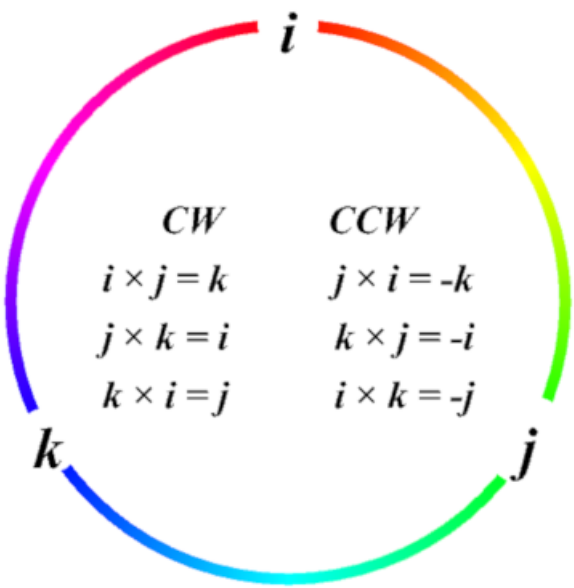
Then, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$ is related to

$$\vec{C} = \vec{A}_\times\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{E.3}$$

It follows the magic word spell under the mnemonics cyclic XYZZY. Also, we could write

$$\vec{C} = \vec{B}_\times\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{E.4}$$

Note that $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. There is another known mnemonics related to the cyclic triadic clock:



There is also a hidden link of tridimensional cross product with four dimensional entities known as quaternions. Quaternions are certain generalization of complex numbers into 4d. They

include 3 imaginary units i, j, k (yes, that is the origin of ijk notations). Define two quaternions:

$$q_1 = A_0 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \tag{E.5}$$
$$q_1 = B_0 1 + B_1 i + B_2 j + B_3 k \tag{E.6}$$

where $i^2 = j^2 = k^2 = (ijk)^2 = -1$. Then:

$$Q = q_1 q_2 = (q_1 = A_0 1 + A_1 i + A_2 j + A_3 k)(q_1 = B_0 1 + B_1 i + B_2 j + B_3 k) \tag{E.7}$$

becomes

$$Q = A_0 B_0 + A_0(B_1 i + B_2 j + B_3 k) + B_0(A_1 i + A_2 j + A_3 k) - (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{E.8}$$

or equivalently

$$(q_1 q_2) = Q = A_0 B_0 - (\vec{A}, \vec{B}) + \left[\vec{A}, \vec{B}\right] + \begin{vmatrix} A_0 & -B_0 \\ \vec{A} & \vec{B} \end{vmatrix} \tag{E.9}$$

We can have a proof for the identity

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \varphi \tag{E.10}$$

Demo. $A \leftarrow B$.

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2 \tag{E.11}$$

Rewriting

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \tag{E.12}$$

you can deduce that

$$(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \tag{E.13}$$
$$\sum_i A_i^2 \sum_i B_i^2 = \sum_i A_i^2 B_i^2 + \sum_{i \neq j} A_i^2 B_j^2 \tag{E.14}$$

and

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = \sum_i A_i^2 B_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} A_i B_i A_j B_j \tag{E.15}$$

Then,

$$|\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = \sum_{i \neq j} A_i^2 B_j^2 - 2 A_i B_i A_j B_j + A_j^2 B_i^2 \tag{E.16}$$
$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = \left(\sum_{i \neq j} A_i B_j - A_j B_i \right)^2 \quad Q.E.D. \tag{E.17}$$

In components:

$$|\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = A_x^2 B_x^2 + A_x^2 B_y^2 + A_x^2 B_z^2 \tag{E.18}$$
$$+ A_y^2 B_x^2 + A_y^2 B_y^2 + A_y^2 B_z^2 \tag{E.19}$$
$$+ A_z^2 B_x^2 + A_z^2 B_y^2 + A_z^2 B_z^2 \tag{E.20}$$

and

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{E.21}$$
$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = A_x^2 B_x^2 + A_y^2 B_y^2 + A_z^2 B_z^2 + +2 A_x B_x A_y B_y + 2 A_x B_x A_z B_z + 2 A_y B_y A_z B_z \tag{E.22}$$

and thus

$$
\begin{aligned}
|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 = & \quad \text{(E.23)}\\
A_x^2B_y^2 - 2A_xB_xA_yB_y + A_y^2B_x^2 + & \quad \text{(E.24)}\\
+A_x^2B_z^2 - 2A_xB_xA_zB_z + A_z^2B_x^2 & \quad \text{(E.25)}\\
+A_y^2B_z^2 - 2A_yB_yA_zB_z + A_z^2B_y^2 = & \quad \text{(E.26)}\\
= (A_xB_y - A_yB_x)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_yB_z - A_zB_y)^2 & \quad \text{(E.27)}\\
= |\vec{A}\times\vec{B}|^2 \quad Q.E.D. & \quad \text{(E.28)}
\end{aligned}
$$

Demo. $A \to B$.
Adding and substraction $A_i^2B_i^2$, you get

$$
\begin{aligned}
|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = \left(\sum_{i\neq j} A_iB_j - A_jB_i\right)^2 + \sum_i (A_i^2B_i^2) - (A_i^2B_i^2) = & \quad \text{(E.29)}\\
\sum_i A_i^2 \sum_i B_i^2 - \sum_i A_i^2B_i^2 - 2\sum_{i\neq j} A_iB_iA_jB_j = \sum_i A_i^2 \sum_i B_i^2 - (\sum_i A_iB_i)^2 & \quad \text{(E.30)}\\
= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2. \ Q.E.D. & \quad \text{(E.31)}
\end{aligned}
$$

In components, the proof is similar but lengthy

$$
\begin{aligned}
|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A_x^2B_y^2 - 2A_xB_xA_yB_y + A_y^2B_x^2 + & \quad \text{(E.32)}\\
+A_x^2B_z^2 - 2A_xB_xA_zB_z + A_z^2B_x^2 + & \quad \text{(E.33)}\\
A_y^2B_z^2 - 2A_yB_yA_zB_z + A_z^2B_y^2 & \quad \text{(E.34)}
\end{aligned}
$$

Summ and substraction of $A_x^2B_x^2 + A_y^2B_y^2 + A_z^2B_z^2$ gives you:

$$
\begin{aligned}
Z = |\vec{A}\times\vec{B}|^2 = A_x^2B_x^2 + A_x^2B_y^2 - 2A_xB_xA_yB_y + A_y^2B_x^2 + & \quad \text{(E.35)}\\
-A_x^2B_x^2 - 2A_xB_xA_zB_z + A_z^2B_x^2 + A_x^2B_z^2 + & \quad \text{(E.36)}\\
+A_y^2B_y^2 - 2A_yB_yA_zB_z + A_y^2B_z^2 + A_z^2B_y^2 + & \quad \text{(E.37)}\\
-A_y^2B_y^2 + A_z^2B_z^2 - A_z^2B_z^2 & \quad \text{(E.38)}
\end{aligned}
$$

Rearrange the terms as follows:

$$
\begin{aligned}
Z = A_x^2B_x^2 + A_x^2B_y^2 + A_x^2B_z^2 + A_y^2B_x^2 + A_y^2B_y^2 + A_y^2B_z^2 + A_z^2B_x^2 + A_z^2B_y^2 + A_z^2B_z^2 + & \quad \text{(E.39)}\\
-A_x^2B_x^2A_y^2B_y^2 - A_z^2B_z^2 - 2A_xB_xA_yB_y - 2A_xB_xA_zB_z - 2A_yB_yA_zB_z = & \quad \text{(E.40)}\\
= |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 \ \ Q.E.D. & \quad \text{(E.41)}
\end{aligned}
$$

The final result can be also written in terms of the Gram formal determinant

$$
|\vec{A}\times\vec{B}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{A} & \vec{A}\cdot\vec{B} \\ \vec{B}\cdot\vec{A} & \vec{B}\cdot\vec{B} \end{vmatrix} \quad \text{(E.42)}
$$

This proof can be simplified in Geometric Algebra. Define:

$$
AB = A\cdot B + A\wedge B = A\cdot B + iA\times B \quad \text{(E.43)}
$$

$$
BA = B\cdot A + B\wedge A = A\cdot B + iB\times A = A\cdot B - iA\times B = (AB)^* \quad \text{(E.44)}
$$

Then,

$$(AB)^* = A \cdot B - iA \times B \tag{E.45}$$

and

$$(AB)^*(AB) = (A \cdot B)^2 + (A \times B)^2 = BAAB = AABB = A^2B^2 = |AB|^2 \tag{E.46}$$

With the wedge product there is a similar identity:

$$(AB)(BA) = (A \cdot B)^2 - (A \wedge B)^2 = ABBA = BAAB = A^2B^2 = |AB|^2 \tag{E.47}$$

Note that if, instead of complex modulus, you take the pure squared

$$(AB)^2 = ABAB = (A \cdot B)^2 + (A \wedge B)^2 + 2(A \cdot B)(A \wedge B) \tag{E.48}$$

and

$$(AB)^2 = ABAB = (A \cdot B)^2 + (A \times B)^2 + 2i(A \cdot B)(A \times B) \tag{E.49}$$

The scalar product, the wedge product and the cross product can be recovered from the geometric product

$$A \cdot B = \frac{AB + BA}{2} \tag{E.50}$$

$$A \wedge B = \frac{AB - BA}{2} \tag{E.51}$$

$$A \times B = \frac{AB - BA}{2i} \tag{E.52}$$

Appendix F

El SI: magnitudes y dimensiones

F.1 Magnitudes, dimensiones, y sistemas de unidades: S.I., C.G.S, y otros.

Magnitudes

En Ciencia, se llama **magnitud** a todo aquello que se puede medir. No toda variable matemática o física es necesariamente una magnitud a priori. Además, una magnitud, incluso aunque sea medible y cuantificable, puede NO ser directa o indirectamente observable. Observabilidad no equivale a medibilidad.

Tipos de magnitudes

Las magnitudes pueden estar cuantificadas solamente por un número. En tal caso se habla de magnitudes escalares. También se pueden definir aquellas magnitudes orientables, llamada magnitudes vectoriales. Más allá de los vectores existen magnitudes tensoriales (multidireccionales), de tipo polivectorial/multivectorial, multiforma/poliforma y de tipo (super)(hiper)complejo (espinores, superespinores, twistores, supertwistores, hipertwistores, superhipertwistores,...).
Los tensores son generalmente tablas, cubos/prismas, hipercubos/hiperprismas de números con ciertas propiedades. Cuando a cada punto en un "espacio" abstracto o espacio "target" se le asocia un número, vector, tensor,..., hablamos entonces del concepto de **campo** escalar, vectorial, tensorial, ... Existen diferentes clases de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, imaginarios, complejos, cuaterniónicos, octoniónicos (de Cayley), de Grassmann (números clásicos anticonmutativos o c-números), números p-ádicos, números adélicos (idélicos), números surreales, números transfinitos, y algunos otros. Los campos $\phi(X)$ son generalmente un functor (o incluso un functor de alto orden) entre categorías: $\phi : X \to Y$, con $y = \phi(X)$.

En el año 2019, se redefinieron las unidades del S.I. en busca de una mejor y mayor precisión, también para resolver algunos problemas relacionados con la Metrología y las medidas de ciertas cantidades y magnitudes fundamentales o básicas. Las magnitudes fundamentales o básicas pasaron en 2019 a estar definidas en base a una "constante fundamental universal". Se eligieron las 7 cantidades o constantes siguientes:

- La velocidad de la luz en el vacío (c).
- La constante de Planck (h).

- La frecuencia de la radiación de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de Cs-133 ($\Delta f(Cs-133)$).
- La constante de Boltzmann (k_B).
- La carga eléctrica elemental del electrón (e).
- La constante de Avogadro (N_A).
- La eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de 540 THz.

La constante de Planck h, y la velocidad de la luz en el vacío c, son ambas propiamente constantes fundamentales que definen propiedades cuánticas y espacio-temporales que afectan a todas las partículas y campos en todas las escalas y entornos. La carga elemental del electrón e, corresponde a la fuerza de acoplamiento de la fuerza electromagnética mediante la cantidad adimensional denominada constante de estructura fina $\alpha = e^2/2c\varepsilon_0 h = e^2/4\pi\hbar c\varepsilon_0 = K_C e^2/\hbar c$. La constante de estructura fina varía con la energía según la ecuación del (semi)grupo de renormalización. Algunas teorías predicen que la constante de estructura fina puede variar en el tiempo. Los límites experimentales sobre la máxima variación son sin embargo tan bajos, que para propósitos estándar cualquier efecto puede ser despreciado. La constante de Boltzmann corresponde al factor de conversión entre temperatura y energía. En Física Estadística y teoría cinética, la constante de Boltzmann conecta la entropía con el número de microsestados accesibles mecanocuánticos mediante $S = k_B \ln \Omega$. La frecuencia $\Delta f(Cs-133)$ corresponde a la frecuencia de la transición de los niveles hiperfinos del nivel fundamental no perturbado a su primer estado excitado del átomo de Cs-133 (de carácter atómico, puede ser afectado por el ambiente, pero la transición subyacente es suficientemente estable para considerarse de frecuencia fija). La constante de Avogadro corresponde al factor de conversión entre la cantidad de sustancia y el número de entidades o partículas, y finalmente la eficacia luminosa K_{cd} de la radiaciónde 540 THz es una constante técnica que da una relación numérica exacta entre las características puramente físicas de la potencia radiante que estimula un ojo humano en vatios W, y su respuesta fotobiológica definida por el flujo luminoso debido a la respuesta espectral de una observador estándar, medido en lúmenes lm, a una frecuencia de 540 THz.

F.2 Magnitudes base en el S.I.

Se define el S.I. como el sistema de unidades en el que hay las siguientes 7 unidades base definidas en función de factores de conversión con las 7 constantes fundamentales anteriores: tiempo, longitud, masa, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Se relacionan con las constantes fundamentales en el S.I., de la forma siguiente (el S.I. es el sistema métrico en el que se definen las siguientes constantes fundamentales y magnitudes básicas):

Tiempo(Time)

Tiempo es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T. La unidad base es el segundo, definido como 9192631770 ciclos de la radiación de la transición hiperfina no perturbada fundamental del átomo de cesio-133. Matemáticamente:

$$\boxed{1Hz = \frac{\Delta f(Cs-133)}{9192631770} s^{-1}} \leftrightarrow \boxed{1s = \frac{9192631770}{\Delta\nu(Cs-133)}} \tag{F.1}$$

Longitud(Length)

Longitud es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es L. La unidad base es el metro definido como la distancia que recorre la luz en 1/299792458 segundos. Equivalentemente, se define como el valor numérico fijo de la velocidad de la luz en el vacío, expresando la velocidad en metros por segundo, y el segundo definido relativo a la definición de la frecuencia $\Delta(Cs-133)$. Esto da como valor exacto $c = 299792458 m/s$, mientras que la longitud del metro queda definida en función de c y de $\Delta f(Cs-133)$ como sigue:

$$1m = \frac{c}{299792458}s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \approx 30.663319\frac{c}{\Delta f(Cs-133)} \tag{F.2}$$

Masa(Mass)

Masa es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es M. La unidad base es el kilogramo definido usando la constante de Planck $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ como fija en unidades de $J \cdot s$ ó J/Hz, o bien $kg \cdot m^2/s$. Esto da como valor exacto de un kilogramo:

$$1kg = \frac{h}{6.62607015 \cdot 10^{-34}}\frac{s}{m^2} = \begin{cases} = \dfrac{299792458^2}{(6.62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)}\dfrac{h\Delta f}{c^2} \\ = 1.4755214 \cdot 10^{40}\dfrac{h\Delta f_{Cs}}{c^2} \end{cases} \tag{F.3}$$

Intensidad de corriente eléctrica(Electrical current intensity)

Intensidad de corriente eléctrica es magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es I. La unidad base es el amperio A definido usando la constante definida por la carga elemental del electrón $Q(e) = e = 1.602176634 \times 10^{-19} C \quad (A \cdot s)$ como fija. Entonces, el amperio se define mediante el factor de conversión:

$$1A = \frac{e}{1.602176634 \times 10^{-19}}s^{-1} = \begin{cases} \dfrac{e\Delta f(Cs-133)}{(1.602176634 \times 10^{-19})(9192631770)} \\ \approx 6.789687 \cdot 10^8 e\Delta f_{Cs} \end{cases} \tag{F.4}$$

Cantidad de sustancia(Amount of substance)

Cantidad de sustancia es magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es n. La unidad base es el mol (mol), definido como la cantidad de sustancia que contiene exactamente una cantidad igual a la constante de Avogadro N_A, fijada al valor $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} mol^{-1}$. De aquí, un mol se define mediante el factor de conversión siguiente:

$$\boxed{1mol = \frac{6.02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}} \tag{F.5}$$

La cantidad de sustancia es una medida del número de entidades elementales en cualquier pedazo de materia. Puede ser de átomos, moléculas, iones, electrones o cualquier otra partícula o grupo de partículas que se especifique.

Temperatura absoluta(absolute temperature)

Temperatura absoluta es una magnitud base en el S.I. Su símbolo dimensional es T ó Θ. La unidad base es el grado kelvin K definido usando la constante de Boltzmann, expresada en J/K como $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ como fija, o bien en unidades dimensionales del S.I. como $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Entonces, el kelvin (grado kelvin) se define mediante el factor de conversión:

$$\boxed{1K = \frac{1.380649 \cdot 10^{-23}}{k_B} kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \begin{cases} \dfrac{1.380649 \cdot 10^{-23}}{(6.62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \dfrac{h\Delta f}{k_B} \\ \approx 2.2666653 \dfrac{h\Delta f_{Cs}}{k_B} \end{cases}} \tag{F.6}$$

Intensidad luminosa(luminous intensity)

La intensidad luminosa en una dirección dada es una magnitud base del S.I. Su símbolo dimensional es I_L, o también I_ν ó $\mathcal{J}$. La unidad base de intensidad luminosa es la candela cd, definida como la cantidad que, tomando como valor numérico fijo la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540THz, K_{cd}, ésta es 683 expresada en unidades de lúmens por vatio, $lm \cdot W^{-1}$, o bien en candelas por estereoradián entre vatio $cd \cdot sr \cdot W^{-1}$, o también $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, donde el kilogramo, el metro, el segundo se definen mediante las constantes $h, c, \Delta f_{Cs}$. Con esta definición, tenemos que la candela es igual, usando $K_{cd}, h, c, \Delta f_{Cs}$ a:

$$\boxed{1cd = \frac{K_{cd}}{683} \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot sr} = \begin{cases} \dfrac{K_{cd} h \cdot [\Delta f_{Cs}]^2}{(6.62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)^2 683} \\ \approx 2.61483010 \times 10^{10} K_{cd} h [\Delta f_{Cs}]^2 \end{cases}} \tag{F.7}$$

En el sistema C.G.S. o cegesimal, la unidad fundamental de longitud es el centímetro y la de masa es el gramo. Se mantiene el resto de unidades básicas en general. La dina es la unidad de fuerza, siendo el producto de 1 gramo por $1cm/s^2$ (galileo), dicha unidad de fuerza (1 dina). En el sistema técnico, el kilogramo-fuerza o kilopondio es la unidad de fuerza, manteniéndose el resto de unidades también en general.

F.3 Dimensiones físicas, otras unidades y ecuaciones de dimensiones

A continuación una lista amplia de magnitudes (básicas y no básicas o derivadas), junto con dimensiones físicas y otras unidades:

- Longitud L, metro, 1Å=$10^{-10}m$ o angström, 1 pc o parsec=3,26años-luz (lyr)=$3.086 \cdot 10^{-10}m$, unidad astronómica ($1UA = 1.496 \cdot 10^{11}m$), milla, milla náutica, pulgada,...
- Masa M, $1utm = 9,8kg$, $1g = 10^{-3}kg$, $1u \approx 1.66 \cdot 10^{-27}kg$.
- Tiempo T: años, décadas, lustros, siglos, milenios, Gyr, Myr,...
- Intensidad de corriente eléctrica A (mA,...)
- Temperatura absoluta Θ, kelvin K. Otras: grados oemer, grados celsius, grados rankine, grados fahrenheit.
- Intensidad luminosa I_ν: candela.
- Cantidad de sustancia o materia n: el mol.
- Ángulo plano θ (adimensional): radianes (rad). También: grados sexagesimales °C, gradianes (grados centesimalese). $2\pi rad = 360° = 400^g$.
- Ángulo sólido Ω: estereoradián (sr).
- Superficie: L^2. Metros cuadrados. Hectáreas ha. $1ha = 100a = 10000m^2 = 100dam^2 = 1hm^2$.
- Volumen: L^3. Metro cúbico. Relacionado con capacidad: $1L = dm^3$, $1m^3 = 1kL$, $1mL = 1cm^3$.
- Densidad (volúmica) de masa M/L^3.
- Densidad (superficial) de masa M/L^2.
- Densidad (lineal) de masa M/L.
- Densidad (volúmica) de carga Q/L^3. $Q = IT$.
- Densidad (superficial) de carga Q/L^2. $Q = IT$.
- Densidad (lineal) de carga Q/L. $Q = IT$.
- Densidad de partículas (por volumen, superficie o longitud, respectivamente): L^{-3}, L^{-2}, L^{-1}.
- Velocidad $L/T = LT^{-1}$. m/s ó km/h ó m.p.h.(anglosajones).
- Aceleración: LT^{-2}. m/s^2. Los galileos o gal $1gal = 1cm/s^2$.
- Jerk: LT^{-3}.
- Absement/absition: $L \cdot T = L/T^{-1}$ (m/Hz).
- Velocidad angular: T^{-1}. rad/s ó r.p.m.

- Frecuencia: hertzios T^{-1} (vueltas por segundo, c.p.s.). $1Hz = 1s^{-1}$.
- Aceleración angular: rad/s^2. Dimensiones T^{-2}.
- Fuerza: $1N = 1kg \cdot m/s^2$, newton N. Otras: dina $1dina = 10^{-5}N$, kilopondio o kilogramo-fuerza $1kp = 9,81N$. Dimensiones: MLT^{-2}.
- Cantidad de movimiento, momento lineal, impulso: $p = mv$, MLT^{-1}.
- Momento de una fuerza $M = Fd$, ML^2T^{-2}. $1Nm$.
- Trabajo o energería: $W = Fd$, $ML^2T^{-2}.1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1J$, julio. Otras: foes, $1FOE = 10^{51}erg$, ergios $1J = 10^7ergs$, $1kWh = 3,6MJ$, $1eV = 1,602 \cdot 10^{-19}J \approx 160zJ$.
- Momento de inercia ML^2.
- Momento angular ML^2T^{-1}.
- Potencia ML^2T^{-3}. Vatio: 1W=$1J/s$. 1 C.V.=$735,4W$.
- Presión $ML^{-1}T^{-2}$. S.I.: 1 pascal=N/m^2. Otras: bar, mmHg, atmósfera (atm), hPa, psi.
- Tensión superficial M/T^2.
- Coeficiente de viscosidad η, $ML^{-1}T^{-1}$. $Pa \cdot s$. 1 poise$\approx 0,1Pa \cdot s$.
- Número de onda k, L^{-1}.
- Intensidad de ondas MT^{-3}, vatio por metro cuadrado.
- Convergencia o potencial focal: dioptrías D. $1D = 1m^{-1}$. $C = L^{-1}$.
- Flujo luminoso, lúmenes lm. ϕ_L. Dimensiones ϕ_L.
- Luminancia B: $\phi_L L^2$. cd/m^2, 1 stilb=$10^4cd/m^2$.
- Iluminación E: ϕ_L/L^2. lux. Otras: $1phot = 10^4lux$.
- Módulo del campo gravitacional g. LT^{-2}.
- Potencial gravitacional V_g, L^2T^{-2}, cuadrado de una velocidad.
- Flujo del campo gravitacional (aceleración volúmica): $\phi_g = L^3/T^2$.
- Coeficientes de dilatación: Θ^{-1}, en K^{-1}.
- Calor específico: $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$, $J/(kg \cdot K)$.
- Calor latente o de cambio de estado: L^2T^{-2}. Julio por kilogramo.
- Conductividad térmica o calorífica: $MLT^{-3}\Theta^{-1}$. Vatio por metro y kelvin.
- Energía interna, entalpía, función de Gibbs, función del Helmholtz (U, H, G, F): julios ML^2T^{-2}.
- Entropía S: $ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$: julio por grado kelvin.
- Permitividad eléctrica ε: $L^3M^{-1}T^4I^2$. Faradio partido (por) metro. F/m.
- Carga eléctrica: culombio C. $Q = IT$. $1e \approx 1.602 \cdot 10^{-19}C$.

- Módulo del campo eléctrico: $MLT^{-3}I^{-1}$. N/C, newton partido (por) culombio.
- Potencial del campo eléctrico: $ML^2T^{-3}I^{-1}$. Voltio. $1V = Nm/C = 1J/1C$.
- Flujo del campo eléctrico: Nm^2/C, dimensiones $\Phi_E = ML^3T^{-3}I^{-1}$.
- Capacidad de condensadores o carga: $L^{-2}M^{-1}T^4I^2$. Faradio F.
- Módulo de la densidad de corriente j: IL^{-2}.
- Resistencia eléctrica: $R = L^2MT^{-3}I^{-2}$. Ohmios Ω.
- Resistividad eléctrica: $\rho_e = L^3MT^{-3}I^{-2}$. $\Omega \cdot m$, ohmio por metro.
- Conductividad eléctrica $\sigma_e = L^{-3}M^{-1}T^3I^2$. $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$.
- Permeabilidad magnética μ. $LMT^{-2}I^{-2}$. H/m, henrio por metro.
- Módulo del campo magnético o inducción magnética B: $MT^{-2}I^{-1}$, tesla $1T$. 1 gauss=$10^{-4}T$.
- Flujo del campo magnético $\phi_B = ML^2T^{-2}I^{-1}$. 1 weber=$1T{\cdot}m^2$. Otras: 1 maxwell=$10^8Wb$.
- Coeficientese de autoinducción e inducción mutua (L, M): $L^2MT^{-2}I^{-2}$. henrios H.
- Módulo del campo de desplazamiento eléctrico D: ITL^{-2}, culombio partido (por) metro cuadrado.
- Módulo del campo magnético o desplazamiento magnético H: IL^{-1}, amperio partido (por) metro. 1 oersted= $10^3/4\pi$ A/m.
- Impedancias y reactancias: mismas unidades que resistencias eléctricas.
- Actividad de muestras radioactivas: nT^{-1}, mol partido por segundo. También más frecuentemnte: 1 curio= 1 Ci$\approx 3.7{\cdot}10^{10} desintegraciones/s$, o también $1Ci = 6.14{\cdot}10^{-14} mol/s$.

F.4 Otras constantes universales

- Constante de gravitación universal: $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$.
- Constante de Coulomb y permetividad del vacío: $K_C = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = 1/4\pi\varepsilon_0$. $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ ó F/m.
- Constante universal de los gases: $R = 8.314 J/Kmol$=$0.082 atmL/Kmol$.
- Permitividad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Wb/Am$, o también $K_m = \mu_0/4\pi$.
- Masa del electrón: $m_e = 0.511 keV/c^2 \approx 9.11 \cdot 10^{-31} kg$.
- Masa del protón: $m_p = 6\pi^5 m_e \approx 1.673 \cdot 10^{-27} kg = 1836 m_e$.
- Masa del neutrón: $m_n \approx m_p = 1.675 \cdot 10^{-27} kg = 1839 m_e$.
- Aceleración en la superficie terrestre de la gravedad: $g_0(\oplus) = g_\oplus = 9,81 m/s^2$.
- Radio terrestre: $R_\oplus = 6400 km$.
- Densidad del agua a 4ºC: $10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3$.

- Calor específico del agua: $c_e = 4180 J/kgK = 1 cal/gK$.
- Índice de refracción del agua líquida (media): 1.33.
- Masa molar del aire: $2.89 \cdot 10^{-2} kg/mol$. Densidad del aire en condiciones normales: 1.3kg/L.
- Constante de Stefan-Boltzmann: $5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4} = \sigma_{SB}$.
- Constante de la ley de Wien: $C_W = 2.88 \cdot 10^{-3} K \cdot m$.
- Carga de un mol de electrones o constante de Faraday de la electrólisis: $1F = N_A e = 96485 C/mol$.

F.5 Potencias de 10 y notación científica

En el S.I., hay unso prefijos universalmente aceptados a nivel internacional de múltiplos y submúltiples de cualquier unidad en cualquier sistema de unidades:

- Prefijos para múltiplos: deca (da) 10, hecta (h) 10^2, kilo (k) 10^3, mega (M) 10^6, giga (G) 10^9, tera (T) 10^{12}, peta (P) 10^{15}, exa (E) 10^{18}, zetta (Z) 10^{21}, yotta (Y) 10^{24}, ronna (R) 10^{27}, quetta (Q) 10^{30}.
- Prefijos para submúltiplos: deci (d) 10^{-1}, centi (c) 10^{-2}, mili (m) 10^{-3}, micro (μ) 10^{-6}, nano (n) 10^{-9}, pico (p) 10^{-12}, femto (f) 10^{-15}, atto (a) 10^{-18}, zepto (z) 10^{-21}, yocto (y) 10^{-24}, ronto (r) 10^{-27}, quecto (q) 10^{-30}. .

Regla mnemotécnica: PEZY-FAZY para las últimas potencias. Cualquier resultado numérico puro o de una medida, puede darse con la llamada notación científica:

Notación científica

$$\boxed{Z = x.abcdef \cdots 10^{\pm n}}$$

donde $x \neq 0$, y $abcdef \cdots$ son números arbitrarios.

F.6 Cifras significativas (c.s.)

Cualquier magnitud se indica mediante números. Y los números generalmente tendrán exactitud, precisión e incertidumbre. Una manera estándar de dar la precisión es mediante la combinación de la Se llaman cifras significativas al número e dígitos que conozco con seguridad. En la notación científica, el número de c.s. equivale al número de dígitos delante de la potencia de 10, siempre con parte entera no nula.

Appendix G

Ejercicios-actividades de la E.S.A.

G.1 Control térmico de satélites

Tema: Termodinámica y Estequiometría.

En el espacio, la temperatura es el resultado del equilibrio de la energía que recibe del Sol y la Tierra. La energía que el satélite produce y la que pierdee por radiación se puede calcular. En general, un satélite en órbita de baja altura, como el Envisat, recibe una energía de 3 partes: a) radiación solar: 1367 W/m^2, b) albedo (fracción de luz y energía reflejada por la Tierra): 0.31367 W/m^2m, c) radiación IR de la Tierra: 240 W/m^2.
A) Calcula al energía en órbita de baja altura.
B) Halla la energía recibida por el Envisat en 20 segundos, suponiendo que 1/4 del satélite mira al sol y el resto a la Tierra. C) La hidrazina N_2H_4 es el propelente del Envisat, con temperatura de tolerancias entre 4 y 40 grados centígrados. Asumiendo que la energía radiada no cambia con la temperatura, y que la energía producida tampoco, halla el tiempo que se necesita para aumentar en 32 grados celsius la temperatura de 50 kg de propelente. Datos: A(Envisat)=160m^2, C(hidrazina)=98,9$J/molK$.

G.2 Despegue del Ariane

El Ariane 5 es un cohete de la ESA. Se suele lanzar desde Kourou, Guayana francesa. Durante el deespegue 2 propulsores producen 6713 kN y en la etapa principal 1167kN. La masa en el despegue es de 725 t. Calcula:
a) La aceleración vertical.
b) Porcentaje de contribución de cada etapa (`www.esa.int/launchers`).
Dato: Los propulsores funcionan solo 130 s, suficiente para alcanzar la altura de 60 km. Propulsores laterales se separan y caen al mar.

G.3 Rosetta

La sonda Rosetta estudió el cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. Tras 10 años de viaje, con paneles solares. La potencia P en área A se calcula con la expresión $P = \phi_{sat} A\eta$, donde

$$\phi_{sat} = \left(\frac{1367}{d^2}\right) W/m^2$$

La distancia tierra sol es de 149.597870 Mkm, la potencia $P = 395W$ a $7.853888175 \cdot 10^{11} m$ para funcionar la sonda.

a) Halla el área de los paneles.

b) Halla la potencia que la sonda producirá en órbita alrededor de la Tierra.
c) Calcula la longitud de las alas y dibuja a la sonda Rosetta.
Datos: $\eta = 0.124$, $2Alas = 2,3m = 2,8 \times 2,1 \times 2,0m$

G.4 ¿Cuánto ruido hace un cohete?

En el despegue de un Ariane 5 hay un nivel de intensidad de 180dB. El perímetreo de 10 km alrededor de la plataforma de lanzamiento es de seguridad acústica y física.
a) Calcula la intensidad del A5 en unidades del S.I.(W/m^2).
b) Calcula cuánta gente debería hablar para tener la misma energía acústica que el A5.
c) Calcula cuál es la intensidad recibida en el límite del perímetro de seguridad del A5, i.e., a 10 km.
d) Consulta una tabla de N.I. para comparar la potencia del ruido del despegue del A5 con otros ruidos fuertes.

G.5 Radar imagen de Envisat.ERS

Una señal del Envisat es sinusoidal $y = A\sin(kr - \omega t)$, se refleja en la superficie y es recibida de nuevo.
Punto A1: señal enviada y recibida en mismo punto grabando fase $\phi_1 = k(2R_1)$.
Punto A2: lo mismo que en A1. $\phi_2 = k(2R_2)$.
Tras cierto tiempo, pasamos sobre l mismo punto y la fase es distinta por deformación de R_3. $R_2 = R_1 + \Delta R_1$, $R_3 = R_2 + \Delta R_2$.
a) Calcula ΔR_1 como función de $\phi(21) = \phi_2 - \phi_1$. La deformación es $\Delta z = z_1 - z = \Delta\phi(21)\cos\theta/4\pi$.
b) La diferencia de fase cambia de 0 a 2π, y si usamos la banda de longitud de ona 6 cm y ángulo de visión 20º, ¿qué máxima deformación se puede observar?
c) ¿Cómo se puede mejorar la precisión de los datos?

G.6 Universo y longitudes de onda

Los telescopios siguients exploran unas longitudes de onda concretas (ancho de banda), pero damos la longitud de onda central solamente. Determina la frecuencia central que observan:

- Hubble: 50 micrómetros.
- Planck: 5mm.
- Integral: 0.00001 nm.
- XMM-Newton: 0.1 nm.

G.7 Amaneceres en la ISS

La ISS tiene una masa de 450 t, un volumen de 1200 metros cúbicos, y está a una altura de 400 km. Determina cuántos amaneceres ve un habitante de la ISS.

G.8 Ariane 5 grande, ¿por qué?

Una masa de 132 t de oxígeno líquido y una masa de 25 t de hidrógeno líquido se usan en el A5. Las densidades son 0.07 g/c.c., y 1.14 g/c.c. Determina:
a) Cuál de los dos tanques contenedores es mayor.
b) Cuántas moléculas hay de hidrógeno y oxígeno en los tanques.
c) Determina la altura del contenedor de ambos gases, si es un cilindro de 2.7m de radio.

G.9 Basura espacial

Unos 110000 objetos entre 1 cm y 10 cm orbitan en baja altura (400 km y 1000km se entiende como baja altura en aeronáutica). Determina, si la velocidad de la basura es 7.5km/s:
a) La pérdida de energía cinética de una esfera de aluminio de 4 cm de diámetro en órbita al chocar con un satélite (densidad Al=2,7g/c.c.).
b) La velocidad que debe tener un cohete (1 tonelada), para producir la misma energía tras un choque como el de a) en la Tierra.

G.10 XMM-Newton

XMM-Newton tiene una masa de 3,8 t, mira el Universo en RX, y tiene una órbita con inclinación de 40º respecto el Ecuador. El apogeo es a 114000 km, y el perigeo es a 7000km. La velocidad del perigeo es 24120 km/h. El radio terrestre es 6378 km. Determina:
a) La velocidad en el apogeo.
b) Dónde va más lento el XMM-Newton y la razón de ello.
c) Por qué debe seguirse el telescopio desde Perth, Australia.
d) Cómo evita XMM-Newton las falsas lecturas por radiación (40000km en superficie en la Tierra).

G.11 Velocidad de rotación de la Tierra

Los lanzamientos de satélites geoestacionarios se pueden beneficiar de la rotación terrestre.
a) ¿En qué dirección hay que despegar para beneficiarse?
b) Averigua la velocidad adicional en el Ecuador y polo norte. Nota que Kourou tiene latitud 5,2º, 500 km al Norte del Ecuador, es el punto habitual de lanzamiento.
c) Calcula la velocidad adicional desde Kourou.
d) Compara Baikonur y Cabo Cañaveral con Kourou.
e) Indica la principal ventaja del efecto sobre el lanzador y satélite.
f) ¿Es mejor el Norte o el Sur de Australia para un puerto espacial? Indica la razón.

G.12 Eliminar gases en el espacio

El dióxido de carbono de los trajes debe ser controlado y eliminado. Para ello, se usa hidróxido de litio para absorber el dióxido de carbono.
a) Escribe y ajusta la reacción. La producción de dióxido de carbono varía de 0.5 a 1.3 kg por persona y día.
b) Si tuvieras que planificar actividades extravehiculares (EVA) de 6 horas, ¿qué cantidad mínima de LiOH necesitaríamos en el traje espacial? Averigual la densidad del LiOH y calcula su volumen y peso.
c) La ISS elimina el dióxido de carbono sólo con sistemas regenerables. Los recipientes de LiOH se encuentran en reserva como emergencia. Averigua la razón de esto. Es decir, ¿por qué no se usa LiOH como tecnología principal para eliminar el dióxido de carbono?

G.13 Química espacial: Bonus de astroquímica

Busca otros usos y nombres de las siguientes sustancias:

- LiOH, absorbedor de dióxido de carbono en astronáutica. Hidróxido de litio.
- GaAs. Células solares del Cryosat. Arseniuro de galio.
- NH_4ClO_4, perclorato de amonio. Propelente del A5.
- CdTe, telururo de cadmio. Capa de un detector de Integral.
- Fe. Hierro. Elemento químico más pesado en las estrellas.
- Al_2O_3, óxido de aluminio, basura espacial habitual.
- CO_2, dióxido de carbono. 95% de la atmósfera marciana.
- Metano CH_4. Atmósfera de Titán y la Tierra primigenia.
- Plutonio. Genera energía termoeléctrica nuclear en la Cassini-Huygens o en Curiosity.
- Ni-Cd. Níquel-Cadmio. Baterías del Envisat.

Busca moléculas interesantes en la Astroquímica o la Astrofísica, y explica su fórmula y utilidad.

G.14 ISS y ATV: encuentro en el espacial

Cada 12 meses, el ATV reabastece y repropulsa la ISS. El ATV se lanza a órbita circular de 300 km, y se inyecta a órbita elíptica de transferencia, para encontrarse con la ISS a 350 km de altura. Datos: radio terrestre 6378 km, masa terrestre 6 Ykg.
La órbita de la ISS es fija e inclinada 51.6º respecto el Ecuador, la Tierra rotando.
a) ¿Cuál es el mejor momento para lanzar la ATV y por qué?
b) Encuentra el valor de la constante de la tercera ley de Kepler, y el período de la órbita elíptica.
c) Determina el período de una órbita elíptica si a=6703 km es el semieje mayor de la elipse.
d) Determina qué ángulo debe haber entre la ATV y la ISS para que al insertar el ATV en órbita de transferencia lleguemos al punto de encuentro con éxito.

G.15 Misión a Marte

Europa se preepara para la exploración robótica y humana del Sistema Solar (la Luna, Marte y asteroides). Los científicos necesitan buen conocimiento científico de las misiones a Marte. Datos Marte: temperatura media -55ºC, presión media 6.35 mbar, composición atmósferica 95.49% CO_2, 2.7% N_2, 1.6% Ar, 0.13% O_2, 0.08% CO.
Datos Tierra: temperatura media 15ºC, presión media 1013 mb, 78.07% N_2, 21% O_2, 0.9% Ar, 0.03% CO_2.
a) Calcula la densidad atmosférica media de Marte y de la Tierra.
b) Indica si esta densidad varía según P y T. Averigua cuáles son las condiciones que llamamos hoy día condiciones normales y estándar de presión y temperatura.

G.16 Batería LiIon

Un microsatélite se ha usado de ensayo de baterías y otras tecnologías. Sus baterías de LiIon es de 9Ah. En fase de eclipse se usa un voltaje máximo de 25V, y el mínimo de descarga es 15V. El voltaje medio es de 21.6V. El peso o masa de la batería es de 1.87kg y el satélite que se prueba es de 100kg.
a) Calcula la capacidad de la batería en Wh.
b) Calcula la energía específica (energía/masa).
Para aumentar la vida útil, la máxima descarga se limita al 20% de la descarga.
c) Calcula la energía almacenada al alcanzar la máxima descarga. Dato: tecnología Ni-Cd implica 35Wh/kg.
d) Indica cuánta masa se añadiría a este satélite llevando baterías Ni-Cd.

G.17 Marte 3D

La Mars Express orbita Marrte y busca agua en Marte, estudia su atmósfera, geología, composición y estructura. La cámara estéreo de Hres da imágenes 3D con resolución de 10 m.
a) Compara los datos para la superficie de Marte y de la Tierra. Los datos reunidos se transmiten a una estación de la ESA en Australia a una velocidad de 100kbps (kilobits/s). Imagina que se descubre agua en una zona.
b) ¿Cuánto tiempo se emplearía en recibir una imagen de 200MB, en órbita alrededor de Marte, a una distancia de 300 Mkm de distancia? Nota: los 200MB se procesean y comprimen en JPEG ó TIFF de pocos MB.
c) Cada día se emiten a la Tierra a ritmo de 5Gbits de datos. ¿Cuánto se tarda en enviar los datos?
Datos: radio de marte 3397 km, radio terrestre 6378 km, la Tierra es 71% agua, la velocidad de la luz es 300 Mm/s.
1Gbit=1000Mbits=10^6kbits=10^9 bits.

	Bit	Byte	kB	MB	GB
1Byte(B)	8	1	-	-	-
1kB	8192	1024	1	-	-
1MB	8388608	1048576	1024	1	-
1GB	8589934592	1073741824	1048576	1024	1

G.18 SMART-1

SMART-1 es una sonda espacial europea que se manda a la Luna. Usa propulsión iónica eléctrica. El propelente es xenón gaseoso.
a) Calcula las fuerzas eléctrica y magnética sobre los iones de Xenón y los electrones.
b) Halla el radio y ω del movimiento helicoidal resultante por las partículas cargadas en presencia del B y E anteriores.
El parámetro $\Omega = \omega/\omega_c$ es el parámetro de Hall. Si es muy grando $\Omega >> 1$, las partículas quedan en la cámara del sistema de propulsión. Si es muy pequeña $\Omega << 1$, pueden escapar. La frecuencia de colisión ν_c se estima teóricamente por mecánica estadística. Por ejemplo, podemos suponer aquí que $\nu_c = 2.6 \cdot 10^{11} Hz$. Responde ahora:
c) ¿Qué partícula tiene mayor parámetro de Hall?
d) Para empezar la propulsión eléctrica, los electrones del cátodo se mueven al ánodo con un campo eléctrico E. Determina la dirección de la fuerza que actúa. Los electrones atrapados de c) forman el cátodo virtual.
e) ¿Qué ocurre si el gas neutro (xenón) colisiona con los electrones?
f) Si la velocidad es constante, ¿qué partícula elegirías para arrojar y empujar, iones de xenón o electrones?¿Por qué?
Datos: E=7500V/m, B=0.035T, $v_i = 14000 m/s$, $v_i \in [230, 20000] m/s$. Masa del xenón: m(Xe)=$2.187 \cdot 10^{-16} kg$, m(e)=$9.1 \cdot 10^{-31} kg$, q(e)=$1.6 \cdot 10^{-19}$C.

G.19 Reacciones químicas en un cohete espacial

Esteaa criogénica del A5 usa combustión de hidrógeno líquido $H_2(l)$ y oxígeno líquido $O_2(l)$. El tanque de oxígeno contiene 132 toneladas y el dee hidrógeno 25 toneladas.
a) Escribe y ajusta la reacción, indicando el tipo. Se produce agua y energía.
b) Indica cuál es el reactivo limitante y la razón del exceso de masa.
c) Si el oxígeno líquido se conduce a la cámara de combustión a razón de 221L/s, ¿cuánto hidrógeno gas se requiere cada segundo para la reacción completa?
d) La energía liberada es 12.792 kJ/g. ¿Cuánta energía se libera en 10 segundos? Calcula la altura a la que debería caer un camión de 20 toneladas para perder esa energía (g=$10 m/s^2$), no hay rozamiento y la densidad del oxígeno líquido es 1.14 g/c.c.

G.20 Vuelos parabólicos

El estudio de la microgravedad se realiza en la ESA mediante vuelos parabólicos (en un Airbus A300). La altura es de 7600 m, y el ángulo es de 45º, con velocidad de 580km/h.
a) Calcula el tiempo que un astronauta entrenará en microgravedad en el vuelo parabólico.
b) Halla la altura máxima del vuelo.
c) Halla el desplazamiento del vuelo parabólico. Busca en una tabla cuánto de buena es la hipótesis de que g=9.8 unidades del S.I. a la altura de 7600 metros, y el error.
d) ¿Se podría hacer lo mismo a 20 km de altura?
Dato: g=9.8 m/s^2.

G.21 Fotón-M y microgravedad

Fotón-M es un satélite ruso que lleva carga útil de la ESA, o experimentos universitarios, hasta H=300km, v=7.74km/s, y tiene masa de 6,5 toneladas=6500kg. Se lanza con las Soyuz.
a) Halla la energía cinética comunicada a estos cohetes a cada Fotón-M.
b) Halla la energía potencial gravitacional que posee Fotón-M en órbita, y qué porcentaje representa de su energía total.
c) En una cápsula de experimentos de reentrada, 2.4 toneladas son 2400kg, y se pierde casi toda la energía en la fricción con la atmósfera. Determina la energía que debe perder la cápsula para hacer un aterrizaje seguro. Toma g:9.5m/s^2.

G.22 Envisat y mantenimiento orbital

El Envisat estudia el medioambiente y clima de la Tierra globalmente desde el espacio.
a) Si tiene órbita polar (i=90º), ¿ofrece cobertura completa de la Tierra? El módulo de propulsión tiene 4 tanques de 300 kg de hidracina N_2H_4.
b) Calcula la masa de N y H para que la descomposición de la hidracina sea alrededor de 2/5, 40%, del amoníaco que se descompone via $NH_3 \rightarrow N_2 + H_2$. La reacción es $N_2H_4 \rightarrow NH_3 + H_2$.
c) Si se inyectan 2kg de hidracina en catalizador, halla la masa de H, N y amoníaco expulsador. 10 instrumentos toman datos después de esto. Hay que mantener la órbita correcta...
d) ¿Cómo puede el sistema de propulsión maniobrar en órbita?¿En qué ley física se basa?
e) La velocidad de un gas emitido es de 3000m/s, 3km/s, de media. Queremos aumentar la velocidad del Envisat (8ton) a 0.35m/s. ¿Cuántos kg de hidracina se necesitan?

G.23 Varias masas con cuerdas arrastrándose por plano horizontal

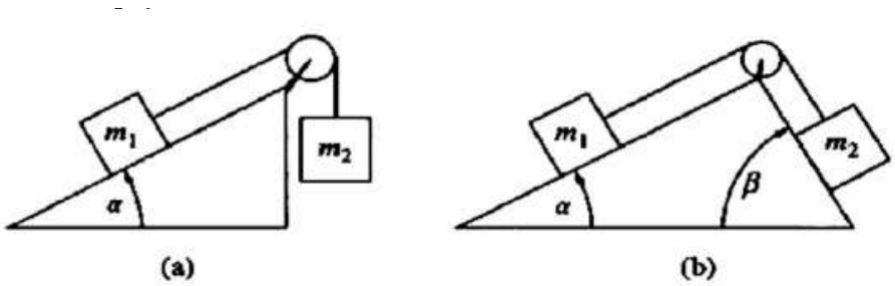
Sean, por ejemplo, tres masas M_1, M_2, M_3, en un plano horizontal con (sin) rozamiento, arrastradas por una fuerza externa F, horizontal. Determinar la tensión de cada cuerda, la aceleración del sistema.

G.24 Varias masas con cuerdas levantadas por fuerza vertical

Sean, por ejemplo, tres masas M_1, M_2, M_3, en un plano vertical conectadas por cuerdas indeformables, sin rozamiento, arrastradas por una fuerza externa F, vertical, siendo levantadas. Determinar la tensión de cada segmento de cuerda, la aceleración del sistema.

G.25 Planos inclinados con dos ángulos vs. un ángulo

Un plano inclinado con o sin rozamiento puede tener dos y no una solamente inclinación:



Determinar los tipos de movimiento que puede haber.

G.26 El eco y el pozo de los deseos

Se deja caer una moneda preciosa a un pozo de los deseos en el mismo momento en que se grita horizontalmente, D metros al pie de una montaña en un exoplaneta con gravedad g_X, y velocidad del sonido v_s. El tiempo que tarda en oirse el eco es t_e. El tiempo que tarda en escucharse el sonido del impacto de la piedra es T, siendo t_c el tiempo de caída, y t_s el tiempo de subida. Determina:
a) La expresión matemática que liga el espacio D y el tiempo del eco t_e en el exoplaneta.
b) La expresión matemática que liga t_s, con el tiempo T, la velocidad v_s y la aceleración de la gravedad g_X. Halla la expresión análoga para t_c. Determina la expresión de T en función de t_s, g_X, v_s, y en función de H, g_X.
c) Determina la expresión de la profundidad del pozo, en función de v_s, g, T.
d) Interpreta los límites $g \to \infty$, $T \to 0$, $v_s \to 0$.

G.27 Ecuaciones algebraicas de grado 1, 2, 3 y 4

Una ecuación algebraica de grado n es una expresión polinómica $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, es decir,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

En general, si un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado implica que una ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones (iguales o distintas), por el teorema fundamental del álgebra. Un ejemplo algebraicamente cerrado es $\mathbb{C}$, los números reales no son algebraicamente cerrados. Existen otros cuerpos de números no triviales que son algebraicamente cerrados. Pueden construirse también cierres algebraicos de muchos (sub)cuerpos. Lo que hace especial es caso complejo es que es también un cuerpo completo. Más allá de los números complejos, el otro caso de cuerpo de números que son algebraicamente cerrados y completos sobre una métrica con los cuerpos valorados, también llamados números p-ádicos. Una ecuación de n-ésimo grado puede resolverse por métodos de factorización, usando Ruffini y el valor numérico del polinomio por prueba y error, pero puede ser largo dicho procedimiento (o difícil). Más allá de las ecuaciones de cuarto grado, las ecuaciones de grado cinco (quínticas) o superior NO pueden resolverse por radicales debido a la teoría de Galois. En cambio, pueden resolverse mediante otras funciones no elementales, como las funciones hipergeométricas generalizadas...

G.27.1 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado $ax + b = c$, con a, b, c númeroes reales o complejos (o más generalmente en un cuerpo K), se soluciona mediante la expresión ($a \neq 0$ sobreentendido):

$$\boxed{x = \frac{c-b}{a}} \tag{G.1}$$

G.27.2 Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado arbitraria tiene por expresión $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven mediante la expresión siguiente, en el cuerpo de los reales o complejos:

$$\boxed{x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se llama discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo de su valor, habrá 2 soluciones reales, 2 soluciones reales iguales o 2 soluciones complejas en general, en el caso de coeficientes reales. Si los coeficientes son complejos, la raíz cuadrada ha de hacerse con cuidado también de las determinaciones principales de la raíz de un número complejo, aunque la fórmula anterior es válida "en general". Algunos casos más sencillos de resolver son las ecuaciones cuadráticas incompletas, que no requieren fórmula:

- Caso $b = 0$. Entonces, $ax^2 + c = 0$ tiene dos raíces que se sacan por despeje directo:

$$x_+ = +\sqrt{-c/a}, \quad x_- = -\sqrt{-c/a}$$

- Caso $c = 0$. Entonces $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces que se sacan por factorización:

$$x(ax + b) = 0 \to x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Caso $b = c = 0$. Entonces $ax^2 = 0$ tiene por solución doble $x_1 = x_2 = 0$.

La ecuación cuadrática tiene soluciones según el valor del discriminante:

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hay dos soluciones reales:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Hay dos soluciones reales iguales:

$$x_+ = x_- = X = -\frac{b}{2a}$$

- Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Hay dos soluciones complejas y conjugadas:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = z_1^* = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si los coeficientes son complejos, la determinación principal de la raíz es de hecho la selección de signos si uno es cuidadoso.

Algunos autores reescriben la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 0$ como

$$x^2 + px + q = 0$$

donde $p = b/a$ y $q = c/a$. En este caso, la fórmula de la cuadrática es

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y el discriminante se reescribe como $\Delta = \dfrac{p^2}{4} - q$, pero no cambia la discusión previa.

G.27.3 Ecuación de tercer grado(cúbica)

La ecuación de tercer grado se escribe de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + BX + C = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$.

Cardano method(I)

Cardano's method provides a technique for solving the general cubic equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in terms of radicals. As with the quadratic equation, it involves a "discriminant" whose sign determines the number (1, 2, or 3) of real solutions. However, its implementation requires substantially more technique than does the quadratic formula. For example, in the "irreducible case" of three real solutions, it calls for the evaluation of the cube roots of complex numbers.

In outline, Cardano's methods involves the following steps:

- "Eliminate the square term" by the substitution $y = x + b/3a$. Rather than keeping track of such a substitution relative to the original cubic, the method often begins with an equation in the reduced form

$$x^3 + px + q = 0$$

- Letting $x = u + v$, rewrite the above equation as

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

- Setting $3uv + p = 0$, the above equation becomes $u^3 + v^3 = -q$. In this way, we obtain the system

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3v^3 = -p^3/27$$

Since this system specifies both the sum and product of u^3 and v^3, it enables us to determine a quadratic equation whose roots are u^3 and v^3. This equation is

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0$$

with solutions

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In order to find u and v, we are now obligated to find the cube roots of these solutions. In the case

$$27q^2 + 4p^3 < 0$$

this entails finding the cube roots of complex numbers.

Even in the case $27q^2 + 4p^3 > 0$, there are some unexpected wrinkles. These are illustrated by the equation

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

for which $x = 1$ is clearly a solution. Although Cardano's method enables one to find this root without confronting cube roots of complex numbers, it displays the solution x = 1 in the rather obscure form

$$1 = \frac{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}{4}$$

Cardano's method(II): Cardano formula

The cubic polynomial equation

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has solutions

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$
$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$
$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

where

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$
$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

with

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$
$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

Depressed cubic

To erase the x^2 part of any cubic to get the form

$$y^3 + px + q = 0$$

is called to depress a cubic equation. To do it, plug $x = y + b/3a$, or equivalently, make the change $y = x - b/3a$. Then

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

becomes

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

This gives

$$a\left[y^3 - \frac{3by^2}{3a} + \frac{3b^2y}{9a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right] + b\left[y^2 - \frac{2by}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right] + c\left[y - \frac{b}{3a}\right] + d = 0$$

and from this you get

$$ay^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3a} - \frac{b^3}{27a} + by^2 - \frac{2b^2y}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

so

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) y + \left(-\frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d\right) = 0$$

or equivalently

$$y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right) y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

and then

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abd + 27a^2d}{27a^3}$$

recasts the equation into the desired form above

$$y^3 + py + q = 0$$

Q.E.D. Note that, p, q are related to R, Q from previous subsection via

$$p = 3Q$$

$$q = -2R$$

Proof/Demo:
After depressing the cubic equation you get

$$y^3 + 3Qy - 2R = 0$$

Consider the identity

$$(S + T)^3 - ST(S + T) - (S^3 + T^3) = 0$$

and

$$y = S + T$$

$$ST = -Q$$

$$S^3 + T^3 = 2R$$

Cube both sides of the second equation to get $S^3T^3 = -Q^3$. Now, by the so-called Vieta's formula, the polynomial $P(z) = z^2 - Rz - Q^3$ will have roots S^3 and T^3. Solvin with the aid of the quadratic formula

$$z = R \pm \sqrt{R^2 + Q^3}$$

Notice that the system of equations is symmetric in S, T, so the order we choose doesn't matter, and the value of y will be the same. So, therefore

$$S = w^m \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

$$T = w^n \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

wherer $0 \leq m, n \leq 2$ is any 3rd primitive root of the unity. We see that then we have 9 possible combinations for the value of $S+T$, but only 3 of them work. By looking at the second equation, we see that m+nm+nm+n must be a multiple of 3, so

$$(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)(m, n) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

and our solutions are

$$y_1 = S + T$$

$$y_2 = Sw + Tw^2$$
$$y_3 = Sw^2 + Tw$$

with

$$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

From this, and making the traslation to get from y to x, we obtain the wished soludions. Q.E.D.

Solución real simple

Cubic equations are polynomial equations of the form:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

or equivalently, if $A \neq 0$,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

To find out a real solution, you can proceed as follows:

- First compute the following two quantities from the coefficients a, b, and c:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}$$

$$R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

- Secondly, from these values of Q, R, calculate

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2}\right)^{1/3}$$

- Compute the real solution with

$$\boxed{x_1 = S + T - \frac{a}{3}}$$

Note that here we used a different normalized for the coefficients than in previous sections!

G.27.4 Ecuación de cuarto grado(cuártica)

Una ecuación de cuarto grado tiene una solución complicada en radicales o raíces, obtenida por primera vez por Ludovico Ferrari. La ecuación general de cuarto grado, puede escribirse de cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que $a \neq 0$. Antes de resolver el caso general, dos casos sencillos reducibles a una ecuación cuadrática son conocidos: la ecuación bicuadrática y la ecuación cuasi-palindrómica (ésta, a su vez, tiene dos subcasos, el caso simétrico y el casi-simétrico).

Ecuación bicuadrática

Supongamos que, en la ecuación de cuarto grado, cuártica, tenemos $b = d = 0$, y que $a = A, c = B, e = C$. Entonces, la ecuación resultante adquiere la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

Definiendo la variable auxiliar $z = x^2$, transformamos la ecuación anterior en

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

En general tendrá dos soluciones (reales o complejas), $z_\pm$. Las soluciones a la ecuación cuártica de tipo bicuadrático serán pues las 4 raíces, generalmente complejas:

$$x_1 = \pm\sqrt{z_1}, \quad x_2 = \pm\sqrt{z_2}$$

Ecuación cuasi-palindrómica

La ecuación cuártica cuasi-palindrómica es la ecuación

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1mx + a_0m^2 = 0$$

y satisface la simetría $P(mx) = \dfrac{x^4}{m^2}P\left(\dfrac{m}{x}\right)$. Se dice que la ecuación cuasi-palindrómica es simétrica o palindrómica si $m = 1$, y casi-simétrica si $m = -1$. Para ambos valores de m, o general m, la ecuación cuasi-palindrómica puede resolverse de la siguiente forma:

- Calcula $Q(x) = \dfrac{P(x)}{x^2}$.
- Realiza el cambio de variable $z = x + \dfrac{m}{x}$.
- Reescribe la ecuación como

$$Q(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2 - 2ma_0 = 0$$

- Resuelve la ecuación $Q(z) = 0$, obteniendo dos raíces z_1, z_2. Esto da dos soluciones:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(a_2 - 2ma_0)}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{(a_2 - 2ma_0)}{a_0}}$$

- Para cada z, z_1, z_2, usar el cambio del segundo punto, equivalente a resolver la ecuación cuadrática $x^2 - zx + m = 0$. Entonces, las soluciones serán, para cada valor de z hallado de $Q(z) = 0$,:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4m}}{2}$$

En síntesis, las ecuaciones cuárticas cuasi-palindrómicas se resuelven aplicando dos veces la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática.

General quartic

Solution of $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ written out in full. This formula is too unwieldy for general use; hence other methods, or simpler formulas for special cases, are generally used.

The four roots x_1, x_2, x_3, x_4 for the general quartic equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

with $a \neq 0$ are given in the following formula, which is deduced from a long procedure by back changing the variables, depressing the quartic to $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ and using the formulas for the quadratic and cubic equations (Ferrari method).

$$x_{1,2} = -\frac{b}{4a} - S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}} \tag{G.2}$$

$$x_{3,4} = -\frac{b}{4a} + S \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}} \tag{G.3}$$

$$p = \frac{8ac - 3b^2}{8a^2} \tag{G.4}$$

$$q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3} \tag{G.5}$$

and where

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\,p + \frac{1}{3a}\left(Q + \frac{\Delta_0}{Q}\right)} \tag{G.6}$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \tag{G.7}$$

If Q and/or S are zero, more simple formulae are deduced. Now

$$\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae \tag{G.8}$$

$$\Delta_1 = 2c^3 - 9bcd + 27b^2e + 27ad^2 - 72ace \tag{G.9}$$

and $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27\Delta$ where Δ is the aforementioned discriminant. For the cube root expression for "Q", any of the three cube roots in the complex plane can be used, although if one of them is real that is the natural and simplest one to choose. The mathematical expressions of these last four terms are very similar to those of their cubic analogues.

G.28 Espacios vectoriales

En Física, un vector es un segmento orientado con magnitud o módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. En Matemáticas, un vector es un objeto abstracto con ciertas propiedades axiomáticas, más concretamente, un elemento $v = \vec{v}$ de una estructura algebraica denominada espacio vectorial $V(+, \cdot, v)$. En el plano (real o complejo), un vector es una pareja de números reales, que con respecto a la base canónica $\vec{i}, \vec{j}$ se expresa de la forma

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \tag{G.10}$$

El módulo de este vector se define como

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{G.11}$$

La base canónica de vectores $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ es una base denominada ortonormal, porque $\vec{i} \perp \vec{j}$, con $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, siendo además dichos vectores de módulo unidad, es decir $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Una base es un conjunto de vectores cuya combinación lineal produce cualquier elemento del espacio vectorial, y además es el conjunto de dimensión máxima linealmente independiente. El producto escalar de dos vectores se define como la magnitude escalar, respecto de la base canónica:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \tag{G.12}$$

La definición independiente de la base del producto escalar lo asocia al módulo de los vectores y al ángulo que forman dichos vectores en el plano:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi \tag{G.13}$$

Los vectores satisfacen las siguientes propiedades axiomáticas respecto de la operación suma + de vectores:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{G.14}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \tag{G.15}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \tag{G.16}$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \tag{G.17}$$

Con respecto a la multiplicación por escalares, un espacio vectorial satisface los axiomas:

$$\lambda_1\lambda_2\vec{v} = \lambda_1(\lambda_2\vec{v}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{v} \tag{G.18}$$

$$1\vec{v} = \vec{v} \tag{G.19}$$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \tag{G.20}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v} \tag{G.21}$$

Dos vectores se suman geométricamente haciéndoles coincidir en origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que formarían los vectores. Es la denominada regla del paralelogramo. El módulo de un vector en el plano, respecto de la base canónica, no es más que una forma equivalente del teorema de Pitágoras.